Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского
Казань, 4 апреля 2021 г.
Вариант 4

5 класс

1. На доске написаны два натуральных числа. Одно из них увеличили в 9 раз, а другое уменьшили на 200, при этом сумма чисел не изменилась. *а*) Найдите хотя бы одну пару таких чисел. *б*) Чему равно наименьшее значение суммы таких чисел?

Ответ: *а*) *например,* 25 *и* 1*; б*) 26.

Решение. Пусть x и y — искомые числа, тогда $9x + (y - 200) = x + y$, то есть $8x = 200$, и значит, $x = 25$. Таким образом, условию задачи удовлетворяет любая пара чисел вида $(25; y)$, где y — произвольное натуральное число. Поскольку $y \geqslant 1$, наименьшее значение суммы $x + y = 25 + y$ равно 26. Это значение получается при $x = 25$, $y = 1$.

2. Вася подсчитал общее число своих оценок за год. (Среди оценок только двойки, тройки, четвёрки и пятёрки.) Ровно треть из них — тройки, ровно четверть — четвёрки, ровно пятая часть — пятёрки, причём троек у Васи на 14 больше, чем двоек. Сколько двоек у Васи?

Ответ: 26 *двоек.*

Решение. Количество пятёрок, четвёрок и троек — целое число, поэтому общее число оценок делится на 5, 4 и 3. Значит, общее число оценок делится на наименьшее общее кратное этих чисел, то есть на 60. Пусть число оценок $60 \cdot x$, тогда троек, четвёрок и пятерок у Васи — $20x$, $15x$ и $12x$ соответственно, и значит, число двоек равно $60x - 20x - 15x - 12x = 13x$. По условию $20x - 13x = 14$, $x = 2$, и поэтому двоек было $13x = 26$.

3. На острове живут 999 человек, каждый из которых всегда говорит правду или всегда лжёт. Каждый житель острова заявил, что если он покинет остров, то среди оставшихся жителей большинство будет лжецами. Сколько лжецов на острове?

Ответ: 500 *лжецов.*

Решение. Пусть x — количество лжецов, а y — количество жителей, говорящих правду, тогда $x + y = 999$. Из условия задачи ясно, что среди опрошенных не могут быть только лжецы. Тогда в соответствии с высказыванием жителя, который всегда говорит правду: $y - 1 < 499$, то есть $y < 500$, и значит, $x \geqslant 500$. По утверждению жителя-лжеца: $x - 1 \leqslant 499$, то есть $x \leqslant 500$. Из этих двух неравенств получаем $x = 500$, то есть на острове живут 500 лжецов.

4. У Тима и Алекса есть большой мешок с монетами и две копилки. В одну копилку помещается 175 монет, а в другую 200. Тим и Алекс по очереди бросают монеты в копилки. За один ход можно бросить сколько угодно монет, но только в одну копилку. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Тим ходит первым. У кого есть выигрышная стратегия?

Ответ: *у Тима.*

Решение. У первого игрока есть выигрышная стратегия. Первым ходом он бросает 25 монет в копилку, вмещающую 200 монет. Теперь во второй копилке столько же свободного места, сколько и в первой. После этого первый игрок отражает ходы второго: бросает столько же монет, сколько и второй игрок, но в другую копилку. После каждого хода первого игрока в обеих копилках остаётся один и тот же объём свободного места. Поэтому если второй игрок может сделать ход, то первый игрок всегда сможет сделать следующий ход.

5. На волшебной берёзе каждый день вырастают либо банан и две груши, либо банан и два яблока, либо банан, груша и яблоко. Через несколько дней на берёзе оказалось 300 груш, 400 яблок и несколько бананов. А сколько именно? (Укажите все возможные варианты.)

Ответ: 350.

Решение. Назовём груши и яблоки садовыми фруктами. По условию задачи каждый день вырастают два садовых фрукта (либо $2+0$, либо $0+2$, либо $1+1$). Всего на берёзе выросло $300+400=700$ садовых фруктов, и значит, всего прошло $700/2=350$ дней. Но каждый день появляется ровно один банан, поэтому бананов будет всего 350.

6 класс

1. При каком наименьшем натуральном n число $99n + 100$ делится на 101?

Ответ: $n = 50$.

Решение. Представим исходное число в виде $99n + 100 = 101(n + 1) - (2n + 1)$. Для делимости на 101 необходимо, чтобы число $2n + 1$ делилось на 101. Наименьшее натуральное n, при котором это условие выполняется, найдём из уравнения $2n + 1 = 101$, откуда $n = 50$.

2. На доске в строчку написаны 20 двоек. Поставив между некоторыми из них знак «+», Вася обнаружил, что сумма равна 400. Сколько плюсов поставил Вася? Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет.

Ответ: 9 *плюсов.*

Решение. Первый способ. Так как цифр двадцать, то слагаемых может быть от 1 до 20. Поделим сумму и все слагаемые на 2. Теперь слагаемые имеют вид 1, 11, 111 и так далее, а сумма равна 200. Для того, чтобы сумма оканчивалась цифрой 0, число слагаемых должно делиться на 10. Значит, слагаемых либо 10, либо 20. Если слагаемых 20, то все слагаемые состоят из одной цифры, и сумма получается слишком маленькая. Значит, слагаемых ровно 10, а плюсов между ними — 9.

Равенство с девятью плюсами: $222 + 22 \cdot 8 + 2 = 400$.

Второй способ. Можно явно найти, сколько и каких слагаемых в сумме. Сначала исключаем слагаемые из 4 и более цифр (они больше 400). Остаются слагаемые 222, 22 и 2. Если нет ни одного слагаемого 222, то максимальная сумма — $22 \cdot 10 = 550$. Если слагаемых 222 два или больше, то их сумма не меньше $222 + 222 = 444$. Значит, в сумме будет ровно одно слагаемое 222. Из остальных 17 двоек нужно составить сумму 178. Так как $44 > 4 + 4$, то чем больше будет слагаемых 22, тем больше будет сумма. Если использовать 8 слагаемых 22 и одно слагаемое 2, то сумма равна $8 \cdot 22 + 2 = 178$. Если же заменить одно или несколько слагаемых 22 на $2 + 2$, сумма станет меньше. Значит, единственный способ получить 400 — это использовать сумму $222 + 22 \cdot 8 + 2$. И в каком бы порядке ни стояли эти 10 слагаемых, плюсов всегда 9.

3. Прямоугольник 11×8 разрезали по клеточкам на 15 прямоугольников, у которых длины обеих сторон больше 1. Могло ли оказаться так, что среди этих прямоугольников нет ни одного квадрата? Приведите пример такого разрезания.

Ответ: *не могло.*

Решение. Предположим, что среди прямоугольников нет ни одного квадрата. Пусть a и b — стороны произвольного прямоугольника, причём $a > b$. Так как целое число b больше 1, то $b \geqslant 2$, и значит, $a \geqslant 3$. Следовательно, площадь каждого такого прямоугольника $a \times b$ не менее $2 \cdot 3 = 6$ клеток. Но тогда 15 прямоугольников должны занимать не менее $15 \cdot 6 = 90$ клеток, в то же время исходный прямоугольник 11×8 имеет всего 88 клеток.

На рисунке 1 приведён пример разрезания прямоугольника 11×8 на 15 прямоугольников.

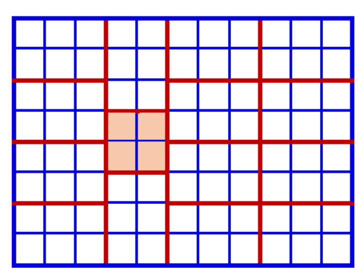

Рис. 1

4. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. В один день 16 жителей острова собрались вместе и высказали несколько утверждений. Сначала трое из них сказали: «Среди нас ровно 3 лжеца». Потом другие пятеро сказали: «Среди нас ровно 5 лжецов». Наконец, оставшиеся 8 жителей сказали: «Среди нас ровно 8 лжецов». Сколько было лжецов на самом деле? (Укажите все возможные варианты.)

Ответ: *лжецов было* 8 *или* 16.

Решение. Если бы среди первых трёх был хотя бы один рыцарь, то лжецов было бы ровно три, и среди следующих пяти хотя бы два сказали правду, то есть что лжецов трое. Поскольку этого не произошло, то *первые трое — лжецы.*

Если бы среди второй пятёрки был хотя бы один рыцарь, то лжецов было бы ровно пять, и среди следующих восьми хотя бы три сказали бы правду, то есть что лжецов пятеро. Поскольку этого не произошло, то *во второй пятёрке тоже все — лжецы.* Поскольку последние 8 жителей сказали одно и то же, то либо все они рыцари, либо все лжецы. Обе ситуации возможны.

5. У Пети есть 7 пакетов, в каждом различное число конфет. Петя знает, что конфеты из каждого пакета можно полностью разложить по остальным так, что число конфет во всех них станет равным. Каким может быть наименьшее число конфет в самом большом пакете?

Ответ: 21 *конфета.*

Решение. Будем перекладывать конфеты из первого пакета. Так как в остальных пакетах разное число конфет, то и добавить к ним нужно разное число конфет, то есть не менее, чем $0+1+2+3+4+5 = 15$. Итак, в самом маленьком пакете не менее 15 конфет, а значит, в самом большом не менее $15 + 6 = 21$ конфеты. Набор 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 удовлетворяет условию задачи.

Действительно, возьмём, например, пакет с 19 конфетами. Перекладываем из него 4 конфеты в первый пакет с 15 конфетами. Теперь в «раскладываемом» пакете 15 конфет, а в остальных — от 16 до 21. Докладываем в них 5, 4, 3, 2, 1, 0 конфет, теперь во всех пакетах поровну конфет.

Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского
Казань, 4 апреля 2021 г.
Вариант 4

7 класс

1. Придумайте *наибольшее* восьмизначное число, которое обладает следующими свойствами. Если вычеркнуть две его последние цифры, получится число, делящееся на 2, вычеркнув три его последние цифры, получится число, делящееся на 3, и так далее, наконец, вычеркнув семь его последних цифр, получится число, делящееся на 7.

Ответ: 78 567 899.

Решение. Вычеркнем из числа 7 последних цифр, останется только первая. Она делится на 7, значит, равна 7. Припишем к ней вторую цифру, получится число от 70 до 79. По условию оно должно делиться на 6, а таких чисел только два, 72 и 78. Поскольку искомое число наибольшее, возьмём 8. Припишем третью цифру, получится число от 780 до 789. Следующая цифра — 0 или 5, так как среди чисел от 780 до 789 только два числа — 780 и 785 — делятся на 5. Поскольку искомое число наибольшее, возьмём 5. Следующая цифра 6, так как первые четыре цифры искомого числа образуют число, кратное 4. Продолжая рассуждать таким же образом, приходим к искомому числу 78 567 899.

2. На конгрессе математиков собрались 100 человек, каждый из которых либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт. Каждый из 100 конгрессменов — арифметик, геометр или алгебраист, и никто не обладает несколькими специальностями. Каждому из них задали последовательно три вопроса: «Вы — алгебраист?», «Вы — арифметик?», «Вы — геометр?». Количество ответов «да», которые дали конгрессмены на каждый из этих вопросов — 50, 60 и 70, соответственно. Сколько лжецов в конгрессе?

Ответ: 80 *лжецов.*

Решение. Пусть x — число лжецов, а y — число рыцарей (то есть тех, кто всегда говорит правду), по условию $y = 100 - x$. При ответе на вопросы каждый лжец дважды сказал «да», а каждый рыцарь — только один раз, и значит, общее число утвердительных ответов равно $2x + y = 2x + (100 - x) = 100 + x$. С другой стороны, это число равно $50 + 60 + 70 = 180$. Отсюда $x = 80$, то есть в конгрессе 80 лжецов.

3. Три пирата играли на золотые монеты. Сначала первый проиграл $1/2$ своих денег и отдал их второму, потом второй проиграл $1/3$ своих монет и отдал их третьему и, наконец, третий проиграл $1/4$ своих денег и отдал их первому пирату. В результате у всех пиратов стало монет поровну. Сколько денег первоначально было у каждого пирата, если у третьего пирата вначале было не больше 14 монет? (Укажите все возможные варианты.)

Ответ: 8*,* 5*,* 5 *монет или* 16*,* 10*,* 10 *монет.*

Решение. Будем решать задачу «с конца». Пусть перед третьей игрой у третьего пирата было $4x$ монет, тогда после проигрыша первому монет у него осталось $4x - x = 3x$. Столько же осталось у других пиратов, и значит, общее число монет у пиратов было $3x + 3x + 3x = 9x$.

Поскольку у второго пирата осталось $3x$ монет, перед второй игрой у него было $4,5x$ монет. После того, как второй пират передал третьему $1/3$ своих монет, то есть $1,5x$ монет, у третьего стало $4x$ монет, и значит, вначале у него было $4x - 1,5x = 2,5x$ монет.

Выясним, сколько первоначально было монет у первого пирата. Как уже отмечалось, первый пират получил от третьего x монет, после чего монет у него стало $3x$, а значит, перед третьей игрой у первого пирата было $3x - x = 2x$ монет. Такое число монет было у первого пирата после первой игры, и значит, до неё монет было вдвое больше, то есть $4x$.

Итак, первоначальное число монет у пиратов $4x$, $2,5x$ и $2,5x$. По условию $2,5x \leqslant 14$, поэтому $x \leqslant 5$, и так как x — чётное, то $x = 2$ или $x = 4$. Отсюда получаются два возможных варианта.

4. Дано число 4567. Разрешается за один ход либо вычесть из числа сумму его цифр, либо переставить его цифры в любом порядке. (Например, из числа 13 можно за один ход получить либо число 9, либо число 31.) Какое наименьшее положительное число можно получить, действуя таким образом?

Ответ: 9.

Решение. Предположим, что из 4567 можно получить число $r < 9$. Ясно, что только перестановками цифр получить наименьшее из числа 4567 невозможно. Значит, на некотором шаге из имеющегося числа n придётся вычесть сумму его цифр. Полученное число $n - S(n)$, где $S(n)$ — сумма цифр числа n, по признаку делимости будет делиться на 9; сумма цифр числа $n - S(n)$ будет тоже делиться на 9. Дальнейшие операции перестановки цифр и вычитания суммы цифр, очевидно, не меняют остатка от деления на 9. Поэтому все последующие числа — и наименьшее тоже — будут также делиться на 9. Значит, $r \geqslant 9$.

Число 9 можно получить, например, так. Из числа 4567 перестановкой цифр сначала образуем 7645. Из числа 7645 дважды вычтем сумму его цифр: $7645 - 22 = 7623$, $7623 - 18 = 7605$, а затем переставим цифры в полученном числе: $0756 = 756$. Снова дважды вычтем сумму цифр: $756 - 18 = 738$, $738 - 18 = 720$, и, переставив цифры, приходим к числу $027 = 27$. Вычитая два раза сумму цифр, равную 9, приходим к числу 9.

5. Дан правильный треугольник ABC. На продолжении стороны AC за точку C взята точка D, а на продолжении стороны BC за точку C — точка E так, что $AD = CE$. Известно, что $DE = 5$. Найдите BD.

Ответ: $BD = 5$.

Решение. (Рис. 2.) Через точку D проведем параллельно AB прямую до пересечения с BC в точке F. Треугольник DCF — равносторонний, поскольку все его углы равны 60°. Так как $AD = CE$, то $AC + CD = CF + FE = CD + FE$, и значит, $AC = FE$. Треугольники BCD и EFD равны по двум сторонам $BC = AC = FE$, $CD = DF$, и углу между ними: $\angle BCD = \angle EFB = 120^\circ$. Отсюда $BD = DE$, и значит, $BD = 5$.

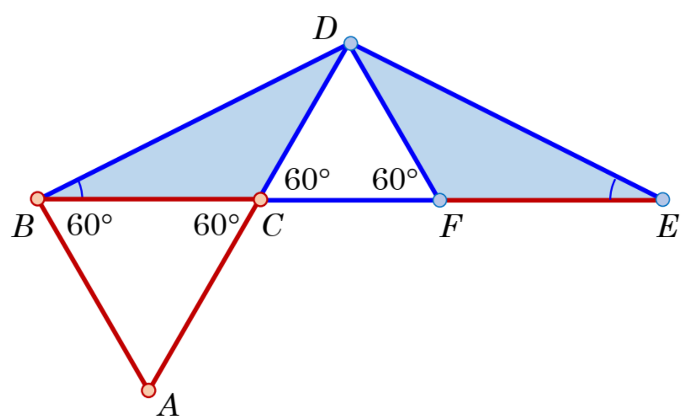

Рис. 2