«КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Высшая техническая школа

Кафедра математики

Г.Р.Антропова, С.Н.Матвеев, А.Н.Углов

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебно-методическое пособие

Набережные Челны
2024

УДК 514.12(076)

ББК 22.151.54я73

А72

Печатается по решению кафедры математики
Набережночелнинского института Казанского (Приволжского)
федерального университета
от 02 февраля 2024 г.

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики
Набережночелнинского института К(П)ФУ
Г.Н. Аглямзянова
кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики
Набережночелнинского института К(П)ФУ
Ж.И. Зайцева

А72 Антропова Г.Р. Аналитическая геометрия : учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов заочной формы обучения по инженерно-техническим направлениям подготовки бакалавров / Г.Р. Антропова, С.Н. Матвеев, А.Н. Углов. - Набережные Челны : Изд-во НЧИ К(П)ФУ, 2024. -74 с.

Учебно-методическое пособие составлено на основании требований Государственных образовательных стандартов высшего образования для студентов инженерно-технических направлений подготовки бакалавров. Разработано на кафедре «Математика» и предназначено для использования в учебном процессе студентами заочной формы обучения. Учебно-методическое пособие может быть использовано и для самостоятельной работы студентами очной и очно-заочной форм обучения.

УДК 514.12(076)
ББК 22.151.54я73

1 Цель и задачи дисциплины, её место в учебном процессе

Целью освоения дисциплины «Аналитическая геометрия» является - формирование системы базовых знаний по данной дисциплине, которая позволит будущим специалистам решать в своей повседневной деятельности актуальные задачи науки и практики, понимать написанные на современном научном уровне результаты других исследований и тем самым совершенствовать свои профессиональные навыки.

Основными задачами дисциплины являются:

- ознакомление студентов с ролью математики в современной жизни, с характерными чертами математического метода изучения реальных задач;
- обучение студентов теоретическим основам курса;
- привитие практических навыков математического моделирования реальных естественнонаучных и технических задач с использованием математического аппарата данного курса;
- развитие у студентов навыков творческого и логического мышления, повышение общего уровня математической культуры.

Для успешного освоения данной дисциплины необходимо знание элементарной математики в объёме курса средней школы. Дисциплина является предшествующей для освоения следующих за ней математических дисциплин и большинства естественнонаучных и технических дисциплин, использующих математический аппарат.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

- знать: теоретические основы теории определителей, матриц, систем линейных алгебраических уравнений, векторной алгебры и аналитической геометрии, комплексных чисел, многочленов и алгебраических уравнений;
- уметь: использовать математический аппарат в профессиональной деятельности; проводить расчёты на основе построенных математических моделей;
- владеть: методами теории определителей, матриц, систем линейных алгебраических уравнений, векторной алгебры и аналитической геометрии, комплексных чисел, многочленов и алгебраических уравнений; навыками применения современного математического инструментария для решения прикладных задач.

Изучение дисциплины предусматривает проведение лекционных, практических занятий и самостоятельную работу студентов. На лекциях излагается теоретический материал. Прослушав лекцию, студент должен ознакомиться с более подробным изложением материала в учебниках из списка рекомендуемой литературы. Практические занятия проводятся с целью закрепления теоретических основ курса, получения практических навыков решения математических задач. Контроль знаний осуществляется с помощью индивидуальных контрольных работ и зачёта (экзамена).

2 Содержание дисциплины

Раздел. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. МАТРИЦЫ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Тема. Определители.

Определители 2-ого, 3-его, порядков, порядка n. Свойства определителей. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по элементам строки или столбца. Вычисление определителей.

Тема. Матрицы.

Определение матрицы. Виды матриц. Действия над матрицами. Линейная зависимость и независимость строк матрицы. Базисный минор. Ранг матрицы. Обратная матрица, условие существования, основные способы её нахождения. Матричные уравнения, их решение.

Тема. Системы линейных алгебраических уравнений.

Системы линейных уравнений (СЛАУ). Основные понятия и определения. Матричная запись СЛАУ. Теорема Кронеккера-Капелли. Формулы Крамера. Решение СЛАУ методом обратной матрицы. Решение СЛАУ методом Гаусса. Базисные и свободные неизвестные. Общее решение СЛАУ. Однородные системы линейных уравнений, свойства их решений. Условия существования ненулевых решений однородных СЛАУ. Фундаментальная система решений. Структура общего решения СЛАУ.

Раздел. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Тема. Векторная алгебра

Геометрические векторы на прямой, плоскости и в пространстве, действия над ними. Проекция вектора. Прямоугольная декартова система координат. Радиус-вектор. Координаты вектора. Линейные операции над векторами в координатной форме. Длина и направляющие косинусы вектора. Расстояние между точками. Деление отрезка в данном отношении. Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов, их свойства, выражение в координатной форме, приложения для решения геометрических задач. Условия перпендикулярности, параллельности и компланарности векторов.

Тема. Прямые линии и плоскости.

Прямая на плоскости и в пространстве. Различные виды уравнений прямой на плоскости ив пространстве. Расстояние от точки до прямой на плоскости. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Плоскость. Различные виды уравнений плоскости. Расстояние от точки до плоскости. Взаимное расположение прямой и плоскости.

Тема. Кривые и поверхности второго порядка.

Кривые 2-ого порядка на плоскости: окружность, эллипс, гипербола, парабола, их определения, канонические уравнения, форма. Приведение общего уравнения кривой 2-ого порядка к каноническому виду и построение**.** Поверхности 2-ого порядка, их канонические уравнения и форма.

Раздел. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. МНОГОЧЛЕНЫ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Тема. Комплексные числа.

Комплексные числа, их геометрическое изображение на плоскости. Различные формы записи комплексных чисел. Действия над комплексными числами. Нахождение корней квадратного уравнения на множестве комплексных чисел.

Тема. Многочлены и алгебраические уравнения

Многочлены и алгебраические уравнения. Основная теорема алгебры. Теорема Безу. Разложение многочленов на линейные и квадратичные множители. Разложение рациональных дробей на простые дроби.

3 Рекомендуемая литература

Основная литература:

1. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. - 18-е изд., перераб. - Санкт-Петербург: Лань, 2021. - 448 с. - ISBN 978-5-8114-4916-3. // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/152643
2. Геворкян П.С. Высшая математика. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / П.С Геворкян. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2014. - 208 с. - ISBN 978-5-9221-1582-7. - URL: http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922115827.html.
3. Задачник по высшей математике для вузов : учебное пособие / В. Н. Земсков [и др.] ; под ред. А. С. Поспелова. - 3-е изд., стер .- Екатеринбург : Изд-во АТП, 2015 .- 512 с : ил. - (Учебник для вузов. Специальная литература) .- Прил.: с. 498-509 .- В пер .- ISBN 978-5-8114-1024-9.
4. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. - 10-е изд., испр. - Москва : Айрис-пресс, 2011. - 608 с : граф. - (Высшее образование). - Прил.: с. 599-603. - В пер. - ISBN 978-5-8112-4351-8.
5. Шипачёв В.С. Высшая математика [Электронный ресурс]: учебник / В.С. Шипачёв. – Москва: ИНФРА-М, 2018. -479 с. – (Высшее образование). – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=945790.

Дополнительная литература:

1. Антонов В.И., Копелевич Ф.И. Элементарная математика для первокурсника: Учебное пособие. –СПб.:Изд-во «Лань», 2013. -112с. ISBN: 978-5-8114-1413-0.
2. Беклемишева Л.А., Беклемишев Д.В., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: Учебное пособие. –СПб.: Изд-во «Лань», 2008. -496с. ISBN 978-5-8114-0861-0.
3. Беклемишев Д.В. Решение задач из курса аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемишев - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2014. - 192 с. - ISBN 978-5-9221-1480-6. - URL: http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922114806.html.-
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х частях. Учеб. пособие для вузов. Часть I: - М: Высшая школа, 2008. -304с.
5. Сборник задач по математике для вузов. Учеб. пособие для студентов вузов. /Абрамова В.В., Бикчурина Л.Ж., Валеева М.И. и др.; под ред. Котляра Л.М., Углова А.Н.; 5-е изд., перераб. и доп. -Наб. Челны: ИНЭКА, 2006. – 472с. (Гриф Министерства образования и науки РФ)

4 Методические указания по изучению дисциплины и выполнению индивидуальной контрольной работы

В процессе изучения данной дисциплины студенты должны сначала изучить теоретический материал и выработать навыки решения типовых задач, используя рекомендованную литературу, а затем выполнить индивидуальную контрольную работу (задания для контрольной работы приведены в разделе **5.1**).

При выполнении контрольной работы необходимо придерживаться указанных ниже правил:

1. Контрольная работа должна быть выполнена студентом в отдельной ученической тетради с полями не менее 3 см для замечаний преподавателя.

2. На обложке тетради указываются: название дисциплины; номер варианта и номера решаемых задач; Ф.И.О. студента, выполнившего работу, его номер группы и номер зачетной книжки; Ф.И.О. преподавателя, проверяющего работу (образец оформления обложки приведён в *Приложении 6.4*).

3. Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы.

4. Номера решаемых задач выбираются из *ТАБЛИЦЫ НОМЕРОВ ВЫПОЛНЯЕМЫХ ЗАДАНИЙ (Приложение 6.5).*

5. Условия задач переписываются полностью, без сокращения слов, после чего приводится их подробное решение (чертежи можно выполнять аккуратно от руки). В конце решения приводится ответ.
6. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по порядку номеров.
7. Если в работе имеются ошибки, студент должен выполнить все требования преподавателя, изложенные в рецензии, и сдать работу с исправлениями на повторную проверку.
8. Никакие исправления в тексте уже проверенной работы не допускаются, все исправления записываются после рецензии преподавателя с указанием номера задачи, к которой относятся дополнения и исправления.
9. Работа может быть выполнена заново в случае выявления серьёзных замечаний и ошибок.
10. В конце тетради рекомендуется оставлять несколько чистых страниц для дополнений и исправлений.

После проверки контрольная работа предъявляется к защите. На защите студент должен показать свое умение решать задачи, подобные тем, что имеются в его контрольной работе.

Образец решения типового варианта контрольной работы приведён в *Приложении 6.1*.

5 Материалы для контроля знаний студентов

Итоговой формой контроля знаний является зачёт (экзамен) в конце семестра обучения. На зачёте (экзамене) студент должен показать знание теоретических основ дисциплины в объёме вопросов, приведённых в разделе **5.2** и умение решать задачи, подобные тем, что имеются в его контрольной работе.

5.1 Задания для контрольной работы

Раздел: Определители. Матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений.

1-10. Вычислить определитель третьего порядка:
а) по правилу треугольников;
б) разложением по какой-нибудь строке или столбцу.

1. $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ -2 & 6 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$. **3.** $\begin{vmatrix} 6 & 10 & 6 \\ 8 & 8 & 5 \\ 5 & 9 & 5 \end{vmatrix}$. **4.** $\begin{vmatrix} 7 & 9 & 7 \\ 6 & 8 & 6 \\ -7 & 9 & 7 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 6 & 8 & -9 \\ 4 & 6 & -6 \\ -2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$. **6.** $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -3 & 7 & -1 \\ 5 & -9 & 2 \end{vmatrix}$. **7.** $\begin{vmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 8 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$. **8.** $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 5 \\ 4 & 8 & 5 \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ -3 & 4 & -5 \\ 8 & -8 & 5 \end{vmatrix}$. **10.** $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

11 – 20. Вычислить определитель четвёртого порядка:
а) непосредственным разложением по $i-ой$ строке ($j-ому$ столбцу)**;**
б) методом понижения порядка определителя на единицу.

11. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -6 \end{vmatrix}$ $(i=1)$

12. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 3 \end{vmatrix}$ $(j=4)$

13. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ $(i=2)$

14. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & 0 \end{vmatrix}$ $(j=1)$

15. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ $(i=3)$

16. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ $(j=2)$

17. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ $(i=1)$

18. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $(j=1)$

19. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ $(i=4)$

$$\textbf{20.}\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & -4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(j = 2)$$

21 – 30. Найти матрицу C, если $C = A^T \cdot B + 2A$.

21. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **22.** $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

23. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **24.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

25. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **26.** $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

27. $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ **28.** $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

29. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **30.** $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

31 – 40. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Требуется:

а) найти решение системы методом Крамера**;**

б) записать систему в матричном виде и найти её решение методом обратной матрицы;

в) найти решение системы методом Гаусса.

31. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 5x + 8y - z = 7 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \end{cases}$ **32.** $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$

33. $\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 2x+3y+z=1 \\ 2x+y+3z=11 \end{cases}$

34. $\begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 2x-y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-2 \end{cases}$

35. $\begin{cases} 2x-y-z=4 \\ 3x+4y-2z=11 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$

36. $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+y+z=6 \\ 3x-y+z=4 \end{cases}$

37. $\begin{cases} x+5y+z=-7 \\ 2x-y-z=0 \\ x-2y-z=2 \end{cases}$

38. $\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 2x+3y-4z=16 \\ 3x-2y-5z=12 \end{cases}$

39. $\begin{cases} x+5y-z=7 \\ 2x-y-z=4 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$

40. $\begin{cases} 2x-y-2z=1 \\ 3x+2y+z=1 \\ 2x+3y+3z=0 \end{cases}$

41–50. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

41. $\begin{cases} 3x_1-5x_2-x_3-2x_4=0 \\ 8x_1-6x_2+3x_3-7x_4=0 \\ 2x_1+4x_2+5x_3-3x_4=0 \end{cases}$

42. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3-4x_4=1 \\ 3x_1+7x_2-2x_3-x_4=4 \\ 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=3 \end{cases}$

43. $\begin{cases} x_1+4x_2-3x_3-9x_4=0 \\ 3x_2-7x_3-10x_4=0 \\ 2x_1+5x_2+x_3-8x_4=0 \end{cases}$

44. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3-2x_4=1 \\ 2x_1+7x_2-4x_3-3x_4=3 \\ x_1+4x_2-3x_3-x_4=2 \end{cases}$

45. $\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3-x_4=0 \\ 5x_1-7x_2-2x_3-5x_4=0 \\ 3x_1-2x_2+x_3-3x_4=0 \end{cases}$

46. $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3-3x_4=4 \\ 2x_1+5x_2-x_3-4x_4=9 \\ x_1+3x_2+x_3-x_4=5 \end{cases}$

47. $\begin{cases} 2x_1-2x_2+3x_3+x_4=0 \\ 5x_1-2x_2+4x_3-4x_4=0 \\ x_1+2x_2-2x_3-6x_4=0 \end{cases}$

48. $\begin{cases} x_1-3x_2+x_3+2x_4=4 \\ 2x_1-5x_2+4x_3+3x_4=7 \\ x_1-2x_2+3x_3+x_4=3 \end{cases}$

49. $\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3-3x_4=0 \\ x_1+3x_2-2x_3+2x_4=0 \\ 5x_1+7x_2-3x_3+x_4=0 \end{cases}$

50. $\begin{cases} x_1+4x_2-2x_3-3x_4=2 \\ 2x_1+9x_2-x_3-4x_4=5 \\ x_1+5x_2+x_3-x_4=3 \end{cases}$

Раздел: Векторная алгебра. Аналитическая геометрия.

51 – 60. Даны векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$. Показать, что векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\bar{d}$ в этом базисе.

51. $\bar{a} = (1,-1,-1)$, $\bar{b} = (0,1,1)$, $\bar{c} = (-1,0,1)$, $\bar{d} = (-3,3,5)$.

52. $\bar{a} = (1,1,0)$, $\bar{b} = (-1,0,-1)$, $\bar{c} = (1,1,1)$, $\bar{d} = (0,2,-1)$.

53. $\bar{a} = (2,-3,1)$, $\bar{b} = (3,-3,1)$, $\bar{c} = (2,-1,2)$, $\bar{d} = (6,-8,1)$.

54. $\bar{a} = (1,1,0)$, $\bar{b} = (1,0,1)$, $\bar{c} = (1,1,1)$, $\bar{d} = (2,3,1)$.

55. $\bar{a} = (2,1,3)$, $\bar{b} = (4,2,1)$, $\bar{c} = (3,4,5)$, $\bar{d} = (1,3,2)$.

56. $\bar{a} = (2,3,1)$, $\bar{b} = (-1,2,-2)$, $\bar{c} = (1,2,1)$, $\bar{d} = (2,-2,1)$.

57. $\bar{a} = (1,2,1)$, $\bar{b} = (2,-1,3)$, $\bar{c} = (3,-1,4)$, $\bar{d} = (5,1,6)$.

58. $\bar{a} = (-1,0,2)$, $\bar{b} = (-2,2,1)$, $\bar{c} = (1,-3,2)$, $\bar{d} = (1,4,-6)$.

59. $\bar{a} = (1,-1,0)$, $\bar{b} = (0,1,-1)$, $\bar{c} = (0,0,1)$, $\bar{d} = (2,-1,0)$.

60. $\bar{a} = (3,3,-1)$, $\bar{b} = (3,1,0)$, $\bar{c} = (-1,2,1)$, $\bar{d} = (-1,0,2)$.

61 – 70. Даны векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Требуется:

а) найти векторы $\bar{m} = \bar{a} + 2\bar{b}$ и $\bar{n} = 2\bar{b} - \bar{c}$ **;**

б) вычислить скалярное произведение $\bar{m} \cdot \bar{n}$;

в) найти проекцию вектора $\bar{m}$ на направление вектора $\bar{n}$;

г) найти векторное произведение $\bar{m} \times \bar{n}$ и его модуль $|\bar{m} \times \bar{n}|$.

61. $\bar{a} = (4,5,2)$, $\bar{b} = (3,0,1)$, $\bar{c} = (-1,4,2)$.

62. $\bar{a} = (3,-5,2)$, $\bar{b} = (4,5,1)$, $\bar{c} = (-3,0,-4)$.

63. $\bar{a} = (-2,3,5)$, $\bar{b} = (1,-3,4)$, $\bar{c} = (7,8,-1)$.

64. $\bar{a} = (1,3,5)$, $\bar{b} = (1,2,1)$, $\bar{c} = (5,7,3)$.

65. $\bar{a} = (2,4,-6)$, $\bar{b} = (1,3,5)$, $\bar{c} = (0,3,7)$.

66. $\bar{a} = (4,3,-1)$, $\bar{b} = (5,0,4)$, $\bar{c} = (2,1,2)$.

67. $\bar{a} = (3,4,-3)$, $\bar{b} = (-2,2,0)$, $\bar{c} = (2,1,-4)$.

68. $\bar{a} = (-2,1,7)$, $\bar{b} = (3,3,-8)$, $\bar{c} = (5,4,-1)$.

69. $\bar{a} = (1,0,5)$, $\bar{b} = (3,2,7)$, $\bar{c} = (5,0,9)$.

70. $\bar{a} = (2,1,0)$, $\bar{b} = (4,3,-3)$, $\bar{c} = (6,5,-7)$.

71-80. Даны вершины треугольника ABC. Требуется найти:

а) длину стороны AB; **б)** уравнение стороны AB;

в) уравнение медианы BE, проведённой из вершины B;

г) уравнение высоты CD, проведённой из вершины C;

д) длину h высоты CD; **е)** площадь S треугольника ABC. Сделать чертёж.

71. $A(4,1), B(0,-2), C(-5,10)$. **72.** $A(-7,3), B(5,-2), C(8,2)$

73. $A(5,-1), B(1,-4), C(-4,8)$ **74.** $A(6,0), B(2,-3), C(-3,9)$

75. $A(-9,2), B(3,-3), C(6,1)$ **76.** $A(7,-4), B(3,-7), C(-2,5)$

77. $A(-14,6), B(-2,1), C(1,5)$ **78.** $A(-8,4), B(4,-1), C(7,3)$

79. $A(3,-3), B(-1,-6), C(-6,6)$ **80.** $A(-6,5), B(6,0), C(9,4)$

81 – 90. Даны вершины пирамиды $ABCD$. Требуется найти:

а) длины ребер AB и AC; **б)** угол между ребрами AB и AC;

в) площадь грани ABC; **г)** объем пирамиды $ABCD$;

д) уравнение плоскости грани ABC; **е)** длину h высоты DO пирамиды.

81. $A(-1,2,1)$, $B(-2,2,5)$, $C(-3,3,1)$, $D(-1,4,3)$.

82. $A(1,1,2)$, $B(0,1,6)$, $C(-1,2,2)$, $D(1,3,4)$.

83. $A(-2,1,-1)$, $B(-3,1,3)$, $C(-4,2,-1)$, $D(-2,3,1)$.

84. $A(-1,-2,1)$, $B(-2,-2,5)$, $C(-3,-1,1)$, $D(-1,0,3)$.

85. $A(2,-1,1)$, $B(1,-1,5)$, $C(0,0,1)$, $D(2,1,3)$.

86. $A(-1,1,-2)$, $B(-2,1,2)$, $C(-3,2,-2)$, $D(-1,3,0)$.

87. $A(1,2,1)$, $B(0,2,5)$, $C(-1,3,1)$, $D(1,4,3)$.

88. $A(1,3,6)$, $B(2,2,1)$, $C(-1,0,1)$, $D(-4,6,-3)$.

89. $A(2,0,3)$, $B(1,0,7)$, $C(0,1,3)$, $D(2,2,5)$.

90. $A(2,3,2)$, $B(1,3,6)$, $C(0,4,2)$, $D(2,5,4)$.

91–100. Установить, какую невырожденную кривую определяет алгебраическое уравнение второго порядка, построить её.

91. $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$ **92.** $x^2+y^2-4x+6y-3=0$

93. $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$ **94.** $x^2-4x-y-5=0$

95. $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$ **96.** $x^2+y^2-4y+3=0$

97. $16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$ **98.** $x+y^2-2y+3=0$

99. $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$ **100.** $x^2+y^2-6x+5=0$

Раздел: Комплексные числа. Многочлены и алгебраические уравнения.

101-110. Даны комплексные числа z_1, z_2, z_3 и алгебраическое уравнение $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0$. Требуется:

а) вычислить $z_1 + z_2$, $z_1 - \overline{z_2}$, $z_1 z_2$, $\overline{(z_1/z_2)}$;

б) представить комплексное число z_3 в тригонометрической форме, вычислить $(z_3)^6$ и результат представить в алгебраической форме;

в) найти все корни алгебраического уравнения на множестве комплексных чисел.

101. $z_1 = 5 + 10i$, $z_2 = 2 - i$, $z_3 = -1 + i$, $z^2 + 2z + 5 = 0$.

102. $z_1 = 1 - 5i$, $z_2 = 2 + 3i$, $z_3 = \sqrt{3} + i$, $z^3 - 8 = 0$.

103. $z_1 = -8 + 4i$, $z_2 = 3 + i$, $z_3 = 1 + i$, $4z^2 - 2z + 1 = 0$.

104. $z_1 = 4 - 16i$, $z_2 = 5 - 3i$, $z_3 = -\sqrt{3} + i$, $z^3 + 8 = 0$.

105. $z_1 = 2 - 4i$, $z_2 = 3 - i$, $z_3 = -1 + \sqrt{3}\, i$, $z^2 - 2z + 2 = 0$.

106. $z_1 = 15 + 10i$, $z_2 = 2 - 3i$, $z_3 = -1 - i$, $z^2 + 4z + 13 = 0$.

107. $z_1 = 18 + 12i$, $z_2 = 5 - i$, $z_3 = \sqrt{3} - i$, $z^3 + 9z = 0$.

108. $z_1 = -5 + i$, $z_2 = 3 + 2i$, $z_3 = 1 - i$, $z^3 + 1 = 0$.

109. $z_1 = 6 - 3i$, $z_2 = 1 + 2i$, $z_3 = 1 + \sqrt{3}\, i$, $z^2 + 6z + 13 = 0$.

110. $z_1 = 6 + 2i$, $z_2 = -1 + 3i$, $z_3 = 1 - \sqrt{3}\, i$, $z^3 - 1 = 0$.

111-120. Найти представление правильной дроби в виде суммы простых дробей:

111. а) $\dfrac{x+1}{x^2 - x}$; **б)** $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)^2}$.

112. а) $\dfrac{x+3}{(x-1)(x-2)(x-3)}$; **б)** $\dfrac{1}{(x+1)(x^2 + x + 1)}$.

113. а) $\dfrac{x}{(x-1)(x+1)(x+2)}$; **б)** $\dfrac{1}{x(x+2)^2}$.

114. а) $\dfrac{x-3}{x^3 - x}$; **б)** $\dfrac{1}{(x-1)(x^2 + 9)}$.

115. а) $\dfrac{x+5}{x(x+4)(x-2)}$; **б)** $\dfrac{1}{(x+2)(x-2)^2}$.

116. а) $\dfrac{x+1}{x^2+5x}$; **б)** $\dfrac{1}{(x+2)(x^2+x+1)}$.

117. а) $\dfrac{x+4}{(x-4)(x-2)x}$; **б)** $\dfrac{1}{(x-1)(x+1)^2}$.

118. а) $\dfrac{x+2}{x(x-1)(x-2)}$; **б)** $\dfrac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}$.

119. а) $\dfrac{x-1}{x^2+x}$; **б)** $\dfrac{1}{(x+3)x^2}$.

120. а) $\dfrac{x+2}{x(x-3)(x+1)}$; **б)** $\dfrac{1}{(x+2)(x^2+4)}$.

5.2 Вопросы к зачёту (экзамену).

Раздел: Определители. Матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений.

1. Понятие матрицы. Частные виды матриц (квадратная, треугольная, диагональная, нулевая, единичная).
2. Элементарные преобразования матриц. Понятие эквивалентности и равенства матриц.
3. Действия над матрицами (сложение, вычитание, умножение матрицы на число, умножение матрицы на матрицу) и их свойства. Линейная комбинация матриц.
4. Определители 2-ого и 3-егопорядка, их вычисление. Основные свойства определителей.
5. Понятие определителя n-ого порядка. Минор и алгебраическое дополнение элемента определителя. Теорема о разложении определителя по элементам строки или столбца.
6. Понятие системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Частные виды СЛАУ (квадратная, однородная, неоднородная). Матрица, расширенная матрица, определитель СЛАУ.
7. Решение, множество решений СЛАУ. Совместность, несовместность, определённость, неопределённость, эквивалентность СЛАУ. Элементарные преобразования СЛАУ, их основное свойство.

8. Теорема Крамера (о разрешимости СЛАУ порядка n). Формулы Крамера для решения СЛАУ, условия их применимости.
9. Метод Гаусса решения СЛАУ, условия его применимости. Базисные и свободные переменные. Нахождение общего решения СЛАУ. Частные решения СЛАУ.
10. Понятие обратной матрицы. Вырожденные и невырожденные матрицы. Теорема о существовании обратной матрицы. Основные способы нахождения обратной матрицы.
11. Матричные уравнения и их решение. Матричная форма записи СЛАУ. Матричный способ (метод обратной матрицы) решения СЛАУ и условия его применимости.
12. Однородные СЛАУ, условия существования их ненулевых решений. Свойства частных решений однородных СЛАУ.
13. Понятие линейной независимости и зависимости частных решений однородной СЛАУ. Фундаментальная система решений (ФСР), её нахождение. Представление общего решения однородной СЛАУ через ФСР.
14. Минор k-ого порядка, базисный минор, ранг матрицы. Вычисление ранга матрицы. Критерий совместности СЛАУ (теорема Кронеккера-Капелли).

Раздел. Векторная алгебра и аналитическая геометрия.

15. Понятие геометрического вектора. Равенство векторов. Противоположный вектор. Орт вектора. Проекция вектора на вектор.
16. Графические правила сложения, вычитания, умножения вектора на число.
17. Коллинеарность векторов. Базис и канонический базис плоскости R^2. Координаты вектора в R^2.
18. Компланарность векторов. Базис и канонический базис пространства R^3. Координаты вектора в R^3.
19. Понятие декартовой системы координат в R^3. Радиус-вектор, координаты точки.
20. Вычисление длины и направляющих косинусов вектора; координат вектора, заданного двумя точками; расстояния между точками.
21. Преобразования прямоугольных декартовых систем координат на плоскости (параллельный перенос, поворот, зеркальное отражение). Связь между собой координат произвольной точки в старой и новой системах координат.

22. Скалярное произведение векторов и его свойства. Выражение скалярного произведения через координаты векторов. Вычисление угла между векторами. Условие ортогональности векторов.
23. Векторное произведение векторов, его геометрический смысл и свойства. Выражение векторного произведения через координаты векторов. Условие коллинеарности векторов.
24. Смешанное произведение векторов, его геометрический смысл и свойства. Выражение смешанного произведения через координаты векторов. Условие компланарности векторов.
25. Понятие линии на плоскости. Общее уравнение линии и его нахождение по известному геометрическому свойству её точек. Окружность и её уравнение.
26. Прямая линия на плоскости и её общее уравнение. Нормальный и направляющий векторы прямой. Нахождение уравнения прямой, проходящей через точку перпендикулярно вектору. Построение прямой.
27. Каноническое уравнение прямой; уравнение прямой, проходящей через две точки; уравнение прямой с угловым коэффициентом; уравнение прямой в отрезках.
28. Расстояние от точки до прямой на плоскости. Угол между прямыми на плоскости и его вычисление, условия $\perp$ и $||$ прямых.
29. Понятие поверхности. Общее уравнение поверхности, его нахождение по известному геометрическому свойству её точек. Сфера и её уравнение.
30. Плоскость и её общее уравнение. Нормальный вектор плоскости и его нахождение. Уравнение плоскости, проходящей через точку перпендикулярно вектору. Построение плоскости.
31. Уравнение плоскости, проходящей через три точки; уравнение плоскости в отрезках.
32. Расстояние от точки до плоскости. Угол между плоскостями и его вычисление, условия $\perp$ и $||$ плоскостей.
33. Понятие линии в пространстве и её общее уравнение. Понятие прямой линии в пространстве и её общее уравнение. Направляющий вектор прямой и его нахождение.
34. Каноническое уравнение прямой в пространстве; уравнение прямой, проходящей через две точки; параметрические уравнения прямой. Приведение общего уравнения к каноническому.
35. Угол между двумя прямыми в пространстве, между прямой и плоскостью и их вычисление, условия $\perp$ и $||$ двух прямых, прямой и плоскости. Точка пересечения прямой и плоскости.
36. Кривая 2-ого порядка на плоскости и её общее уравнение. Классификация кривых 2-ого порядка. Приведение уравнения кривых к каноническому виду.

37. Эллипс. Каноническое уравнение эллипса. Построение эллипса. Вершины, полуоси, фокусы, эксцентриситет, общее геометрическое свойство точек эллипса.
38. Гипербола. Каноническое уравнение гиперболы. Построение гиперболы. Вершины, полуоси, фокусы, эксцентриситет, асимптоты, общее геометрическое свойство точек гиперболы.
39. Парабола. Каноническое уравнение параболы. Построение параболы. Вершина, фокус, эксцентриситет, директриса, общее геометрическое свойство точек параболы.
40. Сфера. Эллипсоид. Канонические уравнения и графики.
41. Гиперболоиды (однополостной и двуполостной). Канонические уравнения и графики.
42. Параболоиды (эллиптический и гиперболический). Канонические уравнения и графики.
43. Цилиндры (эллиптический, гиперболический, параболический), их уравнения и графики.

Раздел. Комплексные числа. Многочлены и алгебраические уравнения.

44. Комплексное число, его изображение на плоскости. Комплексно-сопряжённое число. Модуль и аргумент комплексного числа.
45. Различные формы записи комплексного числа (алгебраическая, тригонометрическая, показательная). Формула Эйлера.
46. Действия над комплексными числами (сложение, вычитание, умножение, деление) в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.
47. Возведение комплексного числа в степень. Формула Муавра. Извлечение корня из комплексного числа.
48. Нахождение корней квадратного уравнения на множестве комплексных чисел.
49. Понятие многочлена, алгебраического уравнения. Основная теорема алгебры и теорема Безу. Разложение многочлена на множители.
50. Рациональная дробь. Простые дроби. Разложение рациональной дроби на простые дроби.

6 Приложения

6.1 Образец решения контрольных задач типового варианта.

Раздел: Определители. Матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений.

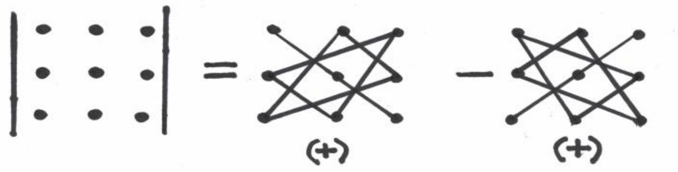
1-10. Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ -2 & 6 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix}$:

а) по правилу треугольников;

б) разложением по какой-нибудь строке или столбцу.

Решение.

а) Вычисляем определитель по правилу треугольников, используя схему



$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ -2 & 6 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 6\cdot 3 + 5\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot(-2)\cdot 7 - \big(1\cdot 6\cdot 2 + (-1)\cdot 2\cdot 7 + 5\cdot(-2)\cdot 3\big) =$$

$$= -18 + 20 - 14 - \big(12 - 14 - 30\big) = 20.$$

б) Вычисляем определитель разложением по первой строке:

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ -2 & 6 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot A_{11} + 5\cdot A_{12} + 1\cdot A_{13}.$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 6\cdot 3 - 2\cdot 7 = 18 - 14 = 4.$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot M_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -((-2)\cdot 3 - 2\cdot 2) = -(-6-4) = 10.$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\cdot M_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 7 - 6\cdot 2 = -14 - 12 = -26.$$

Тогда $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ -2 & 6 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 4 + 5\cdot 10 + 1\cdot(-26) = -4 + 50 - 26 = 20$.

Ответ: $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ -2 & 6 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 20$.

11 – 20. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ $\quad (i = 1,\ j = 2)$

а) непосредственным разложением по $i - ой$ строке ($j - ому$ столбцу);

б) методом понижения порядка определителя на единицу.

Решение. а) Вычисляем определитель разложением по элементам первой строки: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{11} + 2\cdot A_{12} + 0\cdot A_{13} + 3\cdot A_{14}$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0\cdot(-1)\cdot 4 + 3\cdot 2\cdot 2 + (-2)\cdot 1\cdot(-3) -$$

$$-(-2)\cdot(-1)\cdot 2 - 3\cdot 1\cdot 4 - 0\cdot 2\cdot(-3) = 2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -(2\cdot(-1)\cdot 4 + 3\cdot 2\cdot 3 + (-2)\cdot 0\cdot(-3) -$$

$$-(-2)\cdot(-1)\cdot 3 - 3\cdot 0\cdot 4 - 2\cdot 2\cdot(-3)) = -16$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -(2\cdot 1\cdot(-3) + 3\cdot 0\cdot 2 + 0\cdot(-1)\cdot 3 -$$

$$-3\cdot 1\cdot 3 - 0\cdot 0\cdot(-3) - 2\cdot(-1)\cdot 2) = 11$$

Тогда $\Delta = 1\cdot A_{11} + 2\cdot A_{12} + 0\cdot A_{13} + 3\cdot A_{14} = 1\cdot 2 + 2\cdot(-16) + 3\cdot 11 = 3$.

Вычисляем определитель непосредственным разложением по элементам второго столбца: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{32} + 2 \cdot A_{42}$.

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -(2 \cdot (-1) \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 \cdot (-3) -$$

$$-(-2) \cdot (-1) \cdot 3 - 3 \cdot 0 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \cdot (-3)) = -16$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 3 \cdot 4 + 0 \cdot (-2) \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot (-3) -$$

$$-3 \cdot 3 \cdot 3 - 0 \cdot 2 \cdot 4 - 1 \cdot (-2) \cdot (-3)) = 39$$

$$A_{42} = (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot (-1) -$$

$$-3 \cdot 3 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-2) \cdot (-1) = -2$$

Тогда $\Delta = 2 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{32} + 2 \cdot A_{42} = 2 \cdot (-16) + 1 \cdot 39 + 2 \cdot (-2) = 3$.

б) Вычисляем определитель методом понижения порядка определителя на единицу.

Согласно данному методу:

1) сначала преобразуем исходный определитель, используя свойства определителя, к определителю, у которого в каком-нибудь столбце (или строке) все элементы, за исключением одного, будут равны нулю (в качестве такого столбца (строки) желательно выбрать столбец (строку), в котором присутствует ненулевой элемент (± 1) и нулевые элементы);
2) затем применим формулу разложения определителя по столбцу (строке) с одним ненулевым элементом.

Сначала преобразуем определитель по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 2стр + 1стр \cdot (-2) \\ 4стр + 1стр \cdot (-3) \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & -3 & -5 \end{vmatrix}.$$

Теперь разложим полученный определитель по 1-ому столбцу и вычислим:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{41} = A_{11}.$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} -4 & 3 & -8 \\ 1 & -1 & 2 \\ -4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = (-4) \cdot (-1) \cdot (-5) + 3 \cdot 2 \cdot (-4) +$$

$$+(-8) \cdot 1 \cdot (-3) - \big((-8) \cdot (-1) \cdot (-4) + (-4) \cdot 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 \cdot (-5)\big) =$$

$$= -20 - 24 + 24 - \big(-32 + 24 - 15\big) = 3.$$

Тогда $\Delta = A_{11} = 3$.

Ответ: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 3$.

21-30. Найти матрицу $C = B \cdot A^T + 3A$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение:

1) Транспонируем матрицу A**:** $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

2) Вычисляем произведение матриц $B \cdot A^T$:

$$B \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3\cdot(-1) & 1\cdot 0 + 2\cdot 3 + 3\cdot(-1) & 1\cdot 0 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 3 \\ \hline 2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) & 2\cdot 0 + 1\cdot 3 + 2\cdot(-1) & 2\cdot 0 + 1\cdot(-1) + 2\cdot 3 \\ \hline 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3\cdot(-1) & 1\cdot 0 + 2\cdot 3 + 3\cdot(-1) & 1\cdot 0 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 3 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

3) Находим матрицу $3A$:

$$3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 1 & 3\cdot(-1) \\ 3\cdot 0 & 3\cdot 3 & 3\cdot(-1) \\ 3\cdot 0 & 3\cdot(-3) & 3\cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & 9 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

4) Находим матрицу C: $C = B \cdot A^T + 3A =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & 9 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 3+3 & 7+(-3) \\ 3+0 & 1+9 & 5+(-3) \\ 1+0 & 3+(-3) & 7+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 2 \\ 1 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $C = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 2 \\ 1 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$

31 – 40. Дана система уравнений**:** $\begin{cases} 4x + y - 4z = -6 \\ 2x - 4y + 6z = 12 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$. Требуется**:**

а) найти решение системы методом Крамера**; б)** записать систему в матричном виде и найти её решение методом обратной матрицы**; в)** найти решение системы методом Гаусса.

Решение.

А) Метод Крамера.

1а) Вычисляем определитель системы и проверяем, что он отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4\cdot(-4)\cdot(-1) + 1\cdot 6\cdot 1 + (-4)\cdot 2\cdot 2 -$$

$$-(-4)\cdot(-4)\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot(-1) - 4\cdot 6\cdot 2 = -56 \neq 0.$$

2а) Так как $\Delta = -56 \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера: $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta}$

3а) Вычисляем определители $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -6 & 1 & -4 \\ 12 & -4 & 6 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-6)\cdot(-4)\cdot(-1) + 1\cdot 6\cdot 2 + (-4)\cdot 12\cdot 2 -$$

$$-(-4)\cdot(-4)\cdot 2 - 1\cdot 12\cdot(-1) - (-6)\cdot 6\cdot 2 = -56,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & -6 & -4 \\ 2 & 12 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4\cdot 12\cdot(-1) + (-6)\cdot 6\cdot 1 + (-4)\cdot 2\cdot 2 -$$

$$-(-4)\cdot 12\cdot 1 - (-6)\cdot 2\cdot(-1) - 4\cdot 6\cdot 2 = -112,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -6 \\ 2 & -4 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot(-4)\cdot 2 + 1\cdot 12\cdot 1 + (-6)\cdot 2\cdot 2 -$$

$$-(-6)\cdot(-4)\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 2 - 4\cdot 12\cdot 2 = -168.$$

4а) Находим решение: $x = \dfrac{-56}{-56} = 1,\quad y = \dfrac{-112}{-56} = 2,\quad z = \dfrac{-168}{-56} = 3.$

5а) Выполняем проверку: $\begin{cases} 4\cdot 1 + 2 - 4\cdot 3 = -6 \\ 2\cdot 1 - 4\cdot 2 + 6\cdot 3 = 12 \\ 1 + 2\cdot 2 - 3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 = -6 \\ 12 = 12 \\ 2 = 2 \end{cases}.$

Ответ: $x = 1,\quad y = 2,\quad z = 3.$

Б) <u>Метод обратной матрицы</u>.

1б) Записываем систему уравнений в матричном виде:

$$A\cdot X = B \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2б) Вычисляем определитель системы и проверяем, что он отличен от нуля:

$$|A|=\begin{vmatrix}4 & 1 & -4\\ 2 & -4 & 6\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=4\cdot(-4)\cdot(-1)+1\cdot 6\cdot 1+(-4)\cdot 2\cdot 2-$$

$$-(-4)\cdot(-4)\cdot 1-1\cdot 2\cdot(-1)-4\cdot 6\cdot 2=-56\neq 0$$

3б) Так как $|A|=-56\neq 0$, то матрица системы A имеет обратную матрицу A^{-1} и единственное решение системы определяется формулой:

$$X=A^{-1}\cdot B \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1 & -4\\ 2 & -4 & 6\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}-6\\ 12\\ 2\end{pmatrix}$$

4б) Находим обратную матрицу A^{-1} (методом присоединённой матрицы):

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}^{T}.$$

$$A_{11}=+\begin{vmatrix}-4 & 6\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-8 \qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 6\\ 1 & -1\end{vmatrix}=8 \qquad A_{13}=+\begin{vmatrix}2 & -4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=8$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}1 & -4\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-7 \qquad A_{22}=+\begin{vmatrix}4 & -4\\ 1 & -1\end{vmatrix}=0 \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}4 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-7$$

$$A_{31}=+\begin{vmatrix}1 & -4\\ -4 & 6\end{vmatrix}=-10 \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}4 & -4\\ 2 & 6\end{vmatrix}=-32 \qquad A_{33}=+\begin{vmatrix}4 & 1\\ 2 & -4\end{vmatrix}=-18$$

Тогда $A^{-1}=\dfrac{1}{-56}\cdot\begin{pmatrix}-8 & 8 & 8\\ -7 & 0 & -7\\ -10 & -32 & -18\end{pmatrix}^{T}=\dfrac{1}{-56}\cdot\begin{pmatrix}-8 & -7 & -10\\ 8 & 0 & -32\\ 8 & -7 & -18\end{pmatrix}.$

5б) Находим решение: $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\dfrac{1}{-56}\cdot\begin{pmatrix}-8 & -7 & -10\\ 8 & 0 & -32\\ 8 & -7 & -18\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6\\ 12\\ 2\end{pmatrix}=$

$$=\frac{1}{-56}\cdot\begin{pmatrix}(-8)\cdot(-6)+(-7)\cdot 12+(-10)\cdot 2\\ 8\cdot(-6)+0\cdot 12+(-32)\cdot 2\\ 8\cdot(-6)+(-7)\cdot 12+(-18)\cdot 2\end{pmatrix}=\frac{1}{-56}\cdot\begin{pmatrix}-56\\ -112\\ -168\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

6б) Выполняем проверку: $\begin{cases} 4\cdot 1+2-4\cdot 3=-6 \\ 2\cdot 1-4\cdot 2+6\cdot 3=12 \\ 1+2\cdot 2-3=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6=-6 \\ 12=12 \\ 2=2 \end{cases}.$

Ответ: $x=1, \quad y=2, \quad z=3$.

В) <u>Метод Гаусса.</u>

1в) Записываем расширенную матрицу системы:

$$\widetilde{A}=(A\,|\,B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -4 & -6 \\ 2 & -4 & 6 & 12 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

2в) Выполняем прямой ход метода Гаусса.

> *В результате прямого хода матрица системы A должна быть преобразована с помощью элементарных преобразований строк к матрице A' треугольного или трапециевидного вида с элементами $a'_{ii}\neq 0$. Система уравнений, матрица которой A' является треугольной с элементами $a'_{ii}\neq 0 \quad (i=1,2,\ldots,n)$, имеет единственное решение, а система уравнений, матрица которой A' является трапециевидной с элементами $a'_{ii}\neq 0$ $(i=1,2,\ldots,k, \quad где\ k<n)$, имеет бесконечно много решений.*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -4 & -6 \\ 2 & -4 & 6 & 12 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \textit{из второй строки, умноженной на 2, вычитаем первую} \\ \textit{из третьей строки, умноженной на 4, вычитаем первую} \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & -9 & 16 & 30 \\ 0 & 7 & 0 & 14 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \textit{к третьей строке, умноженной на 9,} \\ \textit{прибавляем вторую строку, умноженную на 7} \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & -9 & 16 & 30 \\ 0 & 0 & -112 & -336 \end{array}\right).$$ В результате элементарных преобразований матрица A системы преобразована к специальному виду A'. Система уравнений, матрица которой A', является треугольной с ненулевыми диагональными элементами $a'_{ii}\neq 0$, имеет всегда единственное решение, которое находим, выполняя обратный ход.

Если при выполнение преобразования расширенной матрицы $\widetilde{A} \Leftrightarrow \widetilde{A}'$ *в преобразованной матрице* $\widetilde{A}'$ *появляется строка* $\left(0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad | \, b'\right)$*, где* $b' \neq 0$*, то это говорит о несовместности исходной системы уравнений.*

3в) Выполняем обратный ход метода Гаусса.

Записываем систему уравнений, соответствующую последней расширенной матрице прямого хода: $\begin{cases} 4x + y - 4z = -6 \\ -9y + 16z = 30 \\ -112z = -336 \end{cases}$ и последовательно из уравнений системы, начиная с последнего, находим значения всех неизвестных: $\begin{cases} z = 3 \\ -9y = 30 - 16z = 30 - 16 \cdot (3) = -18 \Rightarrow y = 2 \\ 4x = -6 - y + 4z = -6 - 2 + 4 \cdot 3 = 4 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$.

4в) Выполняем проверку: $\begin{cases} 4 \cdot 1 + 2 - 4 \cdot 3 = -6 \\ 2 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 12 \\ 1 + 2 \cdot 2 - 3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 = -6 \\ 12 = 12 \\ 2 = 2 \end{cases}$.

Ответ: $x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3$.

41-50. Найти общее решение для каждой из данных систем методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$.

Решение.

1а) Записываем расширенную матрицу системы:

$$\widetilde{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 24 & -19 & 0 \end{array}\right).$$

2а) Выполняем прямой ход метода Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 24 & -19 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \textit{из второй строки вычитаем первую, умноженную на } 3 \\ \textit{из третьей строки вычитаем первую, умноженную на } 4 \\ \textit{из четвёртой строки вычитаем первую, умноженную на } 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -18 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & 12 & -10 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \textit{из третьей строки вычитаем вторую, умноженную на } 3 \\ \textit{к четвёртой строке прибавляем вторую, умноженную на } 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\textit{вычёркиваем третью и четвёртую строки}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 5 & 0 \end{array}\right).$$

Матрица системы приведена к трапециевидному виду с ненулевыми диагональными элементами. Соответствующая такой матрице система уравнений имеет бесконечно много решений, которые находим, выполняя обратный ход, и записываем в виде общего решения. Для записи общего решения указываем её базисные и свободные неизвестные. Базисный минор матрицы системы образуют столбцы коэффициентов при неизвестных x_1 и x_2: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Поэтому выбираем в качестве базисных – неизвестные x_1 и x_2, тогда свободными будут неизвестные x_3 и x_4.

3а) Выполняем обратный ход метода Гаусса.

Записываем систему уравнений, соответствующую последней расширенной матрице прямого хода: $\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +4x_3 & -3x_4 & =0 \\ & -x_2 & -6x_3 & +5x_4 & =0 \end{cases}$. Свободным неизвестным придаём разные, произвольные постоянные значения: $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$, и последовательно из уравнений системы, начиная с последнего, находим значения всех базисных неизвестных:

$$\begin{cases} -x_2 = 6x_3 - 5x_4 = 6C_1 - 5C_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -6C_1 + 5C_2 \\ x_1 = -2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -2\cdot(-6C_1 + 5C_2) - 4C_1 + 3C_2 = 8C_1 - 7C_2 \end{cases}.$$

Тогда общее решение системы запишется в виде: $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (8C_1 - 7C_2, -6C_1 + 5C_2, C_1, C_2)$.

4а) Выполняем проверку:

$$\begin{cases} 1\cdot(8C_1 - 7C_2) + 2\cdot(-6C_1 + 5C_2) + 4C_1 - 3C_2 = 0 \\ 3\cdot(8C_1 - 7C_2) + 5\cdot(-6C_1 + 5C_2) + 6C_1 - 4C_2 = 0 \\ 4\cdot(8C_1 - 7C_2) + 5\cdot(-6C_1 + 5C_2) - 2C_1 + 3C_2 = 0 \\ 3\cdot(8C_1 - 7C_2) + 8\cdot(-6C_1 + 5C_2) + 24C_1 - 19C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Ответ: $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (8C_1 - 7C_2, -6C_1 + 5C_2, C_1, C_2)$.

б) $\begin{cases} 2x_1 & -3x_2 & +5x_3 & +7x_4 & =1 \\ 4x_1 & -6x_2 & +2x_3 & +3x_4 & =2 \\ 2x_1 & -3x_2 & -11x_3 & -15x_4 & =1 \end{cases}$.

Решение.

1а) Записываем расширенную матрицу системы:

$$\tilde{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & -6 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -11 & -15 & 1 \end{array}\right).$$

2а) Выполняем прямой ход метода Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & -6 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -11 & -15 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{из второй строки вычитаем первую, умноженную на } 2 \\ \text{из третьей строки вычитаем первую} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -22 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

В результате прямого хода матрица системы A должна быть преобразована с помощью элементарных преобразований строк к матрице A' треугольного или трапециевидного вида с элементами $a'_{ii} \neq 0$.

Если, при выполнении преобразования расширенной матрицы $\tilde{A} \Leftrightarrow \tilde{A}'$, в преобразованной матрице $\tilde{A}'$ появляется строка $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & | \, b' \end{pmatrix}$, где $b' \neq 0$, то это говорит о несовместности исходной системы уравнений.

Для выполнения условия $a'_{ii} \neq 0$ может потребоваться перестановка местами столбцов матрицы системы. Если при выполнении преобразований прямого хода в матрице системы переставлялись местами столбцы коэффициентов при неизвестных, то в дальнейшем, при записи системы уравнений, соответствующей последней расширенной матрице прямого хода, это следует учесть.

$$\Leftrightarrow (\text{переставляем местами второй и третий столбцы}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & -8 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & -16 & 0 & -22 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\text{из третьей строки вычитаем вторую, умноженную на } 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & -8 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow (\text{вычёркиваем третью строку}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & -8 & 0 & -11 & 0 \end{array}\right).$$

Матрица системы приведена к трапециевидному виду с ненулевыми диагональными элементами. Соответствующая такой матрице система уравнений имеет бесконечно много решений, которые находим, выполняя обратный ход, и записываем в виде общего решения. Для записи общего решения указываем её базисные и свободные неизвестные. Базисный минор матрицы системы, с учётом перестановки местами столбцов, образуют первый и второй столбцы коэффициентов при неизвестных x_1 и x_3: $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$. Поэтому выбираем в качестве базисных – неизвестные x_1 и x_3, тогда свободными будут неизвестные x_2 и x_4.

3б) Выполняем обратный ход метода Гаусса.

Записываем систему уравнений, соответствующую последней расширенной матрице прямого хода: $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ -8x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$. Свободным неизвестным придаём разные, произвольные постоянные значения: $x_2 = C_1$, $x_4 = C_2$, и последовательно из уравнений системы, начиная с последнего, находим значения всех базисных неизвестных:

$$\begin{cases} -8x_3 = 11x_4 = 11C_2 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -\dfrac{11}{8}C_2 \\ 2x_1 = 1 + 3x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 1 + 3C_1 - 5 \cdot \left(-\dfrac{11}{8}C_2\right) - 7C_2 = 1 + 3C_1 - \dfrac{1}{8}C_2 \end{cases}.$$

Тогда общее решение системы запишется в виде:

$$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3C_1}{2} - \frac{C_2}{16},\ C_1,\ -\frac{11C_2}{8},\ C_2\right)$$

4б) Выполняем проверку:

$$\begin{cases} 2 \cdot \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3C_1}{2} - \dfrac{C_2}{16}\right) - 3C_1 + 5 \cdot \left(-\dfrac{11C_2}{8}\right) + 7C_2 = 1 \\ 4 \cdot \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3C_1}{2} - \dfrac{C_2}{16}\right) - 6C_1 + 2 \cdot \left(-\dfrac{11C_2}{8}\right) + 3C_2 = 2 \\ 2 \cdot \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3C_1}{2} - \dfrac{C_2}{16}\right) - 3C_1 - 11 \cdot \left(-\dfrac{11C_2}{8}\right) - 15C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ 2 = 2 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

Ответ: $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3C_1}{2} - \dfrac{C_2}{16},\ C_1,\ -\dfrac{11C_2}{8},\ C_2\right)$.

в) $\begin{cases} 7x_1 & -4x_2 & +x_3 & +3x_4 & =5 \\ 3x_1 & -5x_2 & +2x_3 & +4x_4 & =2 \\ 5x_1 & +7x_2 & -4x_3 & -6x_4 & =3 \end{cases}$**.**

Решение.

1в) Записываем расширенную матрицу системы:

$$\tilde{A}=(A\,|\,B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right).$$

2в) Выполняем прямой ход метода Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right)\Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{l} \textit{из второй строки, умноженной на } 7, \textit{ вычитаем первую, умноженную на } 3 \\ \textit{из третьей строки, умноженной на } 7, \textit{ вычитаем первую, умноженную на } 5 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & -1 \\ 0 & 69 & -33 & -57 & -4 \end{array}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\textit{к третьей строке прибавляем вторую, умноженную на } 3\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right).$$

При выполнении преобразования расширенной матрицы $\tilde{A}\Leftrightarrow\tilde{A}'$, в преобразованной матрице $\tilde{A}'$ появилась строка $(0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ |-7)$, соответствующая уравнению $0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4=-7$, которому не удовлетворяет ни один набор значений неизвестных (x_1,x_2,x_3,x_4), что говорит о несовместности исходной системы уравнений.

Ответ: Система несовместна.

Раздел. Векторная алгебра и аналитическая геометрия.

51 – 60. Даны векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$: $\bar{a} = (0, 1, 2)$; $\bar{b} = (1, 0, 1)$; $\bar{c} = (-1, 2, 4)$; $\bar{d} = (-2, 4, 7)$. Показать, что векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют базис R^3 и найти координаты вектора $\bar{d}$ в этом базисе.

Решение.

1) Покажем, что векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют базис R^3**.** Для этого составим определитель, столбцами которого являются координаты этих векторов и покажем, что он отличен от нуля.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 4 - 0 \cdot 2 \cdot 1 = -1.$$

Так как $\Delta = -1 \neq 0$, то векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют базис R^3 и, следовательно, вектор $\bar{d} \in R^3$ единственным образом можно разложить по векторам этого базиса.

2) Записываем разложение вектора $\bar{d}$ по векторам базиса $B_{R^3} = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$:

$$\bar{d} = \alpha \cdot \bar{a} + \beta \cdot \bar{b} + \gamma \cdot \bar{c} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты разложения α, β, γ называют координатами вектора $\bar{d}$ в базисе B_{R^3} и записывают: $\bar{d}_{B_{R^3}} = (\alpha, \beta, \gamma)$**.**

3) Записываем векторное уравнение относительно α, β, γ в виде эквивалентной ему системы линейных уравнений: $\begin{cases} \beta - \gamma = -2 \\ \alpha + 2\gamma = 4 \\ 2\alpha + \beta + 4\gamma = 7 \end{cases}$, и

находим

единственное решение системы, например, по формулам Крамера:

$$\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta}, \ \beta = \frac{\Delta_\beta}{\Delta}, \ \gamma = \frac{\Delta_\gamma}{\Delta}, \quad \text{где}$$

$$\Delta=-1\neq 0\,,\ \Delta_{\alpha}=\begin{vmatrix}-2&1&-1\\4&0&2\\7&1&4\end{vmatrix}=-2\,,\ \Delta_{\beta}=\begin{vmatrix}0&-2&-1\\1&4&2\\2&7&4\end{vmatrix}=1\,,\ \Delta_{\gamma}=\begin{vmatrix}0&1&-2\\1&0&4\\2&1&7\end{vmatrix}=-1\,.$$

Таким образом: $\alpha=\dfrac{-2}{-1}=2$, $\beta=\dfrac{1}{-1}=-1$, $\gamma=\dfrac{-1}{-1}=1$. Следовательно, разложение имеет вид: $\bar{d}=2\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}$ или кратко: $\bar{d}_{B_{R^3}}=(2,-1,1)$.

Ответ: $\bar{d}=2\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}=(2,-1,1)_{B_{R^3}}$.

61 – 70. Даны векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$: $\bar{a}=(0,1,2)$, $\bar{b}=(1,0,1)$, $\bar{c}=(-1,2,4)$. Требуется: **а)** найти векторы $\bar{m}=2\bar{a}+3\bar{b}$ и $\bar{n}=3\bar{b}-2\bar{c}$ **;** **б)** вычислить скалярное произведение $\bar{m}\cdot\bar{n}$; **в)** найти проекцию вектора $\bar{m}$ на направление вектора $\bar{n}$; **г)** найти векторное произведение $\bar{m}\times\bar{n}$ и его модуль $|\bar{m}\times\bar{n}|$.

Решение.

а) Находим векторы $\bar{m}$ и $\bar{n}$:

$$\bar{m}=2\bar{a}+3\bar{b}=2\cdot(0,1,2)+3\cdot(1,0,1)=(0,2,4)+(3,0,3)=$$
$$=(0+3,\ 2+0,\ 4+3)=(3,2,7)\,;$$

$$\bar{n}=3\bar{b}-2\bar{c}=3\cdot(1,0,1)-2\cdot(-1,2,4)=(3,0,3)-(-2,4,8)=$$
$$=(3-(-2),0-4,3-8)=(5,-4,-5)\,.$$

б) Вычисляем скалярное произведение векторов $\bar{m}\cdot\bar{n}$:

$$\bar{m}\cdot\bar{n}=(3,2,7)\cdot(5,-4,-5)=3\cdot5+2\cdot(-4)+7\cdot(-5)=-28\,.$$

в) Находим проекцию вектора $\bar{m}$ на направление вектора $\bar{n}$:

$$np_{\bar{n}}\bar{m}=\frac{\bar{m}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|}=\frac{(-28)}{\sqrt{5^2+(-4)^2+(-5)^2}}=-\frac{28}{\sqrt{66}}\,.$$

г) Находим векторное произведение векторов $\bar{m}\times\bar{n}$:

$$\bar{m}\times\bar{n}=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\3&2&7\\5&-4&-5\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}2&7\\-4&-5\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}3&7\\5&-5\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}3&2\\5&-4\end{vmatrix}=$$

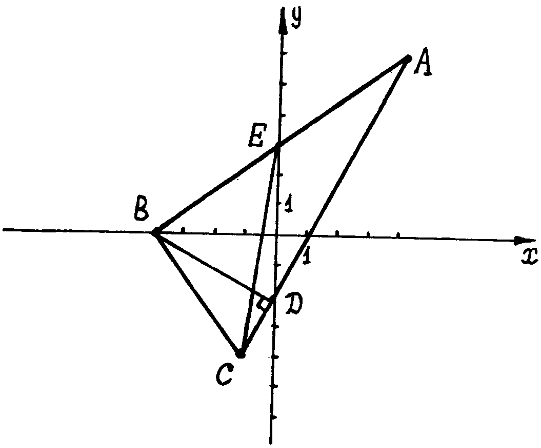
$$=\bar{i}\,(-10-(-28))-\bar{j}\,(-15-35)+\bar{k}\,(-12-10)=18\bar{i}+50\,\bar{j}-22\,\bar{k}=(18,50,-22)$$

и вычисляем его модуль: $|\bar{m}\times\bar{n}|=\sqrt{18^2+50^2+(-22)^2}=\sqrt{3308}=2\sqrt{827}$.

Ответ: **а)** $\overline{m} = 2\overline{a} + 3\overline{b} = (3,\ 2,\ 7)$; $\overline{n} = 3\overline{b} - 2\overline{c} = (5,\ -4,\ -5)$; **б)** $\overline{m} \cdot \overline{n} = -28$;
в) $np_{\overline{n}}\overline{m} = -28/\sqrt{66}$; **г)** $\overline{m} \times \overline{n} = (18{,}50{,}-22)$, $|\overline{m} \times \overline{n}| = 2\sqrt{827}$.

71-80. Даны вершины треугольника ABC: $A(4,\ 6)$, $B(-4,\ 0)$, $C(-1,\ -4)$
Требуется найти:
а) длину стороны AC ; **б)** уравнение стороны AC ;
в) уравнение медианы CE, проведённой из вершины C ;
г) уравнение высоты BD, проведённой из вершины B ;
д) длину h высоты BD ; **е)** площадь S треугольника ABC **.** Сделать чертёж.

Решение. Сделаем чертёж:



а) Длину стороны AC находим как длину вектора $\overline{AC}$:

$$\overline{AC} = (x_C - x_A,\ y_C - y_A) = (-1-4,\ -4-6) = (-5,\ -10),$$

$$AC = |\overline{AC}| = \sqrt{(-5)^2 + (-10)^2} = 5\sqrt{5}.$$

б) Уравнение стороны AC находим как уравнение прямой, проходящей через точки $A(4,\ 6)$ и $C(-1,\ -4)$, и записываем его в виде общего уравнения прямой:

$$AC: \frac{x-x_A}{x_C-x_A}=\frac{y-y_A}{y_C-y_A} \Rightarrow \frac{x-4}{-5}=\frac{y-6}{-10} \Rightarrow (-10)\cdot(x-4)=(-5)\cdot(y-6)$$

$$\Rightarrow \underline{2x-y-2=0}.$$

в) Уравнение медианы CE находим как уравнение прямой, проходящей через точки $C(-1,-4)$ и $E(x_E, y_E)$, и записываем его в виде общего уравнения прямой. Неизвестные координаты точки E находим как координаты точки, делящей сторону AB пополам:

$$x_E=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{4+(-4)}{2}=0; \quad y_E=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{6+0}{2}=3.$$

Тогда: $CE: \dfrac{x-x_C}{x_E-x_C}=\dfrac{y-y_C}{y_E-y_C} \Rightarrow \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+4}{7} \Rightarrow 7\cdot(x+1)=y+4 \Rightarrow$

$$\underline{7x-y+3=0}.$$

г) Уравнение высоты BD находим как уравнение прямой, проходящей через точку $B(-4, 0)$ перпендикулярно вектору $\overline{AC}=(-5,-10)$, который принимаем за нормальный вектор прямой BD. Тогда $BD: (-5)\cdot(x+4)+(-10)\cdot(y-0)=0 \Rightarrow \underline{x+2y+4=0}$

д) Длину h высоты BD находим как расстояние от точки $B(-4, 0)$ до прямой AC, заданной общим уравнением $2x-y-2=0$:

$$h=\rho(B, AC)=\frac{|2x_B-y_B-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|2\cdot(-4)-0-2|}{\sqrt{5}}=\frac{10}{\sqrt{5}}.$$

е) Площадь треугольника ABC находим по формуле: $S=\dfrac{h\cdot AC}{2}$. Откуда

$$S=\frac{10\cdot 5\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot 2}=25.$$

Ответ: а) $AC=5\sqrt{5}$; **б)** $AC: 2x-y-2=0$; **в)** $CE: 7x-y+3=0$; **г)** $BD: x+2y+4=0$; **д)** $h=10/\sqrt{5}$; **е)** $S=25$.

81 – 90. Даны вершины пирамиды $ABCD$. Требуется найти:

а) длины ребер AB **и** AD; **б)** угол между ребрами AB **и** AD;
в) площадь грани ABD; **г)** объем пирамиды $ABCD$;
д) уравнение плоскости грани ABD; **е)** длину h высоты CE пирамиды.

Решение.

а) Длины рёбер AB и AD находим как длины векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$:

$$\overline{AB} = (x_B - x_A,\, y_B - y_A,\, z_B - z_A) = (-1-2,\, -3-(-4),\, 4-5) = (-3,1,-1);$$

$$\overline{AD} = (x_D - x_A,\, y_D - y_A,\, z_D - z_A) = (1-2,\, -2-(-4),\, 2-5) = (-1,2,-3);$$

$$AB = |\overline{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{11};$$

$$AD = |\overline{AD}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}.$$

б) Угол φ между рёбрами AB и AD находим как угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ по формуле: $\cos\varphi = \dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AD}|}$. Учитывая, что:

$\overline{AB}\cdot\overline{AD} = (-3,1,-1)\cdot(-1,2,-3) = (-3)\cdot(-1) + 1\cdot 2 + (-1)\cdot(-3) = 8$,

$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{11}$, $\left|\overline{AD}\right| = \sqrt{14}$ получим $\cos\varphi = \dfrac{8}{\sqrt{11}\sqrt{14}}$. Откуда $\varphi = \arccos\left(\dfrac{8}{\sqrt{154}}\right)$

в) Площадь S грани ABD находим, используя геометрический смысл векторного произведения векторов, по формуле $S = 0.5\,|\overline{AB}\times\overline{AD}|$. Учитывая, что:

$$\overline{AB}\times\overline{AD} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \bar{i}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \bar{j}\cdot\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \bar{k}\cdot\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$= -\bar{i} - 8\bar{j} - 5\bar{k} = (-1,-8,-5)$, $|\overline{AB}\times\overline{AD}| = \sqrt{(-1)^2 + (-8)^2 + (-5)^2}$, получим

$$S = \frac{\sqrt{90}}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{2}.$$

г) Объём V пирамиды $ABCD$ находим, используя геометрический смысл смешанного произведения векторов, по формуле $V = \dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right|$.

Учитывая, что:

$$\overline{AC} = (x_C - x_A,\, y_C - y_A,\, z_C - z_A) = (5-2,\, 5-(-4),\, -1-5) = (3,9,-6),$$

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 3 & 9 & -6 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-3)\cdot\begin{vmatrix} 9 & -6 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + (-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 45,$$

получим $V = 45/6 = 7.5$.

д) Уравнение плоскости грани ABD находим как уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2,-4,5)$, $B(-1,-3,4)$ и $D(1,-2,2)$, и записываем его в виде общего уравнения плоскости:

$$ABD: \begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_D-x_A & y_D-y_A & z_D-z_A \end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{vmatrix} x-2 & y+4 & z-5 \\ -3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}-(y+4)\cdot\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}+(z-5)\cdot\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow$$

$$\underline{x+8y+5z+5=0}$$

е) Длину h высоты CE пирамиды $ABCD$ находим как расстояние от точки $C(5,5,-1)$ до плоскости ABD, заданной общим уравнением $x+8y+5z+5=0$:

$$h=\rho(C,ABD)=\frac{|x_C+8y_C+5z_C+5|}{\sqrt{1^2+8^2+5^2}}=\frac{|5+8\cdot 5+5\cdot(-1)+5|}{\sqrt{90}}=\frac{15}{\sqrt{10}}.$$

Ответ: а) $AB=\sqrt{11}$**,** $AD=\sqrt{14}$ **; б)** $\varphi=\arccos\left(\dfrac{8}{\sqrt{154}}\right)$**;** **в)** $S=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$**;**

г) $V=7.5$**;** **д)** $x+8y+5z+5=0$**;** **е)** $h=15/\sqrt{10}$**.**

91–100. Установить, какую невырожденную кривую определяет алгебраическое уравнение второго порядка, построить её:

а) $x^2-4y^2+8x-24y-24=0$; **б)** $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$;

в) $2x^2-8x-y+5=0$.

Решение:

а) Так как $B=0$, $AC-B^2=1\cdot(-4)-0^2=-4<0$, то уравнение определяет гиперболу с центром в точке (x_0,y_0) и осями симметрии, параллельными координатным осям: $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm 1$. Вид кривой и расположение её на плоскости известны. Выделяя полные квадраты в левой части уравнения $x^2-4y^2+8x-24y-24=0$**,** преобразуем его следующим образом:

$$(x^2+8x)-4\cdot(y^2+6y)-24=0$$

$$(x^2+8x+16-16)-4\cdot(y^2+6y+9-9)-24=0$$

$$(x^2+8x+16)-4\cdot(y^2+6y+9)=4 \quad\Rightarrow\quad (x+4)^2-4\cdot(y+3)^2=4$$

$$\frac{(x-(-4))^2}{2^2}-\frac{(y-(-3))^2}{1^2}=1.$$

Полученное уравнение определяет гиперболу с центром в точке $(-4,-3)$ и осями симметрии параллельными координатным осям. Для построения гиперболы в системе координат Oxy: **1)** отмечаем центр гиперболы $(-4,-3)$; **2)** проводим через центр $(-4,-3)$ пунктиром оси симметрии гиперболы; **3)** строим пунктиром основной прямоугольник гиперболы с центром $(-4,-3)$ и сторонами $2a=4$ и $2b=1$ параллельными осям симметрии; **4)** проводим через противоположные вершины основного прямоугольника пунктиром прямые, являющиеся асимптотами гиперболы, к которым неограниченно близко при бесконечном удалении от начала координат приближаются ветви гиперболы, не пересекая их; **5)** изображаем сплошной линией ветви гиперболы (рис. 1).

Ответ: Гипербола с центром в точке $(-4,-3)$ (см. рис.1)..

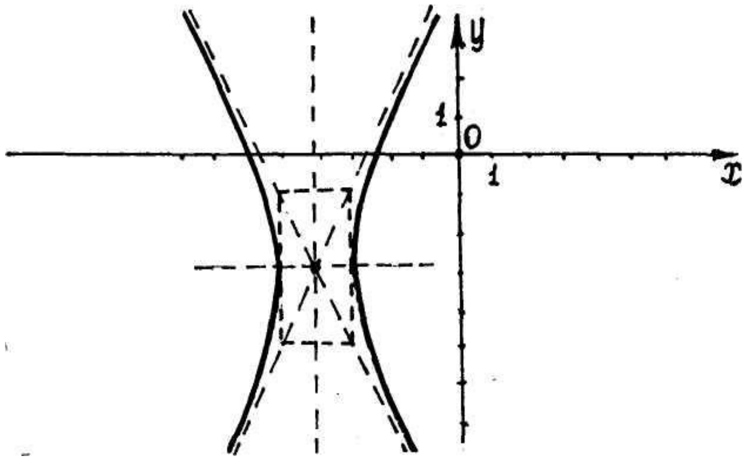


Рис.1

б) Так как $B=0$, $AC-B^2=4\cdot9-0^2=36>0$, $A\neq C$, то уравнение определяет эллипс с центром в точке (x_0,y_0) и осями симметрии, параллельными координатным осям: $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$. Вид кривой и расположение её на плоскости известны. Выделяя полные квадраты в левой части

уравнения $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$, преобразуем его следующим образом: $4\cdot(x^2-2x)+9\cdot(y^2-4y)+4=0$

$$4\cdot(x^2-2x+1-1)+9\cdot(y^2-4y+4-4)+4=0$$

$$4\cdot(x^2-2x+1)+9\cdot(y^2-4y+4)=36 \quad\Rightarrow\quad 4\cdot(x-1)^2+9\cdot(y-2)^2=36$$

$$\frac{(x-1)^2}{3^2}+\frac{(y-2)^2}{2^2}=1.$$

Полученное уравнение определяет эллипс с центром в точке $(1,\,2)$ и осями симметрии параллельными осям координат. Для построения эллипса в системе координат Oxy : **1)** отмечаем центр эллипса $(1,\,2)$; **2)** проводим через центр $(1,\,2)$ пунктиром оси симметрии эллипса; **3)** строим пунктиром основной прямоугольник эллипса с центром $(1,\,2)$ и сторонами $2a=9$ и $2b=4$ параллельными осям симметрии; **4)** изображаем сплошной линией эллипс, вписывая его в основной прямоугольник так, чтобы эллипс касался его сторон в точках пересечения прямоугольника с осями симметрии (рис.2).

Ответ: Эллипс с центром в точке $(1,\,2)$ (см. рис.2).

в) Так как $B=0$, $AC-B^2=2\cdot 0-0^2=0$, $A\neq 0$, то уравнение определяет параболу с вершиной в точке (x_0,y_0) и осью симметрии, параллельной координатной оси Oy : $(x-x_0)^2=2p\cdot(y-y_0)$. Вид кривой и расположение её на плоскости известны. Выделяя полные квадраты в левой части уравнения $2x^2-8x-y+5=0$, преобразуем его следующим образом:

$$2\cdot(x^2-4x)-y+5=0 \quad\Rightarrow\quad 2\cdot(x^2-4x+4-4)-y+5=0$$

$$2\cdot(x^2-4x+4)=1\cdot(y+3) \quad\Rightarrow\quad (x-2)^2=0.5\cdot(y-(-3))$$

Полученное уравнение определяет параболу с вершиной в точке $(2,-3)$ и осью симметрии параллельной оси Oy. Для построения параболы в системе координат Oxy : **1)** отмечаем вершину параболы $(2,-3)$; **2)** проводим через вершину (2,–3) пунктиром ось симметрии параболы; **3)** изображаем сплошной линией параболу, направляя её ветвь, с учётом того, что параметр параболы $p = 1/4 > 0$, в положительную сторону оси Oy (рис.3).

Ответ: Парабола с вершиной в точке $(2,-3)$ (см. рис.3).

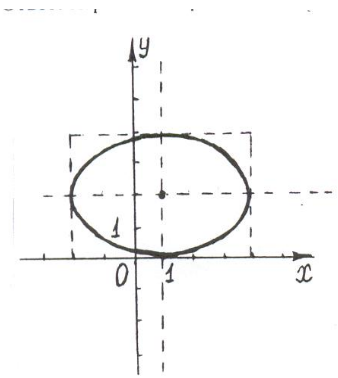


Рис.2.

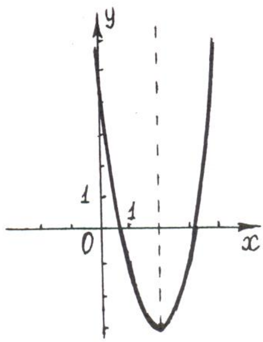


Рис.3.

Раздел. Комплексные числа. Многочлены и алгебраические уравнения.

101-110. Даны комплексные числа $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 5-4i$, $z_3 = -1-\sqrt{3}\,i$ и алгебраическое уравнение $z^4 + 27z = 0$. Требуется:

а) вычислить $z_1 + z_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2}$, $\dfrac{z_1}{z_2}$;

б) представить комплексное число z_3 в тригонометрической форме, вычислить $(z_3)^4$ и результат представить в алгебраической форме;

в) найти все корни алгебраического уравнения $z^4 + 27z = 0$ на множестве комплексных чисел.

Решение.

1а) Вычисляем $z_1 + z_2$: $\quad z_1 + z_2 = (2+3i) + (5-4i) = 2+3i+5-4i = 7-i$.

2а) Вычисляем $\overline{z_1 \cdot z_2}$.

Сначала находим

$z_1 \cdot z_2 = (2+3i)\cdot(5-4i) = 10-8i+15i-12i^2 =$ (учитываем, что $i^2 = -1$) $= 22+7i$. Тогда $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(22+7i)} = 22-7i$

3а) Вычисляем $\dfrac{z_1}{z_2}$ **:** $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \dfrac{(2+3i)\cdot\overline{(5-4i)}}{(5-4i)\cdot\overline{(5-4i)}} = \dfrac{(2+3i)\cdot(5+4i)}{(5-4i)\cdot(5+4i)} =$

$= \dfrac{10+8i+15i+12i^2}{25+20i-20i-16i^2} =$ (учитываем, что $i^2 = -1$) $= \dfrac{-2+23i}{41} = -\dfrac{2}{41} + \dfrac{23}{41}i$.

1б) Представляем комплексное число $z_3 = -1-\sqrt{3}\,i$ в тригонометрической форме $z_3 = r_3(\cos\varphi_3 + i\sin\varphi_3)$, где $r_3 = \sqrt{x_3^2 + y_3^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$

$\varphi_3 = \pi + arctg\left(\dfrac{y_3}{x_3}\right) = \pi + arctg\sqrt{3} = \pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$ (так как комплексное число, изображается точкой $(-1,-\sqrt{3})$, лежащей в третьем квадранте координатной плоскости). Тогда $z_3 = 2\cdot\left(\cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3)\right)$.

2б) Вычисляем $(z_3)^4$ по формуле Муавра:

$$(z_3)^4 = r_3^4 \cdot (\cos(4\varphi_3) + i\sin(4\varphi_3)) = 2^4 \cdot \left(\cos\left(4\cdot\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(4\cdot\frac{4\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 16\cdot\left(\cos\left(\frac{16\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{16\pi}{3}\right)\right) = 16\cdot\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3} + 2\cdot 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3} + 2\cdot 2\pi\right)\right) =$$

$= 16\cdot\left(\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)\right)$. Полученный результат представляем в алгебраической форме: $(z_3)^4 = (-1-\sqrt{3})^4 = 16\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = -8\sqrt{3} - 8i$.

1в) Для нахождения корней алгебраического уравнения $z^4 + 27z = 0$, раскладываем его левую часть на множители:

$$z^4 + 27z = z\cdot(z^3 + 27) = z\cdot(z+3)\cdot(z^2 - 3z + 9).$$

2в) Находим корни уравнения на множестве комплексных чисел, приравнивая каждый из множителей нулю (число корней, с учётом кратности, должно равняться порядку уравнения):

1) $z=0 \qquad \Rightarrow \; z_1=0$.

2) $z+3=0 \qquad \Rightarrow \; z_2=-3$.

3) $z^2-3z+9=0$. Так как дискриминант квадратного уравнения $D=9-4\cdot 9=-27<0$, то уравнение имеет два комплексно-сопряжённых корня: $z_{3,4}=\dfrac{-(-3)\pm i\cdot\sqrt{|-27|}}{2}=\dfrac{3\pm i\cdot\sqrt{27}}{2}=\dfrac{3}{2}\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$.

Корни z_2, $z_{3,4}$ *можно найти и как корни уравнения* $z^3+27=0$, *по формуле* $z_{2,3,4}=\left(\sqrt[3]{-27}\right)_{1,2,3}$. *Для нахождения комплексных значений корня, число* -27 *следует представить в виде комплексного числа в тригонометрической форме:* $-27=-27+0\cdot i=27\cdot\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)$, *после чего значения корня найти по формуле:* $\left(\sqrt[3]{-27}\right)_k=\sqrt[3]{27}\cdot\left(\cos\left(\dfrac{\pi+2\pi(k-1)}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi+2\pi(k-1)}{3}\right)\right)$, *где* $k=1,\,2,\,3$.

Ответ:

а) $z_1+z_2=7-i$, $\overline{z_1\cdot z_2}=22-7i$, $\dfrac{z_1}{z_2}=-\dfrac{2}{41}+\dfrac{23}{41}i$; **б)** $\left(z_3\right)^4=-8\sqrt{3}-8i$;

в) $z_1=0$, $z_2=-3$, $z_{3,4}=\dfrac{3}{2}\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$.

111-120. Найти представление правильной дроби в виде суммы простых дробей: **а)** $\dfrac{x-3}{x^3-x}$ **; б)** $\dfrac{1}{x^4+3x^2}$ **.**

Решение.

1а) Разложим знаменатель дроби на простые множители. Получим $x^3-x=x(x^2-1)=x(x-1)(x+1)$.

2а) Представим правильную дробь в виде суммы простых дробей сначала с неопределёнными коэффициентами. Получим

$$\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$$, где A,B,C - неизвестные заранее числа.

3а) Находим значения A,B,C методом неопределённых коэффициентов. Для этого левую часть полученного тождественного разложения приводим к общему знаменателю и приравниваем числители исходной дроби и дроби с неизвестными коэффициентами. Получим следующее равенство:

$$x-3=A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1).$$

Полученное равенство рассматриваем как тождественное равенство двух многочленов одного порядка (в данном случае – второго порядка):

$$0\cdot x^2+1\cdot x-3\cdot x^0=(A+B+C)\cdot x^2+(B-C)\cdot x-A\cdot x^0.$$

Приравниваем в правой и левой частях полученного тождественного равенства коэффициенты при одинаковых степенях x:

при x^2: $A+B+C=0$

при x: $B-C=1$

при x^0: $-A=-3$.

В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения значений A,B,C: $\begin{cases} A+B+C=1 \\ B-C=1 \\ A=3 \end{cases}$. Решаем систему любым известным методом и находим $A=3,\ B=-1,\ C=-2$.

…..**4а)** Записываем окончательное представление: $\frac{x-3}{x^3-x}=\frac{3}{x}-\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+1}$.

1б) Разложим знаменатель дроби на простые множители. Получим $x^4+3x^2=x^2(x^2+3)$.

2б) Представим правильную дробь в виде суммы простых дробей сначала с неопределёнными коэффициентами. Получим $\frac{1}{x^2(x^2+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+3}$, где A,B,C,D - неизвестные заранее числа.

3б) Находим значения A,B,C,D методом неопределённых коэффициентов. Для этого левую часть полученного тождественного разложения приводим к общему знаменателю и приравниваем числители исходной дроби и дроби с неизвестными коэффициентами. Получим следующее равенство:

$$1 = Ax(x^2+3) + B(x^2+3) + (Cx+D)x^2.$$

Полученное равенство рассматриваем как тождественное равенство двух многочленов одного порядка (в данном случае – третьего порядка):

$$0\cdot x^3 + 0\cdot x^2 + 0\cdot x + 1\cdot x^0 = (A+C)\cdot x^3 + (B+D)\cdot x^2 + 3Ax + 3B\cdot x^0$$

Приравниваем в правой и левой частях полученного тождественного равенства коэффициенты при одинаковых степенях x:

при x^3: $A+C=0$

при x^2: $B+D=0$

при x: $3A=0$

при x^0: $3B=1$.

В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения значений A,B,C,D: $\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ 3A=0 \\ 3B=1 \end{cases}$. Решая систему любым известным методом, находим $A=0,\ B=\dfrac{1}{3},\ C=0,\ D=-\dfrac{1}{3}$.

…..**4б)** Записываем окончательное представление: $\dfrac{1}{x^4+3x^2} = \dfrac{1}{3x^2} - \dfrac{1}{3(x^2+3)}$.

Ответ: а) $\dfrac{x-3}{x^3-x} = \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x+1}$; **б)** $\dfrac{1}{x^4+3x^2} = \dfrac{1}{3x^2} - \dfrac{1}{3(x^2+3)}$.

6.2 Краткие теоретические сведения

Тема. <u>Определители.</u>

Квадратной матрицей порядка n называется квадратная таблица из чисел a_{ij} $(i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n})$: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, состоящая из n строк и n столбцов. У квадратной матрицы различают главную диагональ: $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ и побочную диагональ: $a_{1n}, a_{2n-1}, \ldots, a_{n1}$. Любой квадратной матрице A порядка n можно поставить в соответствие число $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, равное алгебраической сумме $n!$ слагаемых, составленных определённым образом из элементов a_{ij} матрицы A, называемое определителем матрицы. Кратко обозначается $|A|$, Δ.

Определителем 1-ого порядка называется число $|A|=|a_{11}|=a_{11}$.

Определителем 2-ого порядка называется число

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}.$$

Определителем 3-его порядка называется число

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Минором элемента a_{ij} называется определитель M_{ij}, полученный из определителя $|A|$ вычёркиванием i-ой строки и j-ого столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} ***элемента*** a_{ij} называется его минор M_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}=\begin{cases} M_{ij} & \text{если } (i+j) - \text{чётное число} \\ -M_{ij} & \text{если } (i+j) - \text{нечётное число} \end{cases}.$$

Определителем порядка n называется число

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{n} a_{1k}\cdot A_{1k}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\ldots+a_{1n}A_{1n}$$

Разложением определителя $|A|$ ***по*** i***-ой строке*** $(i=\overline{1,n})$ называется соотношение:

$$|A|=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}.$$

Разложением определителя $|A|$ ***по*** j***-ому столбцу*** $(j=\overline{1,n})$ называется соотношение: $|A|=\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj}$

Определители обладают следующими ***свойствами*:**

1) определитель не изменится при замене всех его строк столбцами с теми же номерами;

2) определитель изменит знак на противоположный, если переставить местами любые две строки (два столбца) определителя;

3) общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) можно вынести за знак определителя;

4) определитель равен нулю, если он содержит нулевую строку (столбец), две одинаковые или пропорциональные строки (столбца);

5) определитель не изменится, если к какой-либо строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную на любое число;

6) определитель треугольного вида (когда все элементы, лежащие по одну сторону одной из его диагоналей равны нулю) равен произведению диагональных элементов: $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}.$

Тема. Матрицы.

Матрицей размера $m\times n$ называется прямоугольная таблица из чисел a_{ij} $(i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n})$: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, состоящая из m строк и n столбцов. Если необходимо указать размеры матрицы, то пишут $A_{m\times n}$.

Если $m = n$, то матрица A называется ***квадратной***.

Нулевой называется матрица O, все элементы которой равны нулю, например: $O_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ***Единичной*** называется квадратная матрица E, на главной диагонали которой стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю, например: $E_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ***Треугольной*** называется квадратная матрица A, все элементы которой расположенные по одну сторону от главной диагонали равны нулю, например: $A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$. ***Трапециевидной (ступенчатой)*** называется матрица $A_{m\times n}$ $(m < n)$, все элементы которой, расположенные ниже элементов $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1,2,\ldots,m)$ равны нулю, например: $A_{3\times 4} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$.

Матрицы A и B называются ***равными*** и пишут $A = B$, если они одинакового размера и их соответствующие элементы равны: $a_{ij} = b_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Матрицы можно транспонировать, складывать, вычитать, умножать на число, умножать на другую матрицу.

Транспонированной к матрице $A_{m\times n}$ называется матрица $A^T_{n\times m}$, столбцами которой являются соответствующие строки матрицы $A_{m\times n}$.

Суммой (разностью) матриц A и B одного размера $m\times n$, называется матрица $C = A \pm B$ того же размера, для которой:

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Произведением матрицы A размера $m\times n$ ***на число*** α называется матрица $B = \alpha A$ того же размера, для которой: $b_{ij} = \alpha a_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Линейной комбинацией матриц A и B одного размера $m\times n$, называется матрица $C=\alpha A+\beta B$ того же размера (α и β - произвольные числа), для которой: $c_{ij}=\alpha a_{ij}+\beta b_{ij}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$,

Произведением матрицы $A_{m\times n}$ ***на матрицу*** $B_{n\times k}$ называется матрица $C_{m\times k}=A_{m\times n}\cdot B_{n\times k}$, каждый элемент которой c_{ij} вычисляется по правилу:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sj}\ ,\ i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,k}.$$

Операция умножения матрицы на матрицу определена не для всех матриц, а только для таких у которых число столбцов левой матрицы A равно числу строк правой матрицы B. Такие матрицы называются согласованными для умножения. Поэтому прежде чем выполнять операцию умножения матрицы на матрицу следует проверить их согласованность для умножения и определить размерность матрицы-произведения (если умножение матриц возможно): $A_{m\times n}\cdot B_{n\times k}=C_{m\times k}$. Особенность операции умножения матриц состоит в том, что в общем случае: $A\cdot B\neq B\cdot A$, т.е. переместительное свойство места не имеет.

Элементарными преобразованиями матрицы называются:
1) перестановка строк (столбцов);
2) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;
3) прибавление к элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число;
4) вычёркивание нулевой строки (столбца).

Матрицы A и B, полученные одна из другой в результате элементарных преобразований называются ***эквивалентными*** и пишут $A\Leftrightarrow B$.

Обратной к квадратной матрице A порядка n, называется матрица A^{-1} того же порядка, если: $A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E$, где E - единичная матрица порядка n.

Квадратная матрица A называется ***невырожденной***, если её определитель $|A|\neq 0$. Обратная матрица всегда существует для невырожденных матриц.

Основными методами вычисления обратной матрицы являются:
Метод присоединённой матрицы. Если A -невырожденная матрица, то $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\hat{A}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{n1} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}^T$, где $\hat{A}$ - присоединённая матрица, для которой: $\hat{a}_{ij}=A_{ji}$ $i,j=\overline{1,n}$. Здесь A_{ji} - алгебраические дополнения

элементов a_{ji} матрицы A.

В частности, если $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, то $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T$

Метод элементарных преобразований. Для данной квадратной матрицы A порядка n строится прямоугольная матрица $(A\,|\,E)$ размера $n\times 2n$ приписыванием к A справа единичной матрицы. Далее, с помощью элементарных преобразований над строками, матрица $(A\,|\,E)$ приводится к виду $(E\,|\,A^{-1})$, что всегда возможно, если A - невырожденная.

Матричными называются уравнения вида: $AX=C$, $XA=C$, $AXB=C$, где матрицы A, B, C - известны, матрица X - неизвестна. Если квадратные матрицы A и B - невырожденные, то решения матричных уравнений записываются, соответственно, в виде: $X=A^{-1}C$, $X=CA^{-1}$, $X=A^{-1}CB^{-1}$.

Минором k***-ого порядка матрицы*** A ***размера*** $m\times n$ называется определитель M_k квадратной матрицы порядка k, образованной элементами матрицы A, стоящими на пересечении произвольно выбранных её k строк и k столбцов $(k\le\min(m,n))$.

Максимальный порядок r отличных от нуля миноров матрицы A, называется её ***рангом*** и обозначается $rangA$ или $r(A)$, а любой минор порядка r, отличный от нуля – ***базисным минором***.

Тема. Системы линейных алгебраических уравнений.

…Система уравнений вида: $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$ называется ***системой*** m ***линейных уравнений с*** n ***неизвестными***. Числа a_{ij} называются коэффициентами, b_i - свободными членами, x_j - неизвестными системы.

В матричной форме система имеет вид: $AX=B$, где $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$. Здесь A -матрица системы, X -матрица-столбец неизвестных, B -матрица-столбец свободных членов.

Если $B=O$, то система называется ***однородной,*** в противном случае ***неоднородной.***

Система, матрица A которой является треугольной с диагональными элементами $a_{ii} \neq 0$, называется ***треугольной.*** Система, матрица A которой является трапециевидной, называется ***трапециевидной.***

Решением системы называется всякий упорядоченный набор чисел $\overline{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, обращающий каждое уравнение системы в равенство. Совокупность всех решений называется ***множеством решений системы***.

Система называется ***совместной***, если она имеет, по крайней мере, одно решение; ***определённой***, если она имеет только одно решение; ***неопределённой***, если она имеет бесконечно много решений; ***несовместной,*** если она не имеет решений.

Однородная система уравнений всегда совместна, так как всегда имеет, по крайней мере, нулевое решение $\overline{0}=(0,0,\ldots,0)$. Треугольная система является определённой, трапециевидная система – неопределённой.

Две системы называются ***эквивалентными***, если множества их решений совпадают.

Элементарными преобразованиями систем уравнений называются:

1) перестановка уравнений;

2) перестановка местами слагаемых $a_{ij} \cdot x_j$ в каждом из уравнений системы;

3) умножение уравнения на число, отличное от нуля;

4) прибавление к уравнению другого, умноженного на любое число;

5) вычёркивание уравнения вида: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$.

Основными точными методами решения систем линейных уравнений являются методы: Крамера, обратной матрицы и Гаусса.

Если число уравнений в системе m совпадает с числом неизвестных n и определитель матрицы системы $\Delta = |A| \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое можно найти:

а) ***методом Крамера*** по формулам: $x_j = \Delta_j \big/ \Delta$, $j=\overline{1,n}$, где Δ_j - определитель, получаемый из определителя матрицы системы Δ заменой j -ого столбца на столбец свободных членов;

б*) методом обратной матрицы* по формуле $X = A^{-1} \cdot B$.

Методом Гаусса находят решение произвольной системы линейных уравнений. Метод состоит в приведении системы уравнений, с помощью элементарных преобразований, к системе специального вида, эквивалентной исходной, решение которой очевидно. Преобразования по методу Гаусса выполняют в два этапа. Первый этап называют прямым ходом, второй - обратным.

В результате **прямого хода** выясняют: совместна или нет система и если совместна то, сколько имеет решений - одно или бесконечно много, а также, в случае бесконечного множества решений, указывают базисные и свободные неизвестные для записи общего решения системы. Преобразования прямого хода выполняют, как правило, над расширенной матрицей системы $\widetilde{A} = (A \mid B)$, которую получают, приписывая справа к матрице системы A столбец свободных членов B. В результате элементарных преобразований строк и перестановкой столбцов, матрица системы A должна быть приведена к матрице A' треугольного или трапециевидного вида с элементами $a'_{ii} \neq 0$. При этом, система уравнений, матрица которой A', является треугольной с диагональными элементами $a'_{ii} \neq 0$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, будет иметь единственное решение; система уравнений, матрица которой A', является трапециевидной с элементами $a'_{ii} \neq 0$ $(i = 1,2,\ldots,k, \quad где\ k < n)$, будет иметь бесконечно много решений. Если, при выполнении преобразований расширенной матрицы $\widetilde{A} \Leftrightarrow \widetilde{A}'$, в преобразованной матрице $\widetilde{A}'$ появится строка $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \mid b' \end{pmatrix}$, где $b' \neq 0$, то это говорит о несовместности исходной системы уравнений. Базисные неизвестные указывают, выписывая базисный минор преобразованной матрицы системы A'. Базисными являются неизвестные преобразованной системы, столбцы коэффициентов a'_{ij} при которых образуют базисный минор (определитель максимального порядка, отличный от нуля). Свободными являются неизвестные, не являющиеся базисными.

В результате **обратного хода** находят решение системы, записывая его в виде общего решения, если их бесконечно много. Преобразования обратного хода часто выполняют, над уравнениями системы, соответствующей последней расширенной матрице $\widetilde{A}'$ прямого хода. В случае единственного решения, его получают, находя последовательно значения всех неизвестных из уравнений системы, начиная с последнего. В случае, когда решений бесконечно много, их записывают в виде общего решения. Для этого свободным неизвестным придают разные произвольные постоянные значения: C_1, $C_2,\ldots,$ C_{n-k}, и последовательно из уравнений системы, начиная с последнего, находят значения всех базисных неизвестных. Полученное решение называют общим. Придавая произвольным постоянным, конкретные значения, находят частные решения системы уравнений.

Тема. <u>Векторная алгебра.</u>

Вектором (***геометрическим***) называется направленный отрезок, задаваемый упорядоченной парой точек (началом и концом вектора). Обозначают вектор $\overrightarrow{AB}$ или $\overline{a}$. Расстояние между началом и концом вектора называется его ***длиной*** и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$ или $\overline{a}$. ***Углом между векторами*** $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется угол $\varphi = (\overline{a}, \overline{b})$, $0 \le \varphi \le \pi$, на который следует повернуть один из векторов, чтобы его направление совпало с направлением другого вектора, при условии, что их начала совпадают. ***Проекцией вектора*** $\overline{a}$ ***на вектор*** $\overline{b}$ называется число $np_{\overline{b}}\overline{a} = |\overline{a}| \cdot \cos(\overline{a}, \overline{b})$.

Векторы называются ***коллинеарными***, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых. Векторы называются ***компланарными***, если они расположены в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются ***равными*** и пишут $\overline{a} = \overline{b}$, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют равные длины. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются ***противоположными*** и пишут $\overline{a} = -\overline{b}$, если они коллинеарны, направлены в разные стороны и имеют равные длины.

Суммой векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$, соединяющий начало вектора $\overline{a}$ и конец вектора $\overline{b}$, при условии, что конец вектора $\overline{a}$ совпадает с началом вектора $\overline{b}$ (***правило треугольника***). ***Произведением вектора*** $\overline{a}$ ***на действительное число*** λ называется вектор $\overline{b} = \lambda \cdot \overline{a}$:

1) коллинеарный вектору $\overline{a}$; **2)** имеющий длину $|\overline{b}| = |\lambda| \cdot |\overline{a}|$; **3)** направленный одинаково с вектором $\overline{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно, если $\lambda < 0$.

Ортом вектора $\overline{a}$, называется вектор $\overline{a}^0$, имеющий единичную длину и направление вектора $\overline{a}$: $\overline{a}^0 = \overline{a} / |\overline{a}|$.

Базисом в пространстве R^3 называется упорядоченная тройка некомпланарных векторов, ***базисом на плоскости*** R^2 – упорядоченная пара неколлинеарных векторов, ***базисом на прямой*** R – любой ненулевой вектор на этой прямой. Базис, в котором все векторы попарно перпендикулярны и имеют единичную длину, называется ***ортонормированным***. Векторы ортонормированного базиса обозначаются: $\bar{i}, \bar{j}$ и $\bar{k}$, и называются ***базисными ортами***. Различают правый и левый ортонормированные базисы. Базис $(\bar{i}, \bar{j})$ -называется правым, если кратчайший поворот от $\bar{i}$ к $\bar{j}$ совершается против хода часовой стрелки, в противном случае он – левый. Базис $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ -называется правым, если из конца вектора $\bar{k}$ кратчайший поворот от вектора $\bar{i}$ к $\bar{j}$ виден совершающимся против хода часовой стрелки, в противном случае он – левый.

Условием коллинеарности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ является равенство: $\bar{b} = \lambda \cdot \bar{a}$, где λ - некоторое число. ***Условием компланарности векторов*** $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ является равенство: $\bar{c} = \alpha \cdot \bar{a} + \beta \cdot \bar{b}$, где α, β - некоторые числа.

Всякий геометрический вектор может быть разложен единственным образом по векторам базиса, коэффициенты разложения называются при этом ***координатами вектора*** в данном базисе. Например, если $B_{R^3} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3)$ - базис R^3 и $\bar{a} \in R^3$, то всегда существует единственное разложение: $\bar{a} = \alpha_1 \bar{b}_1 + \alpha_2 \bar{b}_2 + \alpha_3 \bar{b}_3$, где числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - координаты вектора $\bar{a}$ в базисе B_{R^3}, при этом пишут $\bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_{B_{R^3}}$. Если в R^3 зафиксирован ортонормированный базис $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ и $\bar{a} \in R^3$, то равносильны записи: $\bar{a} = \alpha_1 \bar{i} + \alpha_2 \bar{j} + \alpha_3 \bar{k}$ и $\bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ (*в записи вектора в координатной форме ортонормированный базис не указывают*).

Представление геометрических векторов в координатной форме, позволяет выполнять действия над ними, как над арифметическими векторами:

$$\bar{a} + \bar{b} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3);$$

$$\lambda \cdot \bar{a} = \lambda \cdot (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3).$$

Декартовой прямоугольной системой координат в пространстве называется совокупность точки O (начало координат) и правого ортонормированного базиса $\langle O, (\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}) \rangle$ и обозначается $Oxyz$. Прямые Ox, Oy, Oz, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются ***координатными осями:*** первая – осью абсцисс, вторая – осью ординат, третья – осью аппликат. Плоскости, проходящие через оси координат, называются ***координатными плоскостями***. Аналогично вводится система координат на плоскости: $\left\langle O,(\bar{i},\bar{j})\right\rangle = Oxy$.

Пусть M - произвольная точка пространства, в котором введена система координат $\left\langle O,(\bar{i},\bar{j},\bar{k})\right\rangle = Oxyz$. ***Радиус-вектором точки*** M называется вектор $\overline{OM}$, который всегда единственным образом можно представить в виде: $\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = (x,y,z)$. Числа x,y,z , являющиеся координатами радиус-вектора, совпадают с проекциями вектора $\overline{OM}$ на базисные орты $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ (на координатные оси Ox,Oy и Oz). ***Координатами точки*** M в системе координат $Oxyz$ называются координаты её радиус-вектора $\overline{OM}$ и пишут $M(x,y,z)$. В свою очередь, координаты точки $M(x,y,z)$ полностью определяют её радиус-вектор $\overline{OM} = (x,y,z) = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$. Всякий геометрический вектор $\bar{a} \in R^3$ в системе координат $Oxyz$, всегда можно представить как радиус-вектор некоторой точки и записать в виде: $\bar{a} = x_a\bar{i} + y_a\bar{j} + z_a\bar{k} = (x_a, y_a, z_a)$.

Длина $|\bar{a}|$ вектора $\bar{a}$, заданного координатами $\bar{a} = (x_a, y_a, z_a)$, определяется формулой: $|\bar{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$. ***Направляющими косинусами вектора*** $\bar{a}$ называются числа: $\cos\alpha = \cos(\bar{a},\hat{O}x) = \dfrac{x_a}{|\bar{a}|}$, $\cos\beta = \cos(\bar{a},\hat{O}y) = \dfrac{y_a}{|\bar{a}|}$, $\cos\gamma = \cos(\bar{a},\hat{O}z) = \dfrac{z_a}{|\bar{a}|}$, при этом $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Координаты вектора $\overline{AB}$, заданного точками $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$ определяются по формуле: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$. Расстояние $\rho(A,B)$ между точками $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$ определяется как длина вектора $\overline{AB}$ и находится по формуле:

$$\rho(A,B) = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} .$$

Координаты точки $C(x_C, y_C, z_C)$ делящей отрезок AB пополам находятся по формулам: $x_C = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, $y_C = \dfrac{y_A + y_B}{2}$, $z_C = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

Скалярным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$. Скалярное произведение обладает свойствами:

1) $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ **;** **2)** $(\lambda \cdot \bar{a}) \cdot \bar{b} = \lambda \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b})$ где λ - число**;**

3) $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$ **;** **4)** $\bar{a} \cdot \bar{a} = \bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$

5) $\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0$**;** **6)** $\bar{i} \cdot \bar{j} = 0$**,** $\bar{i} \cdot \bar{k} = 0$**,** $\bar{j} \cdot \bar{k} = 0$, $\bar{i}^2 = 1$, $\bar{j}^2 = 1$, $\bar{k}^2 = 1$.

Для векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, заданных своими координатами $\bar{a} = x_a \bar{i} + y_a \bar{j} + z_a \bar{k} = (x_a, y_a, z_a)$, $\bar{b} = x_b \bar{i} + y_b \bar{j} + z_b \bar{k} = (x_b, y_b, z_b)$ скалярное произведение вычисляется по формуле: $\bar{a} \cdot \bar{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$.

Скалярное произведение применяют: **1)** для вычисления угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ по формуле: $cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$; **2)** для вычисления проекции вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ по формуле: $np_{\bar{b}} \bar{a} = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}$; **3)** для вычисления длины вектора $\bar{a} = \alpha \cdot \bar{p} + \beta \cdot \bar{q}$ по формуле: $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2} = \sqrt{(\alpha \cdot \bar{p} + \beta \cdot \bar{q})^2}$; **4)** в качестве условия перпендикулярности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0$.

Векторным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$, определяемый условиями: **1)** $|\bar{c}| = |\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$;

2) $\bar{c} \perp \bar{a}$ и $\bar{c} \perp \bar{b}$; **3)** $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ - правая тройка векторов.

Упорядоченная тройка $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ некомпланарных векторов называется ***правой тройкой***, если из конца третьего вектора $\bar{c}$, кратчайший поворот от первого вектора $\bar{a}$ ко второму $\bar{b}$, виден совершающимся против хода часовой стрелки. В противном случае, тройка $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ называется левой.

Векторное произведение обладает свойствами:

1) $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$ **;** **2)** $(\lambda \cdot \bar{a}) \times \bar{b} = \lambda \cdot (\bar{a} \times \bar{b})$**,** где λ - число**;**

3) $\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}$ **;** **4)** $\bar{a}\times\bar{a}=\bar{0}$ **5)** $\bar{a}\,||\,\bar{b}\Leftrightarrow\bar{a}\times\bar{b}=\bar{0}$ **;**

6) $\bar{i}\times\bar{j}=\bar{k}$ **,** $\bar{k}\times\bar{i}=\bar{j}$ **,** $\bar{j}\times\bar{k}=\bar{i}$, $\bar{i}\times\bar{i}=\bar{0}$, $\bar{j}\times\bar{j}=\bar{0}$, $\bar{k}\times\bar{k}=\bar{0}$.

Для векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, заданных своими координатами $\bar{a}=x_a\bar{i}+y_a\bar{j}+z_a\bar{k}=(x_a,y_a,z_a)$, $\bar{b}=x_b\bar{i}+y_b\bar{j}+z_b\bar{k}=(x_b,y_b,z_b)$ векторное произведение вычисляется по формуле: $\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b\end{vmatrix}$.

Векторное произведение $\bar{a}\times\bar{b}$ применяют: **1)** для вычисления площадей треугольника и параллелограмма, построенных на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, как на сторонах, по формуле: $2S_{\Delta}=S_{пар}=|\bar{a}\times\bar{b}|$; **2)** в качестве условия параллельности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $\bar{a}\,||\,\bar{b}\Leftrightarrow\bar{a}\times\bar{b}=\bar{0}$.

Смешанным произведением упорядоченной тройки векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется число $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$.

Смешанное произведение обладает свойствами:

1) $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$ **;** **2)** $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=-\bar{a}\bar{c}\bar{b}=-\bar{c}\bar{b}\bar{a}$ **;**

3) $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\bar{b}\bar{c}\bar{a}=\bar{c}\bar{a}\bar{b}$ **;** **4)** $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$ **-**компланарны $\Leftrightarrow\bar{a}\bar{b}\bar{c}=0$ **;**

5) $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\pm V$ **,** где V -объём параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ **.**

Для векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, заданных своими координатами $\bar{a}=x_a\bar{i}+y_a\bar{j}+z_a\bar{k}=(x_a,y_a,z_a)$, $\bar{b}=x_b\bar{i}+y_b\bar{j}+z_b\bar{k}=(x_b,y_b,z_b)$, $\bar{c}=x_c\bar{i}+y_c\bar{j}+z_c\bar{k}=(x_c,y_c,z_c)$ смешанное произведение вычисляется по формуле: $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix}x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b\\ x_c & y_c & z_c\end{vmatrix}$.

Смешанное произведение $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ применяют: **1)** для вычисления объёмов тетраэдра и параллелепипеда, построенных на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, как на рёбрах, по формуле: $6V_{тетр}=V_{пар}=|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|$; **2)** в качестве условия компланарности векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$: $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=0\Leftrightarrow\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$ - компланарны.

Тема. <u>Прямые линии и плоскости.</u>

Нормальным вектором прямой L, называется всякий ненулевой вектор $\overline{N}$ перпендикулярный данной прямой. ***Направляющим вектором прямой*** L, называется всякий ненулевой вектор $\overline{q}$ параллельный данной прямой.

Прямая L ***на плоскости*** в системе координат Oxy может быть задана уравнением одного из следующих видов:

1) $Ax + By + C = 0$ - ***общее уравнение*** прямой, где $(A, B) = \overline{N}$ - нормальный вектор прямой;

2) $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ - уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно данному вектору $\overline{N} = (A, B)$;

3) $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}$ - уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно данному вектору $\overline{q} = (l, m)$ (***каноническое уравнение***);

4) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ - уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$;

5) $y = \begin{cases} y_0 + k(x - x_0) \\ kx + b \end{cases}$ - уравнения прямой ***с угловым коэффициентом*** $k = tg\alpha$, где $M_0(x_0, y_0)$ - точка через которую прямая проходит; α $(-\pi/2 < \alpha < \pi/2)$ – угол, который прямая составляет с осью Ox; b - длина отрезка (со знаком $\pm$), отсекаемого прямой на оси Oy (знак «$+$», если отрезок отсекается на положительной части оси и «$-$», если на отрицательной).

6) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ - уравнение прямой ***в отрезках,*** где a и b - длины отрезков (со знаком $\pm$), отсекаемых прямой на координатных осях Ox и Oy (знак «$+$», если отрезок отсекается на положительной части оси и «$-$», если на отрицательной).

Расстояние от точки $M^*(x^*, y^*)$ ***до прямой*** L, заданной общим уравнением $Ax + By + C = 0$ на плоскости, находится по формуле:

$$\rho(M^*, L) = \frac{|Ax^* + By^* + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Угол $\varphi = (\widehat{L_1, L_2})$, $(0 \le \varphi \le \pi/2)$ ***между прямыми*** L_1 и L_2, заданными общими уравнениями или уравнениями с угловым коэффициентом, находится по одной из следующих формул:

$$\cos\varphi = |\cos(\overline{N}_1, \overline{N}_2)| = \frac{|\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2|}{|\overline{N}_1| \cdot |\overline{N}_2|}; \qquad tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

$L_1 || L_2$, если $\overline{N}_1 \parallel \overline{N}_2 \Rightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$ или $k_1 = k_2$.

$L_1 \perp L_2$, если $\overline{N}_1 \perp \overline{N}_2 \Rightarrow \overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2 = 0 \Rightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$ или $k_1 k_2 = -1$

Координаты точки пересечения прямых L_1 и L_2 находятся как решение системы линейных уравнений: $\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} y = k_1 x + b_1 \\ y = k_2 x + b_2 \end{cases}$.

Нормальным вектором плоскости P, называется всякий ненулевой вектор $\overline{N}$ перпендикулярный данной плоскости.

Плоскость P в системе координат $Oxyz$ может быть задана уравнением одного из следующих видов:

1) $Ax + By + Cz + D = 0$ - ***общее уравнение*** плоскости, где $(A, B, C) = \overline{N}$ - нормальный вектор плоскости;

2) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ - уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно данному вектору $\overline{N} = (A, B, C)$;

3) $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$ - уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$;

4) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ - уравнение плоскости ***в отрезках,*** где a, b и c - дины отрезков (со знаком $\pm$), отсекаемых плоскостью на координатных осях Ox, Oy и Oz (знак «$+$», если отрезок отсекается на положительной части оси и «$-$», если на отрицательной).

Расстояние от точки $M^*(x^*, y^*, z^*)$ ***до плоскости*** P, заданной общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, находится по формуле:

$$\rho(M^*, P) = \frac{|Ax^* + By^* + Cz^* + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Угол $\varphi = (P_1, \widehat{\ } P_2)$, $(0 \le \varphi \le \pi/2)$ ***между плоскостями*** P_1 и P_2, заданными общими уравнениями, находится по формуле:

$$\cos\varphi = |\cos(\overline{N}_1, \overline{N}_2)| = \frac{|\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2|}{|\overline{N}_1| \cdot |\overline{N}_2|}.$$

$P_1 \| P_2$, если $\overline{N}_1 \parallel \overline{N}_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

$P_1 \perp P_2$, если $\overline{N}_1 \perp \overline{N}_2 \Rightarrow \overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2 = 0 \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Прямая L ***в пространстве*** в системе координат $Oxyz$ может быть задана уравнением одного из следующих видов:

1) $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ - ***общее уравнение*** прямой, как линии пересечения двух плоскостей, где $(A_1, B_1, C_1) = \overline{N}_1$ и $(A_2, B_2, C_2) = \overline{N}_2$ - нормальные векторы плоскостей P_1 и P_2;

2) $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ - уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно данному вектору $\overline{q} = (l, m, n)$ (***каноническое уравнение***);

3) $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ - уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$;

4) $\begin{cases} x = x_0 + l \cdot t \\ y = y_0 + m \cdot t \\ z = z_0 + n \cdot t \end{cases}$ - уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно данному вектору $\overline{q} = (l, m, n)$, $-\infty < t < +\infty$ (***параметрическое уравнение***);

Угол $\varphi = (L_1, \widehat{\ } L_2)$, $(0 \le \varphi \le \pi/2)$ ***между прямыми*** L_1 и L_2 ***в пространстве***, заданными каноническими уравнениями находится по формуле:

$$\cos\varphi = |\cos(\bar{q}_1, \bar{q}_2)| = \frac{|\bar{q}_1 \cdot \bar{q}_2|}{|\bar{q}_1| \cdot |\bar{q}_2|}.$$

$L_1 \| L_2$, если $\bar{q}_1 \| \bar{q}_2 \Rightarrow \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$.

$L_1 \perp L_2$, если $\bar{q}_1 \perp \bar{q}_2 \Rightarrow \bar{q}_1 \cdot \bar{q}_2 = 0 \Rightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$.

Координаты точки пересечения прямой L, заданной параметрическим уравнением ***и плоскости*** P, заданной общим уравнением, находятся как решение системы линейных уравнений: $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ x = x_0 + l \cdot t \\ y = y_0 + m \cdot t \\ z = z_0 + n \cdot t \end{cases}$.

Угол $\varphi = (\widehat{L, P})$, $(0 \le \varphi \le \pi/2)$ ***между прямой*** L, заданной каноническим уравнением ***и плоскостью*** P, заданной общим уравнением находится по формуле: $\sin\varphi = |\cos(\bar{q}, \bar{N})| = \dfrac{|\bar{q} \cdot \bar{N}|}{|\bar{q}| \cdot |\bar{N}|}$.

$L \| P$, если $\bar{q} \perp \bar{N} \Rightarrow \bar{N} \cdot \bar{q} = 0 \Rightarrow A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n = 0$.

$L \perp P$, если $\bar{q} \| \bar{N} \Rightarrow \dfrac{A}{l} = \dfrac{B}{m} = \dfrac{C}{n}$.

Тема. <u>Кривые второго порядка.</u>

Алгебраической кривой второго порядка в системе координат Oxy называется кривая Γ, ***общее уравнение*** которой имеет вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

где числа A, B, C - не равны нулю одновременно. Существует следующая классификация кривых второго порядка: **1)** если $AC - B^2 > 0$, то общее уравнение определяет кривую ***эллиптического типа*** (окружность (при $A = C$, если $B = 0$), эллипс (при $A \ne C$, если $B = 0$), пустое множество, точку); **2)** если $AC - B^2 < 0$, то - кривую ***гиперболического типа*** (гиперболу, пару пересекающихся прямых); **3)** если $AC - B^2 = 0$, то - кривую **параболического типа** (параболу, пустое множество, прямую, пару параллельных прямых) . Окружность, эллипс, гипербола и парабола называются ***невырожденными действительными кривыми второго порядка.***

Общее уравнение $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, где $B = 0$, определяющее невырожденную кривую (окружность, эллипс, гиперболу, параболу), всегда (методом выделения полных квадратов) можно привести к уравнению одного из следующих видов:

1а) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ - уравнение окружности с центром в точке (x_0, y_0) и радиусом r (рис. 7).

1б) $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ - уравнение эллипса с центром в точке (x_0, y_0) и осями симметрии, параллельными координатным осям. Числа $a > 0$ и $b > 0$ - называются ***полуосями эллипса***; прямоугольник со сторонами $2a$, $2b$ параллельными осям симметрии и центром в точке (x_0, y_0) - ***основным прямоугольником эллипса;*** точки пересечения основного прямоугольника с осями симметрии - ***вершинами эллипса***.

Для построения эллипса в системе координат Oxy :**1)** отмечаем центр (x_0, y_0) эллипса; **2)** проводим через центр пунктирной линией оси симметрии эллипса; **3)** строим пунктиром основной прямоугольник эллипса с центром (x_0, y_0) и сторонами $2a$, $2b$ параллельными осям симметрии; **4)** изображаем сплошной линией эллипс, вписывая его в основной прямоугольник так, чтобы эллипс касался его сторон только в вершинах эллипса (рис 5) .

Аналогично строится и окружность, основной прямоугольник которой имеет стороны $2a = 2b = 2r$ (рис. 4).

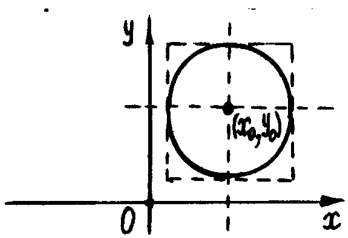


Рис.4

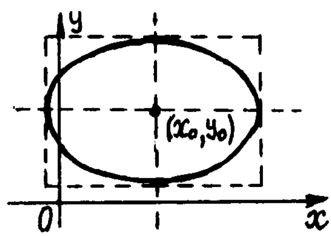


Рис. 5

2) $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = \pm 1$ - уравнения гипербол (называемых *сопряжёнными*) с центром в точке (x_0, y_0) и осями симметрии, параллельными координатным осям. Числа $a > 0$ и $b > 0$ - называются

полуосями гипербол; прямоугольник со сторонами $2a$, $2b$ параллельными осям симметрии и центром в точке (x_0, y_0) - ***основным прямоугольником гипербол;*** точки пересечения основного прямоугольника с осями симметрии - ***вершинами гипербол;*** прямые $a(y-y_0)=\pm b(x-x_0)$, проходящие через противоположные вершины основного прямоугольника – ***асимптотами гипербол***.

Для построения гиперболы в системе координат Oxy : **1)** отмечаем центр гиперболы (x_0, y_0); **2)** проводим через центр (x_0, y_0) пунктирной линией оси симметрии гиперболы; **3)** строим пунктиром основной прямоугольник гиперболы с центром (x_0, y_0) и сторонами $2a$ и $2b$ параллельными осям симметрии; **4)** проводим через противоположные вершины основного прямоугольника пунктирной линией прямые, являющиеся асимптотами гиперболы, к которым неограниченно близко, при бесконечном удалении от начала координат, приближаются ветви гиперболы, не пересекая их; **5)** изображаем сплошной линией ветви гиперболы $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ (рис. 6) или гиперболы $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=-1$ (рис. 7).

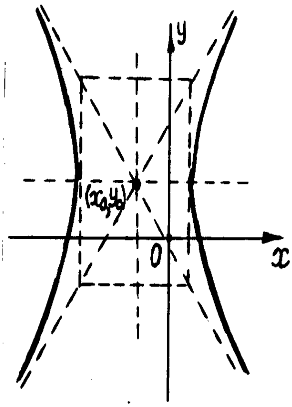


Рис.6

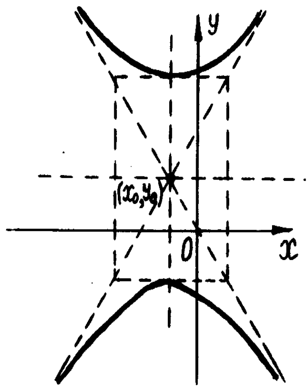


Рис. 7

3а) $(x-x_0)^2=2p\cdot(y-y_0)$ - уравнение параболы с вершиной в точке (x_0, y_0) и осью симметрии, параллельной координатной оси Oy (рис. 8).

3б) $(y-y_0)^2 = 2p\cdot(x-x_0)$ - уравнение параболы с вершиной в точке (x_0, y_0) и осью симметрии, параллельной координатной оси Ox (рис. 9).

Для построения параболы в системе координат Oxy : **1)** отмечаем вершину параболы (x_0, y_0); **2)** проводим через вершину (x_0, y_0) пунктирной линией ось симметрии параболы; **3)** изображаем сплошной линией параболу, направляя её ветвь, с учётом знака параметра параболы p: при $p>0$ - в положительную сторону координатной оси, параллельной оси симметрии параболы (рис. 8а и 9а); при $p<0$ - в отрицательную сторону координатной оси (рис.8б и 9б) .

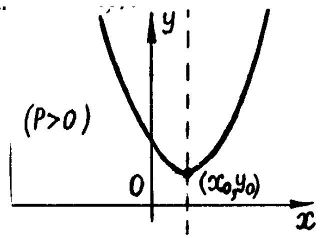


Рис. 8а

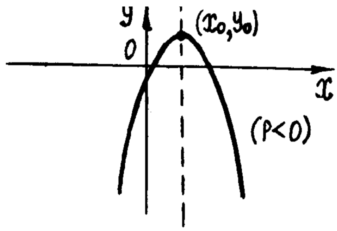


Рис. 8б

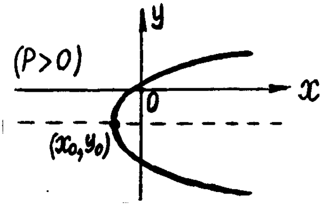


Рис. 9а

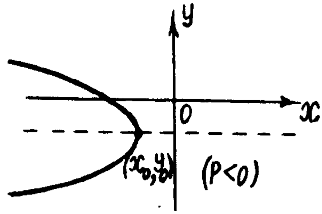


Рис. 9б

Тема. <u>Комплексные числа.</u>

Комплексным числом называется число вида $z = x + iy$, где x, y - действительные числа, символ i - мнимая единица, для которой $i^2 = -1$. Число $x = \operatorname{Re} z$ - называется действительной частью комплексного числа z , число $y = \operatorname{Im} z$ - мнимой частью. Комплексное число $x + i0$ совпадает с действительным, а число iy называется чисто мнимым. Множество всех комплексных чисел обозначается C .

Комплексное число $z = x + iy$ изображается на плоскости с системой координат Oxy (называемой комплексной плоскостью) точкой, обозначаемой той же буквой z и имеющей координаты (x, y) .

Действительные числа изображаются точками оси абсцисс, а чисто мнимые – оси ординат (поэтому ось Ox называется действительной осью, а ось Oy - мнимой осью). Комплексное число на комплексной плоскости изображается также радиус-вектором точки (x, y). Длина радиус-вектора называется ***модулем комплексного числа:*** $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, а угол его φ с осью Ox называется ***аргументом комплексного числа***: $\begin{cases} \cos\varphi = x/r \\ \sin\varphi = y/r \end{cases}$, $0 \le \varphi < 2\pi$.

Аргумент φ комплексного числа вычисляют, как правило, по формуле:

$$\varphi = \begin{cases} arctg(y/x) & \text{если } z \in \{I \text{ квадранту}\} \\ \pi + arctg(y/x) & \text{если } z \in \{II \text{ или } III \text{ квадранту}\} \\ 2\pi + arctg(y/x) & \text{если } z \in \{IV \text{ квадранту}\} \end{cases}.$$

Комплексно-сопряжённым числу $z = x + iy$ называется число $\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$.

Представление комплексного числа выражением $z = x + iy$ называется ***алгебраической формой*** комплексного числа, а выражением $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ - ***тригонометрической формой*** комплексного числа.

Арифметические действия (сложение, вычитание, умножение) над комплексными числами в алгебраической форме выполняют по правилам действий над многочленами, с учётом того, что $i^2 = -1$:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2);$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Деление комплексных чисел выполняют следующим образом: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}$.

Возведение комплексного числа $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в натуральную степень n выполняют, используя ***формулу Муавра:*** $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$. Полученный результат представляют затем в алгебраической форме.

Извлечение корня n-ой степени из комплексного числа $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (не равного нулю) выполняют по формуле:

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right), \; k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

(здесь $\sqrt[n]{r}$ - действительное положительное число). Таким образом, корень степени n из комплексного числа имеет n различных значений, расположенных на комплексной плоскости на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$.

Корни z_1 и z_2 квадратного уравнения $az^2+bz+c=0$, где a,b,c - действительные числа, находятся по формулам:

1) если $D=b^2-4ac\geq 0$, то $z_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ - действительные;

2) если $D=b^2-4ac<0$, то $z_{1,2}=\dfrac{-b}{2a}\pm i\cdot\dfrac{\sqrt{|D|}}{2a}$ - комплексно-сопряжённые.

Тема. Многочлены и алгебраические уравнения.

Алгебраическим многочленом степени n называется выражение вида:

$$P_n(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n\ ,$$

где $z\in C$, $a_0,a_1,\ldots,a_n$ - некоторые числа (вообще говоря, комплексные), называемые коэффициентами многочлена, причём $a_0\neq 0$.

Алгебраическим уравнением степени n называется уравнение вида $P_n(z)=0.$ Число z_0, для которого $P_n(z_0)=0$ называется ***корнем*** многочлена или уравнения.

Теорема Безу. Число z_0 является корнем многочлена $P_n(z)$ тогда и только тогда, когда $P_n(z)$ делится на $(z-z_0)$, т.е. когда $P_n(z)$ представляется в виде: $P_n(z)=(z-z_0)\cdot Q_{n-1}(z)$, где $Q_{n-1}(z)$ - многочлен степени $(n-1)$.

Число z_0 называется ***корнем кратности*** k многочлена $P_n(z)$, если $P_n(z)=(z-z_0)^k\cdot Q_{n-k}(z)$, где $Q_{n-k}(z_0)\neq 0$.

Для многочленов имеет место следующая теорема:

Теорема Гаусса (*основная теорема алгебры*). Всякий многочлен ненулевой степени n имеет ровно n корней, если каждый корень считать ровно столько раз, какова его кратность .

Всякий многочлен $P_n(z)$ с действительными коэффициентами всегда можно разложить в произведение линейных и квадратичных множителей с действительными коэффициентами.

Всякий квадратный многочлен az^2+bz+c с действительными коэффициентами на множестве комплексных чисел всегда можно разложить в произведение линейных множителей: $az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$, где корни многочлена z_1 и z_2 находятся по формулам:

1) если $D=b^2-4ac\ge 0$, то $z_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ - действительные;

2) если $D=b^2-4ac<0$, то $z_{1,2}=\dfrac{-b}{2a}\pm i\cdot\dfrac{\sqrt{|D|}}{2a}$ - комплексно-сопряжённые.

Для нахождения корней алгебраического уравнения $P_n(z)=0$ $(n\ge 3)$ с действительными коэффициентами поступают, как правило, следующим образом: находят один из корней подбором (например, корнем может быть целый делитель свободного слагаемого a_n), а затем, последовательно применяя теорему Безу, сводят нахождение корней уравнения $P_n(z)=0$ к нахождению корней линейных и квадратных уравнений.

Рациональной дробью называется рациональная функция $R(x)$ вида $R(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\dfrac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}$. Если $m\ge n$, то дробь неправильная, в противном случае – правильная. Всякую неправильную дробь всегда можно представить в виде $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}=T_{m-n}(x)+\dfrac{S_l(x)}{Q_n(x)}$, где $T_{m-n}(x), S_l(x)$ - многочлены от x, причем $l<n$, т.е. в виде суммы многочлена и правильной дроби. Выделение целой части (многочлена $T_{m-n}(x)$) в неправильной дроби производят делением числителя на знаменатель, выполняемое «уголком».

Всякую правильную рациональную дробь всегда можно представить в виде конечной суммы простых дробей.

Простыми дробями называют дроби вида: $\dfrac{A_1}{ax+b}$, $\dfrac{A_k}{(ax+b)^k}$, $\dfrac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c}$, $\dfrac{B_kx+C_k}{(ax^2+bx+c)^k}$, где A_i, B_i, C_i - некоторые числа, $k>1$, причем трехчлен ax^2+bx+c не имеет действительных корней (имеет отрицательный дискриминант $D=b^2-4ac<0$).

Вид такого представления определяется видом разложения знаменателя $Q_n(x)$ на множители $(ax+b)$, $(ax+b)^k$, (ax^2+bx+c), $(ax^2+bx+c)^k$.

Каждому множителю вида $(ax+b)$ в разложении правильной дроби соответствует простая дробь $\dfrac{A_1}{ax+b}$.

Каждому множителю вида $(ax+b)^k$, где $k>1$, в разложении правильной дроби соответствует сумма из k простых дробей вида $\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+...+\frac{A_k}{(ax+b)^k}$.

Каждому множителю вида (ax^2+bx+c) (без действительных корней) в разложении правильной дроби соответствует простая дробь $\frac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c}$.

Каждому множителю вида $(ax^2+bx+c)^k$, где $k>1$, в разложении правильной дроби соответствует сумма из k простых дробей вида $\frac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c}+\frac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^2}+...+\frac{B_kx+C_k}{(ax^2+bx+c)^k}$.

Числа A_i, B_i, C_i, входящие в разложение, заранее неизвестны. Их значения находят методом неопределённых коэффициентов. Для этого правую часть полученного разложения приводят к общему знаменателю (им будет многочлен $Q_n(x)$), после чего приравнивают числители исходной дроби и дроби с неизвестными числами A_i, B_i, C_i. В получившемся тождественном равенстве двух многочленов одного порядка, приравнивают в правой и левой частях равенства коэффициенты при одинаковых степенях x. Если в одной части равенства какие-то степени x отсутствуют, то считают, что они присутствуют с нулевыми коэффициентами. В результате получают систему линейных алгебраических уравнений, решая которую, находят неизвестные числа A_i, B_i, C_i и, тем самым, находят окончательный вид разложения.

Итак, для разложения правильной рациональной дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}$ ($m<n$) на простые дроби, необходимо:

1) представить, если это необходимо $Q_n(x)$ в виде произведения только множителей вида $(ax+b)$, $(ax+b)^k$, (ax^2+bx+c), $(ax^2+bx+c)^k$, где $k>1$, что всегда возможно;

2) представить правильную дробь $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ в виде суммы простых дробей, согласно приведённым выше правилам, сначала с неопределёнными коэффициентами A_i, B_i, C_i;

3) найти значения коэффициентов A_i, B_i, C_i методом неопределённых коэффициентов и получить искомое разложение.

6.3 Основные математические формулы.

Формулы сокращённого умножения:

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ **2.** $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

3. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

4. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$ **5.** $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$

6. $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$.

Действия с натуральными логарифмами.

1. $\ln a + \ln b = \ln(ab)$. **2.** $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$. **3.** $-\ln a = \ln(1/a)$.

4. $b \ln a = \ln(a^b)$. **5.** $\ln e^a = a$

Формулы тригонометрии:

1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$ **2.** $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1,$

3. $1 + tg^2\alpha = 1/\cos^2 \alpha$, **4.** $1 + ctg^2\alpha = 1/\sin^2 \alpha$.

5. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$

6. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$

7. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ **8.** $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

9. $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos[(\alpha + \beta)/2] \cdot \cos[(\alpha - \beta)/2]$

10. $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin[(\alpha + \beta)/2] \cdot \sin[(\alpha - \beta)/2]$

11. $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin[(\alpha + \beta)/2] \cdot \cos[(\alpha - \beta)/2]$

12. $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin[(\alpha - \beta)/2] \cdot \cos[(\alpha + \beta)/2]$

13. $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$

14. $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$

15. $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$

16. $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$ **17.** $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$

Формулы приведения.

Функция	$\beta=\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\beta=\pi\pm\alpha$	$\beta=\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$	$\beta=2\pi-\alpha$
$\sin\beta$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$		$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
$tg\beta$	$\mp ctg\alpha$	$\pm tg\alpha$	$\mp ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$-tg\beta$	$\mp tg\alpha$	$\pm ctg\alpha$	$\mp tg\alpha$	$-ctg\alpha$

Значения тригонометрических функций некоторых углов.

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	-1	0	1
$tg\alpha$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	0	∞	0
$ctg\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0	$-1/\sqrt{3}$	∞	0	∞

6.4 Образец оформления обложки с контрольной работой.

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Набережночелнинский институт (филиал)
федерального государственного автономного образовательного
учреждения высшего образования
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Высшая техническая школа
кафедра математики

Контрольная работа

по дисциплине «Аналитическая геометрия»

Вариант № ____

(номера выполняемых заданий: ___________________________)

Выполнил: студент группы №_______

*Ф.И.О. студента*_________

зач. книжка - №_________

Проверил: преподаватель кафедры математики

*Ф.И.О. преподавателя*_____

Набережные Челны
202…

6.5 Таблица номеров выполняемых заданий.

Номер варианта	*Номера выполняемых заданий*											
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
1	**1**	**11**	**21**	**31**	**41**	**51**	**61**	**71**	**81**	**91**	**101**	**111**
2	**2**	**12**	**22**	**32**	**42**	**52**	**62**	**72**	**82**	**92**	**102**	**112**
3	**3**	**13**	**23**	**33**	**43**	**53**	**63**	**73**	**83**	**93**	**103**	**113**
4	**4**	**14**	**24**	**34**	**44**	**54**	**64**	**74**	**84**	**94**	**104**	**114**
5	**5**	**15**	**25**	**35**	**45**	**55**	**65**	**75**	**85**	**95**	**105**	**115**
6	**6**	**16**	**26**	**36**	**46**	**56**	**66**	**76**	**86**	**96**	**106**	**116**
7	**7**	**17**	**27**	**37**	**47**	**57**	**67**	**77**	**87**	**97**	**107**	**117**
8	**8**	**18**	**28**	**38**	**48**	**58**	**68**	**78**	**88**	**98**	**108**	**118**
9	**9**	**19**	**29**	**39**	**49**	**59**	**69**	**79**	**89**	**99**	**109**	**119**
10	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**	**90**	**100**	**110**	**120**
11	**3**	**12**	**21**	**32**	**43**	**54**	**65**	**76**	**87**	**98**	**109**	**120**
12	**4**	**13**	**22**	**31**	**42**	**53**	**64**	**75**	**86**	**97**	**108**	**119**
13	**5**	**14**	**23**	**32**	**41**	**52**	**63**	**74**	**85**	**96**	**107**	**118**
14	**6**	**15**	**24**	**33**	**42**	**51**	**62**	**73**	**84**	**95**	**106**	**117**
15	**7**	**16**	**25**	**34**	**43**	**52**	**61**	**72**	**83**	**94**	**105**	**116**
16	**8**	**17**	**26**	**35**	**44**	**53**	**62**	**71**	**82**	**93**	**104**	**115**
17	**9**	**18**	**27**	**36**	**45**	**54**	**63**	**72**	**81**	**92**	**103**	**114**
18	**10**	**19**	**28**	**37**	**46**	**55**	**64**	**73**	**82**	**91**	**102**	**113**
19	**1**	**12**	**23**	**34**	**45**	**56**	**67**	**78**	**89**	**100**	**109**	**118**
20	**2**	**13**	**24**	**35**	**46**	**57**	**68**	**79**	**90**	**99**	**108**	**117**
21	**3**	**14**	**25**	**36**	**47**	**58**	**69**	**80**	**89**	**98**	**107**	**116**
22	**4**	**15**	**26**	**37**	**48**	**59**	**70**	**79**	**88**	**97**	**106**	**115**
23	**5**	**16**	**27**	**38**	**49**	**60**	**69**	**78**	**87**	**96**	**105**	**114**
24	**6**	**17**	**28**	**39**	**50**	**59**	**68**	**77**	**86**	**95**	**104**	**113**
25	**7**	**18**	**29**	**40**	**49**	**58**	**67**	**76**	**85**	**94**	**103**	**112**
26	**8**	**19**	**30**	**39**	**48**	**57**	**66**	**75**	**84**	**93**	**102**	**111**
27	**1**	**11**	**22**	**33**	**44**	**55**	**66**	**77**	**88**	**99**	**110**	**120**
28	**2**	**12**	**23**	**34**	**45**	**56**	**67**	**78**	**89**	**100**	**109**	**119**
29	**3**	**13**	**24**	**35**	**46**	**57**	**68**	**79**	**90**	**99**	**108**	**118**
30	**10**	**20**	**29**	**38**	**47**	**56**	**65**	**74**	**83**	**92**	**101**	**111**

Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебно-методическое издание

Антропова Гюзель Равильевна

Матвеев Семен Николаевич

Углов Александр Николаевич

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебно-методическое пособие

Редактор

Г.Ф. Таипова

Компьютерная верстка

К.Н. Петров

Подписано в печать 06.08.2024.

Бумага офсетная. Печать ризографическая.

Формат 60х84 1/16. Гарнитура «Nimes New Roman».

Усл. печ. л. 4,41. Уч-изд. л. 1,82. Тираж 5 экз. Заказ 1829

Отпечатано в отделе информации и связей с общественностью

Набережночелнинского института

Казанского (Приволжского) федерального университета

423810, г. Набережные Челны, Новый город, проспект Мира, 68/19

Тел./факс (8552) 39-65-99 e-mail: ic-nchi-kpfu@mail.ru