

УДК 519.86

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА ГИДРОГАЗОДИНАМИКИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ФИНАНСОВОГО РЫНКА

А.Р. Мусин¹, А.С. Сорокин^{2,3}

¹*ПАО Банк ВТБ, г. Москва, 123100, Россия*

²*Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова,
г. Москва, 117997, Россия*

³*Московский финансово-промышленный университет «Синергия»,
г. Москва, 125190, Россия*

Аннотация

Настоящая работа посвящена исследованию возможностей использования математического аппарата гидрогазодинамики, в частности дифференциальных уравнений параболического типа и методов стохастического моделирования для объяснения особенностей поведения цен на финансовом рынке. В работе представлена описывающая процесс изменения рыночных цен эконометрическая модель, в основе которой находится дифференциальное уравнение движения жидкостей и газов Бюргерса. Структура модели позволяет учитывать традиционные закономерности рыночной динамики, в частности связанные с особенностями поведения участников торгов, а также контролировать стохастические ценовые эффекты, связанные с присутствием локального линейного тренда. Тестирование модели, проведенное на минутных данных рынка обменного курса фунта стерлингов к доллару США за весь 2017 г., подтвердило возможности ее использования для прогнозирования котировок рассмотренной валютной пары с точностью, измеренной процентом верных направлений прогноза и равной 57.2%, в свою очередь, величина соответствующего показателя для рассмотренной в целях сравнения модели случайного блуждания составила 49.8%.

Ключевые слова: финансовый рынок, прогнозирование, эконометрические модели, фильтр Калмана

Введение

Зачастую определенные наработки математического аппарата, используемые в области естественнонаучных исследований, могут быть применены для описания процессов, происходящих на финансовых рынках. Примером может служить известная модель случайного блуждания (RW) [1], описывающая процесс стохастического движения физических частиц. Данная модель, появившаяся в научной литературе более ста лет назад, по настоящий момент времени продолжает пользоваться значительной популярностью в области академических исследований прогнозирования поведения финансовых рядов [2]. Существуют исследования, например [3], демонстрирующие преимущества модели случайного блуждания перед традиционными моделями временных рядов, в частности, такими как ARIMA и GARCH.

Целью настоящей работы является демонстрация возможностей применения математического аппарата гидрогазодинамики для описания динамических

особенностей поведения цен на финансовом рынке. В современной литературе представлено множество исследований, основные результаты которых свидетельствуют о схожести свойств процессов гидрогазодинамики со свойствами процесса изменчивости цен на финансовом рынке. В качестве примера можно привести работу [4], в которой авторы предложили модель динамики цены произвольно выбранного торгового актива, базирующуюся на аналогиях между физическим процессом аннигиляции частиц с античастицами и процессом проведения транзакций между рыночными ордерами одинакового объема на покупку и продажу. Другим примером является работа [5], иллюстрирующая схожие свойства процесса флуктуации скорости турбулентного течения жидкости, обладающего высоким числом Рейнольдса, с процессом изменения последовательных доходностей индекса S&P. Полученные в этой работе результаты свидетельствуют о нестационарности и негауссовских свойствах обоих рассмотренных процессов. Необходимо также отметить исследование [6], представляющее сравнительный анализ статистических свойств флуктуации величины скорости течения жидкостей и газов, находящихся в турбулентном состоянии, и вариации доходностей финансового рынка. Авторами исследования было показано, что формы функций плотности распределения подобных процессов зависят от выбора временного горизонта следующим образом: соответствующие функции имеют острый пик при высокой частоте дискретизации данных по времени и стремятся к гауссову виду при ее снижении.

Таким образом, отмеченные работы позволяют убедиться в возможностях проведения аналогий между физическими процессами, в частности в области гидрогазодинамики, и процессом изменения цен на финансовом рынке, для описания которого можно использовать соответствующий математический аппарат, адаптируя его к учету традиционных рыночных закономерностей. В свою очередь, существует ряд исследований, например [7, 8], свидетельствующих о том, что для адекватного моделирования поведения цен на финансовом рынке можно использовать дифференциальные уравнения параболического и гиперболического типов. Разностные схемы для этих уравнений могут быть получены с помощью случайного блуждания, использование которого представляет собой традиционный подход в рамках существующей концепции эффективного рынка [9]. Однако на практике популярностью пользуются дифференциальные уравнения именно параболического типа, в общем виде моделирующие процесс теплопроводности, броуновского движения, а также течения жидкостей и газов. Наиболее известным применением уравнения данного типа является построенная на его основе модель Блэка – Шоулза [10], используемая для оценки опционов.

В настоящей работе будет представлена модель динамики финансового рынка, базирующаяся на дифференциальном уравнении параболического типа и реализующая естественнонаучный подход к описанию процесса изменения рыночных цен, схожего по свойствам с физическим процессом течения жидкостей и газов. Модель учитывает основные характеристические особенности рыночного ценообразования, а также позволяет применять любые методы эконометрической оценки, что делает ее удобной для реального практического использования.

Спецификация модели

За основу представляемой модели была взята модель Джаблонска – Капассо – Морале (JCM – Jablonska–Capasso–Morale) [11], которая базируется на использовании дифференциального уравнения жидкостной динамики Бюргерса [12] и системы стохастических уравнений Капассо – Бианчи [13]. В общем виде модель JCM может быть представлена следующим образом:

$$dp_t^k = [\theta_t \cdot (g_t - p_t^k) + \gamma_t \cdot (z(k, p_t) - p_t^k) + \xi_t \cdot (b(k, p_t) - p_t^k)]dt + \varepsilon_t^k, \quad (1)$$

где элемент p_t^k представляет собой цену участника k , выставленную им в момент времени t , компонента $(z(k, p_t) - p_t^k)$, содержащая элемент $z(k, p_t) = M(p_t) \times [E(p_t) - M(p_t)]$, использующий величины моды $M(p_t)$ и среднего значения $E(p_t)$ цен всех участников торгов в момент времени t , описывает эффект рыночного ценообразования, связанный с явлением открытия участниками рынка позиций в соответствии с текущей тенденцией движения цены. Участники рынка, демонстрирующие подобное поведение, называются чартистами (chartists), совершающими, как показано в работе [14], приблизительно 75% от объема дневных операций на финансовом рынке. Составляющая $(g_t - p_t^k)$ описывает эффекты, связанные со стремлением цены к своему справедливому, фундаментальному значению g_t , что, как следует из результатов работы [15], связано с соответствующим поведением 95% участников рынка. Функция $f(k, p_t)$ по аналогии с уравнением теплопроводности описывает внешнюю периодическую силу и содержит составляющую $(b(k, p_t) - p_t^k)$, отражающую эффект воздействия на цену участника k значительных отклонений в ценах других участников $b(k, p_t)$, а также компоненту ε_t^k , отвечающую за наличие шума в системе. Более подробно с выводом модели ЖСМ, а также с смысловым содержанием ее компонент можно ознакомиться в отмеченной выше оригинальной работе [11].

Важной особенностью модели ЖСМ является то, что она позволяет учитывать традиционные эффекты рыночного ценообразования, возникающие вследствие таких явлений, как следование участниками за текущими наблюдаемыми тенденциями, а также торговля по направлению справедливой цены. Однако необходимо также отметить и основные недостатки модели ЖСМ, наличие которых послужило мотивацией к разработке новой модели, представленной в настоящей работе. Первым и наиболее значимым недостатком является то, что модель ЖСМ построена в соответствии с агентно-ориентированным подходом, что значительно осложняет ее реальное использование в силу объективных трудностей с получением доступа к информации обо всех участниках торгов рассматриваемого финансового рынка. Следующим недостатком является отсутствие контроля за присутствием рыночного тренда и его направления, в рамках которого могут наблюдаться любые явления, влияющие на поведение цен. Последним, но не менее важным, является классический характер ошибки модели, не учитывающий локальные стохастические эффекты формирования цены, такие как присутствие в данных локального ценового уровня или локального тренда [16]. Более детально отмеченные недостатки ЖСМ модели описаны в работе А.Р. Мусина [17], в которой за счет их исправления была получена следующая эконометрическая модель динамики финансовых рядов:

$$dp_t^k = [\theta \cdot (g_t - p_t^k) + \gamma \cdot (z(k, p_t) - p_t^k) + f(k, p_t)]dt, \tag{2}$$

$$f(k, p_t) = \xi \cdot (b(k, p_t) - p_t^k) + \eta \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (g_t + g_{t-1}) + \mu_t^k, \tag{3}$$

$$\mu_t^k = \mu_{t-1}^k + \varepsilon_t^k, \tag{4}$$

где элемент p_t^k представляет собой среднее значение цены в момент времени k , который, в свою очередь, принадлежит более длительному шагу по времени t . Компоненты $(z(k, p_t) - p_t^k)$ и $(g_t - p_t^k)$ отражают отмеченные выше рыночные эффекты, связанные со стремлением цены по направлению текущей тенденции и в сторону своего справедливого значения соответственно. Составляющая $(b(k, p_t) - p_t^k)$ отвечает за влияние, оказываемое на рыночную цену существующими на определенном временном горизонте статистическими выбросами, добавленная компонента $\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (g_t + g_{t-1})$ отвечает за влияние направления существующего тренда, измеряемого с помощью среднего значения между двумя последовательными приращениями справедливой цены g_t . Наиболее значимым отличием функциональной формы

данной модели от модели JCM (1) является переход от классического вида ошибки ε_t^k к новому виду, отражающему присутствие стохастических локально-уровневых эффектов ценообразования, что заключается в добавлении соответствующей компоненты локального уровня μ_t .

Представленная модель (2)–(4) прошла успешное тестирование на исторических минутных данных рынка обменного курса фунта стерлингов к доллару США (GBPUSD) за период 2017 г. С соответствующими результатами можно ознакомиться в отмеченной выше работе [17]. Наиболее значимым результатом этого исследования является продемонстрированная возможность использования модели (2)–(4) для прогнозирования рассмотренного финансового ряда с точностью, измеренной процентом верных направлений прогноза и составившей 56.4%. Успешность этого результата в общем виде заключается в том, что полученная величина процента точных направлений прогноза заметно превысила значение аналогичного показателя для модели случайного блуждания, составившего 49.8%, что, свою очередь, определяет практические возможности применения модели (2)–(4). В качестве примера подобных возможностей можно привести торговлю на рынке бинарных опционов с использованием формируемых моделью прогнозов. Положительная результативность такой торговли возможна при условии превышения показателем процента точных направлений прогноза определенной пороговой величины, задаваемой брокером и, как правило, не превышающей 54%, соответствующей размеру выплачиваемой премии, равному 85% от начальной ставки. Несмотря на подобные результаты, последующее тестирование модели (2)–(4) на рыночных данных, обладающих более низкой частотой дискретизации, в частности на традиционных таймфреймах 30 мин, 1 ч, 4 ч и т. д., выявило снижение величины основного рассматриваемого показателя ниже уровня в 54%. Однако в процессе проведения дальнейших исследований было установлено, что результаты модели могут быть улучшены для любых рассматриваемых таймфреймов, в том числе для минутных данных, при добавлении в уравнение (3) компоненты локального линейного тренда ϕ_t . Подобная модификация уравнения (3) позволила построить новую, представляемую в настоящей работе модель, обладающую повышенной точностью направления прогнозов:

$$dp_t^k = [\theta \cdot (g_t - p_t^k) + \gamma \cdot (z(k, p_t) - p_t^k) + f(k, p_t)]dt, \quad (5)$$

$$f(k, p_t) = \xi \cdot (b(k, p_t) - p_t^k) + \eta \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (g_t + g_{t-1}) + \mu_t^k + \phi_t^k, \quad (6)$$

$$\mu_t^k = \mu_{t-1}^k + \nu_{t-1}^k + \zeta_t^k, \quad (7)$$

$$\nu_t^k = \nu_t^{k-1}, \quad (8)$$

$$\phi_t^k = \lambda \cdot \phi_{t-1}^k + v_t^k, \quad (9)$$

где компоненты $(z(k, p_t) - p_t^k)$, $(g_t - p_t^k)$, $(b(k, p_t) - p_t^k)$ и $\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (g_t + g_{t-1})$ являются одинаковыми по смыслу с аналогичными компонентами уравнения (3), а рыночные эффекты, связанные с воздействием на ценовую динамику, оказываемым присутствующими локальными линейными трендами, контролируются соответствующими элементами μ_t , ϕ_t .

В общем виде модели (2)–(4) и (5)–(9), базируясь на исходной модели JCM, демонстрируют возможности использования методов математического описания процессов из области естественнонаучных исследований, адекватным образом модифицированных с учетом традиционных закономерностей динамики финансового рынка.

Табл. 1

Результаты оценки коэффициентов модели (5)–(9) с помощью фильтра Калмана

Коэффициенты	Значение	Статистическая ошибка	<i>p</i> -значение
θ	0.082	0.000	0,000
γ	0.032	0.000	0,000
ξ	0.024	0.000	0,000
η	0.017	0.000	0,000
λ	0.101	0.000	0,000
Количество наблюдений			31 666
χ^2			8 322 031
<i>p</i> -значение			0.000

Табл. 2

Результаты оценки прогнозной способности модели (5)–(9)

Показатель	Модель	RW
Максимальная относительная ошибка, %	0.48	0.41
Минимальная относительная ошибка, %	0.00	0.00
Средняя относительная ошибка, %	0.01	0.01
Верные направления прогноза, %	57.20	49.80

Оценка коэффициентов модели (5)–(9), полученная с помощью классического фильтра Калмана [18, 19], и тестирование ее прогнозных способностей были проведены на основе минутных данных рынка GBPUSD за 2017 г. с использованием статистического пакета Stata 12 [20]. Соответствующие результаты приведены в табл. 1 и 2.

Представленные результаты свидетельствуют о статистической значимости ($p < 0.05$) полученных коэффициентов модели, оценка которых была проведена на данных обучающего множества, содержащего значения котировок GBPUSD с шагом в 1 мин, взятые за период с 1 января по 31 октября 2017 г. Приведенная в табл. 2 оценка прогнозных способностей модели (5)–(9) была получена на данных тестового множества, содержащего значения рассматриваемого финансового ряда за период двух последних месяцев 2017 г.

Полученные результаты демонстрируют высокие прогнозные возможности модели (5)–(9) с точки зрения показателя процента точных направлений прогноза, составившего 57.2% и превысившего величину аналогичного показателя для исходной модели (2)–(4).

Заключение

В работе была представлена эконометрическая модель динамики финансового рынка, в общем виде полученная на основе использования математических методов естественнонаучного исследования, адаптированных к описанию процессов изменения рыночных цен. Продемонстрированная точность прогнозов построенной модели свидетельствует об адекватности применения подобного подхода и его потенциальных возможностях для проведения дальнейших научно-практических исследований в области моделирования поведения цен на финансовом рынке.

Литература

1. *Pearson K.* Problem of the random walk // *Nature.* – 1905. – V. 72, No 1865. – P. 294–301. – doi: 10.1038/072294b0.

2. *Kemp A.G., Reid G.C.* The random walk hypothesis and the recent behaviour of equity prices in Britain // *Economica*. – 1971. – V. 38, No 149. – P. 28–51. – doi: 10.2307/2551749.
3. *Newbold P., Rayner T., Kellard N., Ennew C.* Is the dollar/ECU exchange rate a random walk? // *Appl. Financ. Econ.* – 1998. – V. 8, No 6. – P. 553–558. – doi: 10.1080/096031098332583.
4. *Yura Y., Takayasu H., Sornette D., Takayasu M.* Financial Brownian particle in the layered order-book fluid and fluctuation-dissipation relations // *Phys. Rev. Lett.* – 2014. – V. 112, No 9. – Art. 098703, P. 1–5. – doi: 10.1103/PhysRevLett.112.098703.
5. *Ghoshghaie S., Breymann W., Peinke J., Talkner P., Dodge Y.* Turbulent cascades in foreign exchange markets // *Nature*. – 1996. – V. 381. – P. 767–770. – doi: 10.1038/381767a0.
6. *Mantegna R.N., Stanley H.E.* Turbulence and financial markets // *Nature*. – 1996. – V. 383. – P. 587–588. – doi: 10.1038/383587a0.
7. *Kac M.* Random walk and the theory of Brownian motion // *Am. Math. Mon.* – 1947. – V. 54, No 7, Pt. 1 – P. 369–391. – doi: 10.2307/2304386.
8. *Lord Rayleigh F.R.S.* On the resultant of a large number of vibrations of the same pitch and of arbitrary phase // *Philos. Mag. J. Sci.* – 1880. – V. 10, No 60. – P. 73–78.
9. *Malkiel B.G.* The efficient market hypothesis and its critics // *J. Econ. Perspect.* – 2003. – V. 17, No 1. – P. 59–82. – doi: 10.1257/089533003321164958.
10. *Black F., Scholes M.* The pricing of options and corporate liabilities // *J. Polit. Econ.* – 1973. – V. 81, No 3. – P. 637–654.
11. *Jablonska M., Kauranne T.* Multi-agent stochastic simulation for the electricity spot market price // *Osinga S., Hofstede G., Verwaart T. (Eds.) Emergent Results of Artificial Economics. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, V. 652.* – Berlin, Heidelberg: Springer, – 2011. – P. 3–14. – doi: 10.1007/978-3-642-21108-9_1.
12. *Weinan E., Khanin K., Mazel A., Sinai Ya.* Invariant measures for Burgers equation with stochastic forcing // *Anna. Math.* – 2000. – V. 151, No 3. – P. 877–960. – doi: 10.2307/121126.
13. *Bianchi A., Capasso V., Morale D.* Estimation and prediction of a nonlinear model for price herding // *Complex Models and Intensive Computational Methods for Estimation and Prediction.* – Padova: CLUEP, 2005. – P. 365–370.
14. *Cheung Y.-W., Chinn M.D.* Currency traders and exchange rate dynamics: A survey of the US market // *J. Int. Money Finance.* – 2001. – V. 20, No 4. – P. 439–471. – doi: 10.1016/S0261-5606(01)00002-X.
15. *Taylor M., Allen H.* The use of technical analysis in the foreign exchange market // *J. Int. Money Finance.* – 1992. – V. 11, No 3. – P. 304–314. – doi: 10.1016/0261-5606(92)90048-3.
16. *Durbin J., Koopman S.J.* A simple and efficient simulation smoother for state space time series analysis // *Biometrika.* – 2002. – V. 89, No 3. – P. 603–615.
17. *Мусин А.П.* Экономико-математическая модель прогнозирования динамики финансового рынка // *Статистика и экономика.* – 2018. – Т. 15, № 4. – С. 61–69.
18. *Kalman R.E., Bucy R.S.* New results in linear filtering and prediction theory // *J. Basic Eng.* – 1961. – V. 83, No 1. – P. 95–108. – doi: 10.1115/1.3658902.
19. *Мусин А.П.* Сравнение качества прогнозных моделей валютного рынка с применением калмановской фильтрации и традиционных моделей временных рядов // *Интернет-журнал Науковедение.* – 2017. – Т. 9, № 3. – С. 37–47.

20. *Цытин А.П., Сорокин А.С.* Статистические пакеты программ в социально-экономических исследованиях // Азимут научных исследований: экономика и управление. – 2016. – Т. 5, № 4. – С. 379–384.

Поступила в редакцию
16.05.18

Мусин Артур Рустамович, главный менеджер отдела продаж конверсионных продуктов в дирекции продаж конверсионных и процентных инструментов Управления продаж продуктов финансового рынка Департамента инвестиционных продуктов

ПАО Банк ВТБ

Пресненская наб., д. 12, г. Москва, 123100, Россия

E-mail: *amusin@nes.ru*

Сорокин Александр Сергеевич, кандидат экономических наук, доцент кафедры математических методов в экономике; доцент кафедры бизнес-статистики

Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова

Стремянный пер., д. 36, г. Москва, 117997, Россия

Московский финансово-промышленный университет «Синергия»

Ленинградский пр-т, д. 80, корп. Е, г. Москва, 125190, Россия

E-mail: *alsorokin@mail.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2018, vol. 160, no. 4, pp. 709–717

Applying the Mathematical Apparatus of Fluid and Gas Dynamics for Financial Market Dynamics Modeling

A.R. Musin^{a}, A.S. Sorokin^{b,c**}*

^a *VTB Bank, Moscow, 123100 Russia*

^b *Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, 117997 Russia*

^c *Moscow University of Finance and Industry “Synergy”, Moscow, 125190 Russia*

E-mail: ^{*}*amusin@nes.ru*, ^{**}*alsorokin@mail.ru*

Received May 16, 2018

Abstract

This paper is devoted to the study of possibilities for using the mathematical apparatus of natural science research, in particular the parabolic type differential equations and stochastic modeling methods in order to explain the behavioral features of financial market. An econometric model has been presented that explains the market prices dynamics based on Burger's differential equation, which is used for modeling liquids and gas motion. The model's structure allows to account for traditional dynamic features of financial market that is, in particular, related to traders behavioral patterns, as well as such price effects associated with the presence of local linear trend. Model testing has been performed on minute market data of pound sterling to US dollar exchange rate for the whole 2017 year and confirmed the possibility of using it for predicting the considered currency pair values with the accuracy of 57.2% measured

by the percentage of correct forecast direction, while the value of the corresponding indicator for a random walk model, additionally reviewed for comparison purposes, was only 49.8%.

Keywords: financial market, forecasting, econometric models, Kalman filter

References

1. Pearson K. Problem of the random walk. *Nature*, 1905, vol. 72, no. 1865, pp. 294–301. doi: 10.1038/072294b0.
2. Kemp A.G., Reid G.C. The random walk hypothesis and the recent behaviour of equity prices in Britain. *Economica*, 1971, vol. 38, no. 149, pp. 28–51. doi: 10.2307/2551749.
3. Newbold P., Rayner T., Kellard N., Ennew C. Is the dollar/ECU exchange rate a random walk? *Appl. Financ. Econ.*, 1998, vol. 8, no. 6, pp. 553–558. doi: 10.1080/096031098332583.
4. Yura Y., Takayasu H., Sornette D., Takayasu M. Financial Brownian particle in the layered order-book fluid and fluctuation-dissipation relations. *Phys. Rev. Lett.*, 2014, vol. 112, no. 9, art. 098703, pp. 1–5. doi: 10.1103/PhysRevLett.112.098703.
5. Ghoshghaie S., Breymann W., Peinke J., Talkner P., Dodge Y. Turbulent cascades in foreign exchange markets. *Nature*, 1996, vol. 381, pp. 767–770. doi: 10.1038/381767a0.
6. Mantegna R.N., Stanley H.E. Turbulence and financial markets. *Nature*, 1996, vol. 383, pp. 587–588. doi: 10.1038/383587a0.
7. Kac M. Random walk and the theory of Brownian motion. *Am. Math. Mon.*, 1947, vol. 54, no. 7, pt. 1, pp. 369–391. doi: 10.2307/2304386.
8. Lord Rayleigh F.R.S. On the resultant of a large number of vibrations of the same pitch and of arbitrary phase. *Philos. Mag. J. Sci.*, 1880, vol. 10, no. 60, pp. 73–78.
9. Malkiel B.G. The efficient market hypothesis and its critics. *J. Econ. Perspect.*, 2003, vol. 17, no. 1, pp. 59–82. doi: 10.1257/089533003321164958.
10. Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities. *J. Polit. Econ.*, 1973, vol. 81, no. 3, pp. 637–654.
11. Jablonska M., Kauranne T. Multi-agent stochastic simulation for the electricity spot market price. In: Osinga S., Hofstede G., Verwaart T. (Eds.) *Emergent Results of Artificial Economics. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Vol. 652. Berlin, Heidelberg, Springer, 2011, pp. 3–14. doi: 10.1007/978-3-642-21108-9_1.
12. Weinan E., Khanin K., Mazel A., Sinai Ya. Invariant measures for Burgers equation with stochastic forcing. *Anna. Math.*, 2000, vol. 151, no. 3, pp. 877–960. doi: 10.2307/121126.
13. Bianchi A., Capasso V., Morale D. Estimation and prediction of a nonlinear model for price herding. In: *Complex Models and Intensive Computational Methods for Estimation and Prediction*. Padova, CLUEP, 2005, pp. 365–370.
14. Cheung Y.-W., Chinn M.D. Currency traders and exchange rate dynamics: A survey of the US market. *J. Int. Money Finance*, 2001, vol. 20, no. 4, pp. 439–471. doi: 10.1016/S0261-5606(01)00002-X.
15. Taylor M., Allen H. The use of technical analysis in the foreign exchange market. *J. Int. Money Finance*, 1992, vol. 11, no. 3, pp. 304–314. doi: 10.1016/0261-5606(92)90048-3.
16. Durbin J., Koopman S.J. A simple and efficient simulation smoother for state space time series analysis. *Biometrika*, 2002, vol. 89, no. 3, pp. 603–615.
17. Musin A.R. Economic-mathematical model for predicting financial market dynamics. *Stat. Ekon.*, 2018, vol. 15, no. 4, pp. 61–69. (In Russian)

-
18. Kalman R.E., Bucy R.S. New results in linear filtering and prediction theory. *J. Basic Eng.*, 1961, vol. 83, no. 1, pp. 95–108. doi: 10.1115/1.3658902.
 19. Musin A.R. Efficiency comparison of FX market's forecasting models with Kalman's filtering and traditional time series models. *Naukovedenie*, 2017, vol. 9, no. 3, pp. 37–47. (In Russian)
 20. Tsypin A.P., Sorokin A.S. Statistical software packages in social and economic researchers. *Azimut Nauchn. Issled.: Ekon. Upr.*, 2016, vol. 5, no. 4, pp. 379–384. (In Russian)
-

Для цитирования: Мусин А.Р., Сорокин А.С. Применение математического аппарата гидрогазодинамики для моделирования динамики временных рядов финансового рынка // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2018. – Т. 160, кн. 4. – С. 709–717.

For citation: Musin A.R., Sorokin A.S. Applying the mathematical apparatus of fluid and gas dynamics for financial market dynamics modeling. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2018, vol. 160, no. 4, pp. 709–717. (In Russian)