

УДК 519.68

СМЕШАННЫЙ МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

М.М. Карчевский, А.Е. Федотов

Аннотация

Рассматривается задача Дирихле для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка, допускающего вырождение по нелинейности. Предлагается смешанная схема метода конечных элементов. Исследуется сходимость к обобщенному решению в смешанной постановке задачи. В частности, установлена сильная сходимость потоков.

Предлагается и исследуется итерационный метод численной реализации смешанных схем конечных элементов, аппроксимирующих задачу Дирихле для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка. Приводится пример применения предлагаемой методики к решению задач нелинейной теории фильтрации.

Введение

Работа посвящена построению и исследованию смешанных схем метода конечных элементов для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка. Условия, налагаемые на функции, образующие уравнение, являются весьма общими и допускают вырождение уравнения по градиенту на некоторой подобласти определения решения. Оператор задачи при этом оказывается лишь монотонным.

В такой ситуации в качестве вспомогательной неизвестной при построении смешанного метода конечных элементов представляется естественным выбирать градиент искомого решения, а не «поток», как это делалось при построении аппроксимаций уравнений со строго монотонными операторами (см. [1–4]).

Проводится исследование существование решения возникающей при таком подходе слабой формулировки задачи Дирихле. В случае, когда выполнено дополнительное условие подчинения, устанавливается однозначность определения «потока» по исходным данным.

Для аппроксимации смешанной постановки используются полиномиальные конечные элементы Равьера–Тома. Доказана слабая сходимость некоторой последовательности приближенных решений к обобщенному решению исходной задачи. В случае, когда выполняется условие подчинения, устанавливается также сильная (в пространстве L_2) сходимость «потоков» (аналогичный результат для простейшей разностной аппроксимации квазилинейного вырождающегося уравнения теории фильтрации получен в [5]).

Для численного решения конечномерных систем уравнений, возникающих при аппроксимации нелинейной задачи Дирихле, в работе предлагаются и исследуются на сходимость два типа итерационных методов. Первый – основан на обращении на каждом шаге итераций седловой матрицы, соответствующей аппроксимации оператора Лапласа при помощи смешанного метода конечных элементов. Второй – использует на верхнем слое более простую, ленточную, матрицу.

В заключение дается применение предлагаемых методов к решению нелинейных задач фильтрации с предельным градиентом. Особо рассматривается случай

задачи о точечном источнике (скважины с заданным расходом). При аппроксимации этой задачи используется прием аддитивного выделения особенности решения, предложенный и исследованный в [6].

Работа непосредственно примыкает к работе [7], в которой частично анонсированы излагаемые здесь результаты.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача Дирихле для двумерного квазилинейного дивергентного эллиптического уравнения второго порядка:

$$-\operatorname{div} a(x, u, \nabla u) + a_0(x, u, \nabla u) = f(x), \quad x \in \Omega \subset R^2, \quad (1)$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (2)$$

Здесь $a(x, p) = (a_1(x, p), a_2(x, p))$, $a_0(x, p)$ – заданные функции, непрерывные при $x \in \Omega$, $p = (p_0, p_1, p_2) \in R^3$, Γ – граница области Ω .

Предполагаются выполненные алгебраические условия монотонности, коэрцитивности и ограниченной нелинейности:¹

$$(\bar{a}(x, p) - \bar{a}(x, q)) \cdot (p - q) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega, p, q \in R^3, \quad (3)$$

$$\bar{a}(x, p) \cdot p \geq c_1(p_1^2 + p_2^2) - c_2 \quad \forall x \in \Omega, p \in R^3, \quad (4)$$

$$|\bar{a}(x, p)| \leq c_3(1 + |p|) \quad \forall x \in \Omega, p \in R^3, \quad (5)$$

где $\bar{a}(x, p) = (a_0(x, p), a_1(x, p), a_2(x, p))$.

Обобщённым решением задачи (1), (2) назовем функцию $u \in \overset{\circ}{W}_2^{(1)}(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$L(u, v) \equiv \int_{\Omega} (a(x, \nabla u) \cdot \nabla v + a_0(x, u)v) dx = \int_{\Omega} fv dx \equiv (f, v) \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}_2^{(1)}(\Omega), \quad (6)$$

где $\overset{\circ}{W}_2^{(1)}(\Omega)$ – пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_{1,2} = \|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^{(1)}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (|u|^2 + |\nabla u|^2) dx \right)^{1/2}.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (3)–(5). Тогда задача (1), (2) имеет хотя бы одно обобщенное решение.*

Доказательство этой теоремы проводится хорошо известными в теории монотонных операторов методами (см., например, [8, 9]).

Сформулируем смешанную задачу для задачи (1), (2). Для этого введем в рассмотрение пространство $H(\operatorname{div}, \Omega) = \left\{ j \in (L_2(\Omega))^2 : \operatorname{div} j \in L_2(\Omega) \right\}$ (см., например, [10]) с нормой

$$\|j\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)} = \left(\int_{\Omega} (|j|^2 + |\operatorname{div} j|^2) dx \right)^{1/2}.$$

¹Всюду в дальнейшем буквой c , возможно с индексами, обозначаем положительные постоянные, не зависящие от других величин, участвующих в неравенствах.

Нетрудно видеть, что если u – обобщенное решение задачи (1), (2), $j(u) = \nabla u$, то

$$\begin{cases} \int_{\Omega} a(x, u, j(u)) \cdot j(v) + a_0(x, u, j)v dx = \int_{\Omega} fv dx & \forall v \in L_2(\Omega), \\ \int_{\Omega} j(u) \cdot q dx + \int_{\Omega} u \operatorname{div} q dx = 0 & \forall q \in H(\operatorname{div}, \Omega). \end{cases} \quad (7)$$

Систему (7) положим в основу расширенной постановки задачи (1), (2), а именно, будем разыскивать пару функций $(u, j) \in X = L_2(\Omega) \times (L_2(\Omega))^2$, удовлетворяющих интегральным тождествам (7). В силу того что любое обобщенное решение задачи (1), (2) порождает решение задачи (7), имеет место

Теорема 2. *При любой функции $f \in L_2(\Omega)$ решение задачи (7) существует.*

В случае неоднородных граничных условий, когда $u(x) = g(x)$, $x \in \Gamma$, смешанная постановка имеет вид:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} a(x, u, j(u)) \cdot j(v) + a_0(x, u, j)v dx = \int_{\Omega} fv dx & \forall v \in L_2(\Omega), \\ \int_{\Omega} j(u) \cdot q dx + \int_{\Omega} u \operatorname{div} q dx = \int_{\Gamma} uq \cdot \nu dx & \forall q \in H(\operatorname{div}, \Omega), \end{cases} \quad (8)$$

где ν – внешняя нормаль к границе Γ .

2. Дискретизация смешанной задачи

Здесь формулируется дискретная смешанная задача, для которой доказана слабая сходимость приближенных решений к некоторому точному решению и сильная сходимость потоков.

В дальнейшем будем предполагать, что область Ω – многоугольник. Через \mathcal{T}_h будем обозначать правильную регулярную триангуляцию (см., например, [11]) области Ω . При построении смешанной схемы конечных элементов будем использовать пространство $P_k(K)$ полиномов степени $k \geq 1$ по совокупности переменных и пространство полиномов Равьера–Тома (см., например, [12])

$$RT_k(K) = (P_k(K))^2 \oplus xP_k(K), \quad x = (x_1, x_2).$$

Поясним, что элемент $v \in RT_k(K)$ есть вектор-функция вида

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 + p_3x_1 \\ p_2 + p_3x_2 \end{bmatrix},$$

где $p_i \in P_k(K)$, $i = 1, 2, 3$.

Будем использовать также конечноэлементные пространства (см., например, [12])

$$N_h = \{q_h \in H(\operatorname{div}, \Omega); q|_K \in RT_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$

$$M_h = \{v_h \in L_p(\Omega); v_h|_K \in P_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \quad (9)$$

$$X_h = M_h \times N_h.$$

Под приближенным решением задачи (1), (2) будем понимать пару функций $(u_h, j_h) \in X_h$ таких, что

$$\int_{\Omega} (a(x, u_h, j_h(u_h)) \cdot j_h(v_h) + a_0(x, u_h, j_h(u_h))v_h) dx = \int_{\Omega} fv_h dx \quad \forall v_h \in M_h, \quad (10)$$

где функция $j_h(u_h) \in N_h$ определяется по $u_h \in M_h$ как решение уравнения

$$\int_{\Omega} j_h(u_h) \cdot q_h dx + \int_{\Omega} u_h \operatorname{div} q_h dx = 0 \quad \forall q_h \in N_h. \quad (11)$$

2.1. Исследование приближенного метода. В дальнейшем будут существенно использованы следующие леммы.

Лемма 1 (См., например, [1, 2]). *Существует не зависящая от h положительная постоянная с такой, что для любой функции $v_h \in M_h$*

$$\sup_{q_h \in N_h} \frac{\int_{\Omega} v_h \operatorname{div} q_h dx}{\|q_h\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}} \geq c \|v_h\|_{L_2(\Omega)}. \quad (12)$$

Лемма 2. *Существует положительная постоянная с такой, что*

$$\int_{\Omega} u_h^2 dx \leq c \int_{\Omega} |j_h(u_h)|^2 dx \quad \forall u_h \in M_h, \quad (13)$$

где $j_h(u_h)$ определяется как решение уравнения (11).

Доказательство леммы 2 непосредственно вытекает из определения $j_h(u_h)$ и леммы 1.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия (3)–(5). Тогда задача (10), (11) имеет по крайней мере одно решение при любой правой части $f \in L_2(\Omega)$. Для любого решения задачи (10), (11) справедлива априорная оценка*

$$\|j_h(u_h)\|_{L_2(\Omega)} \leq c \|f\|_{L_2(\Omega)} + c_1, \quad (14)$$

где c, c_1 – положительные постоянные, не зависящие от h .

Доказательство. Уравнение (11) – уравнение с положительно определенной матрицей (матрицей масс) относительно $j_h(u_h)$ при заданном u_h . Поэтому на уравнение (10) можно смотреть как на уравнение относительно u_h . Покажем, что для соответствующего ему оператора выполнены условия топологической леммы Брауэра (см., например, [9]). Для этого достаточно установить, что

$$J(u_h) = \int_{\Omega} (a(x, u_h, j_h(u_h)) \cdot j_h(u_h) + a_0(x, u_h, j_h(u_h))u_h) dx - \int_{\Omega} fu_h dx \geq 0, \quad (15)$$

если $\|u_h\|_{L_2(\Omega)}$ достаточно велика. Вследствие условия (4) и леммы 2 имеем

$$\begin{aligned} J(u_h) &\geq c_1 \|j_h(u_h)\|_{L_2(\Omega)}^2 - c_2 \operatorname{meas}(\Omega) - \|f\|_{L_2(\Omega)} \|u_h\|_{L_2(\Omega)} \geq \\ &\geq (c_1/c) \|u_h\|_{L_2(\Omega)}^2 - c_2 \operatorname{meas}(\Omega) - \|f\|_{L_2(\Omega)} \|u_h\|_{L_2(\Omega)} \geq 0 \end{aligned} \quad (16)$$

при $\|u_h\|_{L_2(\Omega)} \geq (\|f\|_{L_2(\Omega)} + (\|f\|_{L_2(\Omega)} + 4c_1c_2 \operatorname{meas}(\Omega)/c)^{1/2})/2c_1$, откуда на основании леммы Брауэра вытекает разрешимость уравнения (10) и априорная оценка (14). \square

При исследовании сходимости метода будем считать, что каждая триангуляция с меньшим шагом строится по имеющейся триангуляции с большим шагом путём разбиения её треугольников.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия (3)–(5). Тогда существуют последовательности решений u_h и $j_h(u_h)$ и некоторые функции u^* и j^* такие, что $u_h \rightharpoonup u^*$, $j_h(u_h) \rightharpoonup j^*$ ² в $L_2(\Omega)$, причём пара функций u^* , j^* является точным решением задачи (7).*

Доказательство. Мы используем здесь обычные для метода монотонности (см. [8, 9]) приемы. В силу слабой компактности ограниченного множества в $L_2(\Omega)$ и оценок (13), (14) существуют такие функции $u^* \in L_2(\Omega)$, $j^* \in (L_2(\Omega))^2$ и подпоследовательность $u_{h_k}(x)$ последовательности $u_h(x)$, что $u_{h_k} \rightharpoonup u^*$, $j_{h_k}(u_{h_k}) \rightharpoonup j^*$. Покажем, что

$$j^* = j(u^*). \quad (17)$$

Из принятого предположения о способе измельчения триангуляций области Ω из равенства (11) вытекает, что при некотором фиксированном h

$$\int_{\Omega} j_{h_k}(u_{h_k}) \cdot q_h \, dx + \int_{\Omega} u_{h_k} \operatorname{div} q_h \, dx = 0 \quad \forall q_h \in N_h, h_k \leq h.$$

Устремляя в этом равенстве h_k к нулю, получим

$$\int_{\Omega} j^* \cdot q_h \, dx + \int_{\Omega} u^* \operatorname{div} q_h \, dx = 0 \quad \forall q_h \in N_h, h_k \leq h,$$

откуда вследствие плотности $\bigcup N_h$ в $H(\operatorname{div}, \Omega)$ вытекает, что

$$\int_{\Omega} j^* \cdot q \, dx + \int_{\Omega} u^* \operatorname{div} q \, dx = 0 \quad \forall q \in H(\operatorname{div}, \Omega), \quad (18)$$

т. е. $j^* = j(u^*)$. Покажем теперь, что пара u^* и j^* – решение задачи (7). Используя условие монотонности (3), получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (a(x, u_h, j_h(u_h)) - a(x, w, j(w))) \cdot (j_h(u_h) - j(w)) \, dx + \\ & + \int_{\Omega} (a_0(x, u_h, j_h(u_h)) - a_0(x, w, j(w))) (u_h - w) \, dx \geq 0 \quad \forall h > 0, w \in L_2(\Omega), \end{aligned}$$

откуда с учётом равенства (10) вытекает, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (f u_h - a(x, u_h, j_h(u_h)) \cdot j(w) - a_0(x, u_h, j_h(u_h)) w - \\ & - a(x, w, j(w)) \cdot (j_h(u_h) - j(w)) - a_0(x, w, j(w)) (u_h - w)) \, dx \geq 0. \quad (19) \end{aligned}$$

В силу априорных оценок (14), (13) и условия (5) существует постоянная c такая, что

$$\|a_i(x, u_h, j_h(u_h))\|_{L_2(\Omega)} \leq c, \quad i = 0, 1, 2,$$

²Как обычно, символ \rightharpoonup означает слабую сходимость в соответствующем пространстве.

а это означает существование последовательности $h_k \rightarrow 0$ и функций $b_i \in L_2(\Omega)$ таких, что $a_i(x, u_{h_k}, j_{h_k}(u_{h_k})) \rightharpoonup b_i$ при $h_k \rightarrow 0$, $i = 0, 1, 2$. Очевидно, можно считать, что $u_{h_k} \rightharpoonup u^*$, $j_{h_k}(u_{h_k}) \rightharpoonup j(u^*)$ для этой же последовательности h_k . Переходя к пределу в неравенстве (19) при $h_k \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (fu^* - b \cdot j(w) - b_0 w - a(x, w, j(w)) \cdot (j^* - j(w)) - \\ - a_0(x, w, j(w))(u^* - w)) dx \geq 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Используя теперь тождество (10) и рассуждая так же, как и при получении равенства (17), нетрудно установить, что

$$\int_{\Omega} fv dx = \int_{\Omega} (b \cdot j(v) + b_0 v) dx \quad \forall v \in L_2(\Omega), \quad (21)$$

следовательно,

$$\int_{\Omega} ((b - a(x, w, j(w))) \cdot (j^* - j(w)) + (b_0 - a_0(x, w, j(w)))(u^* - w)) dx \geq 0.$$

Полагая здесь $w = u^* - \lambda v$, где v – произвольная функция из $L_2(\Omega)$, $\lambda > 0$, и переходя затем к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, получим

$$\int_{\Omega} ((b - a(x, u^*, j^*)) \cdot j(v) + (b_0 - a_0(x, u^*, j^*))v) dx \geq 0,$$

откуда вследствие произвольности v вытекает, что

$$\int_{\Omega} ((b - a(x, u^*, j^*)) \cdot j(v) + (b_0 - a_0(x, u^*, j^*))v) dx = 0 \quad \forall v \in L_2(\Omega).$$

Вновь используя (21), получим отсюда, что

$$\int_{\Omega} ((a(x, u^*, j^*)) \cdot j(v) + a_0(x, u^*, j^*)v) dx = \int_{\Omega} fv dx \quad \forall v \in L_2(\Omega). \quad (22)$$

Выполнение тождеств (18), (22) означает, что u^*, j^* – решение задачи (7). \square

Заменим теперь условие монотонности (3) более сильным условием

$$|\bar{a}(x, p) - \bar{a}(x, q)| \leq c((\bar{a}(x, p) - \bar{a}(x, q)) \cdot (p - q))^{1/2} \quad \forall p, q \in R^3. \quad (23)$$

Условие (23) называют, обычно, условием подчинения.

Лемма 3. Пусть выполнено условие (23). Тогда «поток» $\bar{a}(x, u, j(u))$, построенный по решению задачи (7), и его конечноэлементная аппроксимация $\bar{a}(x, u_h, j_h(u_h))$, построенная по решению задачи (10), (11), определяются исходными данными задачи (1), (2) однозначно.

Доказательство. Пусть u_1, u_2 – два различных решения задачи (7), $\bar{a}(x, u_1, j(u_1)), \bar{a}(x, u_2, j(u_2))$ – соответствующие им «потоки». Используя неравенство подчинения (23), получим

$$\begin{aligned} \|\bar{a}(x, u_1, j_1(u_1)) - \bar{a}(x, u_2, j_2(u_2))\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \\ \leq c \int_{\Omega} [(a(x, u_1, j(u_1)) - a(x, u_2, j(u_2))) \cdot (j(u_1) - j(u_2)) + \\ + (a_0(x, u_1, j(u_1)) - a_0(x, u_2, j(u_2)))(u_1 - u_2)] dx, \end{aligned}$$

но по определению решений $(u_1, j(u_1))$ и $(u_2, j(u_2))$ интеграл в правой части последнего неравенства равен нулю. Единственность конечноэлементной аппроксимации потока, т. е. $\bar{a}(x, u_h, j_h(u_h))$, доказывается аналогично. \square

Теорема 5. Пусть выполнены условия (4), (5), (23). Тогда существует последовательность $h \rightarrow 0$ такая, что имеет место сильная сходимость $a(x, u_h, j_h(u_h)) \rightarrow a(x, u, j(u))$ в пространстве $L_2(\Omega)$.

Доказательство. Вследствие неравенства (23) и определения приближенного решения $(u_h, j_h(u_h))$ для любого h имеем

$$\begin{aligned} & \| \bar{a}(x, u_h, j_h(u_h)) - \bar{a}(x, u, j(u)) \|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \\ & \leq c \left(\int_{\Omega} a(x, u, j(u)) \cdot (j(u) - j_h(u_h)) dx + \int_{\Omega} a_0(x, u, j(u))(u - u_h) dx - \right. \\ & \quad \left. - \int_{\Omega} a(x, u_h, j_h(u_h)) \cdot j(u) dx - \int_{\Omega} a_0(x, u_h, j_h(u_h))u dx + \int_{\Omega} f u_h dx \right) \equiv cI. \end{aligned}$$

Выбирая теперь последовательность $h \rightarrow 0$ так, чтобы $u_h \rightarrow u$, $j_h(u_h) \rightarrow j(u)$, $\bar{a}(x, u_h, j_h(u_h)) \rightarrow \bar{a}(x, u, j(u))$, получим, что

$$I \rightarrow - \int_{\Omega} \bar{a}(x, u, j(u)) \cdot j(u) dx - \int_{\Omega} \bar{a}_0(x, u, j(u))u dx + (f, u) = 0,$$

т. е. $\bar{a}(x, u_h, j_h(u_h)) \rightarrow \bar{a}(x, u, j(u))$ при $h \rightarrow 0$. \square

3. Итерационный метод для задачи (10), (11)

Введем в рассмотрение конечномерные операторы A_h , C_h и вектор f_h , определяемые соотношениями¹

$$\begin{aligned} A_h u_h \cdot v_h &= \int_{\Omega} (a(x, u_h, j_h(u_h)) \cdot j_h(v_h) + a_0(x, u_h, j_h(u_h))v_h) dx \quad \forall u_h, v_h \in M_h, \\ B_h u_h \cdot v_h &= \int_{\Omega} j_h(u_h)j_h(v_h) dx \quad \forall u_h, v_h \in M_h, \quad f_h \cdot v_h = \int_{\Omega} f v_h dx \quad \forall v_h \in M_h. \end{aligned}$$

Для решения задачи (10), (11) будем использовать итерационный метод

$$B_h \frac{u_h^{k+1} - u_h^k}{\tau} + A_h u_h^k = f_h, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (24)$$

Реализация итерационного метода (24) подразумевает вычисление вектора невязки $r_h^k = A_h u_h^k - f_h$ по известному $u_h^k \in M_h$ и решение уравнения

$$B_h w_h = -r_h^k \quad (25)$$

относительно поправки $w_h = (u_h^{k+1} - u_h^k)/\tau$.

¹Как обычно используем одинаковые обозначения для функции из пространства M_h и вектора ее узловых параметров.

Вектор невязки естественно представить в виде $r_h^k = r_{h,1}^k + r_{h,2}^k$, где

$$r_{h,1}^{k,1} \cdot v_h = \int_{\Omega} (a_0(x, u_h^k, j_h(u_h^k)) - f) v_h \, dx \quad \forall v_h \in M_h,$$

$$r_{h,2}^k \cdot v_h = \int_{\Omega} (a(x, u_h^k, j_h(u_h^k)) \cdot j_h(v_h)) \, dx \quad \forall v_h \in M_h.$$

Вычисление вектора $r_{h,1}^k$ при известных $u_h^k, j_h(u_h^k)$ может быть выполнено при помощи обычного алгоритма сборки. Для вычисления вектора $r_{h,2}^k$ введем в рассмотрение функцию $a_h^k \in N_h$, определяемую соотношением

$$\int_{\Omega} a_h^k \cdot q_h \, dx = \int_{\Omega} a(x, u_h^k, j_h(u_h^k)) \cdot q_h \, dx \quad \forall q_h \in N_h. \quad (26)$$

При известных $u_h^k, j_h(u_h^k)$ вычисление a_h^k так же, как и вычисление $j_h(u_h^k)$ по u_h^k , сводится к решению системы уравнений с матрицей Грама (матрицей масс), соответствующей базису пространства M_h . Используя определение a_h^k и $j_h(v_h)$, можно написать

$$r_{h,2}^k \cdot v_h = \int_{\Omega} a_h^k \cdot j_h(v_h) \, dx = - \int_{\Omega} v_h \operatorname{div} a_h^k \, dx \quad \forall v_h \in M_h.$$

Таким образом, вычисление вектора $r_{h,2}^k$ при известном a_h^k также сведено к алгоритму сборки.

Каждый шаг итерационного метода (24) требует решения двух систем линейных алгебраических уравнений с матрицей масс, соответствующей базису пространству N_h , и одной системы с симметричной положительно определённой матрицей оператора B_h .

Уравнение (25), как нетрудно видеть, эквивалентно системе уравнений с седловой матрицей:

$$\begin{aligned} M_h j_h &+ C_h w_h = 0, \\ -C_h^T j_h &= r_h^k. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь M_h, C_h – матрицы, определенные соотношениями

$$M_h j_h \cdot q_h = \int_{\Omega} j_h \cdot q_h \, dx \quad \forall j_h, q_h \in N_n,$$

$$C_h v_h \cdot q_h = \int_{\Omega} v_h \operatorname{div} q_h \, dx \quad \forall v_h \in M_h, q_h \in N_n.$$

Прямые и итерационные методы решения систем линейных уравнений с седловыми матрицами достаточно хорошо разработаны (см., например, [13–17]).

Из (27) видно, что $B_h = C_h^T M_h^{-1} C_h$. Покажем, что выполнены неравенства $c_0 h^2 q_h \cdot q_h \leq M_h q_h \cdot q_h \leq c_1 h^2 q_h \cdot q_h$ для любых $q_h \in N_h$, $c_0, c_1 = \text{const} > 0$. Для этого рассмотрим произвольный конечный элемент $e \in T_h$ и базис $\{\varphi_k\} \subset N_h(e)$ на этом конечном элементе. По определению

$$M_h q_h \cdot q_h = \int_{\Omega} q_h^2 \, dx = \sum_{e \in T_h} \int_e q_h^2 \, dx = M_e q_h \cdot q_h, \quad (28)$$

где $M_e = \left\{ \int_e \varphi_k \varphi_j dx \right\}_{k,j}$ – локальная матрица масс на элементе. Для получения искомой оценки снизу используем аффинное преобразование $x = F(\hat{x}) = B\hat{x} + b$ конечного элемента e на базисный конечный элемент \hat{e} . Ясно, что для аффинного преобразования F справедливо равенство

$$M_e q_h \cdot q_h = |\det(B)| \left(\widehat{M}_{\hat{e}} q_h \cdot q_h \right),$$

из которого, в силу регулярности триангуляции и согласно [11, с. 122–126], вытекают оценки

$$\widehat{c}_0 h_e^2 q_h \cdot q_h \leq \widehat{c} h_e^2 \left(\widehat{M}_{\hat{e}} q_h \cdot q_h \right) \leq M_e q_h \cdot q_h \leq \widehat{C} h_e^2 \left(\widehat{M}_{\hat{e}} q_h \cdot q_h \right) \leq \widehat{c}_1 h_e^2 q_h \cdot q_h.$$

Для получения искомых оценок $M_h q_h \cdot q_h$ осталось воспользоваться последними неравенствами и представлением (28).

Положим $\tilde{B}_h = h^{-2} C_h^T C_h$. Матрицы B_h и \tilde{B}_h энергетически эквивалентны:

$$c_1^{-1} \tilde{B}_h \leq B_h \leq c_0^{-1} \tilde{B}_h, \quad (29)$$

поэтому наряду с итерационным процессом (24) естественно рассматривать итерационный процесс

$$\tilde{B}_h \frac{u_h^{k+1} - u_h^k}{\tau} + A_h u_h^k = f_h, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (30)$$

Понятно, что реализация итерационного процесса (30) существенно проще, чем реализация итерационного процесса (24), так как вместо решения системы (27) с седловой матрицей здесь приходится решать систему с симметричной положительно определенной ленточной матрицей \tilde{B}_h меньшей размерности.

4. Исследование сходимости итерационного метода

Теорема 6. Пусть выполнено условие (4), (23). Тогда существует решение задачи (10), (11), и при любом начальном приближении u_h^0 , $0 < \tau < 2/c_1$ последовательность невязок итерационного метода, $A_h u_h^k - f_h$, стремится к нулю.

Доказательство. Из условия (23) очевидным образом вытекают условие монотонности (3) и условие Липшица

$$|\bar{a}(x, p) - \bar{a}(x, q)| \leq c|p - q| \quad \forall p, q \in R^3, \quad (31)$$

что обеспечивает разрешимость задачи (10), (11). Используя далее условие (23) и свойства оператора B_h , получаем

$$|(A_h u_h - A_h v_h) \cdot w_h| \leq c ((A_h u_h - A_h v_h) \cdot (u_h - v_h))^{1/2} \|j_h(w_h)\|.$$

По определению оператора B_h имеем $\|j_h(w_h)\| = (B_h w_h \cdot w_h)^{1/2} = \|w_h\|_{B_h}$, т. е. справедливо неравенство

$$|(A_h u_h - A_h v_h) \cdot w_h| \leq c ((A_h u_h - A_h v_h) \cdot (u_h - v_h))^{1/2} \|w_h\|_{B_h}. \quad (32)$$

Отсюда вследствие теоремы 1, гл. 5 [18] вытекает, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (A_h u_h^k - A_h u_h) \cdot (u_h^k - u_h) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|A_h u_h^k - f_h\|_{B_h} = 0, \quad (33)$$

если $0 < \tau < 2/c$. Кроме того, на основании (23) получаем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{a}(x, u_h^k, j_h(u_h^k)) - \bar{a}(x, u_h, j_h(u_h))\|_{L_2(\Omega)} = 0. \quad (34)$$

□

Замечание 1. Вследствие неравенств (29) все утверждения относительно сходимости итерационного метода (24) сохраняются (с очевидной корректировкой условий на параметр τ) и для итерационного метода (30).

Сходимость последовательности u_h^k удается установить при более сильных ограничениях на $\bar{a}(x, p)$.

Теорема 7. Пусть выполнено условие (31) и

$$(\bar{a}(x, p) - \bar{a}(x, q)) \cdot (p - q) \geq c_0 |p - q|^2 \quad \forall p, q \in R^3, \quad (35)$$

где c_0 – положительная постоянная. Тогда задача (10), (11) имеет единственное решение, $u_h^k \rightarrow u_h$ при $k \rightarrow \infty$. Справедлива следующая оценка скорости сходимости итерационного метода (24):

$$\|u_h^{k+1} - u_h\|_{B_h} \leq \rho(\tau) \|u_h^k - u_h\|_{B_h}, \quad (36)$$

где $\rho(\tau) = (1 - 2\tau c_0 + \tau^2 c_1^2)^{1/2} < 1$ при $0 < \tau < 2c_0/c_1^2$.

Доказательство. По аналогии с доказательством неравенства (32) нетрудно получить, что при выполнении условий (31), (35) справедливы неравенства B_h -монотонности и B_h -липшиц-непрерывности оператора A_h :

$$(A_h u_h - A_h v_h) \cdot (u_h - v_h) \geq c_0 \|u_h - v_h\|_{B_h}^2 \quad \forall u_h, v_h \in M_h, \quad (37)$$

$$(A_h u_h - A_h v_h) \cdot w_h \leq c_1 \|u_h - v_h\|_{B_h} \|w_h\|_{B_h} \quad \forall u_h, v_h, w_h \in M_h, \quad (38)$$

откуда в силу теоремы 3 гл. 5 [18] немедленно вытекает доказываемое утверждение. □

5. Пример

В качестве примера применения предлагаемой методики рассмотрим плоскую стационарную задачу фильтрации несжимаемой жидкости, следующей нелинейному закону фильтрации с предельным градиентом (см. [6, 19])

$$v = -g(|\nabla u|) |\nabla u|^{-1} \nabla u,$$

где v – поле скоростей фильтрации, u – поле давлений жидкости. Изучается фильтрация в области $\Omega \subset R^2$ с липшиц-непрерывной границей Γ , на которой давление считается равным нулю, при наличии источников плотности $f(x)$.

Иными словами, решается краевая задача

$$-\operatorname{div} \left(\frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \right) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (39)$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (40)$$

Считаем, что функция g , определяющая закон фильтрации, представима в виде

$$g(s) = \begin{cases} 0, & s < s_0, \\ g^*(s - s_0), & s \geq s_0, \end{cases}$$

где $s_0 \geq 0$ – заданное число, называемое предельным градиентом сдвига. Уравнение (39) вырождается при $|\nabla u| \leq s_0$. Области, в которых выполнено это условие называются застойными зонами. Скорость фильтрации в этих зонах обращается в нуль.

Относительно функции $g^* : [0, +\infty) \rightarrow R^1$ предполагаются выполненными условия

$$g^*(0) = 0, \quad g^*(s) > g^*(t) \quad \forall s > t \geq 0, \quad (41)$$

$$\exists k > 0, \quad s^* \geq 0 : g^*(s^*) \geq ks^*, \quad g^*(s) - g^*(t) \geq k(s - t) \quad \forall s \geq t \geq s^*, \quad (42)$$

$$\exists L > 0 : g^*(s) - g^*(t) \leq L(s - t) \quad \forall s \geq t \geq 0. \quad (43)$$

Как показано в [19, 20], функция $a(x, p) = (g(|p|)/|p|)p, \quad p \in R^2$, удовлетворяет условиям (4), (5), (23).

Интересен случай, когда в качестве функции плотности источников $f(x)$ рассматривается функция $q\delta(x)$, где $\delta(x)$ есть δ -функция, сосредоточенная в начале координат. Это соответствует задаче с точечным источником интенсивности q .

Предполагается, что начало координат принадлежит Ω .

Определим по функции g оператор $G : R^n \rightarrow R^n$:

$$Gy = \begin{cases} g(|y|)|y|^{-1}y, & y \neq 0; \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Под обобщенным решением задачи (39), (40), следуя [6], будем понимать функцию $v \in \overset{\circ}{W}_1^{(1)}(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству:

$$\int_{\Omega} (G(\nabla v(x)), \nabla \eta(x)) dx = q\delta(0) \quad \forall \eta \in C_0^{\infty}(\Omega). \quad (44)$$

Существование решения этой задачи доказано в [6] на основе представления его в виде $v = v_r + u$, где u – функция из $W_2^{(1)}(\Omega)$ такая, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (G(\nabla(v_r + v_{\Gamma} + u)) - G(\nabla v_r), \nabla \eta) dx &= 0 \quad \forall \eta \in C_0^{\infty}(\Omega), \\ u(x) &= -v_r(x) \quad \forall x \in \Gamma, \end{aligned}$$

где v_r – решение задачи (44) для круга $B_r = \{x \in R^n : |x| < r\} \supset \Omega$. Явное представление функции v_r смотри, например, в [21].

Смешанная схема конечных элементов для задачи (44) принимает вид

$$A_h(u_h) = 0, \quad (45)$$

где оператор A_h определяется соотношениями

$$A_h u_h \cdot v_h = \int_{\Omega} \left(G(\nabla v_r + \tilde{j}_h(u_h)) - G(\nabla v_r), j_h(v_h) \right) dx \quad \forall u_h, v_h \in M_h,$$

$$\int_{\Omega} \tilde{j}_h(u_h) \cdot q_h dx + \int_{\Omega} u_h \operatorname{div} q_h dx = - \int_{\Gamma} v_r q_h \cdot \nu dx \quad \forall q_h \in N_h,$$

где ν – внешняя нормаль к Γ .

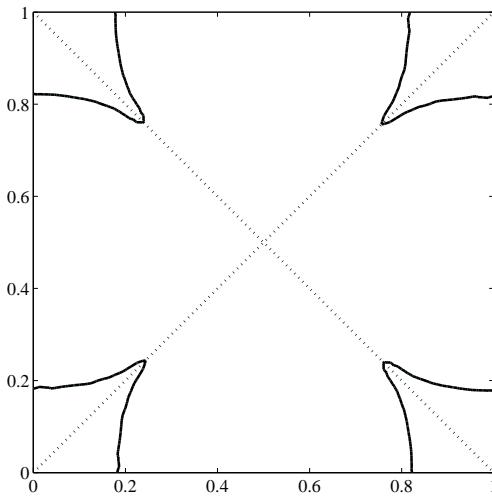


Рис. 1. Границы застойных зон

Нетрудно проверить, что для оператора A_h выполнено условие (32), что обеспечивает сходимость потока (скорости фильтрации) при применении итерационных методов (24), (30) для решения уравнения (45).

Выполнен ряд численных экспериментов по определению границ застойных зон при действии точечного источника, расположенного в центре квадратного пласта, подтвердивших эффективность предлагаемых итерационных методов. На рис. 1 показаны границы застойных зон, примыкающих к угловым точкам области. Интенсивность источника $q = 1$, предельный градиент $s_0 = 1,7$. Сторона квадрата равна единице. Триангуляция области строилась путем разбиения ячеек равномерной квадратной сетки шага $h = 1/80$ прямыми, параллельными биссектрисе первого координатного угла. Применялись простейшие элементы Равъяра–Тома при $k = 1$. Границы застойных зон строились как линии, определяемые уравнением $|j_h(u_h)| = s_0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта АН РТ.

Summary

M.M. Karchevsky, A.E. Fedotov. Mixed finite element method for quasilinear degenerate elliptic equations.

The Dirichlet problem for the quasilinear elliptic equations of the second order that admits nonlinear degeneration is considered. A mixed scheme of the finite element method is proposed. The convergence of the discrete mixed problem solution to the generalized solution is investigated. In particular, the strong convergence of discrete flux is established. The iterative methods of the numerical solution of the mixed finite element method schemes are proposed and investigated. There is an example of the application of the proposed numerical methods to the nonlinear seepage theory problem.

Литература

1. *Farhloul M.* A mixed finite element method for a nonlinear Dirichlet problem // IMA. J. Num. Analysis. – 1998. – V. 18. – P. 121–132.
2. *Farhloul M., Manouzi H.* On a mixed finite element method for the p-Laplacian // Can. Appl. Math. Quathryl. – V. 8. – No 1. – Spring 2000. – P. 67–78.

3. *Карчевский М.М., Федотов А.Е.* Об одном варианте смешанного метода конечных элементов для квазилинейных эллиптических уравнений // Исследования по прикладной математике и информатике. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2003. – Вып. 24.– С. 74–80.
4. *Karchevsky M.M., Fedotov A.E.* Error estimates and iterative procedure for mixed finite element solution of second-order quasi-linear elliptic problems // Comput. Methods in Appl. Math. – 2004. – V. 4. – No 4. – P. 445–463.
5. *Карчевский М.М., Лапин А.В.* Исследование разностной схемы для нелинейной стационарной задачи теории фильтрации // Исследования по прикладной математике. – Казань: Изд-во Казан. ун-та. – 1979. – Вып. 6. – С. 23–31.
6. *Задворнов О.А.* Исследование нелинейной стационарной задачи фильтрации при наличии точечного источника // Изв. вузов. Математика. – 2005. – № 1. – С. 58–63.
7. *Карчевский М.М* Об одном подходе к построению смешанных схем МКЭ для квазилинейных эллиптических уравнений // Материалы Пятого Всеросс. семинара «Сеточные методы для краевых задач и их приложения», Казань 17–21 сент. 2004 г. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2004. – С. 108–111.
8. *Дубинский Ю. А.* Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка // Успехи мат. наук. – 1968 – Т. 23, Вып. 1. – С. 45–90.
9. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 588 с.
10. *Темам Р.* Уравнения Навье – Стокса. Теория и численный анализ. – М.: Мир, 1981. – 408 с.
11. *Съярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980. – 512 с.
12. *Brezzi F., Fortin M.* Mixed and Hybrid Finite Element Methods. – Springer series in Comp. Math., 1991. – 350 р.
13. *Масловская Л.В.* Обобщенный алгоритм Холесского для смешанных дискретных аналогов эллиптических краевых задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1989. – Т. 29, № 1. – С. 67–74.
14. *Масловская Л.В.* Об условиях применимости обобщенного алгоритма Холесского // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1992. – Т. 32, № 3. – С. 339–347.
15. *Икрамов Х.Д.* Несколько замечаний по поводу обобщенного алгоритма Холесского // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1992. – Т. 32, № 7. – С. 1126–1130.
16. *Дьяконов Е.Г.* Минимизация вычислительной работы. Асимптотически оптимальные алгоритмы для эллиптических задач. – М.: Наука, 1989. – 272 с.
17. *Чижонков Е.В.* Методы релаксации для решения уравнений с седловыми операторами // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Итерационные методы решения линейных и нелинейных сеточных задач. Материалы Всеросс. шк.-конф. – 1999. – Т. 2. – С. 44–93.
18. *Карчевский М.М., Ляшко А.Д.* Разностные схемы для нелинейных уравнений математической физики. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1976. – 158 с.
19. *Карчевский М.М., Ляшко А.Д.* О решении некоторых нелинейных задач теории фильтрации // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 6. – С. 73–81.
20. *Глушенков В.Д.* Об одном уравнении нелинейной теории фильтрации // Прикладная математика в технико-экономических задачах. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1976. – С. 12– 21.

21. *Бернадинер, Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Гидродинамическая теория аномальных жидкостей. – М.: Наука, 1975. – 199 с.

Поступила в редакцию
19.10.05

Карчевский Михаил Миронович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики Казанского государственного университета.

E-mail: *Mikhail.Karchevsky@ksu.ru*

Федотов Александр Евгеньевич – аспирант кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета.

E-mail: *AFedotov@ksu.ru*