

УДК 622.831

## КОНЦЕПЦИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ И МЕХАНИКА ГОРНЫХ ПОРОД

*Н.М. Комарцов, Т.А. Лужанская, Б.А. Рычков*

### Аннотация

В развиваемой концепции скольжения основной прочностной характеристикой материала считается сопротивление сдвигу. Проанализированы экспериментальные данные А.Н. Ставрогина по трехосному неравномерному сжатию цилиндрических образцов горных пород. Установлена единая зависимость чисто пластической деформации от уровня напряжений для всех видов напряженного состояния. Упругая составляющая деформации рассмотрена, в том числе, с позиции физически нелинейной теории упругости. Определен коэффициент разрыхления материала. Предложен метод составления паспорта прочности горных пород по экспериментальным данным только одноосного сжатия и по известным свойствам огибающей к кругам Мора.

**Ключевые слова:** концепция скольжения, горные породы, напряженное состояние, предел упругости, девиатор деформаций, девиатор напряжений, коэффициент разрыхления, огибающая кругов Мора.

### 1. Критерий прочности (упругости)

Моделируется поведение горных пород в объемном напряженном состоянии. Используются результаты [1] лабораторных испытаний цилиндрических образцов при неравномерном трехосном сжатии по схеме Кармана. В качестве наиболее апробированного критерия прочности (упругости) выбран критерий Кулона – Мора с переменными коэффициентами в зависимости, связывающей касательное напряжение  $\tau_\beta$  с нормальным напряжением  $\sigma_\beta$  в плоскости с заданной нормалью, то есть полагается

$$\tau_\beta = S_0 - \mu\sigma_\beta, \quad (1)$$

где  $S_0$  и  $\mu$  – параметры материала, подлежащие определению. В плоскости, повернутой относительно площадки действия максимального касательного напряжения  $T$  на угол  $\beta$ , имеем

$$\sigma_\beta = \sigma_0 + T \sin 2\beta, \quad \tau_\beta = T \cos 2\beta, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3), \quad T = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3), \quad (2)$$

где  $\sigma_0$  – среднее напряжение, выражаемое через главные напряжения  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , при условии

$$\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 \geq 0. \quad (3)$$

Правую часть равенства (1) будем называть сопротивлением сдвигу:

$$S_\beta = S_0 - \mu(\sigma_0 + T \sin 2\beta). \quad (4)$$

При первом скольжении, определяемом углом  $\beta_0$ , касательные к кривым  $S_\beta = S_\beta(\beta)$  и  $\tau_\beta = \tau_\beta(\beta)$  совпадут, что совместно с условием (1) приводит к равенству

$$\mu = \operatorname{tg} 2\beta_0. \quad (5)$$

Отношение  $\sigma_{\beta_0}/\tau_{\beta_0}$  с изменением вида напряженного состояния (характеризуемого параметром  $c = \sigma_2/\sigma_1$ ) меняется. При  $0 \leq c \leq c_n$

$$\frac{\sigma_{\beta_0}}{\tau_{\beta_0}} = \frac{(1+c) + (1-c) \sin 2\beta_0}{(1-c) \cos 2\beta_0} = k(c) \equiv k. \quad (6)$$

Здесь параметр  $c_n$  соответствует такому виду напряженного состояния, при котором критерий Кулона–Мора переходит в критерий Треска.

Из рассмотрения круга Мора при одноосном сжатии имеем

$$k|_{c=0} = k_0 = \frac{1 + \cos 2\alpha_0^0}{\sin 2\alpha_0^0}, \quad (7)$$

где угол  $\alpha_0^0 = 45^\circ - \beta_0^0$  – угол среза, определяемый экспериментально ( $\beta_0^0 = \beta_0|_{c=0}$ ).

Таким образом, полагается, что плоскость среза совпадает с плоскостью первых скольжений, поскольку в этой плоскости интенсивность скольжений при достижении предела прочности наибольшая.

В общем случае  $k(c) \in [k_0, k_n]$ ,  $k|_{c=c_n} = k_n$ . Согласно (6)

$$\sin 2\beta_0 = \frac{-(1+c) + k\sqrt{(1+k^2)(1-c)^2 - (1+c)^2}}{(1-c)(1+k^2)}, \quad (8)$$

а условие (1) разрешимо относительно предела прочности ( $\sigma_1^s$ ):

$$\sigma_1^s = \sigma_1^s(c) = \frac{2S_0}{(1-c)(\cos 2\beta_0 + k \sin 2\beta_0)}. \quad (9)$$

Параметр  $S_0$  удобно (по аналогии с другими подобными исследованиями) представить в виде

$$S_0 = S_0^0 \exp(\xi c + \eta c^2), \quad (10)$$

где  $\xi$ ,  $\eta$  – постоянные, величина  $S_0^0$  определяется через предел прочности на одноосное сжатие  $\sigma_{c1}$  по формуле

$$S_0^0 = \frac{1}{2} \sigma_{c1} (\cos 2\beta_0^0 + k_0 \sin 2\beta_0^0). \quad (11)$$

Константы  $\xi$ ,  $\eta$  можно определить в первом приближении, используя только результаты эксперимента на одноосное сжатие. При этом привлекаются еще установленные свойства огибающей к кругам Мора. Совокупность точек  $(\sigma, \tau)$  касания огибающей к кругам Мора получим (согласно предложенной связи между главными напряжениями) на основании теоремы о существовании огибающей к семейству (в данном случае) этих кругов:

$$\sigma = \frac{\sigma_1^s(\sigma_1^s + 2c(\sigma_1^s)_c)}{\sigma_1^s + (1+c)(\sigma_1^s)_c}, \quad \tau = \frac{(1-c)\sigma_1^s}{\sigma_1^s + (1+c)(\sigma_1^s)_c} \sqrt{[\sigma_1^s + c(\sigma_1^s)_c](\sigma_1^s)_c}, \quad (\sigma_1^s)_c = \frac{\partial \sigma_1^s}{\partial c}. \quad (12)$$

В результате, используя приведенные зависимости, найдем константы  $\xi$  и  $\eta$ , зная угол среза при  $c = c_0$  и учитывая, что максимальное касательное напряжение остается постоянным (то есть  $\partial T/\partial c = 0$ ) при  $c \geq c_n$ . Таким образом, данный подход можно рассматривать как экспресс-метод составления паспорта прочности горных пород, минуя трудоемкий процесс определения пределов прочности при нескольких видах напряженного состояния (как это принято по стандартной методике). Для этого (при определении констант  $\xi$  и  $\eta$ ) необходимы следующие

исходные данные: предел прочности и угол среза при одноосном сжатии, а также условие  $\partial T/\partial c = 0$ , вычисляемое согласно зависимости (9) при  $c = c_n$ .

Величина предела упругости  $\sigma_1^y$  теоретически определяется, как и  $\sigma_1^s$ , по изложенной методике. Экспериментальные значения  $\sigma_1^y$  при рассматриваемом трехосном сжатии цилиндрических образцов горных пород в значительной мере зависят как от продольной  $\varepsilon_1$ , так и от поперечной деформаций  $\varepsilon_2$  ( $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ ). Диаграмма последней становится существенно нелинейной и (на начальном участке) одного знака с  $\varepsilon_1$ , когда напряжение  $\sigma_2 = \sigma_3$  от бокового давления на образец сопоставимо по величине с осевым напряжением  $\sigma_1$ . Такая нелинейность диаграммы деформации  $\varepsilon_2$  не отражается обобщенным законом Гука.

## 2. Диаграммы деформаций

Разделение тензора упругой деформации на шаровую и девиаторную части позволило установить для них независимые друг от друга законы изменения в зависимости от среднего напряжения и от девиатора напряжений соответственно, тем самым удается приблизиться к описанию реальной (нелинейной) диаграммы  $\varepsilon_2$ .

Зависимость объемной упругой деформации  $\theta = \theta(P)$ ,  $\theta = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)/3$ ,  $P = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ , близка к линейной. Например, у талькохлорита [1] для всех осуществленных в опыте видов нагружения аппроксимация экспериментальных данных записывается в виде

$$\theta = 7 \cdot 10^{-4} P. \quad (13)$$

Величина предела упругости при разных видах напряженного состояния действительно корректируется (как это было принято в [1]) уровнем напряжений, при котором наблюдается отклонение от линейной зависимости  $\theta = \theta(P)$ . Однако это справедливо только до того момента, когда происходит переход от критерия Кулона–Мора к критерию Треска. Такой переход (к пластическому состоянию без разрыхления) для талькохлорита возникает при  $c_n = 1/3$ . Следовательно, при  $c \geq c_n$  зависимость (13) должна сохраняться вплоть до пределов прочности. Именно для таких напряженных состояний наиболее контрастно выделяется нелинейность поперечной деформации.

Компонента девиатора деформаций  $\varepsilon_1^\partial$  ( $\varepsilon_1^\partial = \varepsilon_1 - \theta$ ) при  $c = 0.322$ ,  $c = 0.407$  и  $c = 0.51$  для этой горной породы аппроксимируется, в свою очередь, зависимостью от компоненты девиатора напряжений:  $\varepsilon_1^\partial = (1 \cdot 10^{-6} \sigma_1^\partial + 1.5 \cdot 10^{-3}) \sigma_1^\partial$ ,  $\sigma_1^\partial = \sigma_1 - P$ . В качестве примера суммарная упругая деформация для  $c = 0.51$  представлена на рис. 1 (учтено, что согласно определению  $\varepsilon_2^\partial = \varepsilon_3^\partial = -\varepsilon_1^\partial/2$ ).

В результате при разделении (за пределами упругости) деформации на упругую (по устанавливаемому закону) и неупругую составляющие последняя более точно характеризует свойства материала. Кроме того, она, в свою очередь, разделяется на чисто пластическую (не вызывающую изменения объема) и деформацию разрыхления.

Упругая деформация большинства крепких горных пород с достаточным для практики приближением [2, 3] подчиняется закону Гука для ортотропного материала. Пластическая деформация определяется заданием сопротивления сдвигу  $S$ , которое (также для практического использования) представляется в упрощенном виде

$$S = T_T [1 + \psi \Gamma_{13}^0], \quad (14)$$

где  $\psi$  – определяющая функция, она находится при аппроксимации расчетными зависимостями экспериментальных диаграмм;  $T_T$  – значение максимального

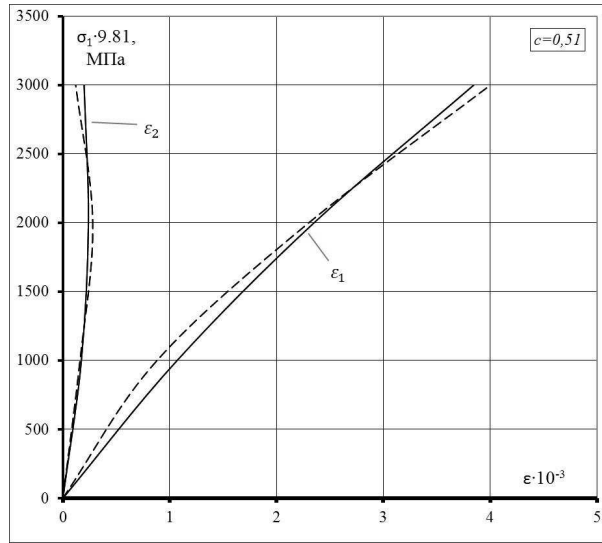


Рис. 1. Экспериментальные (пунктирная линия) и расчетные (сплошная линия) зависимости деформаций от напряжений для талькохлорита при  $c = 0.51$

касательного напряжения  $T$  на пределе упругости;  $\Gamma_{13}^0$  – компонента плоскопластической деформации, зависящая от  $T$  (она называется основной, в главных осях тензора деформаций  $\Gamma_1^0 = -\Gamma_3^0$ ,  $\Gamma_{13}^0 = 2\Gamma_1^0$ ).

Независимо от ориентации плоскости первых скольжений, из условия  $S = T$  получим

$$\Gamma_1^0 = \frac{1}{2\psi_1}[\tau_{\max} - T_T], \quad \psi_1 = T_T\psi.$$

Чтобы учесть вклад в суммарную пластическую деформацию  $\Gamma_i^+$  от влияния двух других главных касательных напряжений  $\tau_{12} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$ ,  $\tau_{23} = (\sigma_2 - \sigma_3)/2$  постулируется [2] некоторая связь между основными  $\Gamma_1^0$ ,  $\Gamma_3^0$  и дополнительными  $\Gamma_1^\partial$ ,  $\Gamma_3^\partial$  главными пластическими деформациями

$$\Gamma_1^\partial = \left(\frac{\tau_{12}}{\tau_{\max}}\right)^q \Gamma_1^0, \quad \Gamma_3^\partial = \left(\frac{\tau_{23}}{\tau_{\max}}\right)^q \Gamma_3^0, \quad q = \text{const.}$$

В рассматриваемом случае нагружения при любом значении параметра  $q$  имеем

$$\Gamma_1^+ = \Gamma_1^0 + \Gamma_1^\partial = 2\Gamma_1^0, \quad \Gamma_3^+ = \Gamma_3^0 + \Gamma_3^\partial = -\Gamma_1^0, \quad \Gamma_1^\partial = \Gamma_1^0, \quad \Gamma_3^\partial = 0.$$

В соответствии с гипотезой В.В. Новожилова о всестороннем разрыхлении, деформация разрыхления  $\Gamma_i^*$  пропорциональна [2] чисто пластической деформации:

$$\Gamma_1^* = \Gamma_3^* = -\lambda\Gamma_1^+,$$

где  $\lambda$  – коэффициент разрыхления.

Таким образом, компоненты неупругой деформации представляются в виде:

$$\Gamma_1 = \Gamma_1^+ + \Gamma_1^*, \quad \Gamma_2 = \Gamma_3 = \Gamma_3^+ + \Gamma_3^*.$$

Из этих соотношений следует, что

$$\lambda = \frac{\Gamma_2 + 0.5\Gamma_1}{\Gamma_2 - \Gamma_1}.$$

Аппроксимация графического представления зависимости  $\lambda = \lambda(c)$  дает аналитическое представление функции  $\lambda(c)$ . Для большинства горных пород [1] приемлемой оказалась функция вида:  $\lambda = u + \nu c$ ,  $u$ ,  $\nu$  – постоянные.

Итак, при напряженном состоянии, близком к предельному (в указанном выше смысле), разрыхление материала исчезает, следовательно,  $\lambda = 0$  при  $c \rightarrow c_n$ . При  $c > c_n$  также полагается  $\lambda(c) = 0$ , поскольку при большом боковом давлении (соизмеримом с осевым давлением) эффект дилатансии при рассматриваемом трехосном сжатии цилиндрических образцов горных пород пренебрежимо мал.

При проверке разрабатываемой модели в расчетах принимали участие дипломники кафедры механики Кыргызско-Российского Славянского университета А.В. Нечаева и А.М. Сатаркулов.

### Summary

*N.M. Komartsov, T.A. Lujanskaya, B.A. Rychkov.* The Concept of Slipping and Rock Mechanics.

Shear strength is considered as the basic strength characteristic of the material in the developed concept of slipping. The experimental data obtained by A.N. Stavrogin on the uneven triaxial compression of cylindrical rock samples are reviewed. A unified dependence of purely plastic deformation on the level of stress is established for all types of stress state. The elastic component of deformation is considered, from the standpoint of physical nonlinear elasticity theory as well. The coefficient of material loosening is determined. A method is suggested for preparation of the certificate of rock strength based on the experimental data for uniaxial compression only and known properties of the envelope of Mohr's circles.

**Keywords:** concept of slipping, rocks, stress state, limit of elasticity, strain deviator, stress deviator, coefficient of loosening, envelope of Mohr's circles.

### Литература

1. *Ставрогин А.Н., Протосеня А.Г.* Пластичность горных пород. – М.: Недра, 1979. – 301 с.
2. *Рычков Б.А.* О деформационном упрочнении горных пород // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1999. – № 2. – С. 115–124.
3. *Капустянский С.М., Николаевский В.П.* Количественная формулировка упруго-пластической дилатансионной модели (на примере песчаника) // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1984. – № 4. – С. 113–123.

Поступила в редакцию  
12.06.15

---

**Комарцов Никита Михайлович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика», Кыргызско-Российский Славянский университет, г. Бишкек, Кыргызская Республика.

E-mail: [komartsovnm@mail.ru](mailto:komartsovnm@mail.ru)

**Лужанская Татьяна Александровна** – младший научный сотрудник научно-инновационного центра, Кыргызско-Российский Славянский университет, г. Бишкек, Кыргызская Республика.

E-mail: [tatianaluzhanskaya@gmail.com](mailto:tatianaluzhanskaya@gmail.com)

**Рычков Борис Александрович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Механика», Кыргызско-Российский Славянский университет, г. Бишкек, Кыргызская Республика.

E-mail: [rychkovba@mail.ru](mailto:rychkovba@mail.ru)