УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 150, кн. 2 Физико-математические науки *2008*

УДК 530.145:535.14

ЭФФЕКТИВНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ РАДИАЦИОННОГО ПОЛЯ С СИЛЬНЫМ КЛАССИЧЕСКИМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Р.Х. Гайнутдинов, А.А. Мутыгуллина, М.А. Хамадеев

Аннотация

Мы исследуем проблему нелокальности эффективного взаимодействия радиационного поля с сильным классическим электромагнитным полем. Оператор взаимодействия, который позволяет учесть естественную нелокальность такого взаимодействия, получен путем анализа упорядоченных диаграмм квантовой электродинамики.

Ключевые слова: интенсивное лазерное излучение, нестабильный вакуум, эффективное взаимодействие света со светом.

Введение

Возможность того, что в сверхсильных лазерных полях старшие гармоники лазера накачки рождаются в вакууме, является одной из интереснейших перспектив, которые открываются благодаря прогрессу в технологии мощных лазеров [1] . Особый интерес представляет собой достижение так называемого предела Швингера $E_{cr} = m^2/e = 1.3 \cdot 10^{16}$ В/см, где m – масса электрона. При таких напряженностях лазерного поля вакуум становится нестабильным. Эта нестабильность приводит к спонтанному рождению электрон-позитронных пар из вакуума. В таких процессах взаимодействие фотона с интенсивным лазерным полем играет ключевую роль. Обычно рассеяние света на свете описывают с использованием эффективного лагранжиана Эйлера – Гейзенберга (E-H). Однако этот лагранжиан применим только при низких энергиях фотона $\omega \ll m$. Кроме того, лагранжиан E-H не позволяет учесть естественную нелокальность эффективного фотон-фотонного взаимодействия. Как было показано в [2], нелокальность эффективного взаимодействия может быть учтена естественным образом в рамках подхода к эффективной теории поля, основанного на формализме обобщенной квантовой динамики (ОКД). Цель статьи – показать, что формализм ОКД обеспечивает новое понимание проблемы эффективного взаимодействия фотона с интенсивным лазерным полем.

1. Обобщенная квантовая динамика и эффективная теория поля

В основу развитого в работе [2] формализма ОКД положено представление для оператора эволюции

$$\langle\psi_2|U(t,t_0)|\psi_1\rangle = \langle\psi_2|\psi_1\rangle + \int\limits_{t_0}^{t} dt_2 \int\limits_{t_0}^{t_2} dt_1 \langle\psi_2|\tilde{S}(t_2,t_1)|\psi_1\rangle, \tag{1}$$

где $\tilde{S}(t_2,t_1)$ описывает вклад в оператор эволюции от процесса, в котором взаимодействие начинается в момент времени t_1 и заканчивается в момент времени t_2.

Это представление является следствием фейнмановского принципа суперпозиции [3], согласно которому амплитуда вероятности события, которое может произойти несколькими альтернативными способами, является суммой амплитуд вероятности для каждого из этих способов. Следует отметить, что этот принцип был сформулирован исходя из анализа явления квантовой интерференции. Для того чтобы оператор эволюции в форме (1) был унитарен для любых t и t_0, оператор $\tilde{S}(t_2,t_1)$ должен удовлетворять уравнению

$$(t_2-t_1)\tilde{S}(t_2,t_1)=\int\limits_{t_1}^{t_2}dt_4\int\limits_{t_1}^{t_4}dt_3(t_4-t_3)\tilde{S}(t_2,t_4)\tilde{S}(t_3,t_1). \qquad (2)$$

Замечательная особенность этого уравнения заключается в том, что оно представляет из себя рекуррентное соотношение и позволяет определить $\tilde{S}(t_2,t_1)$ для любых времен t_1 и t_2, если заданы $\tilde{S}(t_2',t_1')$, соответствующие бесконечно малым временам $\tau=t_2'-t_1'$ длительности взаимодействия. Естественно предположить, что в пределе при $t_2\to t_1$ наибольший вклад в оператор эволюции дают процессы, ассоциируемые с фундаментальным взаимодействием в системе. Обозначая этот вклад $H_{\rm int}(t_2,t_1)$, мы можем записать граничное условие для уравнения (2):

$$\tilde{S}(t_2,t_1)\underset{t_2\to t_1}{\longrightarrow}H_{int}(t_2,t_1)+o(\tau^{\varepsilon}), \qquad (3)$$

где $\tau=t_2-t_1$. Параметр ε определяется требованием того, что оператор $H_{\rm int}(t_2,t_1)$, называемый обобщенным оператором взаимодействия, должен быть так близок к соответствующему решению уравнения (2) в пределе при $t_2\to t_1$, чтобы это уравнение имело единственное решение, имеющее поведение (3) в окрестности точки $t_2=t_1$. Уравнение (2), являющееся следствием первых принципов квантовой теории, позволяет обобщить квантовую динамику на случай нелокальных во времени взаимодействий. В частном случае, когда взаимодействие в системе является мгновенным и оператор взаимодействия $H_{int}(t_2,t_1)$ имеет вид

$$H_{int}(t_2,t_1)=-2i\delta(t_2-t_1)H_I(t_1), \qquad (4)$$

где $H_I(t_1)$ – гамильтониан взаимодействия, обобщенное динамическое уравнение оказывается эквивалентно уравнению Шредингера [2]. Важной особенностью обобщенного динамического уравнения является то, что описываемая им динамика определяется не значением оператора взаимодействия для каких-то определенных времен длительности взаимодействия (исключением является случай, когда оператор имеет вид (4)), а тем, как оператор $\tilde{S}(t_2,t_1)$ стремится к этому оператору в пределе, когда время взаимодействия стремится к нулю. Поэтому динамика системы при характерном масштабе времени (энергии) t_{ch} (E_{ch}) по существу определяется поведением оператора взаимодействия $H_{int}(t_2,t_1)$ $t\ll t_{ch}$ ($E\gg E_{ch}$). Вместе с тем эти временные (энергетические) масштабы могут быть больше (меньше) характерных масштабов более фундаментальной теории. Например, для динамики атомных систем такой теорией является квантовая электродинамика (КЭД). Поэтому с точки зрения фундаментальной теории процессы, описываемые оператором $H_{int}(t_2,t_1)$, не являются фундаментальными и определяются амплитудами, которые могут быть вычислены в рамках этой фундаментальной теории. Это открывает новые возможности для построения эффективных теорий. Обычный подход к построению эффективных теорий поля (ЭТП) заключается в том, что исходя из симметрий фундаментальной теории строится локальный лагранжиан эффективной теории. Важнейшими примерами эффективных теорий поля являются низкоэнергитическая квантовая электродинамика [7] и ЭТП ядерных сил [8]. Из-за локальности этот лагранжиан приводит к ультрафиолетовым расходимостям, и для того, чтобы теория приобрела смысл, необходимо проведение процедуры регуляризации и перенормировки. Все это является платой за то, что при такой формулировке пренебрегается естественной нелокальностью эффективного взаимодействия: процессы, амплитуды вероятностей которых определяются фундаментальной теорией и дают вклад в оператор $H_{\text{int}}(t_2, t_1)$, являются нелокальными. Важно, что при формулировке эффективной теории поля, основанной на использовании обобщенного динамического уравнения, оператор взаимодействия можно получить непосредственно, суммируя вклады амплитуд фундаментальной теории, важные для рассматриваемой низкоэнергитической эффективной теории. При этом явно учитывается естественная нелокальность эффективного взаимодействия. Что касается стандартного подхода к ЭТП, то, если перенормировка приводит к разумным результатам, то после ее проведения мы должны получить теорию, динамика которой генерируется взаимодействием, нелокальным как в пространстве, так и во времени. Это означает что после перенормировки теория должна описываться обобщенным динамическим уравнением с нелокальным оператором взаимодействия, при котором это уравнение не сводится к уравнению Шредингера. В работах [4, 6] этот факт был продемонстрирован на примере ЭТП ядерных сил. Было показано, что после перенормировки в этой теории динамика нуклонов при низких энергиях описывается не уравнением Шредингера, а обобщенным динамическим уравнением с нелокальным во времени оператором взаимодействия, который непосредственно выводится из фейнмановских диаграмм киральной теории возмущений: эта теория является промежуточным звеном между квантовой хромодинамикой и ЭТП ядерных сил. Эти результаты свидетельствуют о предсказательной силе формализма ОКД и показывают новые возможности, которые открываются при его использовании в любой эффективной теории. Ниже мы рассматриваем его применения к низкоэнергитической квантовой электродинамике в части ее приложений к проблеме описания взаимодействия фотонов с сильным электромагнитным полем.

2. Оператор эффективного взаимодействия радиационного поля с сильным классическим электромагнитным полем

Рассмотрим взаимодействие двух сильных встречных лазерных пучков в вакууме. Две монохроматические волны с одинаковыми амплитудами $E_l/2$ и одинаковыми частотами ω_l, распространяющиеся вдоль оси x, могут быть записаны как

$$\mathbf{E}(x,t) = E_l \cos k_l x \cos \omega_l t \hat{\mathbf{z}}, \tag{5}$$

$$\mathbf{B}(x,t) = -E_l \sin k_l x \sin \omega_l t \hat{\mathbf{y}}, \tag{6}$$

где $(\mathbf{E}(x,t), \mathbf{B}(x,t))$ – результирующее электромагнитное поле, а $\hat{\mathbf{y}}$ и $\hat{\mathbf{z}}$ – единичные вектора в направлении y и z соответственно. Если имеет место взаимодействие встречных лазерных пучков, фотон, рождаемый в таком процессе, имеет частоту ω, много большую, чем ω_l. Так как эти фотоны создаются в объеме с характерным размером $\lambda = 2\pi/\omega$, много меньшим, чем $\lambda_l = 2\pi/\omega_l$, в уравнениях (5) и (6) можем положить $|k_l x| \ll 1$(считаем, что фотоны рождаются вдоль оси x). В нулевом приближении (5) и (6) могут быть переписаны как [1]

$$\mathbf{E}(x,t) \approx E_l \cos \omega_l t \hat{\mathbf{z}} = L_l(t)\hat{\mathbf{z}}, \tag{7}$$

$$\mathbf{B}(x,t) \approx 0. \tag{8}$$

В модели, которая использовалась в [1], предполагалось так же, что электрическое поле $\mathbf{E}_l(t)$ изменяется во времени медленнее по сравнению с полем, описывающем фотоны. В таком приближении в [1] был построен эффективный лагранжиан, описывающий процесс, при котором уничтожается некоторое число лазерных фотонов и рождается по крайней мере два высокоэнергетичных фотона. Этот лагранжиан учитывает взаимодействие между сильным классическим электромагнитным полем лазерной волны и квантованным радиационным полем появляющихся фотонов; он получен с учетом однопетлевого действия полного электромагнитного поля

$$A^\mu(x) + \mathcal{A}^\mu(x), \tag{9}$$

где $A^\mu(x)$ и $\mathcal{A}^\mu(x)$ – это 4-потенциалы, описывающие сильное классическое поле и радиационное поле соответственно. Сильное классическое поле считается однородным и постоянным электрическим полем E_l. Плотность эффективного лагранжиана в этом случае имеет вид:

$$\mathcal{L}(x, \rho_L) = i\mathrm{Im}(\mathcal{L}^{E-H}(\rho_L)) + \mathcal{L}_m(x) + \delta\mathcal{L}(x, \rho_L), \tag{10}$$

где

$$\mathcal{L}_m(x) = -\frac{1}{4}\mathcal{F}^{\mu\nu}(x)\mathcal{F}_{\mu\nu}(x), \tag{11}$$

$$\delta\mathcal{L}(x, \rho_L) = -\frac{1}{2}\int dx' \mathcal{A}_\mu(x)\Pi^{\mu\nu}(x - x', \rho_L)\mathcal{A}_\nu(x'). \tag{12}$$

Здесь $\rho_L = E_L/E_{cr}$, $\mathcal{F}^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu\mathcal{A}^\nu(x) - \partial^\nu\mathcal{A}^\mu(x)$ – электромагнитное поле, а $\Pi^{\mu\nu}(x - x'; \rho)$ – тензор поляризации фотона в присутствии внешнего электрического поля $E_l = \rho_l E_{cr}$. В отличии от лагранжиана E-H, плотность этого эффективного лагранжиана (10) нелокальна в пространстве-времени. Эта нелокальность выражается в наличии члена $\delta\mathcal{L}(x, \rho_L)$. Функция $\Pi^{\mu\nu}(x-x', \rho_L)$ играет роль нелокального форм-фактора в определении $\delta\mathcal{L}(x, \rho_L)$. Однако известно, что введение нелокального форм-фактора в лагранжиан или гамильтониан является непоследовательным и приводит к потере лоренц-инвариантности и/или унитарности теории. Причина этого очевидна. Уравнение Шредингера является локальным во времени, и гамильтониан описывает мгновенные взаимодействия. В процессах нерелятивистской квантовой механики взаимодействие может быть нелокально в пространстве. Но в релятивисткой теории локальные во времени процессы должны быть локальны и в пространстве. Таким образом, теория должна позволять описывать динамику в случае, когда взаимодействие является нелокальным. Как мы отмечали выше, формализм ОКД позволяет сформулировать эффективную теорию, явно учитывающую естественную нелокальность эффективного взаимодействия. В случае эффективной теории, описывающей взаимодействие двух сильных встречных лазерных пучков в вакууме, мы должны построить эффективный оператор взаимодействия между квантованным радиационным полем и внешним классическим электромагнитным полем. Из сказанного выше следует, что этот оператор не может иметь форму

$$H_{int}(t_2, t_1) = -2i\delta(t_2 - t_1)\int \mathcal{H}(t, x)d^3x,$$

и, следовательно, плотность гамильтониана не имеет смысла. Мы должны построить этот оператор взаимодействия путем суммирования вкладов от процессов, важных для данной эффективной теории. Фундаментальной теорией, из которой мы должны извлечь информацию о таких процессах, является квантовая электродинамика. Фейнмановские диаграммы, описывающие «фундаментальные» процессы в нашей низкоэнергитической теории изображены на рис. 1. Суммируя вклады от соответствующих упорядоченных во времени диаграмм, мы получаем выражение

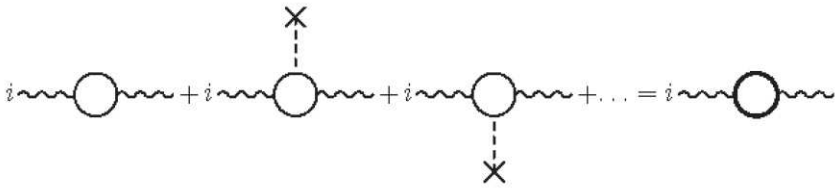

Рис. 1. Фейнмановские диаграммы, описывающие взаимодействие радиационного поля с внешним электромагнитным полем в однопетлевом приближении

для указанного выше оператора взаимодействия:

$$H_{non}(t_2,t_1) = \\ = -\frac{1}{2}\int d^4x_1 \int d^4x_2 A^{\mu_1}(x_1)\Pi_{\mu_1\mu_2}(x_1,x_2;A)A^{\mu_2}(x_2)\delta(x_1^0-t_1)\delta(x_2^0-t_2), \quad (13)$$

где $\Pi_{\mu_1\mu_2}(x_1,x_2;A)$ – оператор поляризации фотона в присутствии внешнего электромагнитного поля A:

$$\Pi_{\mu_1\mu_2}(x_1,x_2;A) = -i\mathtt{tr}[(e\gamma_{\mu_1})G(x_1,x_2)(e\gamma_{\mu_2})G(x_2,x_1)]- \\ -2i\int dx_3\mathtt{tr}[(e\gamma_{\mu_1})G(x_2,x_3)(e\gamma_{\mu_3})G(x_3,x_1)]A^{\mu_3}(x_3)+\cdots \quad (14)$$

Здесь $G(x_i,x_j)$ – электронный пропагатор в вакууме. Оператор (13) описывает эффективное взаимодействие радиационного поля с классическим электромагнитным полем. Очевидно, что этот оператор взаимодействия является нелокальным как в пространстве, так и во времени. Следует отметить, что нелокальные операторы взаимодействия должны удовлетворять условию

$$H_{\mathrm{int}}(t_2,t_1) \underset{t_2\to t_1}{\to} \int\limits_{t_1}^{t_2} dt_4 \int\limits_{t_1}^{t_4} dt_3 \frac{t_4-t_3}{t_2-t_1} H_{\mathrm{int}}(t_2,t_4)H_{\mathrm{int}}(t_3,t_1)+o(\tau^{\epsilon}). \quad (15)$$

Это необходимо, чтобы обобщенное динамическое уравнение с граничным условием (3) имело единственное решение. Можно показать, что оператор (13) удовлетворял этому требованию.

Заключение

Используя (13) в обобщенном динамическом уравнении, можем описать процессы рождения фотонов в поле, создаваемом встречными лазерными пучками, и процессы рождения электрон-позитронных пар. Можно ожидать, что таким способом мы получим более последовательное описание этих процессов, чем при использовании эффективных лагранжианов и гамильтонианов. Следует отметить, что при описании взаимодействия фотонов с большой энергией (порядка m_e) при решении этих проблем необходимо учитывать степени свободы, связанные с электронами и позитронами. Это определяется тем, что оператор должен удовлетворять (15). В области $\omega \ll m_e$ имеет смысл рассматривать эффективную теорию, в которой электрон-позитронные степени свободы явно не присутствуют. В этом случае форма эффективного оператора будет отличаться от формы (13), но при его построении необходимо использовать эффективную теорию с оператором (13) как промежуточное звено между фундаментальной КЭД и низкоэнергитической теорией в области $\omega \ll m_e$. Можно надеяться, что таким способом мы сможем построить нелокальное обобщение лагранжиана E-H (10). В отличие него, эффективная теория с таким оператором будет свободна от ультрафиолетовых расходимостей. Это важно для описания взаимодействия радиационного поля с интенсивным лазерным полем, где нельзя ограничиться первым порядком теории возмущения.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-2965.2008.2).

Summary

R.Kh. Gainutdinov, A.A. Mutygullina, M.A. Khamadeev. The Effective Interaction of the Radiation Field with a Strong Classical Electromagnetic Field.

The article views the problem of non-locality of the radiation field effective interaction with a strong external field. An interaction operator allowing to take into account the natural non-locality of this interaction is derived from the analysis of the relevant Feynman diagrams of quantum electrodynamics.

Key words: strong laser radiation, unstable vacuum; effective light-by-light interaction.

Литература

1. *Di Piazza A., Hatsagortsyan K.Z., Keitel C.H.* Harmonic generation from laser driven vacuum
Phys. Rev. D. – 2005. – V. 72. – Art. 085005.
2. *Gainutdinov R.Kh.* Nonlocal interactions and quantum dynamics // J. Phys. A: Math. Gen. – 1999. – V. 32. – P. 5657–5677.
3. *Feynman R.P.* Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics // Rev. Mod. Phys. – 1948. – V. 20. – P. 367.
4. *Gainutdinov R.Kh., Mutygullina A.A.* Nonlocality of the NN interaction in an effective field theory // Phys. Rev. C. – 2002. – V. 66. – Art. 014006.
5. *Gainutdinov R.Kh., Mutygullina A.A., Scheid W.* Effects of nonlocality in time of interactions of an atom with its surroundings on the broadening of spectral lines of atoms // Phys. Lett. A. – 2002. – V. 306. – P. 1–9.
6. *Gainutdinov R.Kh., Mutygullina A.A.* Nuclear forces from chiral dynamics // Fizika B. – 2004. – V. 13. – P. 373–382.
7. *Caswell W.E. et al.* Effective lagrangians for bound state problems in QED, QCD, and other field theories // Phys. Lett. B. – 1986. – V. 167. – P. 437.
8. *Weinberg S.* Nuclear forces from chiral lagrangians // Phys. Lett. B. – 1990. – V. 251. – P. 288.

Поступила в редакцию
27.02.08

Гайнутдинов Ренат Хамитович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры оптики и нанофотоники Казанского государственного университета.

E-mail: *Renat.Gainutdinov@ksu.ru*

Мутыгуллина Айгуль Ахмадулловна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики Казанского государственного университета.

E-mail: *Aigul.Mutygullina@ksu.ru*

Хамадеев Марат Актасович – магистрант кафедры оптики и нанофотоники Казанского государственного университета.