Труды Математического центра имени Н.И.Лобачевского

Том 66

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Научно-образовательный математический центр
Приволжского федерального округа

XVI Международная Казанская школа-конференция
"Теория функций, ее приложения и смежные вопросы"

Сборник трудов

(*Казань, 22 – 27 августа 2023 г.*)

Казанский (Приволжский) федеральный университет

2023

Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета, Научно-образовательный математический центр Приволжского федерального округа

ул. Кремлевская, 35, Казань, Республика Татарстан, Российская Федерация

Издание осуществлено в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2023-944.

УДК 517
ББК 22.16

Научный редактор: С. Р. Насыров.

Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т. 66
XVI Международная Казанская школа-конференция
”Теория функций, ее приложения и смежные вопросы”,
Сборник трудов. – Казань: КФУ, 2023. – Т. 66. – 291 с.

В том вошли материалы XVI Международной Казанской школы-конференции ”Теория функций, ее приложения и смежные вопросы”, организованной на базе Института математики и механики им. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета. Конференция проходила в Казани с 22 по 27 августа 2023 года.
Материалы предназначены для научных сотрудников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в различных областях математики и ее приложений.

© Научно–образовательный математический центр ПФО, 2023
© Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского, 2023
© Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

Н. Р. Абубакиров, М. Ю. Денисова. Разрешимость и обратимость задач логарифмического потенциала. 11
Ф. Г. Авхадиев. Универсальные интегральные неравенства для финитных функций в плоских и пространственных областях 13
Ю. Р. Агачев, А. В. Гуськова. О полиномиальных приближениях решения задачи Коши для одного дробного интегро-дифференциального уравнения 15
Ю. Р. Агачев, М. Ю. Першагин. Сходимость одного варианта метода механических квадратур для условно корректных интегро-дифференциальных уравнений 17
Я. Н. Алиев. О геометрических свойствах одной кривой, определенной нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением 18
С. А. Алхалифах. Специальное семейство аналитических функций и радиус Бора для таких функций 20
А. В. Аминова, Д. Р. Хакимов. Проективные симметрии 5-мерных жестких *H*-Пространствах типа {32} 22
И. А. Андреева, Т. О. Ефимова. Качественная картина фазовых траекторий ряда семейств динамических систем 24
О. Ю. Аристов. Топологические свойства оболочек Аренса-Майкла полугрупповых алгебр 26
С. В. Асташкин, К. В. Лыков. Комбинаторная размерность хаоса Радемахера и его свойства типа безусловности 28
С. Н. Асхабов. Нелинейные интегральные уравнения с разностным ядром в весовых пространствах Лебега 32
А. С. Афанасьева-Григорьева. Асимптотика модуля пространственного конденсатора с переменными уровнями потенциала 34
M. Akhmadiev, H. Alhasan, A. Bikchentaev, P. Ivanshin. Commutators and hyponormal operators 35
М. В. Балашов. Внутренность интеграла от многозначного отображения . . . 37
Ш. А. Балгимбаева. Функциональные пространства, связанные с пространствами Морри, на многомерном торе: декомпозиции и интерполяция 39
Б. И. Бахронов. Грани существенного спектра тензорной суммы моделей Фридрихса 41
К. Е. Бахтин, Е. Г. Прилепкина. Об отображающих свойствах обобщенной гипергеометрической функции 43
Б. Б. Беднов. Об ограниченных чебышёвских множествах 45
С. И. Безродных. Формулы типа Якоби для гипергеометрических функций и задача Римана — Гильберта 47
Л. А. Бекларян, А. Л. Бекларян. Дуализм в теории солитонных решений. Пример манхэттенской решетки 50
М. С. Беспалов. Вейвлетное действительное обобщение быстрого преобразования Хаара 51

И. М. Буркин, О. И. Кузнецова. Об одном методе конструирования мегастабильных хаотических систем на основе систем в форме Лурье 53
М. Ш. Бурлуцкая, Е. И. Григорьева. О спектральных свойствах операторов с инволюцией на геометрических графах. 55
А. В. Буробин. Задача Коши для уравнений дробного порядка 57
В. Б. Васильев. Псевдодифференциальные операторы и уравнения на многообразиях с краем 58
А. Н. Ветохин. Множество предельно реализуемых значений топологической энтропии динамических систем 60
Ю. П. Вирченко. Случайные множества со счетным пространством погружения 62
С. К. Водопьянов. Непрерывность открытость и дискретность отображений с конечным искажением на группах Карно 64
Н. С. Габбасов, З. Х. Галимова. К приближенному решению интегральных уравнений с вырожденным коэффициентом 67
О. Е. Галкин, С. Ю. Галкина. Быстро сходящиеся черновские аппроксимации C_0-полугруппы, сгенерированной оператором второй производной 70
М. М. Гарифуллин, С. Р. Насыров. Конформные отображения неограниченных многоугольников 72
Л. И. Гафиятуллина, Р. Г. Салахудинов. Оценка жёскости кручения выпуклой области через геометрические характеристики области 74
О. В. Гермидер, В. Н. Попов. Математическое моделирование изгиба тонких изотропных пластин 76
А. В. Гилёв. О двух нелокальных задачах для уравнения Буссинеска-Лява . . . 77
С. А. Григорян, А. Ш. Шарафутдинов. Градуировка скрещенного произведения полугрупповой алгебры 79
Т. А. Григорян, А. Ш. Шарафутдинов. "Вещественные" подалгебры C^*-алгебр . 80
К. А. Гуляева, Е. Г. Прилепкина. Обобщенный приведенный модуль и асиптотика потенциальной функции 82
Р. Н. Гумеров, Е. В. Липачева, К. А. Шишкин. О полноте C*-соотношений . . . 84
Э. Б. Дилмуродов. Конечность дискретного спектра одной 2×2 операторной матрицы 85
Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык. Равенство p-емкости и p-модуля конденсатора в метрическом пространстве с p-ограниченной геометрией 88
М. А. Еловенкова, А. Н. Печень. Использование измерений для управления трехуровневой квантовой системой с динамической симметрией 89
Л. С. Ефремова. Введение в теорию вполне геометрически интегрируемых отображений в высоких размерностях 91
Д. Х. Жумаева. Существование собственных значений решетчатой модели спин-бозон с не более чем одним фотоном 92
Ч. И. Жумаева. О собственных значений модели Фридрихса с трехмерным возмущением. 94
Э. Заарур. Состоятельность эмпирического аналога байесовской оценки . . . 96
Н. В. Зайцева. Классические решения многомерного гиперболического уравнения со сдвигами в старших производных 98

М. Б. Зверева, М. И. Каменский. О математических моделях с нелинейным условием . . . 99
К. А. Зубанкова, Е. А. Мазепа. О существовании решения с заданным асимптотическим поведением для неоднородного уравнения Шредингера на модельных многообразиях . . . 101
Д. Э. Исмоилова. Спектральные соотношение для матричной модели в фермионном пространстве Фока . . . 103
М. В. Кабанко. О структуре операторов в некоторых парах пространств аналитических функций . . . 105
М. В. Кабанко. Оценка типа мероморфной функции конечного порядка . . . 106
М. И. Каменский, В. В. Обуховский, Г. Г. Петросян, О. Ю. Петросян. Почти периодические траектории управляемых систем с обратной связью в форме sweeping процессов . . . 108
В. В. Капустин. Пространства де Бранжа и свойства нулей дзета-функции Римана . . . 110
И. А. Кареев. Последовательная d-апостериорная процедура отбора наиболее вероятного мультиномиального исхода, основанная на технике первого перескока и консервативном априорном распределении с зоной безразличия . . . 111
М. Б. Карманова. Субримановы свойства классов неконтактных отображений . 113
М. Кармуши. Семейство отображений полуплоскости на полосу с разрезом, выходящим из бесконечности . . . 116
A. R. Kacimov. Analytic solution to the Laplace-Poisson equation for Strack's potential modeling transpirative drawdown, decontamination of groundwater and carbon sequestration by rectangular-shaped urban greenery zone . . . 117
A. R. Kacimov, Yu. V. Obnosov. Analytical and numerical modeling of seepage in domains with a free boundary, tilted bedrock and seepage face: the Pavlovskii legacy revisited . . . 118
И. Е. Каспирович. О накоплении ошибок при численном интегрировании систем дифференциальных уравнений и стабилизации связей . . . 120
И. Н. Катковская, В. Г. Кротов. Интерполяционная теорема Марцинкевича и касательное граничное поведение функций из классов типа Харди . . . 122
С. В. Кисляков. Оценки в разных метриках в теореме о короне и в задаче об идеалах в алгебре ограниченных аналитических функций в круге . . . 125
С. Н. Киясов. Эффективная факторизация в некоторых классах гельдеровских матриц-функций третьего порядка . . . 127
И. А. Колесников. Конформный модуль четырехугольника . . . 129
М. А. Комаров. Скорость аппроксимации в пространствах Бергмана наипростейшими дробями с полюсами на окружности . . . 130
А. Н. Кондрашов. О существовании некоторых специальных решений эллиптических уравнений на концах некомпактных римановых многообразий . . . 132
И. И. Костенко. Интерполяция в пространстве мероморфных функций конечного порядка . . . 134
В. Г. Кротов, М. М. Логиновская. Интерполяционная теорема Марцинкевича-Ханта для классов Харди-Лоренца . . . 135

С. Ю. Курицын, К. М. Расулов. Об одной обобщенной краевой задаче типа Римана для метааналитических функций 139
S. N. Lakaev, M. O. Akhmadova. The number and location of eigenvalues for the two-particle Schrödinger operators on lattices 141
М. Р. Лангаршоев. О наилучшем приближении аналитических функций в весовом пространстве Бергмана 143
Х. М. Латипов. Число собственных значений одной операторной матрицы четвертого порядка 145
K. V. Litvinova, V. L. Litvinov. Mathematical modeling of and gas production based on the construction of self-simular traveling wave solutions for two-component filtration equations 147
В. О. Лукащук, С. Ю. Лукащук. Алгоритм расчета приближенных симметрий дробно-дифференциальных уравнений 149
К. Г. Малютин, А. А. Наумова. Представление субгармонических функций в полукольце 150
Т. С. Мардвилко. Применение произведения Бляшке для оценки наилучших равномерных рациональных приближений четного и нечетного продолжений функций 152
М. Мирсабуров, С. Б. Эргашева. Об одном приложении метода С.Г.Михлина к решению нестандартного сингулярного интегрального уравнения Ф.Трикоми . 154
Т. И. Михалёва, К. М. Расулов. О явном методе решения задачи типа Газемана для квазигармонических функций в круговых областях 156
В. С. Мокейчев, А. М. Сидоров. Исследование разрешимости линейных дифференциальных уравнений 157
А. М. Мусаева. Классификация норм Барабанова планарных динамических систем 158
И. Х. Мусин. О пространствах Гельфанда-Шилова типа S и типа W 160
Р. Г. Мухарлямов, И. Е. Каспирович. О построении дифференциальных уравнений заданной структуры по известным свойствам решений 162
С. Р. Насыров, В. З. Нгуен. О поведении внешнего конформного модуле произвольного четырехсторонника при его растяжении 164
Ш. Б. Неъматова. О компонентах квадратичной числовой области значений обобщенной модели Фридрихса 166
А. С. Никитин, А. С. Ситдиков, Д. В. Буштец. Ограничения правилами суперотбора в передаче квантовой информации при наличии сопряженных суперотборных секторов 168
А. А. Новиков, Р. Л. Зайнуллин. Оператор фазового сдвига и вентили типа Z, управляемые множественными каналами. 169
В. В. Обуховский, С. В. Корнев, Е. Н. Гетманова, В. А. Бочаров. О существовании решения неявной случайной системы управления с обратной связью 172
А. В. Ожегова, Л. Э. Хайруллина. Равномерные аппроксимации периодического сильно сингулярного уравнения первого рода 174
Б. П. Осиленкер. Формула следа для полиномов, ортогональных в усиленных пространствах Соболева 175

А. Ю. Попов, Т. Ю. Семенова. Уточнение оценки скорости равномерной сходимости ряда Фурье непрерывной периодической функции ограниченной вариации . . . 177
А. Ю. Попов, А. П. Солодов. Распространение оценки снизу С.А. Теляковского суммы синус-ряда с выпуклыми коэффициентами на более длинный отрезок . 179
П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба, К. А. Смотрицкий. Об одном методе суммирования Рисса в рациональной аппроксимации . . . 181
В. А. Пчелинцев. О первом собственном значении задачи Дирихле для эллиптических операторов в дивергентной форме . . . 183
А. В. Равчеев. О локальных классах Бэра ляпуновских инвариантов . . . 185
Т. Х. Расулов. Исследование дискретного спектра решетчатой модели спин-бозон с не более чем двумя фотонами . . . 188
M. M. Rahmatullaev, Z. T. Abdukahorova. Description of H_A-weakly periodic p-adic generalized Gibbs measures for the p-adic Ising model on the Cayley tree of order two . . . 189
M. M. Rahmatullaev, M. A. Rasulova. Periodic ground states of the Potts-SOS model with an external field . . . 191
В. С. Рыхлов. Решение начально-граничной задачи для волнового уравнения со смешанной производной и потенциалом общего вида . . . 192
К. Б. Сабитов. Начально–граничные задачи для уравнения колебаний круглой пластины . . . 194
Г. Р. Сайлиева. Уравнение Фаддеева для одной 3×3 операторной матрицы с некомпактным возмущенем . . . 197
В. Ж. Сакбаев. Унитарные представления групп преобразований бесконечномерных пространств и инвариантные меры . . . 199
Р. Г. Салахудинов. Изопериметрически монотонные функционалы области . . 200
Ж. Ш. Сафаров. О разрешимости одной обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения с дополнительной информацией специального вида в ограниченной области . . . 202
Д. С. Сафаров, С. К. Миратов. Точное периодическое и ограниченное решение обобщенногоуравнения Клейна-Гордона с постоянными отклоняющимися аргументами . . . 204
Т. Ю. Семенова. Оценка скорости равномерной сходимости ряда Фурье непрерывной периодической функции ограниченной p-вариации . . . 206
Д. С. Симушкин, С. В. Симушкин. О среднем значении момента остановки универсальной d-гарантийной процедуры . . . 208
A. V. Smagin, N. B. Sadovnikova, V. I. Vasenev. Differential equations in process modeling of dynamic systems with carbon sequestration: approaches, mathematical problems, modern challenges . . . 209
Ю. С. Солиев. О квадратурных формулах с кратными узлами для сингулярного интеграла Гильберта по действительной оси . . . 211
С. В. Солодуша. Об одном классе нелинейных систем интегральных уравнений I рода . . . 213

М. С. Сорока, В. В. Обуховский. О начальной задаче для невыпуклозначных дифференциальных включений дробного порядка с импульсными характеристиками в банаховом пространстве . . . 215
А .П. Старовойтов, Е. П. Кечко, Т. М. Оснач. Совместные рациональные аппроксимации тригонометрических рядов . . . 216
В. Д. Степанов. Ассоциированная рефлексивность некоторх функциональных классов . . . 219
Л. И. Сухочева. О «движении» собственных значений одного квадратичного пучка . . . 220
Ф. М. Талбаков. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций . . . 222
S. M. Tashpulatov. Spectra of the energy operator of two-magnon systems with four-spin exchange Hamiltonian . . . 224
С. Н. Тимергалиев. О существовании решений нелинейных краевых задач равновесия пологих оболочек типа Тимошенко . . . 225
Н. А. Тошева. Оператор канала для семейства операторных матриц третьего порядка . . . 227
А. Ю. Трынин. Один метод суммирования тригонометрических рядов Фурье с помощью синк-аппроксимаций . . . 229
Д. А. Тукмаков. Численное исследование динамики газовзвесей в аэродинамических и электрических полях . . . 231
М. В. Турбин, А. С. Устюжанинова. Разрешимость начально-краевой задачи для модели Кельвина-Фойгта с памятью . . . 233
Г. Х. Умиркулова. Некоторые спектральные свойства семейства моделей Фридрихса . . . 235
Х. Фауаз. О зарядах на квантовых логиках множеств . . . 237
К. Ю. Федоровский. О задаче Дирихле для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами . . . 239
В. В. Филатов. Достаточные условия выполнения теоремы типа Лиувилля для ограниченных решений полулинейного уравнения на модельных многообразиях . . . 243
Б. Н. Хабибуллин. Геометрические условия полноты экспоненциальных систем в пространствах функций на компактах комплексной плоскости . . . 244
Р. Л. Хажин. О делимости квантовых процессов, демпфирующих фазы . . . 249
С. Г. Халиуллин. Вероятностные алгебры и ульрапроизведения . . . 251
А. М. Халхужаев, Ж. Х. Боймуродов. О дискретном спектре трехчастичного оператора Шредингера на решетке . . . 252
А. М. Халхужаев, Х. Г. Хайитова. Исследование существенного спектра одной 2×2-операторной матрицы в фермионном пространстве Фока . . . 255
Л. С. Харасова. Метод интегральных уравнений исследования нелинейной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений теории пологих оболочек типа Тимошенко . . . 257
Ю. Х. Хасанов. О приближении равномерных почти-периодических функций . 259
А. П. Хромов. О почленном интегрировании тригонометрического ряда Фурье и теореме Фейера – Лебега . . . 261

Г. В. Хромова. Об одном аналоге интерполяционных параболических сплайнов 263
Н. А. Чебаненко, В. А. Клячин. О геометрических свойствах непрерывных отображений, сохраняющих ориентацию симплексов 264
С. Т. Чориева, Г. М. Мирсабурова. Задача Бицадзе-Самарского для гиперболического уравнения 266
П. Л. Шабалин. Задача Римана в полуплоскости для обобщенных аналитических функций со сверхсингулярной точкой 267
И. А. Шакиров. Об эффективности приближения константы Лебега оператора Фурье логарифмическими и логарифмическо-дробно-рациональными функциями 269
М. В. Шамолин. Инвариантные формы геодезических, потенциальных и диссипативных систем с конечным числом степеней свободы 271
Ф. М. Шамсудинов, И. О. Бобоназаров. Об одной переопределенной системе дифференциальных уравнений второго порядка с одной внутренней сингулярной линией 273
Ф. М. Шамсудинов, Р. С. Валиев. Об одной передопределенной системе дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями 275
М. Ш. Шарипова. Оценки для границ одной 3×3 операторной матрицы 276
Ш. Н. Шералиев. Об оценке гиперсингулярного оператора, связанного с перидинамикой 278
E. A. Shirokova, P. N. Ivanshin. On cauchy problem solution for a harmonic function in a simply connected domain with multily-connected boundary 280
В. А. Шлык. Устранимые множества для ньютоновского пространства $N^{1,p}$ на метрическом пространстве с p-ограниченной геометрией 281
В. И. Щербаков. Расходимость рядов Фурье по обобщённым системам Хаара и Уолша в точках неустранимого разрыва первого рода 282
Д. Б. Эшмаматова, М. А. Таджиева, Р. Н. Ганиходжаев. Динамика поведения траекторий отображений Лотки – Вольтерры в случае однородных турниров . 285
Ф. А. Юсупов, Д. Б. Эшмаматова. Асимптотическое поведение композиции нелинейных отображений 287
Ф. Ю. Яшиева. Исследование расположение собственных значений обобщенной модели Фридрихса с помощью редактора MATHCAD 288

УДК 517.956

РАЗРЕШИМОСТЬ И ОБРАТИМОСТЬ ЗАДАЧ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

Н. Р. Абубакиров[1], М. Ю. Денисова[2]

1 *abunail@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет.
2 *marina.denisova@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет.

В обратных задачах логарифмического потенциала с различными начальными условиями в большинстве случаев решение оказывается единственным. Однако случаи неединственности решения задач потенциала простого слоя также имеют место. Приведены постановки прямой и обратной задач логарифмического потенциала (прямая задача А и обратная задача А соответственно) и аналогичные постановки для задач логарифмического потенциала простого слоя (прямая задача Б и обратная задача Б соответственно). Затем приведены определения однозначной и неоднозначной разрешимости и обратимости этих задач. Рассмотрены случаи наличия у градиента логарифмического потециала конечного числа алгебраических точек ветвления и сделаны выводы о разрешимости и обратимости этих задач. Также приведен пример обратной задачи Б, являющейся разрешимой неоднозначно, при этом соответствующая ей прямая задача Б является неоднозначно обратимой.

Ключевые слова: градиент логарифмического потенциала простого слоя, звездообразность, однолистность, разрешимость и обратимость задач логарифмического потенциала простого слоя.

Пусть L есть замкнутый кусочно-аналитический контур без самопересечений, который ограничивает конечную односвязную область $D(0 \in D)$. Она заполнена однородной тяготеющей массой с постоянной плотностью $\mu > 0$ (которую для простоты считаем равной 1). Также имеется градиент логарифмического потенциала $u(z)$. За исключением конечного числа точек ветвления $u(z)$ является аналитической функцией в области $D^- = \mathbf{C} \setminus D$ с нормировкой $u(\infty) = 0$.

В прямой задаче А известна область D, требуется найти функцию $u(z)$ в явном виде. В обратной задаче А известна функция

$$u(z) = \iint\limits_D \frac{d\sigma(\tau)}{\tau - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{z^{k+1}}, \tag{1}$$

где $\tau \in D$, $d\sigma(\tau)$ – элемент площади, требуется найти однолистную область D (или ее границу L). Область D будем искать как образ единичного круга $E = \{t : |t| < 1\}$ при отображении однолистной аналитической функцией $z(t)$ с нормировкой $z(0) = 0$, $z'(0) > 0$.

Параллельно с этими задачами (которые будем называть "областными"), рассмотрим задачу логарифмического потенциала простого слоя. В ней градиент потенциала задается формулой

$$u(z) = \int\limits_L \frac{|dt|}{t - z}, \quad z \in D^-. \tag{2}$$

Такие задачи были расмотрены в работах [1]–[4].

Прямой задачей Б будем называть задачу о нахождении функции $u(z)$, заданной формулой (2), по известному контуру L. Обратной задачей Б будем называть задачу о нахождении контура L по функции $u(z)$, представленной в окрестности бесконечности рядом Лорана, для которого справедлива формула (2). В этих задачах контур также отыскивается как образ единичной окружности $\{|\zeta| = 1\}$ при отображении $z = f(\zeta)$ с прежней нормировкой.

Если при решении обратной задачи А (обратной задачи Б) область D (контур L) находится единственным образом, то назовем данную обратную задачу А (обратную задачу Б) разрешимой однозначно.

Если решением обратной задачи А (обратной задачи Б) являются два или более контура, то назовем данную обратную задачу А (обратную задачу Б) разрешимой неоднозначно.

Рассмотрим однозначно разрешимую обратную задачу А (обратную задачу Б) с известным градиентом $u(z)$ и для найденной области D (контура L) решим прямую задачу А (прямую задачу Б) о нахождении градиента $\tilde{u}(z)$.

Если функция $\tilde{u}(z)$ существует, единственна и $\tilde{u}(z) \equiv u(z)$, то назовем исходную обратную задачу А (обратную задачу Б) однозначно обратимой.

Если функция $\tilde{u}(z)$ существует и единственна, но $\tilde{u}(z) \neq u(z)$, то назовем исходную обратную задачу А (обратную задачу Б) необратимой.

Рассмотрим обратную задачу А с градиентом потенциала в виде

$$u(z) = \frac{A_1}{z-b} + \frac{A_2}{z+b}, \tag{3}$$

где константы A_1, A_2 – вещественные, $b > 0$.

Теорема 1. *Обратная задача А с функцией $u(z)$, определяемой формулой (3), однозначно разрешима и однозначно обратима.*

Рассмотрим задачу потенциала простого слоя, в которой обозначим через $z = f(\zeta)$ функцию, отображающую единичную окружность $|\zeta| = 1$ на искомый контур. Эта функция имеет вид

$$f(\zeta) = \int_0^{\zeta} P_n(\omega)\,d\omega = \zeta Q_{2n}(\zeta).$$

$f(\zeta)$ – однолистный в замкнутом единичном круге многочлен степени $2n+1$. Градиент потенциала простого слоя задается формулой

$$u(z) = \int_L \frac{|dt|}{t-z} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{A_k}{z^k}.$$

Если $n = 1$, то

$$u(z) = \frac{A_1^0}{z} + \frac{A_2^0}{z^2}. \tag{4}$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 2. *Существуют прямые задачи Б, в которых двум данным различным звездообразным отображающим функциям в форме многочлена третьей степени соответствует один и тот же потенциал простого слоя (4) и наоборот, решением обратной задачи Б с потенциалом (4) является пара различных звездообразных функций.*

Следствие. *Обратная задача Б с потенциалом (4) является разрешимой неоднозначно.*

Литература

1. Abubakirov N.R., Aksentev L.A. Finite Solutions to the Inverse Problem of the Logarithmic Potential // Russian Mathematics. – 2016. – V. 60. – № 10. – P. 55–58.

2. Abubakirov N. R., Aksentev L. A. Classes of finite solutions to the inverse problem of the logarithmic potential // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2018. – V. 39. – P. 151–160.

3. Abubakirov N.R., Aksentev L.A. On Direct and Inverse Problems of Logarithmic Potential With Finite Number of Parameters // Russian Math. – 2018. – V. 62. – P. 64–70.

4. Abubakirov N.R., Denisova M.Yu. Solvability and Invertibility of the Problems of Logarithmic Potential // Lobachevskii J. Math. – 2022. – V. 43. – № 8. – P. 1781–1790.

SOLVABILITY AND INVERTIBILITY OF THE PROBLEMS OF LOGARITHMIC POTENTIAL

N. R. Abubhakirov, M. Yu. Denisova

The inverse problems of logarithmic potential with various initial conditions have is usually a unique solution. However, sometimes a solution to a problem of simple layer potential is not unique. Thus, it is necessary to separate these two cases with the help some definitions. We formulate the direct and the inverse problem of logarithmic potential (direct A-problem and inverse A-problem, respectively) and set similar problems of logarithmic simple layer potential (direct B-problem and inverse B-problem, respectively). Then we give the definitions of the unique and non-unique solvability and invertibility of these problems. The cases when the gradient has a finite number of algebraic branching points are also considered, the conclusions about the solvability and invertibility of these A-problems are made. We give an example of the inverse B-problem which is non-uniquely solvable and its respective direct B-problem is non-uniquely invertible.

Keywords: gradient of logarithmic simple layer potential, star-likeness, univalence, solvability and invertibility of the problems of logarithmic simple layer potential.

УДК 517.5

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ФИНИТНЫХ ФУНКЦИЙ В ПЛОСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Ф. Г. Авхадиев[1]

1 *avkhadiev47@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет.

В статье обсуждаются интегральные неравенства для финитных функций, заданных в областях евклидова пространства. Мы описываем универсальные неравенства, справедливые в произвольных областях и применяемые для вывода новых неравенств типа Харди и Реллиха в плоских и пространственных областях.

Ключевые слова: неравенство Харди, неравенство Реллиха, гиперболический радиус, функция расстояния.

Рассмотрим область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Будем пользоваться следующими обозначениями: $|x| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$ — евклидова норма вектора $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $dx = dx_1 \cdots dx_n$ — дифференциальный элемент объема (площади при $n = 2$),

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

— скалярное произведение векторов $x \in \mathbb{R}^n$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Нам потребуются функция расстояния, определяемая формулой

$$\rho(x, \partial\Omega) := \min_{y \in \partial\Omega} |x - y|, \quad x \in \Omega,$$

а также семейство $C_0^\infty(\Omega)$ гладких функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$, компактные носители которых лежат в области Ω. Кроме того, пользуемся евклидовым градиентом $\nabla f(x)$ и лапласианом $\Delta f(x)$ функции f в точке $x \in \Omega$.

Универсальными мы называем неравенства, которые справедливы для любой области $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ и не содержат неизвестных констант. Такие неравенства представлены в двух следующих теоремах, доказанных автором в статьях [2] и [3].

Теорема 1. *Предположим, что $n \geq 2$, $p \in [1, \infty)$, $s \in (n, \infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\int_\Omega \frac{|\big(\nabla f(x), \nabla \rho(x, \partial\Omega)\big)|^p \, dx}{\rho^{s-p}(x, \partial\Omega)} \geq \frac{(s-n)^p}{p^p} \int_\Omega \frac{|f(x)|^p \, dx}{\rho^s(x, \partial\Omega)} \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega).$$

Теорема 2. *Предположим, что $n \geq 2$, $p \in [2, \infty)$, $q = p/(p-1)$, $s \in \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\int_\Omega |f(x)|^{p-2} |\nabla f(x)|^2 \, dx \leq \frac{q}{p} \left(\int_\Omega \frac{|f(x)|^p \, dx}{\rho^s(x, \partial\Omega)} \right)^{1/q} \left(\int_\Omega \frac{|\Delta f(x)|^p \, dx}{\rho^{s(1-p)}(x, \partial\Omega)} \right)^{1/p} \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega).$$

Для случая $n = 2$ нами обосновано также следующее утверждение (см. [1] и [4]).

Теорема 3. *Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область гиперболического типа, т е. область, граница $\partial\Omega$ которой содержит не менее двух точек, лежащих в плоскости $\mathbb{C}$. Тогда*

$$\iint_\Omega \frac{|\nabla f(z)|}{\rho(z, \partial\Omega)} \, dx dy \geq 2 \iint_\Omega \frac{|f(z)|}{R^2(z, \Omega)} \, dx dy \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega),$$

где $R(z, \Omega)$ — гиперболический радиус области Ω в точке $z = x + iy \in \Omega$.

В докладе будут изложены некоторые применения теорем 1 — 3 при обосновании новых интегральных неравенств типа Харди и Реллиха.

Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда (проект № 23-11-00066).

Литература

1. Авхадиев Ф. Г. *Неравенства Реллиха для полигармонических операторов в областях на плоскости* // Матем. сборник. – 2018. – Т. 209. – № 3. – С. 4–33.

2. Авхадиев Ф. Г. *Неравенства типа Харди, содержащие градиент функции расстояния* // Уфим. матем. журн. – 2021. – Т. 13. – № 3. – С. 3–16.

3. Авхадиев Ф. Г. *Универсальные неравенства в областях евклидова пространства и их применения* // Уфим. матем. журн. – 2022. – Т. 14. – № 3. – С. 3–16.

4. Авхадиев Ф. Г., Каюмов И. Р., Насыров С. Р. *Экстремальные проблемы в геометрической теории функций* // Успехи матем. наук. – 2023. – Т. 78. – № 2. – С. 3–70.

UNIVERSAL INTEGRAL INEQUALITIES FOR TEST FUNCTIONS ON PLANAR AND SPATIAL DOMAINS

F. G. Avkhadiev

In this paper we discuss integral inequalities for test functions, defined on domains of the Euclidean space. We describe universal inequalities on arbitrary domains. They are used to obtain several new Hardy – Rellich type inequalities on planar and spatial domains.

Keywords: Hardy inequality, Rellich inequality, hyperbolic radius, distance function.

УДК 517.968, 519.6

О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО ДРОБНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Ю. Р. Агачев[1], А. В. Гуськова[2]

1 *jagachev@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет.
2 *avsavina@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет.

В работе строятся обобщенные полиномиальные приближения решения задачи Коши для дробного интегро-дифференциального уравнения в случае, когда порядок α дробной производной от искомой функции вне интеграла не ниже порядка производной под знаком интеграла. При достаточно общих предположениях относительно известных коэффициентов уравнения доказано, что построенные приближения сходятся к точному решению по норме пространства, задаваемого производной порядка α.

Ключевые слова: пространство Лебега, интегро-дифференциальное уравнение, дробная производная, полиномиальные приближения, сходимость.

В работе рассматривается задача Коши

$$x^{(k)}(0) = 0, \quad k = \overline{0, m-1},\ m \in N, \tag{1}$$

для интегро-дифференциального уравнения дробного порядка

$$Kx \equiv Gx + Hx \equiv x^{(\alpha)}(t) + \int\limits_0^{\gamma(t)} h(t,s)x^{(\beta)}(s)\,ds = y(t), \quad 0 < t \le 1, \tag{2}$$

где α, β – положительные вещественные числа, причем $m-1<\alpha\le m$, $\gamma(t)=t$ или $\gamma(t)\equiv 1$ $(0<t\le 1,)$. Функции $h(t,s), y(t)$ – известные, $x(t)$ – искомая, $x^{(\alpha)}(t)$ есть дробная производная Римана–Лиувилля порядка α функции $x(t)$ (см., напр., [1]).

Пусть X_p – пространство функций, имеющих производную порядка α из $L_p(0,1), 1<p<\infty$, и удовлетворяющих условиям (1), с нормой $\|z\|=\|z^{(\alpha)}\|_{L_p}$, $z\in X_p$.

Лемма. *Пусть $h(t,s)\in L_p\times L_r$, где*
$r=q$, если $\frac{1}{p}+\frac{1}{r}=1$ при $\beta=\alpha$, $1<p<\infty$ или $\alpha-\frac{1}{p}\le\beta<\alpha$, $1<p<2$;
$r=1$, если $h(t,s)\in L_p\times L_1$ при $\beta<\alpha$, $2\le p<\infty$ или $\beta<\alpha-\frac{1}{p}$, $1<p<2$.
Тогда оператор $H: X_p\to L_p$ вполне непрерывен.

Эта лемма позволяет обосновать прямые и проекционные методы решения задачи (1), (2).

Пусть Y_n есть подпространство алгебраических полиномов степени не выше n. Приближения $x_n(t)$, удовлетворяющие начальным условиям (1), будем определять как точное решение операторного уравнения

$$K_n x_n\equiv Gx_n+P_nHx_n=P_ny\quad (x_n^{(\alpha)}\in Y_n),\ n\in N,$$

где P_n есть оператор проектирования $L_p(0,1)$ на Y_n.

Теорема. *Пусть $1\le p\le\infty$ и выполнены следующие предположения:*
1) $y\in L_p=L_p(0,1)$;
2) ядро $h(t,s)$ удовлетворяет условиям леммы;
3) задача (1), (2) имеет единственное решение при любой правой части из L_p;
4) оператор P_n является проекционным и

$$||P_n||_{L_p\to L_p}\Big[\omega(y;1/n)_p+\omega_t(h;1/n)_{p;r}\Big]\to 0,\ n\to\infty.$$

Тогда для всех натуральных n, начиная с некоторого n_0, уравнение проекционного метода имеет единственное решение $x_n^*\in X_n$. Решения $\{x_n^*\}_{n\ge n_0}$ сходятся к точному решению $x^*\in X_p$ задачи (1), (2) со скоростью:

$$||x^*-x_n^*||_{X_p}=O\Big\{||P_n||_{L_p\to L_p}[E_n(y)_p+E_n^t(h)_{p,r}]\Big\},$$

где $E_n(z)_p$ есть наилучшее приближение $z\in L_p$ алгебраическими полиномами степени не выше n, а $E_n^t(z)_{p,r}$ — частное наилучшее приближение функции $z(t,s)$ по переменной t полиномами степени не выше n в смешанной метрике $L_p\times L_r$.

Литература

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

ON POLYNOMIAL APPROXIMATIONS OF THE SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR A FRACTIONAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

J. R. Agachev, A. V. Guskova

In this paper, generalized polynomial approximations of the solution of the Cauchy problem for a fractional integro-differential equation are constructed in the case when the fractional order α of the desired function outside the integral is not lower than the order of the derivative under the integral. Under

fairly general assumptions about the known coefficients of the equation, it is proved that the constructed approximations converge to the exact solution in the norm of the space given by the derivative of the order α.

Keywords: Lebesgue space, integro-differential equation, fractional derivative, polynomial approximations, convergence.

УДК 517.51, 517.968.7, 519.642.2

СХОДИМОСТЬ ОДНОГО ВАРИАНТА МЕТОДА МЕХАНИЧЕСКИХ КВАДРАТУР ДЛЯ УСЛОВНО КОРРЕКТНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю. Р. Агачев[1], М. Ю. Першагин[2]

1 *jagachev@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет.
2 *mpershagin@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет.

В работе для одного класса условно корректных интегро-дифференциальных уравнений в паре весовых пространств Соболева дается теоретическое обоснование метода механических квадратур, основанного на квадратурной формуле Эрмита–Чебышева.

Ключевые слова: весовое пространство Соболева, интегро-дифференциальное уравнение, метод квадратур, полиномиальные приближения, сходимость.

В работе рассматривается задача Коши

$$x^{(i)}(-1) = 0, \quad i = \overline{0, m-1}, \tag{1}$$

для интегро-дифференциального уравнения

$$x^{(m)}(t) + \sum_{k=1}^{m} a_k(t) x^{(m-k)}(t) + \sum_{j=0}^{p} \int_{-1}^{1} h_j(t,s) x^{(j)}(s)\, ds = y(t), \ m < p, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1; \tag{2}$$

здесь m, p – целые числа (при $m = 0$ условия (1) отсутствуют), известные функции $y(t), a_k(t), k = \overline{1, m}$, и $h_j(t,s), j = \overline{0, p}$, определены на $[-1,1]$ и $[-1,1]^2$ соответственно, а $x(t), t \in [-1,1]$, – искомая функция.

Задача (1), (2) при $p > m \geqslant 0$ является задачей, некорректно поставленной (по Адамару) в традиционных для дифференциальных уравнений парах функциональных пространств X искомых элементов и Y правых частей. Вместе с тем в работе [1] задачи для уравнения (2) отнесены к классу условно корректных, имея в виду возможность их корректной постановки за счет специального выбора пары пространств X и Y. В этом случае возможно применять для нахождения решения задачи тот или иной прямой метод, что позволяет строить более простые вычислительные схемы по сравнению с известными методами для чисто некорректных задач. В работе [1] при достаточно жестких предположениях относительно коэффициентов уравнения по внешней переменной (переменной t) в пространстве функций, имеющих p непрерывных производных, обоснован метод механических квадратур решения краевых задач для уравнений вида (2) при $m = 0$. В работе [2] нами было дано обоснование метода механических квадратур при ослабленных условиях на коэффициенты в одном частном случае уравнения (2).

Здесь для общей задачи Коши (1), (2) мы даем обоснование метода квадратур, основанного на квадратурной формуле Эрмита–Чебышева, в паре пространств Соболева $X = W^p L_{2,q}, Y = W^{p-m} L_{2,q}$, где весовая функция $q(t) = (1 - t^2)^{p-m-1/2}$. При этом метод квадратур рассматривается нами как возмущение полиномиального метода коллокации, построенного по узлам Чебышева первого рода и сходимость которого в настоящее время известна (см., напр., в [3]). Следует также отметить, что мы существенно пользуемся свойством наивысшей алгебраической степени точности квадратурной формулы Эрмита–Чебышева. Все это позволило нам ослабить наложенные в [1] условия на коэффициенты уравнения по внешней переменной t.

Замечание. Сходимость метода квадратур сохранится, если вместо задачи Коши рассмотреть произвольную краевую задачу.

Литература

1. Габдулхаев Б. Г. *Некоторые вопросы теории приближенных методов, II* // Известия вузов. Математика. – 1968. – № 10. – С. 21–29.

2. Агачев Ю. Р., Леонов А. И. *Решение одного класса интегро–дифференциальных уравнений методом механических квадратур* // Известия вузов. Математика. – 2005. – № 8. – С. 3-7.

3. Агачев Ю. Р., Першагин М. Ю. *Сходимость полиномиального метода коллокации для одного класса условно корректных интегро-дифференциальных уравнений* // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т.60. – Казань: Изд-во Академии наук РТ. – 2021. – Т.60. – С. 163-165.

CONVERGENCE OF ONE VARIANT OF THE MECHANICAL QUADRATURE METHOD FOR CONDITIONALLY CORRECT INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

J. R. Agachev, M. Ju. Pershagin

In this work, for a class of conditionally correct integro-differential equations in a pair of weighted Sobolev spaces we give theoretical substantiation of the method of mechanical quadrature based on the Hermit - Chebyshev quadrature formula.

Keywords: weighted Sobolev space, integro-differential equation, quadrature method, polynomial approximations, convergence.

УДК 517.927.4, 514.763.81

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ОДНОЙ КРИВОЙ, ОПРЕДЕЛЕННОЙ НЕЛИНЕЙНЫМ ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ

Я. Н. Алиев[1]

1 *yaliyev@ada.edu.az*; Университет АДА (Азербайджанская дипломатическая академия).

Исследуется одно нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение и соответствующая плоская кривая. Эта кривая имеет геометрические свойства, некоторые из которых связаны функциями и константами лемнискат. Рассматривается также пространственный вариант этой кривой и соответствующие геометрические свойства.

Ключевые слова: плоская кривая, нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, геометрические свойства, пространственная кривая.

Рассмотрим кривую $r = r(\theta)$, в полярных координатах определенную уравнением

$$\int_0^\theta \sqrt{r(t)^2 + (r'(t))^2}\,dt = \mathrm{tg}\theta. \tag{1}$$

Это интегральное уравнение можно написать как обыкновенное дифференциальное уравнение

$$r(\theta)^2 + (r'(\theta))^2 = \frac{1}{\cos^4\theta}, \tag{2}$$

с начальным условием $r(0) = 0$. Это нелинейное уравнение появляется, например, в задачах, связанных с перехватом высокоскоростных целей лучевыми ракетами [1], [2]. В декартовых координитах это уравнение выглядит как

$$x^2\sqrt{1 + (y'(x))^2} = y'x - y, \tag{3}$$

с начальным условием $y(0) = 0$. Интересующее нас решение можно представить параметрическим способом как

$$\begin{cases} x(p) = \frac{1}{\sqrt[4]{p^2+1}} \int_0^p \frac{dt}{2\sqrt[4]{t^2+1}}, \\ y(p) = px(p) - (x(p))^2\sqrt{p^2+1}\ (p \geq 0). \end{cases} \tag{4}$$

Теорема. *Пусть касательная к кривой (4) в точке P, пересекает ось x, ось y, и линию $x = 1$ в точках F, U, и T, соответственно. Тогда*

1. $|UP| = |OU| + |TQ|$,
2. $(1 - x) \cdot |UP| = |TQ|$,
3. $x \cdot |PT| = |TQ|$,
4. $\sin\angle QPT = |OP| \cdot \sin^2\angle TQP$,

где x это абцисса точки $P(x, y)$.

Теорема. *Длина стороны PQ, и разность длин двух других сторон треугольника $\triangle PQT$ стремятся к одному и тому же пределу B^2, когда $x \to 1^-$:*

$$\lim_{x\to 1^-} |PQ| = \lim_{x\to 1^-} (|PT| - |TQ|) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^4}{2\pi} = B^2 \approx 0.3588850048,$$

где B – вторая константа лемнискаты.

Также рассматривается пространственный вариант этой задачи на единичной сфере. Результаты, полученные в трехмерном случае, имеют связи с функцией Гудермана, проекцией Меркатора, стереографической проекцией, логарифмической спиралью, сферической спиралью и т.д.

Литература

1. *Elnan, O.R.S.; Lo, H.* Interception of High-Speed Target by Beam Rider Missile. AIAA J. – 1963. – 1. 1637–1639; https://doi.org/10.2514/3.1870.

2. *Vinh, N.X.* Comment on "Interception of High-Speed Target by Beam Rider Missile". AIAA J. – 1964. – 2. 409; https://doi.org/10.2514/3.2316.

ON THE GEOMETRIC PROPERTIES OF ONE CURVE DEFINED BY A NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

Y. N. Aliyev

We study a nonlinear ordinary differential equation and the corresponding plane curve. This curve has geometric properties some of which are related to lemniscate functions and lemniscate constants. A space version of this curve and the corresponding geometric properties are also considered.

Keywords: plane curve, non-linear ordinary differential equation, geometric properties, spatial curve.

УДК 517.547

СПЕЦИАЛЬНОЕ СЕМЕЙСТВО АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И РАДИУС БОРА ДЛЯ ТАКИХ ФУНКЦИЙ

С. А. Алхалифах[1]

1 *s.alkhaleefah@gmail.com*; Казанский национальный исследовательский технологический университет, (ФГБОУ ВО «КНИТУ»), кафедра высшей математики.

В работе получен радиус Бора для подкласса аналитических функций с ограничениями на коэффициенты ряда Тейлора, определенных в единичном круге.

Ключевые слова: неравенство Бора, аналитические функции, коэффициенты Тейлора.

Классический результат Х. Бора [2], который в окончательной форме привели М. Рисс, И. Шур и Н. Винер, состоит в следующем. Предположим, что f принадлежит классу $\mathscr{B}$, т. е. $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ является аналитической функцией в $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и $|f(z)| \le 1$ для всех $z \in \mathbb{D}$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k \le 1 \quad \text{для всех} \quad r \le \frac{1}{3}, \tag{1}$$

где $r = |z|$, причем константа $1/3$ не может быть улучшена.
Одно из важных доказательств неравенства Бора было дано Винером (см. [3, с. 495] и [4, с. 162]). Ключевую роль в нем играет следующее неравенство для коэффициентов.

Теорема 1.[4, с. 162] *Предположим, что $f \in \mathscr{B}$ с разложением Тейлора $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Тогда*

$$|a_n| \le 1 - |a_0|^2 \quad \textit{для всех} \quad n \ge 1. \tag{2}$$

Отметим, что для всех $|a_0| \le 1$ выполняется неравенство $1-|a_0| \le 1-|a_0|^2$, поэтому мы определяем подмножество $\mathscr{B}'$ множества $\mathscr{B}$ следующим образом

Определение. *Множество $\mathscr{B}'$ состоит из всех аналитических функций, для которых любой коэффициент ряда Тейлора a_n для $n \ge 1$ по модулю меньше или равен $1-|a_0|$, то есть,*

$$\mathscr{B}' = \{f : f \in \mathscr{B} \quad \text{и} \quad |a_n| \le 1-|a_0| \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N}\}. \tag{3}$$

Есть еще одна веская причина рассмотреть подсемейство $\mathscr{B}'$. В 2004 году, Айзенберг и Видрас (см. [5, с. 736]) рассмотрели подкласс аналитических функций, принадлежащих семейству $\mathscr{B}'$, и доказали следующую теорему:

Теорема 2. [5] *Пусть $f \in \mathscr{B}$, причем для всех индексов $n \ge 1$ коэффициенты Тейлора $a_{mn} = 0$ для данного $m > 1$. Тогда*

$$|a_n| \le 1-|a_0| \quad \textit{для всех} \quad n \ge 1.$$

Нами доказана следующая теорема о неравенстве Бора для семейства ограниченных аналитических функций $f \in \mathscr{B}'$.

Теорема 3. [1] *Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathscr{B}'$. Тогда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \le 1 \quad \textit{для всех} \quad r \le \frac{1}{2}, \tag{4}$$

где $|z| = r$, и константа $1/2$ не может быть улучшена.

Замечание. *Подставляя $|a_0|^2$ вместо $|a_0|$ в левой части, мы получаем, что*

$$|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n \le 1 \quad \text{для всех} \quad r \le \frac{1-|a_0|^2}{2-|a_0|-|a_0|^2} = \frac{1+|a_0|}{2+|a_0|}.$$

Заметим, что

$$r = \inf_{0<|a_0|<1} \frac{1+|a_0|}{2+|a_0|} = \frac{1}{2},$$

но вопрос о точности остается открытым.

Более того, если мы подставим $|a_0|^m$ вместо $|a_0|$ при фиксированном $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, мы получим

$$|a_0|^m + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n \le 1 \quad \text{для всех} \quad r \le \frac{1-|a_0|^m}{2-|a_0|-|a_0|^m} = \frac{1+\sum_{k=1}^{m-1}|a_0|^k}{2+\sum_{k=1}^{m-1}|a_0|^k}.$$

Заметим, что

$$\inf_{0<|a_0|<1} \frac{1+\sum_{k=1}^{m-1}|a_0|^k}{2+\sum_{k=1}^{m-1}|a_0|^k} = \frac{1}{2}.$$

Также отметим, что вопрос о точном радиусе Бора и в этом случае остается открытым.

Следствие. *Предположим, что* $f \in \mathscr{B}$ *со следующим разложением Тейлора* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, *где* $a_{mn} = 0$ *для всех* $n \geq 1$ *и данного* $m > 1$. *Тогда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \leq 1 \quad \text{для всех} \quad r \leq \frac{1}{2}. \tag{5}$$

Литература

1. Alkhaleefah S. A. Bohr phenomenon for special family of analytic functions and harmonic mappings // Problemy Analiza - Issues of Analysis. – 2020. – V. 9. № 3. – P. 3–13; https://doi.org/10.15393/j3.art.2020.7990.

2. Bohr H. A theorem concerning power series // Proc. London Math. Soc. – 1914. – V. 13. – № 2. – P. 1–5.

3. V. I. Paulsen, G. Popescu, Singh D. On Bohr's inequality // Proc. London Math. Soc. – 2002. – V. 85. – P. 493–512.

4. Garcia S. R., Mashreghi J., Ross W. T. Finite Blaschke products and their connections // Gewerbestrasse 11, 6330 Cham, Switzerland: Springer International Publishing AG, part of Springer Nature. – 2018. — P. 340.

5. Айзенберг Л. А., Видрас А. О радиус Бора для двух классов голоморфных функций // Сибирский математический журнал. – 2004. – V. 45. – № 4. – P. 734–746.

ABOUT SPECIAL FAMILY OF ANALYTIC FUNCTIONS AND BOHR RADIUS FOR THIS KIND OF FUNCTIONS

S. A. Alkhaleefah

In this work, the Bohr radius is obtained for a subclass of analytic functions, defined in the unit circle, with restrictions on the coefficients of the Taylor series.

Keywords: Bohr inequality, analytic functions, coefficients Taylor.

УДК 514.763

ПРОЕКТИВНЫЕ СИММЕТРИИ 5-МЕРНЫХ ЖЕСТКИХ H-ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА {32}

А. В. Аминова[1], Д. Р. Хакимов[2]

1 *asya.aminova@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет.
2 *dzhamoliddink@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет.

Исследуются симметрии систем дифференциальных уравнений геодезических в форме алгебр Ли инфинитезимальных проективных преобразований (проективных движений) 5-мерных псевдоримановых многообразий (M^5, g) *— жестких* h*-пространств типа {32}.*

Ключевые слова: дифференциальная геометрия, псевдоримановы многообразия, проективно-геометрическая теория систем ОДУ.

Векторное поле X называется инфинитезимальным проективным преобразованием, или проективным движением, если локальная однопараметрическая группа преобразований, порождаемая этим полем в окрестности каждой точки $p \in M$, состоит из локальных проективных преобразований.

В развитой А. В. Аминовой и Н. А.-М. Аминовым проективно-геометрической теории систем дифференциальных уравнений [1—9] отмечается, что проективные преобразования систематически возникают при исследовании симметрий дифференциальных уравнений математической физики. В частности, алгебра Ли инфинитезимальных точечных симметрий уравнения Кортевега-де Фриза является подалгеброй проективной, точнее, аффинной алгебры Ли, а уравнение Риккати можно рассматривать как "своеобразную реализацию" группы проективных преобразований на прямой [10].

Доклад посвящен исследованию симметрий систем дифференциальных уравнений геодезических в форме алгебр Ли инфинитезимальных проективных преобразований (проективных движений) 5-мерных псевдоримановых многообразий (M^5, g) — h-пространств $H_{32,3}$ типа {32} [11], [12]. Определяются необходимые и достаточные условия, при которых $H_{32,3}$ является пространством постоянной (нулевой) кривизны. Находятся негомотетические проективные движения в $H_{32,3}$ непостоянной кривизны, исследуются гомотетии и изометрии указанных пространств, определяются размерности, базисные элементы и структурные уравнения действующих в них максимальных проективных алгебр Ли. В итоге получена классификация h-пространств $H_{32,3}$ типа {32} по (негомотетическим) алгебрам Ли инфинитезимальных проективных и аффинных преобразований.

Литература

1. Аминова А. В. Автоморфизмы геометрических структур как симметрии дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Матем. – 1994. – № 2. – С. 3–10.

2. Аминова А. В. Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий // УМН. – 1995. – Т. 50. – № 1. – Р. 69–142.

3. Аминова А. В. Проективные преобразования и симметрии дифференциальных уравнений // Матем. сб. – 1995. – Т. 186. – № 12. – С. 21–36.

4. Aminova A. V., Aminov N. A.-M. Projective geometry of systems of differential equations: general conceptions // Tensor (N.S.). – 2000. – V. 62. – № 1. – P. 65–86.

5. Аминова А. В. Проективные преобразования псевдоримановых многообразий // Янус-К. – 2003.

6. Аминова А. В., Аминов Н. А.-М. Дифференциальные системы 4-го порядка с 4-мерной разрешимой группой симметрий, не содержащей абелевой подгруппы G3 // Изв. вузов. Матем. – 2005. – №6. – С. 12–27.

7. Аминова А. В., Аминов Н. А.-М. Проективная геометрия систем дифференциальных уравнений второго порядка // Матем. сб. – 2006. – Т. 197. – № 7. – С. 3–28.

8. Aminova A. V., Aminov N. A.-M. Geometric theory of differential systems: Linearization criterion for systems of second-order ordinary differential equations with a 4-dimensional solvable symmetry group of the Lie–Petrov type V I1 // J. Math. Sci. – 2009. – V. 158. – № 2. – P. 163–183.

9. Аминова А. В., Аминов Н. А.-М. Пространства с проективной связностью Картана и групповой анализ систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 123, ВИНИТИ, М. – 2009. – С. 58–80.

10. Ибрагимов Н. Х. Азбука группового анализа // М.: Знание. – 1989.

11. Аминова А.В., Хакимов Д.Р. *О проективных движениях 5-мерных пространств. I. h-пространства типа {32}* // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2018. – № 4. – С. 21—31.

12. Aminova A. V., Khakimov D. R. *On the properties of the projective Lie algebras of rigid h-spaces H_{32} of the type {32}*// Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. – 2020. – V. 162 – № 2. – P. 111–119.

NON-HOMOTHETICAL PROJECTIVE MOTIONS IN RIGID H-SPACES OF TYPE{32}

A. V. Aminova, D. R. Khakimov

In this paper, we study the 5-dimensional pseudo-Riemannian manifolds (M^5, g), namely, rigid h-spaces of type {32} admitting non-homothetic infinitesimal projective transformations.

Keywords: differential geometry, pseudo-Riemannian manifolds, projective-geometric theory of ODE.

УДК 517.91

КАЧЕСТВЕННАЯ КАРТИНА ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ РЯДА СЕМЕЙСТВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

И. А. Андреева[1], Т. О. Ефимова[2]

1 *irandr@inbox.ru*; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого.
2 *irandr@inbox.ru*; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого.

Рассматривается обширный класс динамических систем, характерной чертой которых служит присутствие взаимно простых полиномиальных форм в правых частях уравнений. Класс в процессе исследования методами качественной теории ОДУ естественным образом расщепляется на семейства и подсемейства ряда последовательных иерархических уровней. Выявляются, каталогизируются и строятся в круге Пуанкаре все возможные топологически различные фазовые портреты, относящиеся к полученным подсемействам. Строго доказывается, в частности, отсутствие предельных циклов у всех систем рассматриваемого общего класса.

Ключевые слова: динамическая система, взаимно простые полиномы, фазовая траектория, фазовый портрет, круг Пуанкаре, сепаратриса, предельный цикл.

Рассматривается класс полиномиальных кубических систем

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= p_0x^3 + p_1x^2y + p_2xy^2 + p_3y^3 \equiv X(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= ax^2 + bxy + cy^2 \equiv Y(x,y), \end{aligned} \tag{1}$$

где $a, b, c, p_0, \ldots, p_3$ — вещественные параметры, подчиненные условиям: $c\,p_3 \neq 0$, формы X, Y — взаимно просты.

Цель состоит в выявлении, каталогизации и построении методами ЛКТДУ всех различных в топологическом понимании *фазовых портретов* в круге Пуанкаре $\overline{\Omega}$, возникающих у систем класса (1), с установлением критериев их появления. Полагаем в (1) $c > 0$, $p_3 > 0$, что не приводит к ограничению общности, будучи достижимо сочетанием замен: $t \to -t$, $x \to -x$, $y \to -y$.

Вводятся специальные полиномы системы

$$\begin{aligned} P(u) &:= X(1,u) \equiv p_0 + p_1u + p_2u^2 + p_3u^3, \\ Q(u) &:= Y(1,u) \equiv a + bu + cu^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Заметим, что вещественные корни полинома $P(u)$ (полинома $Q(u)$) суть угловые коэффициенты изоклин бесконечности (изоклин нуля).

С их помощью изучаются как конечные, так и бесконечно удаленные особые точки систем класса (1).

Утверждение 1. *Системы (1) не имеют на вещественной плоскости предельных циклов.*

Доказательство проводится с использованием формулы И.О.Бендиксона для индекса особой точки [1].

Главные факторы, задающие фазовый портрет в круге Пуанкаре $\overline{\Omega}$ для произвольной системы класса (1):

1) числовая пара (m, n), в которой $m \in \{3, 2, 1\}$ ($n \in \{2, 1, 0\}$) — суть число изоклин бесконечности (изоклин нуля) системы,

2) порядок следования таковых $m + n$ изоклин, возникающий при полуобходе точки $O(0, 0)$ в области $x > 0$ в направлении возрастания $u (= y/x)$,

3) расположение изоклин бесконечности относительно оси $y = 0$.

Определение 1. *Пусть $m \in \{3, 2, 1\}$, $n \in \{2, 1, 0\}$, (m, n) — фиксированная пара. Множество систем класса (1), для которых специальный полином $P(u)$ имеет m вещественных корней, а специальный полином $Q(u)$ — n корней, будем называть (m, n)- семейством.*

Из определения 1 следует, что класс (1) включает такие (m, n)-семейства, как:

$$(3, 2),\ (2, 2),\ (3, 1),\ (2, 1),\ (3, 0),\ (2, 0),\ (1, 2),\ (1, 1),\ (1, 0). \tag{3}$$

Семейства последовательно изучаются по единому плану, включающему их дальнейшее «разбегание» по подсемействам нижайших иерархических уровней (вплоть до 4-го уровня иерархии). Результатом становится построение всех топологически различных типов фазовых портретов для каждого из подсемейств, установление числа и характерных особенностей таковых портретов. Общее число фазовых портретов для систем класса (1) превысило 250 [2, 3].

Литература

1. *Андреев А. Ф., Андреева И. А.* Фазовые портреты одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре.I // Вестник РАЕН. – 2017. – Т. 4. – № 17. – С. 8–18.

2. *Andreev A. F., Andreeva I. A.* On a Behavior of Trajectories of a Certain Family of Cubic Dynamic Systems in a Poincare Circle // IOP Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – V. 1141. – № 1.

3. *Andreeva I. A., Efimova T. O.* On the Qualitative Study of Phase Portraits for Some Categories of Polynomial Dynamic Systems // Studies in Systems, Decision and Control. – 2022. – V. 418. – P. 39–50.

THE QUALITATIVE PATTERN OF PHASE TRAJECTORIES FOR A SERIES OF DYNAMIC SYSTEMS' FAMILIES

I. A. Andreeva, T. O. Efimova

A broad class of dynamic systems characterized with a presence of reciprocal polynomial forms in right parts of their equations is considered. The main class has been split during its investigation by means of the qualitative theory of ODEs into families and subfamilies of systems which belong to several sequential hierarchical levels. All topologically different phase portraits which are possible for these

obtained families and subfamilies of dynamic systems have been revealed, catalogued and constructed in the Poincare disk. The absence of limit cycles have been strictly proved for all the systems of initial broad considered class.

Keywords: dynamic system, reciprocal polynomials, phase trajectory, phase portrait, poincare disk, separatrix, limit cycle.

УДК 517.986.2, 512.531

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОБОЛОЧЕК АРЕНСА-МАЙКЛА ПОЛУГРУППОВЫХ АЛГЕБР

О. Ю. Аристов[1]

1 *aristovoyu@inbox.ru*; Institute for Advanced Study in Mathematics, Harbin Institute of Technology.

Ранее автором было показано, что счётная полугруппа конечно порождена (локально конечна) тогда и только тогда, когда оболочка Аренса-Майкла её полугрупповой алгебры является пространством Фреше ((DF)-пространством в смысле Гротендика). В дополнение к этому найдено условие в терминах функций длины, достаточное для того, чтобы оболочка не являлась бочечным (более того, псевдонасыщенным в смысле Акбарова) пространством.

Ключевые слова: полугрупповая алгебра; функция длины; подгруппа, вложенная без искривления; оболочка Аренса-Майкла; (DF)-пространство; бочечное пространство; псевдонасыщенное пространство.

Напомним, что *алгеброй Аренса-Майкла* называется полная хаусдорфова локально выпуклая алгебра, топология на которой может быть задана семейством субмультипликативных преднорм (т.е. неравенство $\|ab\| \leq \|a\|\,\|b\|$ выполнено для всех элементов a и b). *Оболочкой Аренса-Майкла* ассоциативной алгебры A над $\mathbb{C}$ (не обязательно унитальной) называется алгебра Аренса-Майкла, которая является пополнением A относительно топологии, заданной семейством всех субмультипликативных преднорм, см. [1]. Нас интересует случай, когда A есть полугрупповая алгебра $\mathbb{C}S$ счётной полугруппы S (не обязательно обладающей единицей). Её оболочку Аренса-Майкла мы обозначаем через $\widehat{\mathbb{C}S}$. Предметом этой работы является тот неожиданный с точки зрения автора факт, что свойства полугруппы могут отображаться на топологии оболочки Аренса-Майкла.

Отметим сначала, что $\widehat{\mathbb{C}S}$ всё-таки обладает одним важным свойством, не зависящим от свойств полугруппы.

Теорема 1. [3, теорема 2] *Если S — счётная полугруппа, то пространство $\widehat{\mathbb{C}S}$ ядерно.*

Следующие два важных частных случая исследованы в [2, 3].

Теорема 2. [2] *Счётная полугруппа S конечно порождена тогда и только тогда, когда $\widehat{\mathbb{C}S}$ метризуемо (т.е. является пространством Фреше).*

Теорема 3. [3, теорема 6] *Счётная полугруппа S локально конечна тогда и только тогда, когда $\widehat{\mathbb{C}S}$ является (DF)-пространством. Более того, в этом случае топология $\widehat{\mathbb{C}S}$ является сильнейшей локально выпуклой.*

Обращаясь к общему случаю, отметим, что пространства Фреше и (DF)-пространства $\widehat{\mathbb{C}S}$ являются бочечными (см. определение, например, в [4, § 3.5]). Нам понадобятся также псевдонасыщенные локально выпуклые пространства, введённые в [5]. Отметим, что из бочечности следует псевдонасыщеность, однако в силу [6, теорема 9.1] обратное неверно.

Действительнозначная функция ℓ на S называется *функцией длины*, если для всех $s_1, s_2 \in S$ выполнено неравенство $\ell(s_1 s_2) \leq \ell(s_1) + \ell(s_2)$. Когда мы имеем дело с группой, мы также предполагаем, что $\ell(e) = 0$ и $\ell(g^{-1}) = \ell(g)$.

Обобщая хорошо известное определение для конечнопорождённых групп, будем говорить, что подгруппа G' группы G *вложена без искривления (undistorted)*, если для любой функции длины ℓ' на G' найдётся функция длины ℓ на G, мажорирующая ℓ' в том смысле, что существуют $C, D > 0$, такие что $\ell'(g) \leq C\ell(g) + D$ для всех $g \in G'$.

Теорема 4. *Пусть счётная группа G содержит бесконечную конечнопорождённую подгруппу, вложенную без искривления. Если пространство $\widehat{\mathbb{C}G}$ псевдонасыщено (в частности, бочечно), то G конечно порождена.*

Например, условие теоремы 4 выполнено, если G — счётнопорождённая свободная группа или счётнопорождённая свободная абелева группа (циклическая подгруппа, порождённая любым из образующих элементов, вкладывается без искривления). Так как указанные группы не являются конечнопорождёнными, в этих случаях $\widehat{\mathbb{C}G}$ не является псевдонасыщеным (и тем более, бочечным) пространством.

Автор благодарен Д. В. Осину, который указал, что существуют счётные группы, для которых условие теоремы 4 не выполняется. Таким образом, вопрос о свойствах топологии в общем случае остаётся открытым.

Литература

1. *Хелемский А. Я.* Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии. – Наука, М. – 1989.

2. *Aristov O.Ẏu.* Holomorphically finitely generated Hopf algebras and quantum Lie groups. – arXiv:2006.12175. – 2020.

3. *Аристов О. Ю.* Аналитический критерий локальной конечности для счетных полугрупп // Сиб. матем. журн. – 2022. – Т. 63. – № 3. – С. 510–515.

4. *Смолянов О. Г., Богачев В. И., Соболев В. И.* Топологические векторные пространства и их приложения. – М.-Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». – 2012.

5. *Akbarov S. S.* Pontryagin duality in the theory of topological vector spaces and in topological algebra // Journal of Mathematical Sciences. – 2003. – V. 113. – № 2. – P. 179–349.

6. *Акбаров С. С., Шавгулидзе Е. Т.* О двух классах пространств, рефлексивных по Понтрягину // Матем. сб. – 2003. – Т. 194. – № 10. – С. 3–26.

TOPOLOGICAL PROPERTIES OF ARENS-MICHAEL ENVELOPES OF SEMIGROUP ALGEBRAS

O. Yu. Aristov

It was shown by the author that a countable semigroup is finitely generated (locally finite) if and only if the Arens-Michael envelope of its semigroup algebra is a Fréchet space ((DF)-space in the sense of Grothendieck). In addition to this, we find a condition in terms of length functions that is sufficient for the envelope not to be a barrelled (moreover, pseudosaturated in the sense of Akbarov) space.

Keywords: semigroup algebra; length function; undistorted subgroup; Arens-Michael evelope; (DF)-space; barrelled space; pseudosaturated space.

УДК 517.982.27, 519.2

КОМБИНАТОРНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ ХАОСА РАДЕМАХЕРА И ЕГО СВОЙСТВА ТИПА БЕЗУСЛОВНОСТИ

С. В. Асташкин[1], К. В. Лыков[2]

1 *astash@ssau.ru*; Самарский национальный исследовательский университет.
2 *alkv@list.ru*; Белорусский государственный университет.

Исследуются плотностные оценки индексного множества $\mathscr{A}$, при которых из свойств типа безусловности хаоса Радемахера $\{r_{j_1}(t)\cdot\ldots\cdot r_{j_d}(t)\}_{(j_1,\ldots,j_d)\in\mathscr{A}}$ в симметричном пространстве X вытекает его эквивалентность в X каноническому базису в ℓ_2.

Ключевые слова: функции Радемахера, хаос Радемахера, симметричное пространство, комбинаторная размерность, безусловная сходимость.

Как обычно, функции Радемахера r_j определяются следующим образом:

$$r_j(t) := (-1)^{[2^j t]}, \quad j = 1,2,\ldots, 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

где $[x]$ — целая часть числа x. Согласно классическому неравенству Хинчина [1] (см. также [2]), для любого $p \geqslant 1$ существует константа C_p такая, что для произвольных $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 1,2,\ldots$,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2\Big)^{1/2} \leqslant \Big\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j r_j\Big\|_{L_p[0,1]} \leqslant C_p\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2\Big)^{1/2}. \tag{1}$$

Хорошо известно, что $C_p \le \sqrt{p}$ (точное значение этих констант было найдено в работе У. Хаагерупа [3]). Относительно левой части неравенства см. работу С. Шарека [4]. С точки зрения геометрии банаховых пространств неравенство (1) показывает, что пространства $L_p[0,1]$, $1 \le p < \infty$, не являясь гильбертовыми при $p \ne 2$, тем не менее, содержат подпространства, изоморфные ℓ_2.

Вопрос о том, в каких симметричных пространствах (с.п.) X (определения, относящиеся к ним, см. в [5]) последовательность $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$ эквивалентна каноническому базису в ℓ_2, был решен в работе В. А. Родина и Е. М. Семенова [6], доказавших, что последнее имеет место тогда и только тогда, когда X содержит пространство G_2 (G_r — замыкание L_∞ в экспоненциальном пространстве Орлича $\mathrm{Exp}L^r$, $r > 0$).

В работе [7] аналогичный вопрос изучался для хаоса Радемахера второго порядка, т.е. системы $\{r_{j_1}(t)\cdot r_{j_2}(t)\}_{j_1>j_2}$. Было показано, что она эквивалентна в с.п. X каноническому базису в ℓ_2 тогда и только тогда, когда X содержит пространство G_1. Кроме того, оба последних свойства оказались равносильными формально более слабому свойству безусловной базисности хаоса в X [8].

Следующий шаг в изучении поведения хаоса Радемахера в с.п. был сделан авторами данной работы с использованием понятия комбинаторной размерности, разработанного Р. Блеем (см. [9, 10]). А именно, согласно [11], вышеупомянутые результаты работ [7] и [8] распространяются на неполный хаос $\{r_{j_1}(t)\cdot\ldots\cdot r_{j_d}(t)\}_{(j_1,\ldots,j_d)\in\mathscr{A}}$ в случае, если комбинаторная размерность индексного множества $\mathscr{A}\subset\mathbb{N}^d$ равна d.

В этой заметке приведены некоторые результаты, показывающие, при каких условиях на индексное множество $\mathscr{A}$ из безусловности системы $\{r_{j_1}(t)\cdot\ldots\cdot r_{j_d}(t)\}_{(j_1,\ldots,j_d)\in\mathscr{A}}$ в с.п. X вытекает ее эквивалентность в X каноническому базису в ℓ_2. В частности, в определенных случаях найдена количественная зависимость поведения такой системы от комбинаторной размерности соответствующего индексного множества. Для решения поставленных задач мы несколько модифицируем понятие комбинаторной размерности, используя односторонние плотностные оценки индексного множества $\mathscr{A}$, что позволяет существенно расширить сферу действия соотношений вида (1). Доказательства этих результатов изложены в [12].

(α,β)-множества.

Определение 1. *Пусть $\mathscr{A}\subset\mathbb{N}^d$, $\alpha\geqslant 1$. Будем говорить, что множество $\mathscr{A}$ является супер-α-множеством, если выполняется условие: для некоторого $c_{\mathscr{A}}>0$ и каждого $n\in\mathbb{N}$ найдутся множества $B_1,B_2,\ldots,B_d$ такие, что $|B_j|=n$, $j=1,2,\ldots,d$, и*

$$|\mathscr{A}\cap(B_1\times B_2\times\ldots\times B_d)|\geqslant c_{\mathscr{A}}n^{\alpha}.$$

Определение 2. *Пусть $\mathscr{A}\subset\mathbb{N}^d$, $\beta\leqslant d$. Будем говорить, что $\mathscr{A}$ — суб-β-множество, если выполняется условие: для некоторого $C_{\mathscr{A}}>0$, каждого $n\in\mathbb{N}$ и всех множеств $B_1,B_2,\ldots,B_d$, $|B_j|=n$, $j=1,2,\ldots,d$, имеет место неравенство*

$$|\mathscr{A}\cap(B_1\times B_2\times\ldots\times B_d)|\leqslant C_{\mathscr{A}}n^{\beta}.$$

Множество $\mathscr{A}\subset\mathbb{N}^d$, являющееся одновременно супер-α- и суб-β-множеством, будем называть (α,β)-*множеством*.

Перечислим непосредственные следствия введенных определений. Если $\mathscr{A}$ — (α,β)-множество, то $\alpha\leqslant\beta$. Любое супер-α-множество — (α,d)-множество. Про всякое (α,α)-множество $\mathscr{A}$ будем говорить, что оно имеет *точную* комбинаторную размерность α. Отметим также, что для любых $1\leq\alpha<\beta\leq d$ существует (α,β)-множество, которое не является (α',β')-множеством, если выполнено хотя бы одно из неравенств $\alpha<\alpha'$ или $\beta>\beta'$ [9, Theorem XIII.19].

Оказалось, что при наличии определенных плотностных оценок индексного множества $\mathscr{A}$ эквивалентность системы $\{r_{j_1}(t)\cdot\ldots\cdot r_{j_d}(t)\}_{(j_1,\ldots,j_d)\in\mathscr{A}}$ в с.п. X каноническому базису в ℓ_2 может быть равносильна даже более слабому свойству системы, нежели безусловность.

Системы случайной безусловной расходимости в банаховом пространстве.

Определение 3. *Базисная последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ в банаховом пространстве X называется системой случайной безусловной расходимости (RUD-системой), если существует такое $D>0$, что для всех $n\in\mathbb{N}$ и $a_k\in\mathbb{R}$, $k=1,2,\ldots,n$, выполняется*

неравенство

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \Big\|_X \leqslant D \int_0^1 \Big\| \sum_{k=1}^{n} r_k(u) a_k x_k \Big\|_X \, du.$$

Обозначение RUD является аббревиатурой выражения "Random Unconditional Divergence"(см. [13, 14]).

Через $\triangle^d$, $d \in \mathbb{N}$, будем обозначать 'нижнетреугольное' подмножество $\mathbb{N}^d$:

$$\triangle^d := \{(j_1, j_2, \ldots, j_d) \in \mathbb{N}^d : \ j_1 > j_2 > \ldots > j_d\}.$$

Для каждого $d \in \mathbb{N}$ и любого $\vec{j} = (j_1, \ldots, j_d) \in \triangle^d$ полагаем $\mathbf{r}_{\vec{j}}(t) := r_{j_1}(t) \cdot \ldots \cdot r_{j_d}(t)$, а через $\{r_{\vec{j}}\}$ будем обозначать обычную последовательность функций Радемахера, пронумерованную в некотором (фиксированном) порядке индексами $\vec{j} = (j_1, \ldots, j_d) \in \triangle^d$.

Основные результаты.

Первый результат показывает, что при некоторых не ограничительных условиях на плотностные характеристики индексного множества наличие RUD свойства соответствующей подсистемы хаоса Радемахера в с.п. X гарантирует то, что X расположено достаточно "далеко" от пространства L_∞.

Теорема 1. *Пусть X — с.п., $d \in \mathbb{N}$. Предположим, что $\mathscr{A} \subset \triangle^d$ — (α, β)-множество, $\alpha + 1/\beta > 2$, такое, что для некоторого $D > 0$ и любого конечного множества $\mathscr{A}' \subset \mathscr{A}$ выполняется неравенство*

$$\Big\| \sum_{\vec{j} \in \mathscr{A}'} \mathbf{r}_{\vec{j}} \Big\|_X \leqslant D \int_0^1 \Big\| \sum_{\vec{j} \in \mathscr{A}'} r_{\vec{j}}(u) \mathbf{r}_{\vec{j}} \Big\|_X \, du.$$

Тогда $\mathrm{Exp} L^2 \subset X$.

В частности, это верно, если $\mathscr{A}$ является $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$-множеством для некоторого $\alpha > 1$ и достаточно малого $\varepsilon > 0$, а система $\{\mathbf{r}_{\vec{j}}\}_{\vec{j} \in \mathscr{A}}$ является RUD последовательностью в X.

Теорема 2. *Пусть X — с.п., $d \in \mathbb{N}$. Предположим также, что $\mathscr{A} \subset \triangle^d$ — (α, β)-множество, $\alpha + 1/\beta > 2$. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(a) $\{\mathbf{r}_{\vec{j}}\}_{\vec{j} \in \mathscr{A}}$ — RUD последовательность в X;
(b) $\{\mathbf{r}_{\vec{j}}\}_{\vec{j} \in \mathscr{A}}$ — безусловная базисная последовательность в X;
(c) последовательность $\{\mathbf{r}_{\vec{j}}\}_{\vec{j} \in \mathscr{A}}$ эквивалентна в X стандартному базису ℓ_2, т.е. для некоторой константы C_X

$$C_X^{-1} \|\{a_{\vec{j}}\}_{\vec{j} \in \mathscr{A}}\|_{\ell_2} \leqslant \Big\| \sum_{\vec{j} \in \mathscr{A}} a_{\vec{j}} \mathbf{r}_{\vec{j}} \Big\|_X \leqslant C_X \|\{a_{\vec{j}}\}_{\vec{j} \in \mathscr{A}}\|_{\ell_2}.$$

В частности, если $\alpha > 1$, то для достаточно малого $\varepsilon > 0$ и произвольного $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$-множества $\mathscr{A}$ условия (a), (b) и (c) эквивалентны.

Следствие 1. *Если индексное множество $\mathscr{A}$ имеет точную комбинаторную размерность $\alpha > 1$, то подсистема $\{\mathbf{r}_{\vec{j}}\}_{\vec{j} \in \mathscr{A}}$ хаоса любого порядка d безусловна в с.п. X тогда и только тогда, когда она эквивалентна в X каноническому базису в ℓ_2.*

Теорема 3. *Пусть L_M — произвольное пространство Орлича, $d \in \mathbb{N}$. Предположим, что множество $\mathscr{A} \subset \triangle^d$ имеет точную комбинаторную размерность $\alpha > 1$. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(i) $\{\mathbf{r}_{\vec{j}}\}_{\vec{j}\in\mathscr{A}}$ — RUD последовательность в L_M;
(ii) $\{\mathbf{r}_{\vec{j}}\}_{\vec{j}\in\mathscr{A}}$ — безусловная базисная последовательность в L_M;
(iii) последовательность $\{\mathbf{r}_{\vec{j}}\}_{\vec{j}\in\mathscr{A}}$ эквивалентна в L_M стандартному базису ℓ_2;
(iv) $L_M \supset \mathrm{Exp} L^{2/\alpha}$.

Близкие результаты для пространств Орлича были получены ранее в работах Р. Блея и Л. Ге [15, 16]. Использование свойств системы, связанных с ее безусловностью, эти авторы заменяют более тщательным анализом характера комбинаторной размерности ее индексного множества.

Работа С. В. Асташкина выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2023-931.

Литература

1. Khintchine A. *Über dyadische Brüche* // Math. Zeitschrift – 1923. – V. 18. – P. 109–116.

2. Асташкин С. В. *Система Радемахера в функциональных пространствах.* – М.: Физматлит, 2017. – 552 с.

3. Haagerup P. *The best constants in the Khintchine inequality* // Studia Math. – 1981. – V. 70. – № 3. – P. 231–283.

4. Szarek S. J. *On the best constant in the Khinchin inequality* // Studia Math. – 1976. – V. 58. – № 2. – P. 197–208.

5. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. *Интерполяция линейных операторов.* – М.: Наука, 1978. – 400 с.

6. Rodin V. A., Semyonov E. M. *Rademacher series in symmetric spaces* // Anal. Math. – 1975. – V. 1. – № 3. – P. 207–222.

7. Astashkin S. V. *Rademacher chaos in symmetric spaces* // East J. Approx. – 1998. – V. 4. – № 3. – P. 311–336.

8. Astashkin S. V. *Rademacher chaos in symmetric spaces, II* // East J. Approx. – 2000. – V. 6. – № 1. – P. 71–86.

9. Blei R. C. *Analysis in Integer and Fractional Dimensions.* – Cambridge Studies in Advanced Mathematics 71, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 2001. – 556 p.

10. Blei R., Janson S. *Rademacher chaos: tail estimates versus limit theorem* // Ark. Mat. – 2004. – V. 42. – № 1. – P. 13–29.

11. Асташкин С. В., Лыков К. В. *Разреженный хаос Радемахера в симметричных пространствах* // Алгебра и анализ. – 2016. – Т. 28. – № 1. – С. 3–31.

12. Асташкин С. В., Лыков К. В. *О безусловности дробного хаоса Радемахера в симметричных пространствах* // Известия РАН (в печати)

`https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=`

`paper&jrnid=im&paperid=9406&option_lang=rus`

13. Billard P., Kwapień S., Pelczyński A., Samuel Ch. *Biorthogonal systems of random unconditional convergence in Banach spaces* // Longhorn Notes. Texas Funct. Anal. Seminar, 1985–1986. – Univ. Texas, Austin, TX, 1986. – P. 13–35.

14. Lopez-Abad J., Tradacete P. *Bases of random unconditional convergence in Banach spaces* // Trans. Amer. Math. Soc. – 2016. – V. 368. – № 12. – P. 9001–9032.

15. Blei R. C., Ge L. *Relationships between combinatorial measurements and Orlicz norms* // J. Funct. Anal. – 2009. – V. 257. – P. 683–720.

16. Blei R. C., Ge L. *Relationships between combinatorial measurements and Orlicz norms (II)* // J. Funct. Anal. – 2009. – V. 257. – P. 3949–3967.

COMBINATORIAL DIMENSION OF A RADEMACHER CHAOS AND ITS UNCONDITIONALITY TYPE PROPERTIES

S. V. Astashkin, K. V. Lykov

We study density estimates of an index set $\mathscr{A}$ under which some unconditionality type properties of the corresponding Rademacher fractional chaos $\{r_{j_1}(t)\cdot\ldots\cdot r_{j_d}(t)\}_{(j_1,\ldots,j_d)\in\mathscr{A}}$ in a symmetric space X imply its equivalence in X to the canonical basis in ℓ_2.

Keywords: Rademacher functions, Rademacher chaos, symmmetric space, combinatorial dimension, unconditional convergence.

УДК 517.968

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С РАЗНОСТНЫМ ЯДРОМ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

С. Н. Асхабов[1]

1 *askhabov@yandex.ru*; Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова, Чеченский государственный педагогический университет.

Методом монотонных по Браудеру-Минти операторов доказываются глобальные теоремы о существовании и единственности решения для трех различных классов нелинейных интегральных уравнений с разностным ядром в вещественных пространствах Лебега с общим (не обязательно степенным) весом.

Ключевые слова: нелинейные интегральные уравнения, разностное ядро, метод монотонных операторов.

Пусть $\rho(x)$ есть любая неотрицательная почти всюду конечная и почти всюду отличная от нуля измеримая на $[0,1]$ функция. Обозначим через $L_p(\rho)$, $p>1$, множество всех измеримых на $[0,1]$ функций $u(x)$ с конечной нормой $\|u\|_{p,\rho}=\left(\int_0^1\rho(x)\cdot|u(x)|^p dx\right)^{1/p}$, а через $L_p^+(\rho)$ – множество всех неотрицательных функций из $L_p(\rho)$. Пусть функция $F(x,t)$ определена при $x\in[0,1]$, $t\in\mathbb{R}$, и удовлетворяет условиям Каратеодори. В зависимости от рассматриваемого класса уравнений будем предполагать, что для почти всех $x\in[0,1]$ и $\forall\, t,t_1,t_2\in\mathbb{R}$ выполняются либо условия 1)-3) либо условия 4)-6), где $d_1,\ldots,d_4$ – положительные постоянные, $p'=p/(p-1)$:

1) $|F(x,t)|\le c(x)+d_1\cdot\rho(x)\cdot|t|^{p-1}$, где $c(x)\in L_{p'}^+(\rho^{1-p'})$;

2) $F(x,t_1)\le F(x,t_2)$, если $t_1<t_2$;

3) $F(x,t)\cdot t \ge d_2\cdot\rho(x)\cdot|t|^p - D(x)$, где $D(x)\in L_1^+(0,1)$;

4) $|F(x,t)| \le g(x) + d_3\cdot\left([\rho(x)]^{-1}\cdot|t|\right)^{1/(p-1)}$, где $g(x)\in L_p^+(\rho)$;

5) $F(x,t_1) < F(x,t_2)$, если $t_1 < t_2$;

6) $F(x,t)\cdot t \ge d_4\cdot\left([\rho(x)]^{-1}\cdot|t|\right)^{1/(p-1)}\cdot|t| - D(x)$, где $D(x)\in L_1^+(0,1)$.

Скажем, что $\varphi\in\Omega(0,1]$, если $\varphi(x)$ есть непрерывная невозрастающая выпуклая вниз в промежутке $(0,1]$ функция такая, что $\int_0^1\varphi(x)\,dx\ge 0$.

Теорема 1. *Пусть $p\in[2,\infty)$, $\varphi\in\Omega(0,1]\cap L_1(0,1)$, выполнены условия 1)-3) и*

$$\int_0^1 [\rho(x)]^{2/(2-p)}dx<\infty \quad \text{при } p>2\,, \quad \operatorname*{ess\,sup}_{x\in[0,1]}\left[1/\sqrt{\rho(x)}\right]<\infty \quad \text{при } p=2\,. \tag{1}$$

Тогда при любом $\lambda>0$ и любом $f\in L_{p'}(\rho^{\mathbf{1-p'}})$ уравнение

$$\lambda\cdot F[x,u(x)] + \int_0^1\varphi(|x-t|)\,u(t)\,dt = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*\in L_p(\rho)$.

Теорема 2. *Пусть $p\in(1,2]$, $\varphi\in\Omega(0,1]\cap L_1(0,1)$, выполнены условия 1)-3) и*

$$\int_0^1 [\rho(x)]^{2/(2-p)}dx<\infty \quad \text{при } p<2\,, \quad \operatorname*{ess\,sup}_{x\in[0,1]}\sqrt{\rho(x)}<\infty \quad \text{при } p=2\,.$$

Тогда при любом $\lambda>0$ и любом $f\in L_p(\rho)$ уравнение

$$u(x) + \lambda\int_0^1\varphi(|x-t|)\,F[t,u(t)]\,dt = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*\in L_p(\rho)$.

Теорема 3. *Пусть $p\in[2,\infty)$, $\varphi\in\Omega(0,1]\cap L_1(0,1)$, выполнены условия 4)-6) и $\rho(x)$ удовлетворяет условию (1). Тогда при любом $\lambda>0$ и любом $f\in L_p(\rho)$ уравнение*

$$u(x) + \lambda\cdot F\left[x,\int_0^1\varphi(|x-t|)\,u(t)\,dt\right] = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x)\in L_p(\rho)$.

Теоремы 1-3 дополняют результаты, полученные в [1] при других ограничениях на p и $\varphi(x)$ в случае безвесовых пространств Лебега ($\rho(x)=1$). Для каждого из рассмотренных уравнений, следуя [1], мы устанавливаем оценки норм решений $u^*(x)$, а также изучаем вопрос о способах приближенного нахождения этих решений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект FEGS-2020-0001).

Литература

1. Асхабов С. Н. *Уравнения типа свертки с монотонной нелинейностью на отрезке* // Дифференц. уравн. – 2015. – Т. 51. – № 9. – С. 1182–1188.

NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS WITH A DIFFERENCE KERNEL IN WEIGHTED LEBESGUE SPACES

S. N. Askhabov

The method of Browder-Minty monotone operators is used to prove global theorems on the existence and uniqueness of solutions for three different classes of nonlinear integral equations with a difference kernel in real Lebesgue spaces with a common (not necessarily power) weight.

Keywords: nonlinear integral equations, difference kernel, method of monotone operators.

УДК 517.57

АСИМПТОТИКА МОДУЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО КОНДЕНСАТОРА С ПЕРЕМЕННЫМИ УРОВНЯМИ ПОТЕНЦИАЛА

А. С. Афанасьева-Григорьева[1]

1 *a.s.afanasevagrigoreva@yandex.ru*; Дальневосточный федеральный университет, РНОМЦ ДЦМИ ИМКТ.

Исследование асимптотики модуля конденсатора с двумя пластинами восходит к классическим работам Гретша и Тейхмюллера. Случай плоского конденсатора с тремя и более пластинамим и с переменными уровнями потенциалов изучен в недавних работах В.Н. Дубинина. В данной работе изучается емкость пространственного конденсатора с переменными уровнями потенциала. Установлен второй член асимптотики емкости при стягивании пластин в точки.

Ключевые слова: конденсатор, функция Грина, функция Робена, модуль.

Всюду ниже $\mathbb{R}^n$ обозначает n-мерное евклидово пространство, состоящее из точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), n \geq 3$, ω_{n-1} – площадь единичной гиперсферы, B – область в $\mathbb{R}^n$. Обобщенным конденсатором в $\overline{B}$ назовем упорядоченную совокупность $C = (\{F_0, F_1, \ldots, F_m\}, \{\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_m\}, B)$, где $F_k \subset \overline{B}$ – замкнутые непустые попарно непересекающиеся множества, δ_k –вещественные числа, $k = 0, 1, \ldots, m, m \geq 1$. Множества F_k называют пластинами конденсатора C, а числа δ_k – потенциалами пластин $F_k, k = 0, 1, \ldots, m$. В работе Дубинина В.Н. рассматривалась асимптотика емкости плоского конденсатора с переменными уровнями потенциала [1]. Цель данной работы — изучить асимптотику аналогичного конденсатора в евклидовом пространстве.

Пусть $\Gamma \subset \partial B, \mathbf{x}_0 \in B$. Функция Робена $g_B(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \Gamma)$ (при $\Gamma = \partial B$ ее называют функцией Грина) с полюсом в точке $\mathbf{x}_0 \in B$ определяется как непрерывная функция на $\overline{B} \setminus \{\mathbf{x}_0\}$, непрерывно дифференцируемая на $\overline{B} \setminus (\Gamma \cup \{\mathbf{x}_0\})$, гармоническая в $B \setminus \{\mathbf{x}_0\}$, удовлетворяющая условиям $g_B(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \Gamma) = 0$ при $\mathbf{x} \in \Gamma$, $\frac{\partial g_B(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \Gamma)}{\partial n} = 0$ при $\mathbf{x} \in \partial B \setminus \Gamma$, и имеющая разложение

$$g_B(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \Gamma) = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^{2-n} - r(B, \Gamma, \mathbf{x}_0)^{2-n}}{(n-2)\omega_{n-1}} + O(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|), \ \mathbf{x} \to \mathbf{x}_0.$$

Теорема. *Пусть* $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^m$ *– совокупность различных конечных точек области* $B \subset \mathbb{R}^n$, $\Gamma \subset \partial B$ *и существует функция Робена* $g_B(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k, \Gamma)$, $R_k = r(B, \Gamma, \mathbf{x}_k)$. *Предположим,*

что замкнутые множества $F_k(r)$ при достаточно малом r содержат шары и содержатся в шарах вида $|\mathbf{x}-\mathbf{x}_k| \le \mu_k r(1+O(r^{n-1}))$, $\delta_k(r) = \delta_k + \alpha_k r^{n-2} + o(r^{n-2})$, $r \to 0$, где $\delta_k \ne 0, \alpha_k$ – вещественные числа, $\mu_k > 0$, $k = 1, \dots, m$. Тогда для емкости конденсатора $C(r) = (\{\Gamma, F_1(r), \dots, F_m(r)\}, \{0, \delta_1(r), \dots, \delta_m(r)\}, B)$ при $r \to 0$ имеет место асимптотическая формула

$$\frac{cap\, C(r)}{(n-2)\omega_{n-1}} = \left(\sum_{k=1}^{m} \delta_k^2 \mu_k^{n-2}\right) r^{n-2} - M r^{2n-4} + o(r^{2n-4}),$$

где $M = -\sum\limits_{k=1}^{m} (\delta_k^2 \mu_k^{2n-4} R_k^{2-n} + 2\alpha_k \delta_k \mu_k^{n-2}) + \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{\substack{l=1,\\ l\ne k}}^{m} \delta_k \delta_l \mu_k^{n-2} \mu_l^{n-2} (n-2)\omega_{n-1} g_B(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l, \Gamma)$.

Заметим, что при $\Gamma = \partial B$ и постоянных уровнях потенциала δ_k соответствующая асимптотика была получена в работе [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2023-946 от 16 февраля 2023 года.

Литература

1. Дубинин В.Н. Асимптотика емкости конденсатора с переменными уровнями потенциала // Сиб. матем. журн. – 2020. – Т. 61. – № 4. – С. 796–802.

2. Дубинин В.Н., Прилепкина Е.Г. Об экстремальном разбиении пространственных областей // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 1998. – Т. 254. – С. 95–107.

ASYMPTOTICS OF A SPATIAL CONDENSER MODULE WITH VARIABLE POTENTIAL LEVELS

A. S. Afanaseva-Grigorieva

The study of the asymptotics of condenser module with two plates goes back to the classical works of Gretsch and Teichmuller. The case of the condenser with three or more plates with variable potential levels has been studied in recent works by V.N. Dubinin. In this paper, the capacity of a spatial condenser with variable potential levels is studied. The second term of the capacity asymptotics is established when the plates are pulled into points.

Keywords: condenser, Robin function, Green function, module.

UDC 517.98

COMMUTATORS AND HYPONORMAL OPERATORS

M. Akhmadiev[1], H. Alhasan[2], A. Bikchentaev[3], P. Ivanshin[4]

1 *mg.akhmadie@mail.ru*; Department of Mathematics, Kazan National Research Technological University, 420015, Kazan, Russia.
2 *hassanmalhassan@gmail.com*; Department of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, 420008, Kazan, Russia.
3 *airat.bikchentaev@kpfu.ru*; Department of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, 420008, Kazan, Russia.
4 *pivanshi@yandex.ru*; Department of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, 420008, Kazan, Russia.

Let $\mathscr{H}$ be a Hilbert space over the field $\mathbb{C}$, $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ be the $*$-algebra of all linear bounded operators on $\mathscr{H}$, let $|X| = \sqrt{X^*X}$ for $X \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. An operator $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ is a commutator if $A = [S,T] = ST - TS$ for some $S, T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Let $X, Y \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ and $X \geq 0$. If the operator XY is a non-commutator, then X^pYX^{1-p} is a non-commutator for every $0 < p < 1$. Let $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ be p-hyponormal for some $0 < p \leq 1$. If $|A^*|^r$ is a non-commutator for some $r > 0$ then $|A|^q$ is a non-commutator for every $q > 0$.

Keywords: Hilbert space; linear operator; commutator; hyponormal operator; trace.

Let $\mathscr{H}$ be a Hilbert space over the field $\mathbb{C}$, $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ be the $*$-algebra of all linear bounded operators on $\mathscr{H}$. For a C^*-subalgebra $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ put

$$\mathscr{A}_0 = \{X \in \mathscr{A} : X = \sum_{n\geq 1} [X_n, X_n^*] \text{ for } (X_n)_{n\geq 1} \subset \mathscr{A}, \text{ the series } \|\cdot\|\text{−converges}\}.$$

It is known that $\mathscr{A}_0$ coincides with the zero-space of all finite traces on $\mathscr{A}^{\mathrm{sa}}$. For a wide class of C^*-algebras that contains all von Neumann algebras we can consider only finite sums of the indicated form. Elements of unital C^*-algebras without tracial states can be represented as finite sums of commutators. Our work continues article [3] that possesses the following results: Let $\mathscr{H}$ be a Hilbert space, $\dim \mathscr{H} = +\infty$. 1) Let a Hermitian operator $X \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ be a non-commutator and $\sigma(X)$ be the spectrum of X. Then $f(X)$ is a non-commutator for every continuous function $f : \sigma(X) \to \mathbb{R}$ with $f(x) \neq 0$. 2) Let $X = U|X|$ be the polar decomposition of an operator $X \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Then the following conditions are equivalent: (i) X is a non-commutator; (ii) U and $|X|$ are non-commutators. 3) For a Hermitian operator $X \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ the following conditions are equivalent: (i) X is a commutator; (ii) the Cayley transform $\mathscr{K}(X)$ is a commutator. 4) Let $\mathscr{H}$ be a Hilbert space and $\dim \mathscr{H} \leq +\infty$, $A, B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ and $P \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, $P = P^2$. If $AB = \lambda BA$ for some $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ then the operator AB is a commutator. The operator AP is a commutator if and only if PA is a commutator. Our results here concern the facts stated above. Let $\dim \mathscr{H} = +\infty$. The algebra $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ is known to possess a proper uniformly closed ideal $\mathscr{J}$ that contains all other proper uniformly closed ideals of $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Let $X, Y \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ and $X \geq 0$. If the operator XY is a non-commutator, then $A = X^pYX^{1-p}$ is a non-commutator for every $0 < p < 1$. Differences of idempotents in C^*-algebras are naturally related to the quantum Hall effect [1], [2]. Let $P, Q \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ be idempotents, $P^\perp = I - P$. Then $P - Q$ is a non-commutator if and only if exactly one of the following conditions holds: (i) $Q, P^\perp \in \mathscr{J}$; (ii) $P, Q^\perp \in \mathscr{J}$. Let $A = A_+ - A_-$ be the Jordan decomposition of a Hermitian operator $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Then A is a non-commutator if and only if exactly one of A_+ or A_- is a non-commutator. Let $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ be p-hyponormal for some $0 < p \leq 1$. If $|A^*|^r$ is a non-commutator for some $r > 0$ then $|A|^q$ is a non-commutator for every $q > 0$. Let $\mathscr{H}$ be separable and $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ be a non-commutator. If A is hyponormal (or cohyponormal) then A is normal. We also present results in the setting of $\dim \mathscr{H} < +\infty$. For instance, for any unitary matrix $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ there exists $\varphi \in [-\pi, \pi]$ such that the inverse Cayley transform of $e^{i\varphi}U$ possesses zero trace.

References

1. Bikchentaev A.M. Differences of idempotents in C^*-algebras // Sib. Math. J. – 2017. – V. 58. – № 2. – P. 183–189.

2. Bikchentaev A.M. Differences of idempotents in C^*-algebras and the quantum Hall effect // Theoret. and Math. Phys. – 2018. – V. 195. – № 1. – P. 557–562.

3. Bikchentaev A.M. Commutators in C^*-algebras and traces // Annals Funct. Anal. – 2023. – V. 14. – № 2. – P. 14.

КОММУТАТОРЫ И ГИПОНОРМАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

М. Г. Ахмадиев, Х. Алхасан, А. М. Бикчентаев, П. Н. Иваньшин

Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ – $*$-алгебра всех линейных ограниченных операторов в $\mathscr{H}$, пусть $|X| = \sqrt{X^*X}$ для $X \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Оператор $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ является коммутатором, если $A = [S,T] = ST - TS$ для некоторых $S, T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Пусть $X, Y \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ и $X \geq 0$. Если оператор XY не коммутатор, то X^pYX^{1-p} не коммутатор для любого $0 < p < 1$. Пусть $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ p-гипонормален для некоторого $0 < p \leq 1$. Если $|A^*|^r$ — некоммутатор для некоторого $r > 0$, то $|A|^q$ — некоммутатор для каждого $q > 0$.

Ключевые слова: гильбертово пространство; линейный оператор; коммутатор; гипонормальный оператор; след.

УДК 517.977.55

ВНУТРЕННОСТЬ ИНТЕГРАЛА ОТ МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

М. В. Балашов[1]

1 *balashov73@mail.ru*; Институт им. В.А. Трапезникова проблем управления РАН.

Исследуется зависимость радиуса шара с центром в нуле, вписанного в значения интеграла от многозначного отображения, от верхнего предела интегрирования. Для некоторых типов многозначных отображений найдены точные асимптотики радиуса по верхнему пределу, когда верхний предел стремится к нулю. Рассмотрены приложения в некоторых задачах со множеством достижимости линейной управляемой системы.

Ключевые слова: многозначное отображение, интеграл Аумана, линейная задача быстродействия.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое компактное множество, $0 \in U$, $F(s) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — матрица с гладкими компонентами, $B_r(x)$ — замкнутый евклидов шар с центром $x \in \mathbb{R}^n$ радиуса $r > 0$. Рассмотрим интеграл от многозначного отображения $F(s)U$

$$\mathscr{F}(t) = \int_0^t F(s)U\,ds. \tag{1}$$

Многозначный интеграл мы будем понимать в смысле интеграла Аумана [1]

$$\int_0^t F(s)U\,ds = \left\{ \int_0^t F(s)u(s)\,ds \ : \ u(s) \in U - \text{измеримый селектор} \right\}.$$

По теореме Ляпунова о векторной мере значение интеграла (1) есть выпуклое и замкнутое множество [2]. Теорию интегралов от многозначных отображений можно найти в монографии [3], см. также цитированную в монографии литературу.

В работе рассматриваются достаточные условия, гарантирующие, что 0 — внутренняя точка $\mathscr{F}(t)$ в (1). Более того, мы получаем асимптотическую оценку величины $r(t)$, где $B_{r(t)}(0) \subset \mathscr{F}(t)$ при $t \to +0$. При этом 0 — граничная точка U.

Теорема 1. *Пусть $u \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $U = \mathrm{co}\,\{\pm u\}$, $t_0 > 0$. Предположим, что матрица $F(s) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $n-1$ раз непрерывно дифференцируема и $F^{(n-1)}(s)$ непрерывна по Липшицу при $s \in [0, t_0]$. Пусть $\mathrm{rank}(F(s)u, F'(s)u, \ldots, F^{(n-1)}(s)u) = n$ для всех $s \in [0, t_0]$. Тогда $B_{r(t)}(0) \subset \int\limits_0^t F(s)U\,ds$ и $r(t) \asymp t^n$, $t \to 0$. При этом порядок $r(t) \asymp t^n$ точный.*

Теорема 2. *Пусть $U = B_1(p_0) \subset \mathbb{R}^n$, $\|p_0\| = 1$. Предположим, что матрица $F(s) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ удовлетворяют в окрестности нуля условию*

$$F^T(s) = F_0 + F_1 \cdot s + F_2 \cdot s^2 + o(s^2), \quad s \to 0,$$

где F_i, $i = 0, 1, 2$, — фиксированные $n \times n$ матрицы, $F_0 = I$ — единичная $n \times n$ матрица и $\|F_1 p_0\| > |(p_0, F_1 p_0)|$. Тогда выполнено включение $B_{r(t)}(0) \subset \int\limits_0^t F(s)B_1(p_0)\,ds$, и $r(t) \asymp t^3$, $t \to 0$.

Если множество U содержит шар $B_\rho(p_0) \subset U$ и $0 \in \partial B_\rho(p_0) \cap \partial U$, то порядок $r(t)$ по t для интеграла $\mathscr{F}(t)$ не менее t^3. Если дополнительно $U \subset B_R(Rp_0)$ для некоторого $R > 0$, то порядок $r(t)$ в точности t^3.

Замечание 1. *Пусть $F(s)$ — $n \times n$ матрица с C^∞ компонентами в окрестности нуля. Если $\|F_1 p_0\| = |(p_0, F_1 p_0)|$ (то есть p_0 есть собственный вектор F_1), то при малых $t > 0$ для некоторой константы $C > 0$ выполнено неравенство $r(t) \le Ct^5$. Порядок $r(t) \asymp t^4$ при $t \to 0$ у функции $s(p, \mathscr{F}(t))$ исключается, поскольку коэффициент при t^4 разложения $s(p, \mathscr{F}(t))$ по t при $p = -p_0$ равен нулю.*

Рассмотрены приложения полученных результатов к алгоритмам некоторых оптимизационных задач со множеством достижимости управляемой линейной системы [4].

Результаты работы получены за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00042, https://rscf.ru/project/22-11-00042/ в ИПУ РАН.

Литература

1. Aumann R. *Integrals of set-valued functions* // Journal of Math. Anal. Appl. – 1965. – V. 12. – № 1. – P. 1–12.

2. Ляпунов А. А. *О вполне аддитивных вектор-функциях* // Изв. Ак. наук СССР. Сер. матем. – 1940. – Т. 4. – № 6. – С. 465–478.

3. Половинкин Е. С. *Многозначный анализ и дифференциальные включения.* – М.: Физматлит, 2014. – С. 522.

4. Балашов М. В., Камалов Р. А. *Оптимизация множества достижимости линейной системы по отношению к другому множеству* // ЖВМ и МФ. – 2023. – Т. 5. – С. 739-759.

THE INTERIOR OF THE INTEGRAL FROM A SET-VALUED MAPPING

M. V. Balashov

We study the dependence of the radius of a ball centered at zero, inscribed in the values of the integral

from a multi-valued mapping, from the upper limit of integration. For some types of set-valued mappings, exact asymptotics of the radius with respect to the upper limit are found when the upper limit tends to zero. Applications in some problems with the reachability set of a linear control system are considered.

Keywords: set-valued mapping, Aumann's integral, linear optimal time problem.

УДК 517.5

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА, СВЯЗАННЫЕ С ПРОСТРАНСТВАМИ МОРРИ, НА МНОГОМЕРНОМ ТОРЕ: ДЕКОМПОЗИЦИИ И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Ш. А. Балгимбаева[1]

1 *sholpan.balgyn@gmail.com*; Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан.

В статье рассмотрены атомарные и всплесковые декомпозиции и действительная интерполяция пространств типа Никольского–Бесова/Лизоркина–Трибеля, связанных с пространством Морри, на многомерном торе.

Ключевые слова: пространство Морри, пространство типа Никольского–Бесова/Лизоркина–Трибеля, атом, всплеск, декомпозиция, действительная интерполяция.

Пусть $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ такая, что $\psi(x) = 1$ при $|x|_\infty \le 1, \psi(x) = 0$ при $|x|_\infty \ge 3/2$ ($|x|_\infty = \max\{|x_\kappa| \ : \ \kappa = 1,\dots,d\}, x = (x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{R}^d$). Положим $\varphi_0 := \psi$, $\varphi(x) := \varphi_0(\frac{x}{2}) - \varphi_0(x), \varphi_j(x) := \varphi(2^{1-j}x)$, $j = 1, 2, \dots$ ($\Rightarrow \sum_{j=0}^\infty \varphi_j(x) \equiv 1$ на $\mathbb{R}^d$).

Пусть $\mathscr{S}' := \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ – пространство Шварца умеренных распределений, $\widetilde{\mathscr{S}'} := \mathscr{S}'(\mathbb{T}^d)$ – подпространство $\mathscr{S}'$ распределений, 1-периодических по каждой переменной; $\hat{f}$ – преобразование Фурье функции $f \in \mathscr{S}'$. Пусть $\mathscr{Q}$ – множество диадических кубов $Q := Q_{j\lambda} := \{x \in \mathbb{R}^d \mid 2^j x - \lambda \in [0,\ 1)^d\}$, $j \in \mathbb{Z}, \lambda \in \mathbb{Z}^d$; $l(Q)$ – длина ребра Q, $j(Q) = -\log_2 l(Q)$, $\widetilde{\mathscr{Q}} := \{Q \in \mathscr{Q} \mid Q \subset [0,\ 1)^d\}$.

Пусть $s, \tau \in \mathbb{R}, 0 < q, p \le \infty$. Пространство типа Никольского-Бесова $\widetilde{B}^{s,\tau}_{p,q} := B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{T}^d)$ (Лизоркина-Трибеля $\widetilde{F}^{s,\tau}_{p,q} := F^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{T}^d)$ при $p < \infty$) состоит из всех распределений $f \in \widetilde{\mathscr{S}'}$ таких, что

$$\|f \mid \widetilde{B}^{s,\tau}_{p,q}\| := \sup_{Q\in\widetilde{\mathscr{Q}}} \frac{1}{|Q|^\tau}\left\{\sum_{j=j(Q)}^\infty \left[\int_Q 2^{jsp}\left|\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^d} \varphi_j(\xi)\hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}\right|^p\right]^{q/p} dx\right\}^{1/q} < \infty$$

(соответственно

$$\|f \mid \widetilde{F}^{s,\tau}_{p,q}\| := \sup_{Q\in\widetilde{\mathscr{Q}}} \frac{1}{|Q|^\tau}\left\{\int_Q \left[\sum_{j=j(Q)}^\infty 2^{jsq}\left|\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^d} \varphi_j(\xi)\hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}\right|^p q\right]^{p/q} dx\right\}^{1/p} < \infty).$$

I. Атомарные декомпозиции. Пусть $\tilde{\mathrm{B}}^{s,\tau}_{p,q} := \mathrm{B}^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{T}^d)$ ($\tilde{\mathrm{F}}^{s,\tau}_{p,q} := \mathrm{F}^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{T}^d)$ при $p < \infty$) – пространство (комплексных) числовых последовательностей $\mathrm{c} = (c_Q)_{Q\in\widetilde{\mathscr{Q}}}$ таких, что

$$\|\mathrm{c}|\tilde{\mathrm{B}}^{s,\tau}_{p,q}\| := \sup_{P\in\widetilde{\mathscr{Q}}} \frac{1}{|P|^\tau}\left\{\sum_{j=j(P)}^\infty 2^{jsq}\left[\sum_{Q\subset P: j(Q)=j} (|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}|c_Q|)^p\right]^{q/p}\right\}^{1/q} < \infty$$

(соответственно

$$\|\mathrm{c}|\tilde{\mathrm{F}}^{s,\tau}_{p,q}\| := \sup_{P\in\widetilde{\mathscr{Q}}} \frac{1}{|P|^\tau}\left\{\int_P \left[\sum_{j=j(P)}^\infty 2^{jsq}\sum_{Q\subset P: j(Q)=j} (|Q|^{-\frac{1}{2}}|c_Q|)^q \chi_Q(x)\right]^{p/q} dx\right\}^{1/p} < \infty\Big).$$

Положим $\sigma(B) := \max\{d(1/p-1),0\}$, $\sigma(F) := \max\{d(1/\min\{p,q\}-1),0\}$, $J(B) := d/\min\{p,1\}$, $J(F) := d/\min\{p,q,1\}$, $\tau(A) = \frac{1}{p} + \frac{1-\{\sigma(A)-s+d\}}{d}$ при $s \le \sigma(A)$, $\tau(A) = \frac{1}{p} + \frac{s-\sigma(A)}{d}$ при $s > \sigma(A)$, $A \in \{B,F\}$ ($\{z\}$ и ниже $\lfloor z \rfloor$ – дробная и целая части $z \in \mathbb{R}$).

Функцию $a_Q : \mathbb{T}^d \to \mathbb{C}$ назовем (гладким) атомом для $\widetilde{A}^{s,\tau}_{p,q}$ ($Q \in \widetilde{Q}$), если найдется такая функция $b_Q : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, что $\operatorname{supp}(b_Q) \subset 3Q$, $\|\partial^\alpha b_Q \,|\, L_\infty(\mathbb{R}^d)\| \le |Q|^{-1/2-|\alpha|/d}$ $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d : |\alpha| \le \max\{\lfloor s+d\tau+1 \rfloor, 0\}$, $\int_{\mathbb{R}^d} x^\alpha b_Q(x)\,dx = 0$ $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d : |\alpha| \le \max\{\lfloor J(A)-s-d \rfloor, -1\}$ и $a_Q(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^d} b_Q(x-\xi)$.

Теорема 1. *Пусть $A \in \{B,F\}$, $s \in \mathbb{R}$, $p,q \in (0,\infty]$ ($p < \infty$ при $A = F$), $0 \le \tau < \tau(A)$. Тогда $f \in \widetilde{A}^{s,\tau}_{p,q}$, если и только если найдутся семейство атомов $(a_Q)_{Q \in \widetilde{Q}}$ для $\widetilde{A}^{s,\tau}_{p,q}$ и последовательность $\mathrm{c} \in \tilde{\mathrm{A}}^{s,\tau}_{p,q}$ такие, что имеет место представление*

$$f = \sum_{Q \in \widetilde{Q}} c_Q a_Q \qquad (\textit{сходимость в } \widetilde{\mathscr{S}'}).$$

При этом $\|f \,|\, \widetilde{A}^{s,\tau}_{p,q}\| \asymp \inf \|\mathrm{c} \,|\, \tilde{\mathrm{A}}^{s,\tau}_{p,q}\|$, где $\inf$ берется по всем таким представлениям.

Замечание 1. Теорема 1 – периодический аналог теоремы 3.3 из [1]. Частный случай теоремы 1 для $\tau = 0$ и $p,q \ge 1$ получен в [2, предложение 3.1].

II. Всплесковые декомпозиции. Пусть $w^0(t)$ и $w^1(t)$ – масштабирующая функция и всплеск Мейера (см. [3, ch.2, §12, ch.3, §2]). Положим $\mathrm{e}^d = \mathrm{e}^d(0) = \{0,1\}^d$, $\mathrm{e}^d(1) = \mathrm{e}^d \setminus \{(0,\dots,0)\}$, $\Lambda(d,j) = \mathbb{N}_0^d \cap [0, 2^j-1]^d$, $j \in \mathbb{N}_0$. Определим функции $w^\iota : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ($\iota = (\iota_1,\dots,\iota_d) \in \mathrm{e}^d$): $w^\iota(x) = w^{\iota_1}(x_1) \times \dots \times w^{\iota_d}(x_d)$, далее $w^\iota_{j\lambda}(x) = 2^{jd/2} w^\iota(2^j x - \lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{Z}^d$, $j \in \mathbb{N}_0$), наконец, $\widetilde{w}^\iota_{j\lambda} : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$:

$$\widetilde{w}^\iota_{j\lambda}(x) = 2^{jd/2} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^d} w^\iota_j(x - \xi - 2^{-j}\lambda) \quad (\lambda \in \Lambda(d,j),\ \iota \in \mathrm{e}^d(\operatorname{sgn}(j)),\ j \in \mathbb{N}_0).$$

Занумеруем всплески системы $\widetilde{\mathscr{W}}^d = \{\widetilde{w}^\iota_{j\lambda} \,|\, \lambda \in \Lambda(d,j),\ \iota \in \mathrm{e}^d(\operatorname{sgn}(j)),\ j \in \mathbb{N}_0\}$ кубами из $\widetilde{Q} : \widetilde{w}^\iota_Q = \widetilde{w}^\iota_{j\lambda} \Leftrightarrow Q = Q_{j\lambda}, \iota \in \mathrm{e}^d(\operatorname{sgn}(j))$. Для $f \in \widetilde{\mathscr{S}'}$ положим $f^\iota_Q := \langle f, \widetilde{w}^\iota_Q \rangle$, где $(\iota, Q) \in \mathbb{K} := \cup_{j \in \mathbb{N}_0} \mathbb{K}[j] := \cup_{j \in \mathbb{N}_0} \{(\iota, Q) \,|\, \iota \in \mathrm{e}^d(j),\ j(Q) = j\}$. Ясно, что для любого $f \in \widetilde{\mathscr{S}'}$

$$f = \sum_{(\iota,Q) \in \mathbb{K}} f^\iota_Q \widetilde{w}^\iota_Q \qquad (\text{сходимость в } \widetilde{\mathscr{S}'}).$$

Пространства $w\tilde{\mathrm{A}}^{s,\tau}_{p,q} := w\mathrm{A}^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{T}^d)$ последовательностей $\mathrm{c} = (c^\iota_Q)_{(\iota,Q) \in \mathbb{K}}$ аналогичны $\tilde{\mathrm{A}}^{s,\tau}_{p,q}$ (лишь в (квази)нормах c_Q и $\sum_{Q \subset P : j(Q) = j}$ заменяются на c^ι_Q и $\sum_{(\iota,Q) \in \mathbb{K}[j]}$)($\mathrm{A} \in \{\mathrm{B},\mathrm{F}\}$).

Теорема 2. *Пусть $A \in \{B,F\}$, $s > \sigma(A)$, $p,q \in (0,\infty]$ ($p < \infty$ при $A = F$), $0 \le \tau < \tau(A)$. Тогда $f \in \widetilde{A}^{s,\tau}_{p,q}$ если и только если $(f^\iota_Q)_{(\iota,Q) \in \mathbb{K}} \in w\tilde{\mathrm{A}}^{s,\tau}_{p,q}$, при этом*

$$\|f \,|\, \widetilde{A}^{s,\tau}_{p,q}\| \asymp \|(f^\iota_Q)_{(\iota,Q) \in \mathbb{K}} \,|\, w\tilde{\mathrm{A}}^{s,\tau}_{p,q}\|.$$

Замечание 2. Теорема 2 – периодический аналог теоремы 4.1 из [1]. В случае $\tau = 0$ и $p,q \ge 1$ теорема 1 известна ([3, ch.3, §11], [4, теорема 3.1, замечание 3.2]).

III. Действительная интерполяция. Введем пространство $\widetilde{\mathscr{B}}^{s,\tau}_{p,q} := \mathscr{B}^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{T}^d)$, состоящее из всех распределений $f \in \widetilde{\mathscr{S}'}$ таких, что

$$\|f \,|\, \widetilde{\mathscr{B}}^{s,\tau}_{p,q}\| := \left\{ \sum_{j=0}^\infty \sup_{Q \in \widetilde{\mathscr{Q}}} \frac{1}{|Q|^\tau} \left[\int_Q 2^{jsp} \left| \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^d} \varphi_j(\xi) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} \right|^p \right]^{q/p} dx \right\}^{1/q} < \infty.$$

Ясно, что $\widetilde{\mathscr{B}}^{s,\tau}_{p,q} \hookrightarrow \widetilde{B}^{s,\tau}_{p,q}$ при $q < \infty$, $\widetilde{\mathscr{B}}^{s,\tau}_{p,\infty} = \widetilde{B}^{s,\tau}_{p,\infty}$. Пусть $0 < \theta < 1, s_0, s_1 \in \mathbb{R}, s_0 < s_1, 0 < p < \infty, 0 \le \tau \le \frac{1}{p}, 0 < q, q_0, q_1 \le \infty$. Положим $s := (1-\theta)s_0 + \theta s_1$.

Теорема 3. $\widetilde{\mathscr{B}}^{s,\tau}_{p,q} = (\widetilde{E}^{s_0,\tau}_{p,q_0}, \widetilde{G}^{s_1,\tau}_{p,q_1})_{\theta,q}$ *в смысле эквивалентных (квази)норм*; *здесь* $E, G \in \{B, F\}$ *– любые.*

Замечание 3. Теорема 3 – периодический аналог (теоремы 2.1 и) следствия 2.1 [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта AP09258831 МОН РК.

Литература

1. Yuan W., Sickel W., Yang D. *Morrey and Campanato meet Besov, Lizorkin and Triebel.* – Springer. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 2005, 2010. – 300 с.

2. Базарханов Д. Б. *Оптимальные кубатурные формулы для классов гладких периодических функций многих переменных* // Труды МИРАН – 2021. – Т. 312. – С. 22–42.

3. Meyer Y. A. *Wavelets and operators.* – Cambridge: CUP, 1992. – 223 с.

4. Базарханов Д. Б. *Приближение всплесками и поперечники Фурье классов периодических функций многих переменных. I.* // Труды МИРАН – 2010. – Т. 269. – С. 8–30.

5. Sickel W. *Smoothness spaces related to Morrey spaces – a survey. II.* // Eurasian Math. J. – 2013. – V. 4. – № 1. –С. 82–124.

FUNCTION SPACES RELATE TO MORREY SPACES ON MULTIDIMENSIONAL TORUS: DECOMPOSITIONS AND INTERPOLATION

Sh. A. Balgimbayeva

In the article, atomic and wavelet decompositions as well as real interpolation for the Nikol'skii–Besov/Lizorkin–Triebel type function spaces related to Morrey spaces on multidimensional torus are considered.

Keywords: Morrey space, Nikol'skii–Besov/Lizorkin–Triebel space, atom, wavelet, decomposition, real interpolation.

УДК 517.984

ГРАНИ СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА ТЕНЗОРНОЙ СУММЫ МОДЕЛЕЙ ФРИДРИХСА

Б. И. Бахронов[1]

1 *b.i.bahronov@buxdu.uz*; Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан.

Рассматривается тензорная сумма $H_{\mu,\lambda}$, $\mu, \lambda > 0$ двух моделей Фридрихса с двумерным возмущением. Получены оценки для нижней и верхней граней существенного спектра оператора $H_{\mu,\lambda}$.

Ключевые слова: модельный оператор, тензорная сумма, грань, существенный спектр.

Пусть $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ - d-мерный тор, $L_2^{\mathrm{s}}((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) симметричных функций, определенных на $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2$.

Рассмотрим модельный оператор $H_{\mu,\lambda}$, действующий в гильбертовом пространстве $L_2^{\mathrm{s}}((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$ по формуле

$$H_{\mu,\lambda} := H_{0,0} - \mu(V_{11} + V_{12}) + \lambda(V_{21} + V_{22}),$$

где $H_{0,0}$ – оператор умножения на функцию $u(x) + u(y)$:

$$(H_{0,0}f)(x,y) = (u(x) + u(y))f(x,y),$$

а $V_{\alpha\beta}$, $\alpha,\beta = 1,2$ – нелокальные операторы взаимодействия:

$$(V_{\alpha 1}f)(x,y) = v_\alpha(x)\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v_\alpha(t)f(t,y)dt, \quad (V_{\alpha 2}f)(x,y) = v_\alpha(y)\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v_\alpha(t)f(x,t)dt, \quad \alpha = 1,2.$$

Здесь $f \in L_2^{\mathrm{s}}((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$, а $u(\cdot)$ и $v_\alpha(\cdot)$, $\alpha = 1,2$, – вещественнозначные, непрерывные функции на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$. По определению, операторы V_{ij}, $i,j = 1,2$ являются частично интегральными операторами с вырожденным ядром ранга 1.

При этих предположениях оператор $H_{\mu,\lambda}$ является ограниченным и самосопряженным в гильбертовом пространстве $L_2^{\mathrm{s}}((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$.

Для точной формулировки нужного нам результата, приведем два условия.

Условие 1. *Предположим, что*

$$\mathrm{mes}(\mathrm{supp}\{v_1(\cdot)\} \cap \mathrm{supp}\{v_2(\cdot)\}) = 0,$$

где $\mathrm{mes}(\cdot)$ – *мера Лебега в* $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ *и* $\mathrm{supp}\{v_\alpha(\cdot)\})$ – *носитель функции* $v_\alpha(\cdot)$.

Пусть

$$m := \min_{x\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} u(x), \quad M := \max_{x\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} u(x).$$

Определим регулярную в области $\mathbb{C} \setminus [m;M]$ функцию

$$I_\alpha(z) := \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v_\alpha^2(t)dt}{u(t) - z}, \quad \alpha = 1,2.$$

Так как функции $I_\alpha(\cdot)$, $\alpha = 1,2$ монотонно возрастают на интервалах $(-\infty;m)$ и $(M;+\infty)$, в силу теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега существуют следующие конечные или бесконечные пределы

$$I_1(m) = \lim_{z\to m-0} I_1(z), \quad I_2(M) = \lim_{z\to M+0} I_2(z).$$

Условие 2. *Предположим, что*

$$|I_1(m)| < +\infty, \quad |I_2(M)| < +\infty.$$

Положим

$$\mu_0 := (I_1(m))^{-1}, \quad \lambda_0 := -(I_2(M))^{-1}.$$

Теперь сформулируем основной результат работы.

Теорема. *Пусть выполняются условия 1 и 2.*
1) *Если* $0 < \mu \le \mu_0$ *и* $0 < \lambda \le \lambda_0$, *то*

$$\min \sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = 2m, \quad \max \sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = 2M.$$

2) *Если* $\mu > \mu_0$ *и* $0 < \lambda \le \lambda_0$, *то*

$$\min \sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) < 2m, \quad \max \sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = 2M.$$

3) *Если* $0 < \mu \le \mu_0$ *и* $\lambda > \lambda_0$, *то*

$$\min \sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = 2m, \quad \max \sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) > 2M.$$

4) *Если* $\mu > \mu_0$ *и* $\lambda > \lambda_0$, *то*

$$\min \sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) < 2m, \quad \max \sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) > 2M.$$

BOUNDS OF THE ESSENTIAL SPECTRUM OF A TENSOR SUM OF FRIEDRICHS MODELS

B. I. Bahronov

The tensor sum $H_{\mu,\lambda}$, $\mu, \lambda > 0$ *of two Friedrichs models with rank 2 perturbations is considered. Estimates for the lower and upper bounds of the essential spectrum of the operator* $H_{\mu,\lambda}$ *are established.*
Keywords: model operator, tensor sum, bound, essential spectrum.

УДК 517.54, 517.588

ОБ ОТОБРАЖАЮЩИХ СВОЙСТВАХ ОБОБЩЕННОЙ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

К. Е. Бахтин[1], Е. Г. Прилепкина[2]

1 *bakhtin.ke@dvfu.ru*; Дальневосточный федеральный университет.
2 *pril-elena@yandex.ru*; Дальневосточный федеральный университет, ИПМ ДВО РАН.

Представлен ряд следствий интегрального представления обобщенной гипергеометрической функции в виде преобразования Стилтьеса. На этом пути для гипергеометрических функций при определенных ограничениях на параметры установлены области однолистности, получены новые неравенства, доказаны формулы суммирования и преобразования.

Ключевые слова: конформное отображение, функция Гаусса, гипергеометрическая функция, преобразование Стилтьеса.

Пусть $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p, a_{p+1})$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_p)$ означают комплексные вектора, причем $-b_j \notin \mathbb{N}_0$, $j = 1, \dots, p$. Обобщенная гипергеометрическая функция как функция комплексного переменного $z \in \mathbb{C}$ при $|z| < 1$ определяется с помощью ряда

$${}_{p+1}F_p(\mathbf{a}; \mathbf{b}; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \cdots (a_{p+1})_n}{(b_1)_n (b_2)_n \cdots (b_p)_n n!} z^n$$

Для определения гипергеометрической функции на всю комплексную плоскость используется аналитическое продолжение. Обобщенные гипергеометрические функции возникают во многих теоретических и прикладных задачах. Например, для нахождения явных формул различных метрических характеристик многоугольников необходимо построить конформное отображение на верхнюю полуплоскость. С этой целью используется интеграл Кристофелля-Шварца, который в ряде случаев представим в терминах гипергеометрической функции Гаусса ${}_2F_1$ [1], [2]. Отображающие свойства функции Гаусса достаточно хорошо изучены, чего нельзя сказать об обобщенной гипергеометрической функции ${}_{p+1}F_p$.

В данной работе мы сосредоточимся на следствиях полученного нами в [3] интегрального представления

$$ {}_{p+1}F_p(\mathbf{a};\mathbf{b};z) = \int_0^1 \frac{\rho(t)\,dt}{(1-tz)^{a_{p+1}}}, \tag{1}$$

с суммируемой плотностью $\rho(t)$, справедливого при условиях $\operatorname{Re} a_i > 0$ при $i = 1,\dots,p$ и $\operatorname{Re}\sum_{i=1}^{p}(b_i - a_i) > 0$. При этом плотность $\rho(t)$ выражается в явном виде через G-функцию Майера и при условии ее неотрицательности ${}_{p+1}F_p$ принадлежит обобщенному классу Стилтьеса. Таким образом, для исследования отображающих свойств обобщенной гипергеометрической функции можно применить общие факты о функциях класса Стилтьеса. Этот путь приводит нас к следующей теореме.

Теорема. *Пусть* $0 < a_1 \le a_2 \le \dots \le a_p$, $0 < b_1 \le b_2 \le \dots \le b_p$, *и* $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i \le \sum\limits_{i=1}^{k} b_i$ *для* $k = 1,2\dots,p$. *Тогда при условии* $a_{p+1} \ge 1$ *функция* $w = {}_{p+1}F_p(\mathbf{a};\mathbf{b};-z)$ *отображает сектор* $0 < \arg(z) < \pi/a_{p+1}$ *в нижнюю полуплоскость* $\operatorname{Im} w < 0$. *При условии* $0 < a_{p+1} \le 1$ *функции* ${}_{p+1}F_p(\mathbf{a};\mathbf{b};z)$ *и* $z({}_{p+1}F_p(\mathbf{a};\mathbf{b};z))$ *однолистны в полуплоскости* $\operatorname{Re} z < 1$. *Если* $1 < a_{p+1} \le 2$, *то функция* $z({}_{p+1}F_p(\mathbf{a};\mathbf{b};z))$ *однолистна в круге* $|z| < \sqrt{\sqrt{32}-5} \approx 0.81$.

Для функций $f(w)$ класса S, то есть голоморфных и однолистных в единичном круге функций с условиями $f(0) = f'(0) - 1 = 0$, известен ряд теорем искажения. Приведенная выше теорема позволяет записать [4] для обобщенных гипергеометрических функций классические результаты искажения. Например, неравенство $(1-|w|)/(|w|(1+|w|)) \le |f'(w)|)/(|f(w)| \le (1+|w|)/(|w|(1-|w|))$ в условиях теоремы при $0 < a_{p+1} \le 1$ приобретает вид

$$\frac{2(\mathbf{b})(|z-2|-|z|)}{(\mathbf{a})|z||z-2|(|z-2|+|z|)} \le \left|\frac{{}_{p+1}F_p(\mathbf{a}+1;\mathbf{b}+1;z)-1}{{}_{p+1}F_p(\mathbf{a};\mathbf{b};z)}\right| \le \frac{2(\mathbf{b})(|z-2|+|z|)}{(\mathbf{a}))|z||z-2|(|z-2|-|z|)},$$

где $\operatorname{Re} z < 1$ и символы $(\mathbf{a})$ и $\mathbf{a}+1$ означают произведение координат вектора $\mathbf{a}$ и сдвиг всех координат на 1, соответственно. В докладе мы представляем ряд других следствий интегрального представления (1), включая формулы суммирования и преобразования для обобщенных гипергеометрических функций с целыми параметрическими разностями.

Работа выполнена в Дальневосточном центре математических исследований при финансовой поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2023-946 от 16.02.2023.

Литература

1. *Nasyrov S., Sugawa T., Vuorinen M.* Moduli of quadrilaterals and quasiconformal reflection // arXiv:2111.08304. – 2021.

2. *Колесников И. А.* Конформное отображение полуплоскости на круговой счетноугольник с двойной симметрией // Пробл. анал. (Issues Anal.). – 2013. – V. 2(20). – № 2. – P. 59–67.

3. *Карп Д., Прилепкина Е.* Гипергеометрические функции как обобщенные преобразования Стилтьеса // Journ. of Math. Anal. and Appl. – 2012. – V. 393. – № 2. — P. 348–359.

4. *Карп Д.Б., Прилепкина Е.Г.* Приложения представлений преобразования Стилтьеса и Лапласа для гипергеометрических функций // ITSF. – 2017. – V. 28. – № 10. – P. 710–731.

ON MAPPING PROPERTIES OF THE GENERALIZED HYPERGEOMETRIC FUNCTION

K. E. Bakhtin, E. G. Prilepkina

The consequences of the integral representation of the generalized hypergeometric function in the form of the Stieltjes transformation are presented. In this way, we obtained domains of univalence, new inequalities, summation and transformation formulas for hypergeometric functions under certain restrictions on the parameters.

Keywords: conformal mapping, Gauss function, hypergeometric function, Stieltjes transform.

УДК 517.982.256

ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ ЧЕБЫШЁВСКИХ МНОЖЕСТВАХ

Б. Б. Беднов[1]

1 *bednov_b_b@staff.sechenov.ru*; ПМГМУ им. И.М. Сеченова (Сеченовский университет), МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Как известно, в конечномерном нормированном пространстве каждое ограниченное чебышёвское множество выпукло только в пространствах Царькова-Фелпса. Монотонная линейная связность множества ослабляет свойство выпуклости. Характеризуются все трёхмерные пространства, в которых каждое ограниченное чебышёвское множество монотонно линейно связно.

Ключевые слова: чебышёвское множество, выпуклость, монотонная линейная связность.

Пусть X — линейное нормированное пространство. Множество $M \subset X$ называется чебышёвским множеством в X, если для каждого $x \in X$ множество ближайших элементов в M одноточечно.

В 1958 г. Н.В. Ефимов и С.Б. Стечкин [1] сформулировали задачу о характеризации конечномерных линейных нормированных пространств, в которых всякое ограниченное чебышевское множество выпукло. Полный ответ на этот вопрос был получен И.Г. Царьковым [2].

Конечномерные пространства, у которых множество крайних точек сферы сопряжённого пространства X^* плотно в ней, называются *пространствами Царькова-Фелпса*.

Теорема А. *В конечномерном действительном банаховом пространстве X любое ограниченное чебышёвское множество выпукло тогда и только тогда, когда X — пространство Царькова-Фелпса.*

Пусть $k(\tau)$, $0 \le \tau \le 1$, — непрерывная кривая в банаховом пространстве X. Кривая $k(\cdot)$ *монотонна*, если функция $f(k(\tau))$ монотонна по τ для любого крайнего функционала $f \in S(X^*)$. Множество $M \subset X$ называется монотонно линейно связным, если любые две его точки можно соединить непрерывной монотонной кривой, лежащей в M.

В работе (3) охарактеризованы все трёхмерные банаховы пространства, в которых каждое чебышёвское множество монотонно линейно связно. Напомним, что в произвольном двумерном пространстве каждое чебышёвское множество монотонно линейно связно, а значит, и любое ограниченное чебышёвское множество монотонно линейно связно (в двумерном пространстве X любое чебышёвское множество выпукло тогда и только тогда, $S(X)$ гладка.).

Теорема Б. *В трёхмерном банаховом пространстве X каждое чебышёвское множество монотонно линейно связно тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух условий:*
1) любая достижимая точка S является точкой гладкости;
2) сфера $S(X)$ — цилиндр.

Следующая теорема основана на теоремах А и Б.

Теорема В. *В действительном трёхмерном банаховом пространстве X каждое ограниченное чебышёвское множество монотонно линейно связно тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*
1) X — пространство Царькова-Фелпса;
2) сфера $S(X)$ — цилиндр.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-21-00415).

Литература

1. Ефимов Н.В., Стечкин С.Б. *Некоторые свойства чебышёвских множеств* // ДАН СССР. – 1958. – Т. 118. – № 1. – С. 17–19.

2. Царьков И.Г. *Ограниченные чебышевские множества в конечномерных банаховых пространствах* // Матем. заметки. – 1984. – Т. 36. – № 1. – С. 73–87.

3. Алимов А. Р., Беднов Б. Б. *Монотонная линейная связность чебышёвских множеств в трехмерных пространствах* // Матем. сборник. – 2021. – Т. 212. – № 5. – С. 37–57.

ON BOUNDED CHEBYSHEV SETS

B. B. Bednov

It is known, that in a finite-dimensional normed space every bounded Chebyshev set is convex only in Tzarkov-Phelps spaces. The monotone path-connectivity of a set weakens the convexity property. All three-dimensional spaces are characterized in which every bounded Chebyshev set is monotone path-connected.

Keywords: Chebyshev set, convexity, monotone path-connection.

УДК 514.822

ФОРМУЛЫ ТИПА ЯКОБИ ДЛЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ЗАДАЧА РИМАНА — ГИЛЬБЕРТА

С. И. Безродных[1]

1 *sbezrodnykh@mail.ru*; Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук.

В докладе рассматривается гипергеометрическая функция Лауричеллы $F_D^{(N)}$, зависящая от N комплексных переменных. Для этой функции представлены формулы, являющиеся обобщением известного для гипергеометрической функции Гаусса тождества Якоби на случай многих переменных. С помощью формулы типа Якоби для функции Лауричеллы найдено представление решения задачи Римана — Гильберта с кусочно–постоянными данными в виде интеграла Кристоффеля — Шварца. Подынтегральное выражение в нем имеет вид произведения некоторых биномов и полинома, который явно выписан в терминах функции Лауричеллы. Для вычисления этого полинома и решения задачи Римана — Гильберта применены найденные формулы аналитического продолжения функции Лауричеллы. Такие формулы дают представление функции $F_D^{(N)}$ в виде гипергеометрических рядов Горна N переменных, экспоненциально сходящихся в соответствующих подобластях $\mathbb{C}^N$. Обсуждаются приложения результатов к моделированию эффекта магнитного пересоединения и к вычислению емкостей плоских фигур сложной формы.

Ключевые слова: гипергеометрические функции Горна и Лауричеллы, аналитическое продолжение, формулы типа Якоби, задача Римана — Гильберта.

Весьма общий класс гипергеометрических функций многих переменных $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N$ определяется с помощью ряда Горна [1]–[3], который имеет вид:

$$F^{(N)}(\mathbf{z}) = \sum \Lambda(\mathbf{k})\mathbf{z}^{\mathbf{k}}; \tag{1}$$

здесь суммирование ведется по мультииндексу $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_N)$ с неотрицательными целыми компонентами, а коэффициенты $\Lambda(\mathbf{k})$ таковы, что отношение любых двух соседних является рациональной функцией аргументов $k_1, k_2, \dots, k_N$. Иначе говоря, выполняются соотношения $\Lambda(\mathbf{k} + \mathbf{e}_j)/\Lambda(\mathbf{k}) = P_j(\mathbf{k})/Q_j(\mathbf{k})$, $j = \overline{1, N}$, где P_j и Q_j — некоторые полиномы, а $\mathbf{e}_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ — вектор с единицей на j-м месте.

Рассматриваемая в работе функция Лауричеллы $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$ является важным представителем класса гипергеометрических функций Горна (1) и возникает во многих теоретических и прикладных задачах. Функция $F_D^{(N)}$ определяется в виде следующего N–кратного ряда, сходящегося в единичном поликруге $\mathbb{U}^N := \{|z_j| < 1, j = \overline{1, N}\}$, см. [4],[5]:

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) := \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b)_{|\mathbf{k}|}(a_1)_{k_1} \cdots (a_N)_{k_N}}{(c)_{|\mathbf{k}|} k_1! \cdots k_N!} z_1^{k_1} \cdots z_N^{k_N}, \tag{2}$$

здесь $(a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{C}^N$, b, c — комплексные параметры, $(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1)$ — символ Похгаммера, $|\mathbf{k}| := \sum_{j=1}^N k_j$, $k_j \geq 0$, $c \notin \mathbb{Z}^-$.

В докладе представлены дифференциальные соотношения [6], [7] для функции Лауричеллы, являющиеся обобщением известного для гипергеометрической функции Гаусса тождества Якоби [8]. Пусть параметр a_N функции Лауричеллы (2) равен единице, т.е. $\mathbf{a} = (\mathfrak{a}, 1)$, где $\mathfrak{a} := (a_1, \ldots, a_{N-1})$. Соответствующее $a_N = 1$ переменное z_N переобозначим через w, т.е. $\mathbf{z} = (\mathfrak{z}, w)$, $\mathfrak{z} := (z_1, \ldots, z_{N-1})$. Тогда для функции Лауричеллы (2) имеет место тождество типа Якоби:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial w}\left\{ \left[\prod_{j=1}^{N-1} (w - z_j)^{a_j} \right] w^{c-|\mathfrak{a}|-1} (1-w)^{1+b-c} F_D^{(N)}(\mathfrak{a}, 1; b, c; \mathfrak{z}, w) \right\} = \\ = \left[\prod_{j=1}^{N-1} (w - z_j)^{a_j - 1} \right] w^{c-|\mathfrak{a}|-2} (1-w)^{b-c} \mathscr{R}(\mathfrak{a}; b, c; \mathfrak{z}, w), \end{aligned} \tag{3}$$

где $\mathscr{R}$ — полином степени $N-1$ по переменному w, определяемый равенством:

$$\mathscr{R}(\mathfrak{a}; b, c; \mathbf{z}, w) = w\Big[\prod_{j=1}^{N-1} (w - z_j) \Big] \Big(\frac{c - |\mathfrak{a}| - 1}{w} \Lambda_0 + \sum_{s=1}^{N-1} \frac{a_s(1 - z_s)}{w - z_s} \Lambda_s \Big); \tag{4}$$

здесь $|\mathfrak{a}| := \sum_{j=1}^{N-1} a_j$, а коэффициенты Λ_s, $s = \overline{0, N-1}$, определяются соотношениями

$$\Lambda_0 = F_D^{(N-1)}(\mathfrak{a}; b, c; \mathfrak{z}), \qquad \Lambda_s = F_D^{(N-1)}(\mathfrak{a} + \mathbf{e}_s; b, c; \mathbf{z}), \quad s = \overline{1, N-1}, \tag{5}$$

в которых векторы параметров имеют вид $\mathfrak{a} + \mathbf{e}_s := (a_1, \ldots, a_{s-1}, a_s + 1, a_{s+1}, \ldots, a_{N-1})$. Отметим, что соотношения (3)–(5) можно рассматривать как функциональное тождество, связывающее функцию $F_D^{(N)}$, ее производные, а также так называемые "смежные" с ней функции, отличающиеся от нее целочисленными сдвигами параметров.

Задача Римана — Гильберта [9], [10] состоит в нахождении аналитической в области $\mathscr{B}$ функции $\mathscr{F}$ по заданному на $\partial\mathscr{B}$ соотношению $\mathrm{Re}\,(h\mathscr{F}) = c$, где h и c — граничные данные. Искомая функция $\mathscr{F}$ записывается в виде суперпозиции конформного отображения Φ области $\mathscr{B}$ на полуплоскость $\mathbb{H}^+$ и решения $\mathscr{P}^+$ аналогичной задачи Римана — Гильберта в $\mathbb{H}^+$. С помощью тождества типа Якоби (3)–(5) получено представление нового типа для решения $\mathscr{P}^+$ рассматриваемой краевой задачи в $\mathbb{H}^+$, когда данные задачи h и c кусочно–постоянны, см. [7], [11]. Найденное представление имеет вид интеграла типа Кристоффеля — Шварца, осуществляющего отображение $\mathbb{H}^+$ на неоднолистный многоугольник. Подынтегральное выражение имеет вид произведения некоторых биномов и полинома, который явно выписан в терминах функции Лауричеллы. Такое представление дает ясную геометрическую интерпретацию решения рассматриваемой задачи и является гораздо более удобным, чем традиционное представление через интегралы типа Коши, для численной реализации и теоретического анализа.

Для вычисления функций Лауричеллы, возникающих в (5), применяются формулы аналитического продолжения [7]. Такие формулы дают представление для функции (2) вне единичного поликруга $\mathbb{U}^N$ в терминах рядов (относящихся к классу Горна (1)), экспоненциально сходящихся в соответствующих подобластях $\mathbb{C}^N$. В докладе представлены приложения к моделированию эффекта магнитного пересоединения [12] и к вычислению емкостей сложных фигур.

Литература

1. Horn J. *Uber die konvergenz der hypergeometrischen Reihen zweier und dreier Veranderlichen* // Math. Ann. – 1889. – V. 34. – P. 544–600.

2. Гельфанд И. М., Граев М. И., Ретах В. С. *Общие гипергеометрические системы уравнений и ряды гипергеометрического типа* // Успехи матем. наук. –1992. – Т. 47. – Вып. 4(286). – С. 3–82.

3. Садыков Т. М., Цих А. К. *Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных.* – М.: Наука, 2014. – 408 с.

4. Lauricella G. *Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili* // Rendiconti Circ. Math. Palermo. – 1893. – V. 7. – P. 111–158.

5. Exton H. *Multiple hypergeometric functions and application.* – N.-Y.: J. Willey & Sons, 1976. – 312 c.

6. Безродных С. И. *Дифференциальные соотношения типа Якоби для функции Лауричеллы* // Математические заметки. – 2016. – Т. 99. – Вып. 6. – С. 832–847.

7. Безродных С. И. *Гипергеометрическиая функция Лауричеллы $F_D^{(N)}$, задача Римана — Гильберта и некоторые приложения* // Успехи матем. наук. – 2018. – Т. 73. – № 6(444). – С. 3–94.

8. Бэйтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра.* – М.: Наука, 1973. – 294 с.

9. Гахов Ф. Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 640 с.

10. Мусхелишвили Н. И. *Сингулярные интегральные уравнения.* – М.: Наука, 1968. – 511 с.

11. Bezrodnykh S. I., Vlasov V. I. *On a New Representation for the Solution of the Riemann–Hilbert Problem* // Mathem. Notes. – 2016. – V. 99. – № 6. – P. 932–937.

12. Somov B. V. *Plasma Astrophysics. Part II, Reconnection and Flares.* Second Ed. – N.Y.: Springer SBM, 2013. – 506 c.

JACOBI-TYPE FORMULAS FOR HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS AND THE RIEMANN—HILBERT PROBLEM

S. I. Bezrodnykh

The talk discusses the hypergeometric Lauricella function $F_D^{(N)}$, depending on N complex variables. Formulas are presented for this function, which are the multivariable generalization of the Jacobi identity known for the hypergeometric Gauss function. Using the Jacobi-type relation, a representation of the solution of the Riemann — Hilbert problem with piecewise constant data in the form of the Schwartz — Christoffel integral is found. The integrand has the form of a product of some binomials and a polynomial, which is explicitly derived in terms of the Lauricella function. To calculate the polynomial and the solution to the Riemann — Hilbert problem, the found analytic continuation formulas of the Lauricella function are applied. Such formulas provide representations of this function in the form of hypergeometric Horn series of N variables exponentially converging in the corresponding subdomains of $\mathbb{C}^N$. We demonstrate applications of these results to the modelling of the magnetic reconnection effect and to the calculation of the capacities of complex–shaped plane domains.

Keywords: Horn and Lauricella hypergeometric functions, analytic continuation, Jacobi-type formulas, Riemann — Hilbert problem.

УДК 517.929

ДУАЛИЗМ В ТЕОРИИ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ. ПРИМЕР МАНХЭТТЕНСКОЙ РЕШЕТКИ

Л. А. Бекларян[1], А. Л. Бекларян[2]

1 *lbeklaryan@outlook.com*; Центральный экономико-математический институт РАН.
2 *abeklaryan@hse.ru*; Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики".

Работа посвящена исследованию агрегированной модели движения в манхэттенской решетке. Для такой модели установлена теорема существования и единственности солитонного решения, указаны диапазоны характеристик, при которых справедливы утверждения теоремы, получена асимптотика возможного роста таких решений, построено полное семейство ограниченных солитонных решений.

Ключевые слова: солитонные решения, манхэттенская решетка, функционально-дифференциальные уравнения.

Одно из активно развивающихся направлений исследований связано с изучением солитонных решений (решений типа бегущей волны). Важными являются как вопросы существования солитонных решений, так и модели, в которых они возникают.

Также многообразны и методы исследования. Одним из наиболее часто используемых методов исследования таких систем является конструктивное построение решений, использующее явный вид правой части, а также наличие различных симметрий, либо возможную ее периодичность, бесконечную дифференцируемость, аналитичность. Далее, методами теории возмущений солитонные решения устанавливаются и для близких правых частей. В докладе представлена некоторая общая схема дуализма в теории солитонных решений.

Рассматривается пример в виде агрегированной модели движения в манхэттенской решетке. В такой модели полагаем число узлов решетки достаточно большим и, соответственно, решетку будем считать полной по всем направлениям и однородной. Другое допущение касается отсутствия детализации потоков по направлениям. Схема движения в манхеттонской решетке такова, что из каждой точки узла решетки движение возможно в трех направлениях по основным магистралям (вперед, влево, вправо) и движение в обратном направлении через накопители.

Для группы $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ через $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ обозначим систему ее образующих, где $\gamma_1 = (1,0)$, $\gamma_2 = (0,1)$. Установившийся поток в манхеттонской решетке описывается солитонными решениями одномерного конечно разностногом аналога параболического уравнения

$$\dot{y}_\gamma(t) = \sum_{l=1}^{2} \alpha_{\gamma_l}[y_{\gamma_l\gamma} - y_\gamma] + \sum_{l=1}^{2} \beta_{\gamma_l}[y_{\gamma_l^{-1}\gamma} - y_\gamma] + \phi(y_\gamma),$$
$$y_\gamma \in \mathbb{R}, \quad \forall \gamma \in \mathbb{Z}^2, \quad \text{п. в. } t \in \mathbb{R},$$

где потенциал ϕ является непрерывной функцией. Решением такой системы называется всякая вектор-функция $\{y_\gamma(\cdot)\}_{\gamma\in\mathbb{Z}^2}$, координаты $y_\gamma(\cdot), \gamma \in \mathbb{Z}^2$ которой являются абсолютно непрерывными функциями и удовлетворяют системе при почти всех $t \in \mathbb{R}$.

Для такой модели установлена теорема существования и единственности солитонного решения, указаны диапазоны характеристик, при которых справедливы утверждения теоремы, получена асимптотика возможного роста таких решений, построено полное семейство ограниченных солитонных решений.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-11-00080).

Литература

1. Бекларян Л. А. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Групповой подход.* – М.: Факториал Пресс, 2007. – 286 с.

2. Бекларян Л. А. *О квазибегущих волнах* // Матем. сб. – 2010. – Т. 201. – № 12. – С. 21–68.

3. Бекларян Л. А., Бекларян А. Л. *Вопрос существования ограниченных солитонных решений в задаче о продольных колебаниях упругого бесконечного стержня в поле с сильно нелинейным потенциалом* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2021. – Т. 61. – № 12. – С. 2024–2039.

4. Бекларян Л. А., Бекларян А. Л. *Вопрос существования ограниченных солитонных решений в задаче о продольных колебаниях упругого бесконечного стержня в поле с нелинейным потенциалом общего вида* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2022. – Т. 62. – № 6. – С. 933–950.

DUALISM IN THE THEORY OF SOLITON SOLUTIONS. AN EXAMPLE OF A MANHATTAN LATTICE

L. A. Beklaryan, A. L. Beklaryan

The article is devoted to the study of the aggregated model of motion in the Manhattan lattice. For such a model, the existence and uniqueness theorem of a soliton solution is established, the ranges of characteristics for which the statements of the theorem are valid are indicated, and the asymptotics of the possible growth of such solutions are obtained. A complete family of bounded soliton solutions is constructed.

Keywords: soliton solutions, manhattan lattice, functional differential equations.

УДК 519.688

ВЕЙВЛЕТНОЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ ОБОБЩЕНИЕ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХААРА

М. С. Беспалов[1]

1 *bespalov@vlsu.ru*; Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.

В статье предложен алгоритм p-ичного обобщения быстрого преобразования Хаара, материнские функции которого получаются циклическими сдвигами хааровского вектора.

Ключевые слова: быстрое преобразование Хаара, алгоритм, цифровая обработка сигналов.

Алгоритм быстрого преобразования Хаара (БПХ) для массива x объема $N = 2^n$ осуществляется следующим образом

Для k от 1 до n делаем

(для j от 0 до $2^{n-k}-1$ делаем

$x_j := x_{2j} + x_{2j+1}$, $a_{2^{n-k}+j} := x_{2j} - x_{2j+1}$).

$a_0 := x_0$.

Алгоритм БПХ выделяется минимумом числа операций $2N-2$.

Другой вариант БПХ с прореживанием по времени, а не по частоте, был предложен в [1]; он допускает короткое описание в векторной форме. Массив x разобьем на два подмассива одинаковой по объему длины: левый x_l и правый x_r. Новые массивы вычислим сложением векторов: $x := x_l + x_r$, $m := x_l - x_r$. Первый из них становится исходным массивом для следующего шага, а второй m запоминаем с конца формируемого выходного массива. Данный шаг запишем в матричном виде

$$\begin{pmatrix} x \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_l \\ x_r \end{pmatrix}.$$

Данный матричный вид применим и к БПХ по частоте, если на каждом шаге обрабатываемый одномерный массив разместить в матрицу с двумя строками по столбцам, а не по строкам (как в этом примере).

Теперь приведем p-ичное вейвлетное обобщение этих двух (по частоте и по времени) алгоритмов БПХ на примере $p = 4$.

Пусть x^0 – исходный одномерный массив объема $N = p^n$, а x^k – выходной для k-го шага и обрабатываемый далее одномерный массив объема $N_k = p^{n-k}$. Обозначим M^k запоминаемую на каждом шаге матрицу размера $(p-1) \times N_k$, через X^k матрицу размера $p \times N_{k+1}$, в которую разместили массив x^k одним из способов: по столбцам в случае алгоритма с прореживанием по частоте, по строкам в случае алгоритма с прореживанием по времени. В случае $p = 4$ алгоритм обобщения выглядит так.

Для k от 1 до n делаем

$$\begin{pmatrix} x^k \\ M^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X^{k-1}.$$

Формируемый выходной массив состоит из матриц $(x^n, M^n, M^{n-1}, \ldots, M^1)$.

Алгоритм восстановления исходного сигнала на примере $p = 4$.

Для k от n до 1 делаем:

$$X^{k-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^k \\ M^k \end{pmatrix},$$

матрицу X^{k-1} развертываем (по столбцам в случае алгоритма с прореживанием по частоте, по строкам в случае алгоритма с прореживанием по времени) в одномерный массив x^{k-1}.

Есть метод убыстрения обратного алгоритма за счет правильной организации вычислений. Выбор в качестве p числа 4 позволяет продемонстрировать по аналогии принцип построения матрицы и ее обратной матрцы в случае больших p. Более подробное описание данного аналога и другой вариант обобщения БПХ в случае ортогональной матрицы приведены в [2].

Литература

1. Малоземов В. Н., Машарский С. М. *Хааровские спектры дискретных сверток* // Журн. вычисл. матем. и матем. физики – 2000. – Т. 40. – № 6. – С. 954-960.

2. Беспалов М. С. *Вейвлетные p-аналоги дискретного преобразования Хаара* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Матем. Механика. Инф. – 2021. – Т. 21. – В. 4. – С. 520-531.

WAVELET REAL GENERALIZATION OF THE FAST HAAR TRANSFORM

M. S. Bespalov

The paper proposes an algorithm for the p-ary generalization of the fast Haar transform whose mother functions are obtained by cyclic shifts of the Haar vector.

Keywords: fast Haar transform, algorithm, digital signal processing.

УДК 517.925

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ КОНСТРУИРОВАНИЯ МЕГАСТАБИЛЬНЫХ ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ СИСТЕМ В ФОРМЕ ЛУРЬЕ

И. М. Буркин[1], О. И. Кузнецова[2]

1 *i-burkin@yandex.ru*; Тульский государственный университет.
2 *oxxy4893@mail.ru*; Тульский государственный университет, Тульский государственный педагогический университет имени Л.Н. Толстого.

Мультистабильность соответствует одновременному существованию нескольких нетривиальных аттракторов для одного и того же набора параметров системы. Интерес к подобным системам обусловлен широким спектром их прикладного использования, например, для шифрования информации и безопасной связи.

Ключевые слова: динамическая система, хаос, аттрактор, мегастабильность, LEs.

Рассмотрим систему в форме Лурье со скалярной нелинейностью

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \sigma = c^T x, \tag{1}$$

где A – постоянная $n \times n$ - матрица, b и c – постоянные n - векторы, $\varphi(\sigma)$ – непрерывная, кусочно-дифференцируемая скалярная функция. Пусть I – единичная $n \times n$ - матрица. Для системы (1) определим дробно-рациональную функцию $\chi(p) = c^T(A - pI)^{-1}b$. Пусть $\chi(p) = m(p)[n(p)]^{-1}$, причем многочлен $n(p) = \det(A - pI)$ имеет степень n и несократим с $m(p)$. В этом случае говорят, что передаточная функция $\chi(p)$ невырожденная.

Теорема. *Пусть передаточная функция системы (1) невырожденная, $\varphi(0) = 0$, $\chi(0) \neq 0$, и матрица $A - \chi(0)^{-1}bc^T$ имеет нулевое собственное значение. Пусть система (1) имеет нетривиальный хаотический аттрактор Ω такой, что для любого $x_0 \in \Omega$ справедливо соотношение $|c^T x(t, x_0)| < C < \infty$ при $t \geqslant 0$. Тогда функцию $\varphi(\sigma)$ в системе (1) можно заменить на Δ-периодическую функцию $\psi(\sigma)$ таким образом, чтобы новая система имела бесконечное число состояний равновесия и 1-D решетку идентичных хаотических аттракторов-клонов.*

Доказательство. Пусть $k = -\chi(0)^{-1} = -\frac{m(0)}{n(0)}$. Систему (1) можно записать в виде

$$\dot{x} = A_1 x + bg(\sigma), \sigma = c^T x, \tag{2}$$

где $g(\sigma) = \varphi(\sigma) - k\sigma$, $A_1 = A + kbc^T$. Матрица A_1 имеет нулевое собственное значение. Для доказательства последнего утверждения воспользуемся леммой Шура [1]:

$$\begin{aligned} &\det(A + kbc^T - pI) = \det(A - pI)\det[I + k(A - pI)^{-1}bc^T] = n(p)\det[1+ \\ &+kc^T(A - pI)^{-1}b] = n(p)(1 + k\frac{m(p)}{n(p)}) = n(p) + km(p) = n(p) - \frac{n(0)}{m(0)}m(p). \end{aligned} \tag{3}$$

Из (3) при $p = 0$ получаем $\det(A + kbc^T) = 0$. В силу предположений теоремы система (2) имеет нетривиальный аттрактор, расположенный в ограниченной полосе $\Pi = \{x : -C < c^T x < C\}$ фазового пространства. Заменим в (2) функцию $g(\sigma)$ на $2C$-периодическую функцию $\psi(\sigma)$, совпадающую с $g(\sigma)$ на $[-C, C]$. Тогда система (2) преобразуется в систему с угловой координатой $d^T x$, где $d = \Delta s(c^T s)^{-1}$, s — собственный вектор матрицы A_1, соответствующий ее нулевому собственному значению. Построенная система имеет счетное число состояний равновесия и 1-D решетку хаотических аттракторов, получающихся сдвигом аттрактора Ω системы (2) в направлении вектора d, то есть является мегастабильной.

В качестве примера рассмотрена система (1) с передаточной функцией $\chi(p) = -(p^3 + p^2 + 1.7p + 1.7)^{-1}$ и нелинейностью $\varphi(\sigma) = 0.1\sigma - 0.2\sigma^3 + 0.012\sigma^5$, имеющая пару скрытых аттракторов-близнецов, представленных на рис. 1. Для этой системы выполнены все условия сформулированной теоремы, значит заменяя нелинейность подходящим образом на периодическую функцию удается построить мегастабильную систему, обладающую одномерной решеткой хаотических аттракторов, представленной на рис. 2.

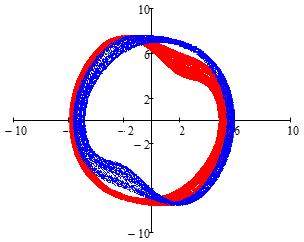

Рис. 1. Пара скрытых аттракторов

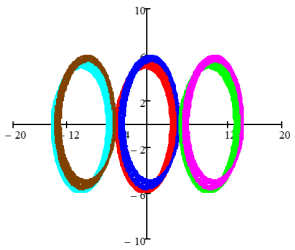

Рис. 2. 1-D решетка аттракторов

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ соглашение №073-03-2023-303/2 от 14.02.23 г., тема научного исследования «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике».

Литература

1. Леонов Г.А.*Теория управления.* – СПб.: СПбГУ, 2006. – 233 с.

ON A METHOD OF CONSTRUCTING METASTABLE CHAOTIC SYSTEMS BASED ON SYSTEMS IN THE LURIE FORM

I. M. Burkin, O. I. Kuznetsova

Multistability corresponds to the coexistence of several nontrivial attractor for the same set of system parameters. Interest in such systems is due to a wide range of their applications, for example, for encrypting information and to secure communication.

Keywords: dynamic system, chaos, attractor, megastability, LEs.

УДК 517.984

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ГРАФАХ

М. Ш. Бурлуцкая[1], Е. И. Григорьева[2]

1 *bmsh2001@mail.ru*; Воронежский государственный университет.
2 *elenabiryukova2010@yandex.ru*; Воронежский государственный университет.

В работе приводятся результаты по исследованию спектральных свойств интегральных операторов с инволюцией $\nu(x) = 1 - x$, заданных на геометрических графах. Построен широкий класс интегральных операторов на графе с циклом, обладающих заданными свойствами, доказаны теоремы равносходимости с тригонометрическим рядом.

Ключевые слова: функционально-дифференциальный оператор, интегральный оператор, инволюция, граф, ряд по собственным и присоединенным функциям.

В работе приводятся результаты по исследованию функционально-дифференциального оператора, задаваемого дифференциальным выражением вида

$$l(y) = \alpha y'(x) + \beta y'(1-x) + p_1(x)y(x) + p_2(x)y(1-x), \quad x \in [0,1].$$

Отображение $\nu(x) = 1-x$ представляет наиболее простой вид инволюции на отрезке $[0,1]$. Однако, уравнения с такой инволюцией имеют хорошие приложения и замечательны уже тем, что имеют тесную связь с двумя важными классическими уравнениями: уравнением Штурма-Лиувилля и уравнением Дирака [1].

К обобщениям таких операторов приводят исследования интегральных операторов, ядра которых терпят разрывы на линиях $t = x$ и $t = 1-x$. Отдельный интерес представляет исследование спектральных вопросов для таких операторов, заданных на геометрических графах. В соответствие с векторным подходом оператор на графе понимается как оператор в пространстве вектор-функций, связанных условиями, определяемыми структурой графа (условие непрерывности во внутренних узлах). Такая геометрическая интерпретация краевых условий оказывается удобной при анализе регулярности по Биркгофу соответствующих спектральных задач.

В докладе будут представлены исследования спектральных свойств функционально-дифференциальных и интегральных операторов с инволюцией на простейшем геометрическом графе из двух ребер, одно из которых образует цикл-петлю. Приведем здесь один из результатов.

Параметризуя каждое ребро графа отрезком $[0,1]$, зададим интегральный оператор на графе Γ как оператор в пространстве вектор-функций:

$$y(x) = Af(x) = \int_0^1 A(x,t)f(t)\,dt, \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

где $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, $A(x,t)$ — некоторая матрица.

В [2] построен класс интегральных операторов с ядрами, имеющими разрывы на линиях $t = x$ и $t = 1 - x$, и областью значений, удовлетворяющей условию непрерывности в узле графа: $y_1(0) = y_1(1) = y_2(0)$. В докладе приводится оператор более общего вида, обобщающий оператор из [2].

Далее предполагаем выполненными следующие условия: компоненты ядра $A(x,t)$, а также $\frac{\partial^k}{\partial x^k} A(x,t)$ $(k = 1,2)$, $\frac{\partial}{\partial t} A(x,t)$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} A(x,t)$ непрерывны, кроме может быть, линий $t = x$, $t = 1 - x$ (см. [2]).

Теорема. *Пусть A^{-1} существует. Тогда для любой функции $f(x)$ с компонентами из $L[0,1]$*

$$\lim_{r\to\infty} \left\| S_r(f,x) - (\sigma_r(f_1,x), \sigma_r(f_2,x))^T \right\|_{[\varepsilon,1-\varepsilon]} = 0,$$

где $S_r(f,x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции f по собственным и присоединенным функциям оператора A для характеристических чисел λ_k, попадающих в круг $|\lambda_k| < r$; $\sigma_r(f_j,x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции f_j по тригонометрической системе $\{e^{2k\pi i x}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, включающая слагаемые, для которых $|2\pi k| < r$.

Литература

1. Бурлуцкая М.Ш. Некоторые свойства функционально-дифференциальных операторов с инволюцией $v(x) = 1 - x$ и их приложения // Известия вузов. Математика. — 2021. — № 5. — С. 1–9.

2. Бурлуцкая М.Ш., Григорьева Е.И., Колесникова И.В., Леженина И.Ф. О структуре интегрального оператора на графе с циклом и обратного к нему // Вестник ВГУ. Сер. : Физика. Математика. — 2022. — № 2. — С. 39–44.

ON THE SPECTRAL PROPERTIES OF OPERATORS WITH INVOLUTION ON GEOMETRIC GRAPHS

M. Sh. Burlutskaya, E. I. Grigorieva

The paper presents the results of the study of the spectral properties of integral operators with involution on geometric graphs. A wide class of integral operators on a graph with a cycle and specified properties is constructed, and equiconvergence with a trigonometric series is proved.

Keywords: functional-differential operator, integral operator, involution, graph, eigenfunctions decomposition.

УДК 517.911

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

А. В. Буробин[1]

1 *burobin_av@mail.ru*; -

Рассматривается задача Коши для уравнений дробного порядка. Изучается разрешимость такой задачи для линейного и нелинейного уравнений.

Ключевые слова: уравнения дробного порядка, задача типа Коши, задача Коши, разрешимость.

В работе [1] изучались свойства линейного уравнения дробного порядка $\gamma \in (0,1)$

$$D^\gamma f = a(x) f + F(x) \tag{1}$$

в пространствах $C^{(-\alpha)}([0,1])$, $\alpha \in [0,1)$, связанных с дробным интегралом Римана-Лиувилля порядка γ

$$I_{0+}^\gamma \varphi(x) = \Gamma^{-1}(\gamma) \int_0^x (x-t)^{\gamma-1} \varphi(t)\, dt.$$

При этом $D^\gamma = [I_{0+}^\gamma]^{-1}$.

Для уравнения (1) обычно ставится задача типа Коши [2] с начальным условием

$$I_{0+}^{1-\gamma} f|_{x=0} = b. \tag{2}$$

Однако в работе [3] было показано, что для любого решения уравнения (1) $f \in C^{(-\alpha)}([0,1])$, $\alpha + \gamma < 1$, такое условие выполняется, но только при $b = 0$. Получается, что в пространствах $C^{(-\alpha)}([0,1])$ решение задачи (1), (2) сводится к решению исходного уравнения (1).

Будем далее полагать $\alpha = 0$. Даже без условия (2) уравнение (1) может оказаться неразрешимым в $C^{(0)}([0,1])$. В случае его разрешимости различным решениям уравнения при $x = 0$ будут соответствовать, вообще говоря, различные значения. Выбор решения с заданным начальным значением

$$f(0) = f_0 \tag{3}$$

связан в этом случае с модификацией правой части уравнения.

Зафиксируем подпространство $C_I^{(-\gamma)}([0,1])$ пространства $C^{(-\gamma)}([0,1])$, изоморфное R^1, которое отвечает за примыкание решений уравнения (1) к начальным данным $(0, f_0)$. Запишем уравнение

$$D^\gamma f - a(x) f - F(x) = 0 \quad (\mathrm{mod}\ C_I^{(-\gamma)}([0,1])) \tag{4}$$

и рассмотрим для него задачу с начальным условием (3).

Теорема 1. *Пусть функции $a(x)$ и $F(x)$ непрерывны на $[0,1]$. Тогда задача (4), (3) имеет единственное решение $f \in C^{(0)}([0,1])$.*

Поскольку постановка условия (3) связана с данными Коши, представляется естественным назвать задачу (4), (3) задачей Коши.

Задачу Коши можно поставить и для более общего уравнения

$$D^{\gamma} f - F(x, f) = 0 \quad (\mathrm{mod}\ C_I^{(-\gamma)}([0, l])) \tag{5}$$

в предположении, что функция $F(x, f)$ определена в некоторой области $\Omega \subset R^2$.

Теорема 2. *Пусть функция $F(x, f)$ непрерывна в Ω. Пусть точка $(0, f_0) \in \Omega$, причём найдётся окрестность этой точки, в которой $F(x, f)$ удовлетворяет равномерному относительно x условию Липшица по f. Тогда при достаточно малом l задача Коши (5), (3) имеет единственное решение $f \in C^{(0)}([0, l])$.*

Приведенные теоремы позволяют заключить, что предложенная модификация уравнений дробного порядка оказывается содержательной.

Литература

1. Буробин А. В. *Уравнения дробного порядка в пространствах обобщенно интегрируемых функций*// Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2019. – Т. 57. – С. 77–78.

2. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

3. Буробин А. В. *Особенности решений уравнений дробного порядка* // Материалы XXIX Международной конференции «Математика. Экономика. Образование». – Ростов н/Д, 2023. – С. 18.

CAUCHY PROBLEM FOR FRACTIONAL ORDER EQUATIONS

A. V. Burobin

The Cauchy problem for equations of fractional order is considered. The solvability of such a problem for linear and nonlinear equations is studied.

Keywords: fractional order equations, Cauchy type problem, Cauchy problem, solvability.

УДК 517.95, 517.983

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И УРАВНЕНИЯ НА МНОГООБРАЗИЯХ С КРАЕМ

В. Б. Васильев[1]

1 *vbv57@inbox.ru*; Белгородский государственный национальный исследовательский университет.

Исследуются свойства фредгольмовости псевдодифференциальных уравнений. Рассматривается обратимость модельных операторов в канонических областях, обсуждается дискретный аналог этих свойств.

Ключевые слова: псевдодифференциальный оператор, уравнение, фредгольмовость, дискретный оператор.

Эта работа связана с исследованием фредгольмовости некоторых классов линейных ограниченных операторов на многообразиях с негладким краем. Исследование опирается на локальный принцип, который предписывает исследовать свойства обратимости модельных псевдодифференциальных уравнений в канонических областях [1,2].

Отправной точкой исследования модельное псевдодифференциальное уравнение [3] в конусе $C \subset \mathbf{R}^m$

$$(Au)(x) = v(x), \quad x \in C, \tag{1}$$

где $A : H^s(C) \to H^{s-\alpha}(C)$ – псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$, удовлетворяющим условию

$$c_1(1+|\xi|)^\alpha \le |A(\xi)| \le c_2(1+|\xi|)^\alpha.$$

В некоторых случаях удается построить явные решения уравнения (1) для специальных конусов C [4].

Каждый конус C имеет, как правило, определенные параметры, например, у $C_+^a = \{x \in \mathbf{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_2 > a|x_1|, a > 0\}$ имеется параметр a, характеризующий раствор конуса, у $C_+^{a,b} = \{x \in \mathbf{R}^3 : x = (x_1, x_2, x_3), x_3 > a|x_1| + |x_2|, a, b > 0\}$ – два параметра a, b аналогичного назначения. Довольно естественно задаться вопросом, что произойдет с решением уравнения (1) (если оно существует и единственно), когда какие-то параметры стремятся к своим предельным значениям 0 и ∞. Некоторые ситуации рассмотрены в работе [5].

С вычислительной точки зрения целесообразно рассмотреть дискретный аналог уравнения (1) в пространствах функций дискретной переменной $u_d(\tilde{x}), \tilde{x} \in h\mathbf{Z}^m, h > 0$. Пусть $C_d = h\mathbf{Z}^m \cap C$, – дискретный конус, $\hbar = h^{-1}, \mathbf{T} = [-\pi, \pi]$ и $\tilde{A}_d(\xi)$ – измеримая периодическая функция в $\mathbf{R}^m$ с основным кубом периодов $\hbar\mathbf{T}^m$. Дискретный псевдодифференциальный оператор A_d с символом $\tilde{A}_d(\xi)$ в дискретном конусе C_d определяется формулой

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y} \in h\mathbf{Z}^m} h^m \int\limits_{\hbar\mathbf{T}^m} \tilde{A}_d(\xi) e^{i(\tilde{x}-\tilde{y})\cdot\xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in C_d,$$

где через $\tilde{u}_d(\xi)$ обозначено дискретное преобразование Фурье функции u_d [6].

Несложно определить дискретный аналог пространства Соболева–Слободецкого $H^s(C_d)$ и в случае полупространства $C = \mathbf{R}_+^m$ получить картину разрешимости дискретного аналога уравнения (1). Было установлено, что дискретные решения обладают аппроксимационными свойствами при малых значениях h и могут быть использованы в качестве приближенных решений. Аналогичные результаты были получены в дискретном плоском квадранте при некоторых дополнительных условиях на символ, включая сравнение дискретных и непрерывных решений.

Литература

1. Vasilyev V. Elliptic operators and their symbols // *Demonstr. Math.* – 2019. – V. 52. – P. 361–369.

2. Vasilyev V. Operator symbols and operator indices // *Symmetry*. – 2020. – V. 12. – P. 1–12.

3. Васильев В.Б. *Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи*. – М.: КомКнига, 2010.

4. Vasilyev, V.B.: Pseudodifferential equations, wave factorization, and related problems // Math. Methods Appl. Sci. – 2018. – V. 41. – P. 9252–9263.

5. Vasilyev V. B. On certain 3-dimensional limit boundary value problems // *Lobachevskii J. Math.*. – 2020. – V. 41. – P. 917–925.

6. Васильев В. Б. Операторы и уравнения: дискретное и непрерывное // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. – 2019. – Т. 160. – С. 18–27.

PSEUDO-DIFFERENTIAL OPERATORS AND EQUATIONS ON MANIFOLDS WITH A BOUNDARY

V. B. Vasilyev

We study Fredholm properties for pseudo-differential equations, consider the invertibility property for model pseudo-differential equations in canonical domains, and discuss discrete analogues of these properties.

Keywords: pseudo-differential operator, equation, Fredholm property, discrete operator.

УДК 517.977

МНОЖЕСТВО ПРЕДЕЛЬНО РЕАЛИЗУЕМЫХ ЗНАЧЕНИЙ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ЭНТРОПИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А. Н. Ветохин[1]

1 *anveto27@yandex.ru*; МГУ им. М.В. Ломоносова, МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Описывается множество предельно реализуемых значений топологической энтропии динамических систем, определенных на множестве Кантора или отрезке.

Ключевые слова: динамические системы, топологическая энтропия. Напомним определение топологической энтропии динамической системы [1]. Следуя [2], на компактном метрическом пространстве X с метрикой d при помощи непрерывного отображения $f : X \to X$ определим на X дополнительную систему метрик

$$d_n^f(x,y) = \max_{0\le i\le n-1} d(f^i(x), f^i(y)), \quad f^i \equiv \underbrace{f\circ\ldots\circ f}_{i}, f^0 \equiv \mathrm{id}_X, \quad x, y \in X, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для всяких $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $B_f(x,\varepsilon,n)$ открытый шар $\{y \in X : d_n^f(x,y) < \varepsilon\}$. Множество $A \subset X$ называется (f,ε,n)-покрытием пространства X, если $X \subset \bigcup\limits_{x\in A} B_f(x,\varepsilon,n)$. Пусть $S_d(f,\varepsilon,n)$ обозначает минимальное количество элементов (f,ε,n)-покрытия, тогда топологическая энтропия может быть вычислена по формуле

$$h_{\mathrm{top}}(f) = \lim_{\varepsilon\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \ln S_d(f,\varepsilon,n). \tag{1}$$

Отметим, что величина (1) не изменится, если в ее определении метрику d заменить на любую другую, задающую на X ту же, что и d, топологию.

Обозначим через $C(X,X)$ множество непрерывных функций из X в X с метрикой $\rho(f,g) = \max\limits_{x\in X} d(f(x),g(x))$. Рассмотрим функцию

$$f \longmapsto h_{\text{top}}(f). \tag{2}$$

В работе [3] для $X = [0;1]$ установлено, что функция (2) является всюду полунепрерывной снизу, а в книге [4, стр. 216], доказано, что функция (3) непрерывна в точке f тогда и только тогда, когда выполнено равенство $h_{\text{top}}(f) = +\infty$. В работе [5] доказано, что функция (2) принадлежит второму бэровскому классу на пространстве $C(X,X)$, и множество точек пространства $C(X,X)$, в которых функция (2) полунепрерывна снизу, содержит плотное в пространстве $C(X,X)$ множество типа G_δ, а в работе [6] установлено, что само множество точек полунепрерывности снизу является всюду плотным в $C(X,X)$ множеством типа G_δ. Если X совпадает с множеством Кантора $\mathscr{K}$, то функция (2) всюду разрывна и полунепрерывна снизу только в точках, в которых топологическая энтропия равна нулю [6], а в работе [7] установлено, что функция (2) не принадлежит первому классу Бэра даже на подпространстве гомеоморфизмов.

Обозначим через $E_h(f)$ множество *предельно реализуемых* значений топологической энтропии [8], т.е. тех, которые получаются при сколь угодно малых равномерных возмущениях отображения f: $E_h(f) = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \{h_{\text{top}}(g) : \rho(f,g) < \frac{1}{n}\}$.

Теорема 1 [8]. *Для каждого $f \in C(\mathscr{K},\mathscr{K})$ выполнено равенство $E_h(f) = [0;+\infty]$.*

Из теоремы 1 и результаты работ [5–6] получаем следующую теорему

Теорема 2 [8]. *Для функции $h_{\text{top}} : C(\mathscr{K},\mathscr{K}) \to [0;+\infty]$ верны утверждения:*

1. *множество точек непрерывности пусто;*
2. *множество точек полунепрерывности снизу совпадает с множеством точек, где выполнено равенство $h_{\text{top}}(f) = 0$, и является всюду плотным множеством типа G_δ;*
3. *множество точек полунепрерывности сверху совпадает с множеством точек, где выполнено равенство $h_{\text{top}}(f) = +\infty$, и является множеством типа $F_{\sigma\delta}$.*

Теорема 3. *Для каждого $f \in C([0;1],[0;1])$ выполнено равенство $E_h(f) = [h_{\text{top}}(f);+\infty]$.*

Литература

1. Adler R. L., Konheim A. G., McAndrew M. H. *Topological entropy* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1965. – V. 114. – № 2. – P. 309–319.

2. Динабург Е. И. *Связь между различными энтропийными характеристиками динамических систем* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1971. – Т. 35. – № 2. – P. 324–366.

3. Misiurewicz M.T. *Horseshoes for mappings of the interval* // Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math. Astron. et Phys. – 1979. – V. 27. – P. 167–169.

4. Block L. S., Coppel W. A. *Dynamics in one dimension.* – Berlin; New York: Springer-Verlag, 1992.

5. Ветохин А. Н. *Типичное свойство топологической энтропии непрерывных отображений компактов* // Дифференц. уравнения. – 2017. – Т. 53,– № 4. – С. 448–453.

6. Ветохин А. Н. *Строение множеств точек полунепрерывности топологической энтропии динамических систем, непрерывно зависящих от параметра* // Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. – 2019. – № 3. – С. 69–72.

7. Ветохин А. Н. *Непринадлежность первому классу Бэра топологической энтропии на пространстве гомеоморфизмов* // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. – 2018. – № 5. – С. 64–67.

8. Ветохин А. Н. *Множество предельно реализуемых значений топологической энтропии непрерывных отображений множества Кантора* // Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. – 2023. – № 3. – С. 35–40.

THE SET OF LIMITING REALIZABLE VALUES OF THE TOPOLOGICAL ENTROPY OF DYNAMICAL SYSTEMS

A. N. Vetokhin

The set of limiting realizable values of the topological entropy of dynamical systems, defined on either a Cantor set or an a interval, is described.

Keywords: dynamical systems, topological entropy.

УДК 519.21, 531.19

СЛУЧАЙНЫЕ МНОЖЕСТВА СО СЧЕТНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ ПОГРУЖЕНИЯ

Ю. П. Вирченко[1]

1 *virch@bsu.edu.ru*; Белгородский государственный университет, Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова.

В статье изучаются методы построения вероятностных пространств случайных множеств со счетным пространством погружения. Отдельно рассматриваются случайные множества с гиббсовским распределением вероятностей, соответствующие т.н. классическим решетчатым моделям равновесной статистической механики.

Ключевые слова: случайные множества, гиббсовские распределения, решетчатые модели, статистическая механика, термодинамический предел.

Пусть $L = \{x_j; j \in \mathbb{N}\}$ — фиксированное счетное множество, которое далее называем *пространством погружения*. Рассмотрим класс $\Omega = 2^L$ всех подмножеств X, $\operatorname{Card}\Omega = \aleph_1$. Пусть, далее, $\mathfrak{S}$ — некоторое не более чем счетное *порождающее* семейство классов $\mathscr{F} \subset \Omega$ таких подмножеств и $\mathfrak{B}(\mathfrak{S})$ — семейство классов $\mathscr{F}$, которое является минимальной σ-алгеброй, порождаемой семейством $\mathfrak{S}$. Каждую тройку $\langle \Omega, \mathfrak{B}(\mathfrak{S}), \mathsf{P}\rangle$, где P — номированная мера, определенная на $\mathfrak{B}(\mathfrak{S})$, будем называть *вероятностным пространством* со счетным пространством погружения L.

Имеется естественная биекция R между классом Ω и отрезком $[0,1] \subset \mathbb{R}$, при которой каждому $X = \{x_j; j \in A\} \subset L$, $A \subset \mathbb{N}$ сопоставляется число $\sum_{j\in A} 2^{-j}$. Следовательно, каждому классу $\mathscr{F}$ сопоставляется отображением R подмножество из $[0,1]$, а каждому семейству $\mathfrak{A}$ таких классов — семейство числовых подмножеств $\mathsf{R}(\mathfrak{A})$. В частности, σ-алгебре $\mathfrak{B}(\mathfrak{S})$ сопоставляется σ-алгебра $\mathsf{R}[\mathfrak{B}(\mathfrak{S})]$ подмножеств из $[0,1]$. Поэтому мера P в пространстве $\langle \Omega, \mathfrak{B}(\mathfrak{S}), \mathsf{P}\rangle$ индуцирует меру $\mathsf{P}_{\mathbb{R}}$ на $[0,1]$,

$\mathsf{P}_{\mathbb{R}}(\mathsf{R}[\mathscr{F}]) = \mathsf{P}(\mathscr{F})$ и σ-алгебре $\mathfrak{M}(\mathsf{P}, \mathfrak{B}(\mathfrak{S}))$ измеримых по Лебегу классов $\mathscr{F}$ подмножеств $X \subset L$ сопоставляется σ-алгебра $\mathfrak{M}_{\mathbb{R}}(\mathsf{P}, \mathfrak{B}(\mathfrak{S}))$ измеримых относительно индуцированной меры подмножеств из $[0,1]$.

Наличие биекции R позволяет сводить изучение типов σ-алгебр на счетном пространстве погружения L к изучению типов соответствующих σ-алгебр на отрезке $[0,1]$. Заметим, что $\mathrm{Card}\,\mathfrak{B}(\mathfrak{S}) = \aleph_1$, и поэтому, вообще говоря, σ-алгебра $\mathfrak{M}(\mathsf{P}, \mathfrak{B}(\mathfrak{S}))$ шире σ-алгебры $\mathfrak{B}(\mathfrak{S})$ и, вообще говоря, в Ω имеются неизмеримые по Лебегу классы $\mathscr{F}$. Однако, при изучении возможных типов σ-алгебр $\mathfrak{B}(\mathfrak{S})$ важно, в первую очередь, выделить такие, тип которых не изменяется при произвольном изменении нумерации элементов в L. Этому условию соответствует требование того, чтобы тип σ-алгебры $\mathsf{R}[\mathfrak{B}(\mathfrak{S})]$ был инвариантен относительно любых автоморфизмов отрезка $[0,1]$.

Имеется три принципиально различных типа вероятностных пространств, отличающихся друг от друга выбором семейства $\mathfrak{S}$. Первым и наиболее употребительным в приложениях является такой, у которого $\mathfrak{S}_0 = \{\mathscr{F}_A; A \subset L, |A| < \infty\}$, $\mathscr{F}_A = \{X \subset L : A \subset X\}$. Два других, порождающие семейства которых мы обозначаем как $\mathfrak{S}_{\pm}$, конструируются следующим образом.

Пусть $\mathscr{I}_{a,b} = \{(a,b), (a,b], [a,b), [a,b]\}$, $\{a,b\} \subset [0,1] \cap \mathbb{Q}$, $a < b$. Пусть, далее, $\mathscr{F}_I = \{X \subset L : \mathsf{R}[X] \subset I\}$, $I \subset [0,1]$. Тогда $\mathfrak{S}_+ = \{\mathscr{F}_I; I \in \mathscr{I}_{a,b}, \{a,b\} \subset [0,1] \cap \mathbb{Q}, a < b\}$. В этом случае $\mathfrak{B}(\mathfrak{S}_+)$ состоит из классов $\mathscr{F}_A^{(+)} = \{X \subset L : X \subset A, \mathsf{R}[A]-$ борелевское$\}$.

Пусть $\mathscr{J}$ — произвольный класс попарно дизъюнктивных интервалов $(a_j, b_j) \subset [0,1]$, $j \in \mathbb{N}$ такой, что $[0,1] \setminus \bigcup_{j \in J}(a_j, b_j)$ не содержит ни одного интервала. Для каждого такого конечного класса определим класс $\mathscr{F}_{\mathscr{J}} = \{X \subset L : \mathsf{R}[X] \cap (a_j, b_j) = \varnothing, j \in \mathbb{N}\}$. Семейство $\mathfrak{S}_-$ состоит из всех $\mathscr{F}_{\mathscr{J}}$, $|\mathscr{J}| < \infty$, а порождаемая им σ-алгебра $\mathfrak{B}(\mathfrak{S}_-)$ состоит из всех классов подмножеств X, для которых $\mathsf{R}[X]$ имеет нулевую меру Лебега на $[0,1]$ и, в частности, множества $\mathsf{R}[X]$ имеют канторовский тип.

В работе в основном изучается метод построения мер P для вероятностных пространств первого типа, которые мы называем *дискретными*.

Пусть $\langle \Lambda_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ — расширяющаяся последовательность конечных подмножеств из L такая, что $\lim_{n\to\infty} \Lambda_n = L$. При этом каждый класс $\mathscr{F}_n = \{X \cap \Lambda_n; X \subset \mathscr{F}\}$, $\mathscr{F} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{S}_0)$ при фиксированном $n \in \mathbb{N}$ образует булеву алгебру $\mathfrak{B}_n$, а последовательность $\langle \mathfrak{B}_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ стремится к $\mathfrak{B}(\mathfrak{S}_0)$, где каждая из последовательностей $\langle \mathscr{F}_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ стремится к $\mathscr{F}$.

Пусть, далее, на каждом Λ_n определена мера P_n, $n \in \mathbb{N}$. Если последовательность $\langle \mathsf{P}_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ такова, что существует предел $\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}_n(\mathscr{F}_n) \equiv \mathsf{P}(\mathscr{F})$, то P является мерой на σ-алгебре $\mathfrak{B}(\mathfrak{S}_0)$, которую мы называем *гиббсовской*, используя связь описываемой конструкции с равновесной статистической механикой решетчатых систем [1]. Указанный предельный переход при этом называется *термодинамическим пределом*.

Литература

1. *Ruel D.* Statistical Mechanics. Rigorous Results. – New York: W.A. Benjamin, Inc., 1969. – 316 p. 1999. – 606 c.

RANDOM SETS IN COUNTABLE IMMERSION SPACE

Yu. P. Virchenko

General methods for constructing probabilistic spaces of random sets with a countable immersion space are studied. Separately, countable random sets with Gibbs' probability distributions corresponding to so-called classical lattice models of equilibrium statistical mechanics are under consideration.

Keywords: random sets, Gibbs' distributions, lattice models, statistical mechanics, thermodynamic limit.

УДК 517.518.23, 517.542

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ОТКРЫТОСТЬ И ДИСКРЕТНОСТЬ ОТОБРАЖЕНИЙ С КОНЕЧНЫМ ИСКАЖЕНИЕМ НА ГРУППАХ КАРНО

С. К. Водопьянов[1]

1 *vodopis@mail.ru*; Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Доказано, что отображение с конечным искажением $f : \Omega \to \mathbb{G}$ в области Ω группы Карно H-типа $\mathbb{G}$ является непрерывным, дискретным и открытым при условии, что его функция искажения $K \in L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$ для некоторого $p > \nu - 1$. На самом деле доказательство работает на любой группы Карно при условии, что функция вида $\log \rho$ *является ν-гармонической (здесь ρ — C^2-гладкая однородная норма).*

Ключевые слова: группа Карно, отображение класса Соболева, отображение с конечным искажением, непрерывность, дискретность, открытость.

Пусть Ω — связное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, и $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — отображение класса Соболева $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Говорят, что отображение f имеет *конечное искажение* при условии что существует измеримая функция $1 \le K = K(x) < \infty$ п. в. в Ω такая, что f удовлетворяет поточечному неравенству

$$|Df(x)|^n \le K(x) \det Df(x) \quad \text{п. вс. в } \Omega.$$

Здесь символом $|Df(x)|$ обозначена операторная норма матрицы дифференциала $Df(x) = (\partial f_i/\partial x_j)_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ю. Г. Решетняк [1, 2] доказал замечательный результат, что f непрерывно открыто и дискретно, если K — ограниченная функция (отображения с таким условием называются *отображениями с ограниченным искажением* или *квазирегулярными отображениями*). Открытость непрерывного отображения f предполагает, что образы открытых множеств открыты, а дискретность — что прообраз любой точки в $\mathbb{R}^n$ состоит из изолированных точек в Ω. Для детального знакомства с теорией отображений с ограниченным искажением можно обратиться к монографиям Ю. Решетняка [3], С. Рикмана [4] и Т. Иванца и Г. Мартина [5].

С тех пор возник большой интерес к обобщению результата Решетняка применительно к отображениям с конечным искажением. В [6, 7] установлено, что отображения с конечным искажением класса Соболева $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ непрерывны.

В 1993 г. Т. Иванец и В. Шверак [8] установили дискретность и открытость для отображения $f \in W^1_{2,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ с L_1-интегрируемым искажением. В [9] Дж. Манфреди

и Э. Вилламор доказали, что теорема Решетняка остается справедливой для отображений с конечным искажением класса Соболева $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ с функцией искажения $K \in L_p$, $p > n-1$.

В заметке [10] Я. Оннинен и Ш. Зонг привели другое доказательство результата Иванца и Шверака на плоскости, и результата Манфреди и Вилламора в пространстве. Подход этих авторов не использует теорию квазилинейных уравнений эллиптического типа.

Цель данной работы состоит в том, чтобы получить некоторые вышеупомянутые свойства для отображений с конечным искажением на группах Карно. Непрерывность отображений с конечным искажением установлена для произвольных групп Карно, а дискретность и открытость — для групп Карно типа H (при условии интегрируемости функции искажения). На самом деле, доказательство последних двух свойств работает для любой группы Карно при условии, что на группе существует ν-гармоническая функция вида $\log\rho$, где однородная норма ρ принадлежит классу C^2. Существование таких норм для групп Карно типа H доказано в [11, § 5].

Напомним, что *стратифицированная градуированная нильпотентная группа* или *группа Карно* (см., например, [12, 13, 14]) — это связная односвязная группа Ли $\mathbb{G}$ такая, что ее алгебра левоинвариантных векторных полей $\mathfrak{g}$ разлагается в прямую сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_m$ векторных подпространств $\mathfrak{g}_i$, удовлетворяющих соотношениям $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_{i+1}$, $i = 1,\dots,m-1$, и $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_m] = \{0\}$. Группа двухступенчатая, если $m = 2$.

Группа Карно $\mathbb{G}$ имеет тип Гейзенберга (H-тип), если ее алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ является двухступенчатой и существует внутреннее произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ такое, что $\mathfrak{g}_1 \perp \mathfrak{g}_2$, и для каждого фиксированного $Z \in \mathfrak{g}_2$ единичной длины отображение $J_Z : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_1$, определяемое как $\langle J_Z(V), \text{Âò}\rangle = \langle Z, [V,W]\rangle$, $V, W \in \mathfrak{g}_1$, является ортогональным.

Примером группы Карно H-типа является группа Гейзенберга — Вейля $\mathbb{H}^n = (\mathbb{R}^{2n+1}, *)$ с групповым законом

$$(x,y,t) * (x',y',t') = \left(x+x', y+y', t+t' + \tfrac{x\cdot y' - x'\cdot y}{2}\right), \quad x,x',y,y' \in \mathbb{R}^n,\ t,t' \in \mathbb{R}.$$

Его алгебра Ли $\mathfrak{h}^n$ порождается векторными полями

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{y_i}{2}\frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_i = \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{x_i}{2}\frac{\partial}{\partial t}, \quad i = 1,\dots,n, \quad T = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Здесь $\mathfrak{h}^n_1 = \operatorname{span}\{X_i, Y_i : i = 1,\dots,n\}$, $\mathfrak{h}^n_2 = \operatorname{span}\{T\}$, а нетривиальными скобками Ли будут $[X_i, Y_i] = T$, $i = 1,\dots,n$. Если внутреннее произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ таково, что эти векторные поля ортогональны, то линейное отображение $J_T : \mathfrak{h}^n_1 \to \mathfrak{h}^n_1$ определяется следующим образом: $J_T(X_i) = Y_i$, $J_T(Y_i) = -X_i$. Однородная размерность $\mathbb{H}^n$ равна $\nu = 2n+2$.

Отображение $f \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{G})$, $\Omega \subset \mathbb{G}$, имеет *конечное искажение*, если

$$|\widehat{D}f(x)|^\nu \le K(x)\det\widehat{D}f(x)$$

для п. вс. $x \in \Omega$ где $K : \Omega \to [1,+\infty)$ — измеримая функция. Здесь $\widehat{D}f(x)$ — аппроксимативный дифференциал [15]. Известно [15], что отображения класса Соболева п. вс. аппроксимативно дифференциаруемы.

Авторы статей [16, 17] исследовали свойства отображений с ограниченным искажением ($K(x)$ ограничено) на группах Карно: они получили, в частности, два независимых доказательства непрерывности, открытости и дискретности отображений с ограниченным искажением на группе Карно типа H.

Для отображений с конечным искажением на общих группах Карно получен следующий результат [18].

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{G}$ — область на общей группе Карно и $f \in W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{G})$ — непостоянное отображение с конечным искажением. Тогда отображение $f \in W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{G})$*

1) *непрерывно*;
2) *$\mathscr{P}$-дифференцируемо п. вс.*;
3) *обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина*;
4) *сохраняет ориентацию.*

Первые три свойства доказаны в [18, предложение 4]. Последнее свойство доказано в [18, предложение 5] и означает, что степень отображения $\mu(y, f, U) > 0$ для любой компактной области $U \Subset \Omega$ и каждой точки $y \in f(U) \setminus f(\partial U)$.

Следующее утверждение доказано совместно с С. Басалаевым [19].

Теорема 2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{G}$ — область на группе Карно $\mathbb{G}$ типа H, и $f \in W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{G})$ — непостоянное отображение с конечным искажением с $K \in L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $p > \nu - 1$. Тогда отображение $f : \Omega \to \mathbb{G}$ непрерывно, открыто и дискретно.*

Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки РФ для Института математики Сибирского отделения Российской академии наук (проект № FWNF-2022-0006).

Литература

1. Решетняк Ю. Г. *Оценки модуля непрерывности для некоторых отображений* // Сиб. матем. журн. – 1966. – Т. 7. – № 5. – С. 1106–1114.

2. Решетняк Ю. Г. *Пространственные отображения с ограниченным искажением* // Сиб. матем. журн. – 1967. – Т. 8. – № 3. – С. 629–658.

3. Решетняк Ю. Г. *Пространственные отображения с ограниченным искажением.* – Новосибирск: «Наука», Сибирское отд-ние, 1982.

4. Rickman S. *Quasiregular mappings.* – Berlin: Springer-Verlag, 1993.

5. Iwaniec T., Martin G. J. *Geometric function theory and nonlinear analysis.* – Oxford Mathematical Monographs, 2001.

6. Водопьянов С. К. *Функционально-теоретический подход к некоторым задачам теории пространственных квазиконформных отображений* // Дис. ... канд. физ.-матем. наук. – Новосибирск: Ин-т математики, Сиб. отделение АН СССР, 1975.

7. Водопьянов С. К. Гольдштейн В. М. *Квазиконформные отображения и пространства функций с первыми обобщенными производными* // Сиб. матем. журн. – 1976. – Т. 17. – № 3. – С. 515–531.

8. Iwaniec T., Šverák V. *On mappings with integrable dilatation* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1993. – Т. 118. – № 1. – P. 181–188.

9. Manfredi J. J.,Villamor E. *An Extension of Rešhetnyak's Theorem* // Indiana University Mathematics Journal. – 1998. – Т. 47. – № 3. – P. 1131–1146.

10. Onninen J., Zhong X. *Mappings of finite distortion: A new proof for discreteness and openness* // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics. – 2008. – Т. 138. – № 5. – P. 1097–1102.

11. Heinonen J., Holopainen I. *Quasiregular maps on Carnot groups* // Journal of Geometric Analysis. – 1997. – Т. 7. – P. 109–148.

12. Rotschild L. P., Stein E. M. *Hypoelliptic Differential Operators and Nilpotent Groups* // Acta Math. – 1976. – Т. 137. – P. 247–320.

13. Folland G. B., Stein E. M. *Hardy Spaces on Homogeneous Groups.* – Princeton Univ. Press, 1982. Princeton Mathematical Notes, V. 28.

14. Bonfiglioli A., Lanconelli E., Uguzonni F. *Stratified Lie Groups and Potential Theory for their Sub-Laplacians* // Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. Springer Monographs in Mathematics.

15. Vodop′yanov S. K. *$\mathscr{P}$-Differentiability on Carnot groups* // Proceedings on Analysis and Geometry. – Novosibirsk: Sobolev Institute Press, 2000. – P. 603–670.

16. Dairbekov N. S. *Mappings with bounded distortion on two-step Carnot groups* // Proceedings on Analysis and Geometry. – Novosibirsk: Sobolev Institute Press, 2000. – P. 122–155.

17. Vodop′yanov S. K *Foundations of the theory of mappings with bounded distortion on Carnot groups* // The interaction of analysis and geometry. – Providence: Amer. Math. Soc., 2007. – P. 303–344. – Contemp. Math., vol. 424.

18. Водопьянов С. К. *Непрерывность отображений класса Соболева $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}$ с конечным искажением на группах Карно* // Сиб. матем. журн. – 2023. – Т. 64. – № 5.

19. Басалаев С. Г., Водопьянов С. К. *Открытость и дискретность отображений с конечным искажением на группах Карно* // Сиб. матем. журн. – 2023. – Т. 64. – № 6.

CONTINUITY OPENNESS AND DISCRETENESS OF MAPPINGS OF FINITE DISTORTION ON CARNOT GROUPS

S. K. Vodopyanov

We prove that a mapping of finite distortion $f:\Omega\to\mathbb{G}$ in a domain Ω of an H-type Carnot group $\mathbb{G}$ is contiuous, discrete and open provided that its distortion function $K\in L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$ for some $p>\nu-1$. In fact, the proof is suitable for any Carnot group provided it has a ν-harmonic function of the form $\log\rho$ *where the homogeneous norm ρ is C^2-smooth.*

Keywords: Carnot group, Sobolev mapping, mappings of finite distortion, continuity, discreteness, openness.

УДК 519.642

К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Н. С. Габбасов[1], З. Х. Галимова[2]

1 *gabbasovnazim@rambler.ru*; Набережночелнинский институт Казанского (Приволжского) федерального университета.
2 *zulshik@mail.ru*; Казанский инновационный университет им. В.Г.Тимирясова (ИЭУП).

Исследовано линейное интегральное уравнение третьего рода с неподвижными особенностями в ядре. Для его приближенного решения в пространстве обобщенных функций

предложен и обоснован обобщенный вариант полиномиального метода.

Ключевые слова: интегральное уравнение третьего рода, пространство обобщенных функций, приближенное решение, теоретическое обоснование.

Исследуется линейное интегральное уравнение третьего рода с неподвижными особенностями (УТРНО) в ядре:

$$Ax \equiv x(t)\prod_{j=1}^{l}(t-t_j)^{m_j} + \int_{-1}^{1} K(t,s)[(s+1)^{p_1}(1-s)^{p_2}]^{-1}x(s)ds = y(t), \qquad (1)$$

где $t \in I \equiv [-1,1]$, $t_j \in (-1,1)$, $m_j \in \mathbb{N}$ $(j=\overline{1,l})$; p_1, $p_2 \in \mathbb{R}^+$; K и y – известные "точечно-гладкие" функции, x – искомая функция, а интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару. Уравнения вида (1) находят все более широкие применения как в теории, так и в приложениях (см., напр., [1] и библиографию к ней). Особенно актуальной является разработка эффективных методов их приближенного решения с соответствующим теоретическим обоснованием. Ряд результатов в этом направлении получен в работах [1-5], в которых предложены и обоснованы специальные прямые методы решения УТРНО (1) в некотором пространстве типа D обобщенных функций, построенных при помощи функционала "дельта-функция Дирака".

Настоящая работа посвящена вопросам разрешимости УТРНО (1) в некотором пространстве типа V обобщенных функций, порожденных функционалом "конечная часть интеграла по Адамару". Именно, разработан специальный прямой метод, приспособленный к приближенному решению уравнения (1). Дано его обоснование в смысле [6, гл.1] и установлено, что построенный метод оптимален по порядку точности на некотором классе гладких функций среди всех прямых проекционных методов решения исследуемых уравнений. В виде иллюстрации приведем некоторые из полученных результатов.

Пусть $C\{m;0\}$ и $C\{p;1\}$ – соответствующие пространства "точечно-гладких" функций, а $T : C\{m;0\} \to C$ и $S : C\{p;1\} \to C$ – соответственно их "характеристические" операторы (см., напр., [2]). Образуем основное пространство $Y \equiv \{y \in C\{m;0\} | y \in C\{p;1\}\}$ и над ним построим семейство $X \equiv V^{(p)}\{m;0\}$ обобщенных функций $x(t)$ вида

$$x(t) \equiv z(t) + \sum_{i=0}^{m-1} \gamma_i P.F.t^{-i-1}, \quad (t \in I,\, z \in C\{p;1\},\, \gamma_i \in \mathbb{R}),$$

где $P.F.t^{-k}$ – обобщенные функции, определенные на Y согласно правилу:

$$(P.F.t^{-k}, y) \equiv P.F.\int_{-1}^{1} y(t)t^{-k}dt \quad (y \in Y, k=\overline{1,m})$$

(знак $P.F.$ указывает на конечную часть интеграла по Адамару). По соответствующим нормам Y и X являются банаховыми.

Далее ради простоты выкладок и формулировок, не ограничивая общности методов и результатов, в УТРНО (1) будем считать $l = 1$, $t_1 = 0$, $p_1 = 0$, т.е. рассмотрим

уравнение вида

$$Ax \equiv t^m x(t) + \int_{-1}^{1} K(t,s)(1-s)^{-p} x(s)\,ds = y(t) \quad (t \in I), \tag{2}$$

где $m \in N$, $p \in R^+$, $y \in Y$, ядро K удовлетворяет условиям фредгольмовости оператора $A: X \to Y$, а $x \in X$ – искомый элемент. Его приближенное решение будем искать в виде

$$x_n \equiv x_n(t;\{c_j\}) \equiv (1-t)^p \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i + \sum_{i=0}^{\lambda} c_{i+n}(t-1)^i + \sum_{i=0}^{m-1} c_{i+\lambda+n+1} t^{-i-1} \, (n = 2,3,\ldots), \tag{3}$$

где $\lambda = \lambda(p) \equiv [p] - (1 + \mathrm{sign}([p] - p))$. Неизвестные параметры $c_j = c_j^{(n)}$ $(j = \overline{0, n+m+\lambda})$ найдем согласно нашему методу из СЛАУ

$$\int_{-1}^{1} W_k(t)(ST\rho_n)(t)\,dt = 0 \quad (k = \overline{0, n-1}),$$

$$(T\rho_n)^{\{j\}}(1) = 0 \quad (j = \overline{0,\lambda}),\ \rho_n^{\{i\}}(0) = 0 \ (i = \overline{0, m-1}), \tag{4}$$

где $\rho_n(t) \equiv \rho_n^A(t) \equiv (Ax_n - y)(t)$ – невязка приближенного решения, а W_k– любая из следующих "весовых" функций:

(i) $W_k(t) = \delta(t - \nu_k)$ – дельта-функция Дирака, $\{\nu_k\}$ – система узлов Чебышева первого (или второго) рода;

(ii) $W_k(t) = \omega(t)T_k(t)$ ($\{T_k\}$ – полная ортонормированная на I по весу $\omega(t) \equiv (1-t^2)^{-1/2}$ система полиномов Чебышева первого рода);

(iii)

$$W_k(t) = \begin{cases} 1 & (t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]), \\ 0 & (t \notin [\tau_k, \tau_{k+1}]), \end{cases}$$

где $\{\tau_k\}_0^n$ – система узлов Чебышева второго рода, расширенная концами промежутка I.

При обосновании вычислительного алгоритма (2)-(4) существенно используются соответствующие идеи и результаты работ [2,6].

Литература

1. Замалиев Р. Р. *О прямых методах решения интегральных уравнений третьего рода с особенностями в ядре* // Дисс. … канд. физ.-мат. наук. – Казань: КФУ, 2012. – 114 с.

2. Габбасов Н. С. *Методы решения интегрального уравнения третьего рода с фиксированными особенностями в ядре* // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45. – № 9. – С. 1341–1348.

3. Габбасов Н. С., Замалиев Р. Р. *Новые варианты сплайн-методов для интегральных уравнений третьего рода с особенностями в ядре* // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46. – № 9. – С. 1320–1328.

4. Габбасов Н. С., Галимова З. Х. *К численному решению интегральных уравнений третьего рода с особенностями в ядре* // Изв.вузов.Математика. – 2016. – № 12. – С. 36–45.

5. Габбасов Н. С., Галимова З. Х. *К численному решению одного класса интегральных уравнений третьего рода* // Журн.вычислит.математики и мат.физики. – 2022. – Т. 62. – № 2. – С. 320–329.

6. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казан.ун-та, 1980. – 232 с.

ON THE APPROXIMATE SOLUTION OF INTEGRAL EQUATIONS WITH A DEGENERATE COEFFICIENT

N. S. Gabbasov, Z. H. Galimova

We study a linear integral equation of the third kind with fixed singularities in a kernel. For the approximate solution of these equation in the space of generalized functions we propose and substantiate a generalized version of polynomial method.

Keywords: integral equation of the third kind, space of generalized functions, approximate solution, theoretical substantiation.

УДК 517.9

БЫСТРО СХОДЯЩИЕСЯ ЧЕРНОВСКИЕ АППРОКСИМАЦИИ C_0-ПОЛУГРУППЫ, СГЕНЕРИРОВАННОЙ ОПЕРАТОРОМ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

О. Е. Галкин[1], С. Ю. Галкина[2]

1 *olegegalkin@ya.ru*; Национальный исследовательский университет „Высшая школа экономики“.
2 *svetlana.u.galkina@mail.ru*; Национальный исследовательский университет „Высшая школа экономики“.

Работа посвящена построению функций Чернова высших порядков для C_0-полугруппы уравнения теплопроводности, генератором которой является оператор второй производной. Для соответствующих черновских аппроксимаций получены верхние и нижние оценки для погрешности приближения полугруппы.

Ключевые слова: операторные C_0-полугруппы, функции Чернова высокого порядка, оценки погрешности черновских аппроксимаций.

Если $(X, \|\cdot\|)$ — произвольное банахово пространство, то через $\mathscr{L}(X)$ будем обозначать множество всех ограниченных линейных операторов на X. Далее мы будем использовать понятия *сильно непрерывная однопараметрическая полугруппа* (или просто C_0*–полугруппа*), *сжимающая полугруппа* и *генератор сильно непрерывной полугруппы*, определения которых можно найти, например, в книге Энгеля и Нагеля [1].

В 1968 году Поль Чернов в [2] доказал следующую теорему:

Теорема 1 (Чернов; 1968). *Пусть X — банахово пространство, $F(t)$ — сильно непрерывная функция из $[0,\infty)$ в подмножество сжимающих операторов из $\mathscr{L}(X)$, причем $F(0) = I$. Пусть замыкание A сильной производной $F'(0)$ является генератором сжимающей C_0-полугруппы $\left(e^{tA}\right)_{t\geqslant 0}$. Тогда $[F(t/n)]^n$ сходится к e^{tA} в сильной операторной топологии.*

Заметим, что эта теорема не содержит оценки скорости сходимости. В 2022 году в [3] (см. также [4]) была опубликована теорема, которая дает такую оценку при определенных условиях:

Теорема 2 (Галкин, Ремизов; 2021). *Пусть C_0-полугруппа $(e^{tA})_{t\geqslant 0}$ с генератором $(A, D(A))$ в банаховом пространстве X для некоторых $M_1 \geq 1$ и $w \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условию $\|e^{tA}\| \leqslant M_1 e^{wt}$ для всех $t \geqslant 0$. Пусть, кроме того, для отображения $F\colon [0,+\infty) \to \mathscr{L}(X)$ при некоторых $m \in \mathbb{N}$, $T > 0$ и любых $x \in D(A^{m+1}) \subset X$, $t \in (0,T]$ верно неравенство*

$$\left\| F(t)x - \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k}{k!} A^k x \right\| \leqslant C_m(t) \frac{t^{m+1}}{(m+1)!} \|A^{m+1}x\|,$$

где $C_m(t) > 0$ при каждом $t \in (0,T]$. Предположим также, что $\|F(t)^k\| \leq M_2 e^{kwt}$ при некотором $M_2 \geq 1$ для всех $t \in [0,T]$ и натуральных k. Тогда для любых $x \in D(A^{m+1})$, $t \in (0,T]$ и натуральных n будет выполняться оценка

$$\left\| \left[F\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n x - e^{tA}x \right\| \leq \left(C_m\left(\frac{t}{n}\right) + M_1 e^{\frac{|w|t}{n}} \right) \frac{M_1 M_2 t^{m+1} e^{wt}}{n^m (m+1)!} \|A^{m+1}x\|.$$

Отображение $F\colon (0,T] \in \mathscr{L}(X)$ называется *функцией Чернова порядка m для оператора A*, если оно удовлетворяет условиям теоремы 2.

Пусть $UC_b(\mathbb{R})$ – банахово пространство всех равномерно непрерывных ограниченных функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с нормой $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$, и оператор $L = [f \mapsto f'']$ имеет область определения $D(L) = \{f \in UC_b(\mathbb{R}) \mid f'' \in UC_b(\mathbb{R})\}$. Нас интересует, *как на основе пространственных сдвигов построить для оператора L функцию Чернова S_m любого порядка $m \in \mathbb{N}$*. В этом направлении известны, в частности, следующие результаты:

а) в 2016 году Иван Ремизов [5] нашел функцию Чернова порядка 1 из трёх слагаемых:

$$[S_1(t)f](x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{4}f(x+2\sqrt{t}) + \frac{1}{4}f(x-2\sqrt{t}) = f(x) + tf''(x) + o(t).$$

б) в 2019 году Александр Веденин построил из трёх слагаемых функцию Чернова порядка 2:

$$[S_2(t)f](x) = \frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{6}f(x+\sqrt{6t}) + \frac{1}{6}f(x-\sqrt{6t}) = f(x) + tf''(x) + \frac{t^2}{2}f^{IV}(x) + o(t^2).$$

В общем случае, верна следующая теорема.

Теорема 3. *Для любого натурального m существует единственная функция Чернова S_m порядка m для оператора $A = [f \mapsto f'']$, имеющая вид*

$$[S_m(t)f](x) = \textstyle\sum_{i=1}^{m+1} a_i \cdot F(x + b_i t^{s_i}).$$

В этом случае будут верны также следующие утверждения:

1) $s_1 = \ldots = s_{m+1} = 1/2$;

2) числа $b_1/2, \ldots, b_{m+1}/2$ являются различными корнями ортогональных многочлена Чебышева–Эрмита степени $m+1$;

3) числа $a_1, \ldots, a_{m+1}$ являются коэффициентами Кристоффеля, соответствующими квадратурным узлам $b_1, \ldots, b_{m+1}$ и могут быть вычислены по формулам

$$a_i = \frac{2^{m+2}(M+1)!\sqrt{\pi}}{(H'_{m+1}(b_i))^2}, \quad i = 1, \ldots, m+1.$$

Благодарности. Авторы благодарят Р.Н. Гумерова и И.Д. Ремизова за внимание к работе. Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2022-1101.

Литература

1. Engel K.-J., Nagel R. *One-parameter semigroups for linear evolution equations.* – Springer, 2000. – 587 p.

2. Chernoff P. R. *Note on product formulas for operator semigroups* // J. Functional Analysis. – 1968. – V. 2. – No. 2. – P. 238–242.

3. Galkin O. E., Remizov I. D. *Upper and lower estimates for rate of convergence in the Chernoff product formula for semigroups of operators* // 2021. – arXiv:2104.01249. – math.FA.

4. Галкин О. Е., Ремизов И. Д. *Скорость сходимости черновских аппроксимаций операторных C_0-полугрупп.* // Матем. заметки. – 2022. – Т. 111. – № 2. – С. 297–299.

5. Ремизов И. Д. *Решение уравнения Шрёдингера с помощью оператора сдвига.* // Матем. заметки. – 2016. – Т. 100. – № 3. – С. 477–480.

FAST CONVERGING CHERNOV APPROXIMATIONS OF C_0-SEMIGROUP GENERATED BY THE SECOND DERIVATIVE OPERATOR

O. E. Galkin, S. Yu. Galkina

The paper is devoted to the construction of high-order Chernov functions for the C_0-semigroup of the heat equation, the generator of which is the operator of the second derivative. For the corresponding Chernov approximations, upper and lower estimates for the error of the semigroup approximation are obtained.

Keywords: operator C_0-semigroups, high-order Chernov functions, error estimates of Chernov approximations.

УДК 517.542

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ НЕОГРАНИЧЕННЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

М. М. Гарифуллин[1], С. Р. Насыров[2]

1 *marsel-garifullin888@mail.ru*; Казанский (Приволжский) Федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского.

2 *semen.nasyrov@yandex.ru*; Казанский (Приволжский) Федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского.

Во многих задачах, возникающих в комплексном анализе, важную роль играют конформные отображения верхней полуплоскости на внешность заданного n-угольника. Такие отображения реализуются обобщенными интегралами Кристоффеля-Шварца. Если предположить, что прообразы вершин многоугольника известны, то для нахождения полюса следует найти корень некоторого уравнения. Мы исследуем вопрос единственности решения этого уравнения и показываем, что в некоторых случаях этот факт имеет место, а в некоторых решение может быть неединственным.

Ключевые слова: конформные отображения многоугольников, интегралами Кристоффеля-Шварца, внешние обратные краевые задачи.

Во многих задачах, возникающих в комплексном анализе и его приложениях, важную роль играет конформное отображение f верхней полуплоскости на внешность заданного n-угольника P с вершинами в точках $A_1, \ldots, A_n$ и внешними углами

$(1+\beta_1)\pi, \ldots, (1+\beta_n)\pi$. Заметим, что

$$|\beta_j| < 1,\ 1 \le j \le n, \quad \text{причем} \sum_{j=1}^{n} \beta_j = 2. \tag{1}$$

При этом, для выпуклых n-угольников $\beta_j > 0$, $1 \le j \le n$. Кроме того, $1 < \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j < 3$.

Обозначим через z_0 точку верхней полуплоскости, которая соответствует бесконечно удалённой точке. Пусть точки $a_1, \ldots, a_n$ — это прообразы вершин многоугольника; без ограничения общности можно считать, что $a_n = \infty$. Тогда

$$f(z) = C \int_{a_1}^{z} \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (\zeta - a_j)^{\beta_j} \mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^2 (\zeta - \overline{z}_0)^2} + A_1, \tag{2}$$

где $C \neq 0$ — некоторая комплексная константа (см., напр., [1]).

Учитывая тот факт, что вычет подынтегрального выражения в формуле (2), подсчитанный в точке z_0, должен обращаться в нуль, для z_0 получаем следующее уравнение:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\beta_j}{z_0 - a_j} = \frac{1}{i y_0}, \quad \text{где} \quad y_0 = \operatorname{Im} z_0. \tag{3}$$

В статье [2] было доказано, что в случае, если P — выпуклый четырехугольник, то уравнение (2) в верхней полуплоскости имеет ровно одно решение, и предложен алгоритм нахождения этого решения. В данной работе мы рассматриваем случай невыпуклых четырехугольников, а также n-угольников при $n > 4$. Установлены следующие результаты.

Теорема 1. *Если $n = 4$, и числа β_j удовлетворяют (1), то уравнение (3) имеет единственное решение в верхней полуплоскости.*

Теорема 2. *Если $n \ge 4$, а числа β_j удовлетворяют (1), то уравнение (3) имеет не более, чем $(n-1)(n-2)/2$ решений в верхней полуплоскости. Если, при этом, все числа β_j положительны, то решение уравнения (3) единственно. Кроме того, для любого $n > 4$ существуют наборы чисел β_j, удовлетворяющих (1), для которых решение уравнения (3) в верхней полуплоскости неединственно.*

Также обсуждаются вопросы, связанные с единственностью построения четырехугольника с заданными углами и внешним конформным модулем, а также связь уравнения (1) с уравнением Ф.Д. Гахова, возникающим в теории обратных краевых задач.

Литература

1. Driscoll T.A., Trefethen L.N. Schwarz-Christoffel mapping. – Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, V. 8. Cambridge University Press, Cambridge, 2002. – xvi+132 pp.

2. Nasyrov S., Sugawa T., Vuorinen M. Moduli of quadrilaterals and quasiconformal reflection // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2023. – V. 524, No. 2. – Paper No. 127092.

CONFORMAL MAPPINGS OF UNBOUNDED POLYGONS

M. M. Garifullin, S. R. Nasyrov

In many problems arising in complex analysis and applications, conformal mappings of the upper half-plane onto the exteriors of given bounded polygonal domains play an important role. The class of such mappings is realized through the generalized Schwarz-Christoffel integrals. Assuming that the preimages of the vertices are known, we have an equation to determine the pole of the conformal mapping. We study the problem of uniqueness of solution to the equation and show that in some cases it is unique and in some situations this is not the case.

Keywords: conformal mappings of polygons, generalized Schwarz-Christoffel integral, external inverse boundary value problems.

УДК 514.763

ОЦЕНКА ЖЁСКОСТИ КРУЧЕНИЯ ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ ЧЕРЕЗ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБЛАСТИ

Л. И. Гафиятуллина[1], Р. Г. Салахудинов[2]

1 *gafiyat@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет.
2 *rsalakhud@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет.

Работа посвящена оценкам жесткости кручения через новые лекговычислимые геометрические характеристики выпуклой области. В работе определены две новые характеристики области с конечной длиной границы, а также приведен алгоритм их вычисления и изучены их свойства.

Ключевые слова: выпуклая область, функция расстояния до границы области, изопериметрическое неравенство, жесткость кручения, экстремальная область.

Пусть G – односвязная область на плоскости. Одной из важных физических характеристик области в математической физике является функционал

$$\mathbf{P}(G) := 2\int\limits_G \mathrm{u}(x,G)\mathrm{dA},$$

называемый жесткостью кручения в теории упругости, а также потоком в гидродинамике. Здесь через dA обозначен дифференциальный элемент площади, $\mathrm{u}(x,G)$ — функция напряжения, которая является решением краевой задачи

$$\begin{cases} \triangle u = -2, & x \in G, \\ u = 0, & x \in \partial G. \end{cases}$$

Через $\mathbf{L}(G)$ обозначим длину границы области G. Пусть

$$l(\mu,G) := \mathbf{L}(G(\mu)), \;\; l(\boldsymbol{\rho}(G)) := \lim_{\mu\to\boldsymbol{\rho}(G)} l(\mu,G).$$

Будем обозначать через Г подмножество выпуклых областей, содержащее описанные около некоторой окружности многоугольники, а также круговые многоугольники, получаемые из описанных многоугольников заменой некоторых сторон или

их частей дугами максимальной вписанной окружности. Для областей D из Γ введем функционал

$$\mathbf{K}(D) := \sup_{\mu} \left(-l'(\mu)\right).$$

Пусть G — произвольная выпуклая область. Сопоставим области G область $D \in \Gamma$, которая содержит область G, имеет тот же самый радиус максимального круга и имеет наименьшую длину границы области.

Определим функционалы:

$$\mathbf{K}(G) := \mathbf{K}(D),$$

$$d(\boldsymbol{\rho}(G)) := l(\boldsymbol{\rho}(D)).$$

Теорема. *Пусть G — выпуклая область на плоскости ограниченной площади. Тогда справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}(G) \leq \frac{2\boldsymbol{\rho}(G)^3}{3}\left(\mathbf{K}(G)\boldsymbol{\rho}(G) + 2d(\boldsymbol{\rho}(G)) - \pi\boldsymbol{\rho}(G)\right).$$

Равенство достигается в пределе, например, для узких прямоугольников высота которых стремится к нулю.

Теорема. *Пусть G — выпуклая область на плоскости конечной площади. Тогда для $q > 0$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}(G) \geq \frac{\boldsymbol{\rho}(G)^3}{2(2+q)}\left(\mathbf{L}(G) + l(\boldsymbol{\rho}(G))(q+1) + \pi q\boldsymbol{\rho}(G)\right).$$

Литература

1. *Полиа Г., Сегё Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. – М.: Физматгиз, 1962. – 336 с.

2. *Салахудинов Р. Г.* Некоторые свойства функционалов на множествах уровня // Уфимский математический журнал. – 2015. – № 7. – С. 1-12.

3. *Salakhudinov R. G., Gafiyatullina L.I.* Two-Sided Estimate for the Torsional Rigidity of Convex Domain Generalizing the Polya–Szego and Makai Inequalities // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – V. 43. – № 10. – P. 3020–3032.

ESTIMATES OF THE TORSIONAL RIGIDITY OF A CONVEX DOMAIN IN TERMS OF THE GEOMETRICAL CHARACTERISTICS OF THE DOMAIN

L. I. Gafiyatullina, R. G. Salakhudinov

The work is devoted to estimates of the torsional rigidity in terms of new easily computable geometric characteristics of a convex domain. The paper defines two new characteristics of a domain with a finite length of the boundary, as well as an algorithm for calculating them and studying their properties.

Keywords: convex domain, the distance function to the boundary of a domain, isoperimetric inequality, torsional rigidity.

УДК 519.635.1

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗГИБА ТОНКИХ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

О. В. Гермидер[1], В. Н. Попов[2]

1 *o.germider@narfu.ru*; Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова
2 *v.popov@narfu.ru*; Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова

В работе методом полиномиальной аппроксимации Чебышева исследуется изгиб тонких изотропных пластин при различных видах граничных условий. Метод основан на представлении искомой функции, определяющей решение бигармонического уравнения Софи Жермен–Лагранжа, и ее частных производных в виде усеченного двумерного ряда Чебышева в комбинации с матричными преобразованиями и свойствами многочленов Чебышева. В качестве точек коллокации использованы нули этих многочленов. Проведен анализ полученных результатов.

Ключевые слова: полиномиальная аппроксимация, многочлены Чебышева, изгиб тонких изотропных пластин.

Математическому моделированию изгиба тонких упругих пластин посвящено много исследований [1]-[6], что связано с практической значимостью применения этих пластин. В связи с трудностью достижения требуемой степени детализации области интегрирования, что предполагает решение систем линейных уравнений очень высокого порядка с неразреженной матрицей [6], проблема поиска решений бигармонических уравнений, к которым могут быть сведены задачи изгиба рассматриваемых пластин в теории упругости, продолжает оставаться актуальной. При этом, как отмечено в [2], построение их решения вызывает ряд трудностей, связанных с наличием в эллиптических уравнениях производных четвертого порядка, оказывающих существенное влияние на обусловленность исходных краевых задач.

В проведенном исследовании для математического моделирования изгиба тонких изотропных упругих пластин предложен метод полиномиальной аппроксимации Чебышева в матричной форме. В качестве граничных условий использованы такие виды как шарнирное опирание и защемления краев пластин, так и их комбинаций. Решение неоднородного бигармонического уравнения записывается в виде усеченного ряда по ортогональным полиномам Чебышева первого рода для каждой переменной в двухмерной области, также рассматривается интегральный подход, заключающийся в представлении частных производных от искомой функции в виде этого ряда. Поставленная задача сводится к решению линейной системы алгебраических уравнений методом коллокации, который за последнее время показал свою эффективность и универсальность при решении ряда краевых задач механики сплошных сред с использованием многочленов Чебышева [7].

Литература

1. Timoshenko S., Woinowsky–Krieger S. *Theory of Plates and Shells.* – New York: McGraw-Hill Book Comp., 1959. – 580 p.

2. Belyaev V. A. Bryndin L. S., Golushko S. K., Semisalov B. V., Shapeev V. P. *h-, p-, and HP-versions of the least-squares collocation method for solving boundary value problems for biharmonic equation in irregular*

domains and their applications // Comput. Math. Math. Phys. – 2022. – V. 62. – № 4. – P. 517–537.

3. Mai-Duy N., Strunin D. *Karunasena W. A new high-order nine-point stencil, based on integrated-RBF approximations, for the first biharmonic equation* // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2022. – V. 143. – P. 687–699.

4. Ye X., Zhang Sh. *A family of H-div-div mixed triangular finite elements for the biharmonic equation* // Results in Applied Mathematics. – 2022. – V. 15. – 100318.

5. Моханти Р. К., Каур Д. *Компактная разностная схема высокой точности для одномерной нестационарной квазилинейной бигармонической задачи второго рода: приложение к физическим задачам* // Сиб. журн. вычисл. математики. – 2018. – Т. 21. – № 1. – С. 65–82.

6. Ряжских В. И., Слюсарев М. И., Попов М. И. *Численное интегрирование бигармонического уравнения в квадратной области* // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. – 2013. – Т. 1. – С. 52–62.

7. Baseri A., Abbasbandy S., Babolian E. *A collocation method for fractional diffusion equation in a long time with Chebyshev functions* // Applied Mathematics and Computation. – 2018. – V. 322. – P. 55–65.

MATHEMATICAL MODELING OF THE BENDING OF THE THIN ISOTROPIC PLATES

O. V. Germider, V. N. Popov

The paper describes the method of polynomial Chebyshev approximation of the bending of the thin isotropic plates for various types of boundary conditions. The method is based on the representation of the desired function that determines the solution of the Sophie Germain-Lagrange biharmonic equation and its partial derivatives in the form of a truncated two-dimensional Chebyshev series in combination with matrix transformations and the properties of these polynomials. The zeros of the Chebyshev polynomials are used as the collocation points. The analysis of the received results is carried out.

Keywords: polynomial approximation, Chebyshev polynomials, bending of the thin isotropic plates.

УДК 517.95

О ДВУХ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА-ЛЯВА

А. В. Гилёв[1]

1 *toshqaaa@gmail.com*; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Естественнонаучный институт.

В работе рассматриваются две нелокальные задачи для обобщенного уравнения Буссинеска-Лява. Сложность исследования данного вида задач заключается в том, что они являются неклассическими, что приводит к невозможности применения хорошо изученных раннее методов обусловливания разрешимости. Данный факт приводит к потребности разработки новых методов исследования, а также к постановке качественно новых задач.

Ключевые слова: уравнение Буссинеска-Лява, нелокальная задача, операторное уравнение, задача Гурса, интегральные уравнения, метод последовательных приближений.

В области $\Omega = (0, \alpha) \times (0, \beta)$ рассмотрим обобщенное уравнение Буссинеска-Лява

$$u_{yy}(x, y) - (a(x, y)\, u_x(x, y))_x - (b(x, y)\, u_{xyy}(x, y))_x + c(x, y)\, u(x, y) = f(x, y) \qquad (1)$$

и поставим следующие две задачи

Задача I. Найти решение уравнения (1) в области Ω, которое удовлетворяет следующим условиям

$$u_x(0,y) = h(y), \qquad u_y(x,0) = r(x), \tag{2}$$

$$u(x,0) + \int_0^x K(\xi)u(\xi,0)d\xi = \varphi(x), \qquad u(0,y) + \int_0^y L(\eta)u(0,\eta)d\eta = \psi(y). \tag{3}$$

Задача II. Найти решение уравнения (1) в области Ω, которое удовлетворяет (2) и следующим условиям

$$u(x,0) + \int_0^\beta K(x,y)u(x,y)dy = \Phi(x), \qquad u(0,y) + \int_0^\alpha L(x,y)u(x,y)dx = \Psi(y). \tag{4}$$

Основным способом исследования поставленных задач на разрешимость является сведение исходных задач для уравнения четвертого порядка к двум задачам, но уже для уравнений второго порядка, в каждом случае, при помощи введения новой неизвестной функции. При исследовании задач I-II мы получим классическую задачу Гурса, а также нелокальный аналог задачи Гурса но для некоторого нагруженного уравнения, которое определяется введенной функцией, с помощью которой удалось понизить порядок уравнения (1). Результатом исследования этих двух задач являются сформулированные в работе теоремы, гарантирующие существование и единственность решений в каждом случае.

Литература

1. Пулькина Л. С. *О разрешимости в L_2 нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения* // Диффер. уравн. – 2000. – Т. 36. – № 2. – С. 316–318.

2. Богатов А. В., Гилев А. В., Пулькина Л. С. *Задача с нелокальным условием для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками* // Вестн. рос. унив., мат. – 2022. – Т. 27. – № 139. – С.214–230.

3. Гилев А. В. *Об одной нелокальной задаче для гиперболического уравнения с доминирующей смешанной производной* // Вестн. СамУ. Естественнонаучн. сер. – 2020. – Т. 26. – № 4. – С. 25–35.

4. Жегалов В. И., Миронов А. Н., Уткина Е. А. *Уравнения с доминирующей частной производной.* – Казанск. ун-т., Казань, 2014. – 385 с.

ON TWO NON-LOCAL PROBLEMS FOR THE BOUSSINESQ-LOVE EQUATION

A. V. Gilev

This paper describes two nonlocal problems for the generalized Boussinesq-Love equation. The complexity of the study of this type of problems lies in the fact that they are non-classical, which leads to the impossibility of using well-studied methods of determining solvability. This fact leads to the development of new research methods, as well as to the formulation of qualitatively new tasks.

Keywords: Boussinesq-Love equation, nonlocal problem, operator equation, Goursat problem, integral equations, method of successive approximations.

УДК 517.98

ГРАДУИРОВКА СКРЕЩЕННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПОЛУГРУППОВОЙ АЛГЕБРЫ

С. А. Григорян[1], А. Ш. Шарафутдинов[2]

1 *gsuren@inbox.ru*; Казанский государственный энергетический университет.
2 *shash1996@mail.ru*; Казанский государственный энергетический университет.

В работе описываются расслоение Фелла и градуировка C^*-алгебры, порожденной регулярным представлением свободных произведений абелевых групп и скрещенным произведением полугрупповой алгебры и полугруппы, порождающей эту алгебру.

Ключевые слова: полугрупповая C^*-алгебра, расслоение Фелла, градуировка, скрещенное произведение.

1. Расслоение Фелла. Пусть $\mathscr{G} = \Gamma_1 * \ldots * \Gamma_n$ — свободное произведение абелевых групп. Элементы a_i группы Γ_i называются буквами в $\mathscr{G}$, а свободное произведение букв $a = a_{i_1} * \ldots * a_{i_m}$, $a_{i_k} \in \Gamma_{i_k}$, называется словом. Пусть $S = S_1 * \ldots * S_n$ — свободное произведение полугрупп $S_i \in \Gamma_i$, порождающих группы Γ_i. Регулярным представлением называется отображение $a \to T_a$, $a \in S$, где T_a — изометрический оператор сдвига на $\{e_b\}_{b\in S}$ — естественном базисе гильбертова пространства $l^2(S)$.

Конечное произведение T_a и T_b^*, $a, b \in S$ называется мономом. Множество мономов образует инверсную полугруппу $M(S)$. Индексом монома $W \in M(S)$, $W = T_{a_1}T_{b_1}^* \ldots T_{a_n}T_{b_n}^*$ называется слово $\operatorname{ind} W = a_1 * b_1^{-1} * \ldots * a_n * b_n^{-1}$. Индекс не зависит от разложения монома в произведение, и если $W_1 \cdot W_2 \neq 0$, то $\operatorname{ind}(W_1 \cdot W_2) = \operatorname{ind} W_1 * \operatorname{ind} W_2$. Таким образом, $\operatorname{ind}\colon M(S) \to \mathscr{G}$ есть частичное представление инверсной полугруппы в локальную подгруппу группы $\mathscr{G}$.

Пусть $\Gamma = \Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_n$ — декартово произведение групп Γ_i; отождествляя Γ_i и $(e_1, \ldots, \Gamma_i, \ldots, e_n)$, можем считать, что $\Gamma = \Gamma_1 \cdot \ldots \cdot \Gamma_n$. Определим отображение $\tau\colon \mathscr{G} \to \Gamma$, $\tau(a_{i_1} * \ldots * a_{i_m}) = a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_m}$. Пусть $M_a = \{W \in M(S)\colon \tau(\operatorname{ind} W) = a\}$. Тогда $M(S) = \bigcup_{a\in\Gamma} M_a$. $C_r^*(S)$ – C^*-алгебра, порожденная линейными комбинациями мономов из $M(S)$. Подпространство в $C_r^*(S)$, образованное комбинациями элементов из M_a, обозначим через B_a.

Теорема 1. *Семейство пространств $\{B_a\}$ есть расслоение Фелла над Γ, то есть $C_r^*(S) = \overline{\bigoplus_{a\in\Gamma} B_a}$, и существует сжимающее отображение $\Phi_a\colon C_r^*(S) \to B_a$, причем $\Phi_e\colon C_r^*(S) \to B_e$ — условное ожидание.*

2. Скрещенные произведения. Определим представление полугруппы S в полугруппу эндоморфизмов $\operatorname{End} S$ алгебры $C_r^*(S)$, отображая $a \to \alpha_a$, $\alpha_a(A) = T_a A T_a^*$, $A \in C_r^*(S)$. Обозначим через $\alpha = \{\alpha_a\colon a \in S\}$ подполугруппу полугруппы $\operatorname{End} S$. Тройка $(C_r^*(S), \alpha, S)$ называется полугрупповой динамической системой. Ковариантным представлением динамической системы $(C_r^*(S), \alpha, S)$ называется пара (π, V), состоящая из представления π алгебры $C_r^*(S)$ на гильбертово пространство H и гомоморфизма $V\colon S \to \operatorname{Isom}(H)$ с соотношением:

$$V_a \pi(A) = \pi(\alpha_a(A)) V_a.$$

C^*-алгебра, порожденная ковариантным представлением (π, V) называется скрещенным произведением, образованной парой (π, V) и обозначается $C_r^*(S) \rtimes_\alpha^\pi S$.

Обёртывающая алгебра, порожденная всеми ковариантными представлениями системы $(C_r^*(S), \alpha, S)$, называется скрещенным произведением и обозначается $C_r^*(S) \rtimes_\alpha S$. Эта алгебра универсальна (см. [1, 2]).

3. Алгебра $C_r^*(S) \rtimes_\alpha S$.

Предложение 1. *Пусть $\sigma \in \mathrm{Aut}\, C_r^*(S)$ такой автоморфизм, что $\sigma \circ \alpha_a = \alpha_a \circ \sigma$ для любого $a \in S$. Тогда σ расширяется до автоморфизма $\sigma \times \mathrm{id}\colon C_r^*(S) \rtimes_\alpha S \to C_r^*(S) \rtimes_\alpha S$.*

Пусть G_i – группа характеров группы Γ_i, наделенной дискретной топологией.

Теорема 2. *Существует представление $\pi\colon G_1 \times \ldots \times G_n \to \mathrm{Aut}(C_r^*(S) \rtimes_\alpha S)$.*

Литература

1. Laca M., Raeburn I. *Semigroup crossed products and the Toeplitz algebras of nonabelian groups*// J. Funct. Anal. – 1996. – Т. 139. – № 2. – С. 415-440.

2. Lipacheva E. V. *On a representation of a semigroup C^*-algebra as a crossed product* // Russian Mathematics – 2022. – Т. 66. – № 8. – С. 71–75.

GRADING OF THE CROSSED PRODUCT OF A SEMIGROUP ALGEBRA

S. A. Grigoryan, A. Sh. Sharafutdinov

This paper describes the Fell fibration and the grading of the C^*-algebra generated by a regular representation of free products of Abelian groups and the crossed product of a semigroup algebra and a semigroup generating this algebra.

Keywords: semigroup C^*-algebra, Fell bundle, grading, crossed product.

УДК 517.98

"ВЕЩЕСТВЕННЫЕ" ПОДАЛГЕБРЫ C^*-АЛГЕБР

Т. А. Григорян[1], А. Ш. Шарафутдинов[2]

1 *tkhorkova@gmail.com*; Казанский государственный энергетический университет.
2 *shash1996@mail.ru*; Казанский государственный энергетический университет.

Мы рассматриваем операторные алгебры, порожденные свободным произведением абелевых полугрупп. Такие алгебры являются некоммутативным аналогом равномерных инвариантных к сдвигу алгебр на компактных абелевых группах, которые являются "вещественными" подалгебрами C^*-алгебр, порожденными регулярным представлением свободных произведений абелевых полугрупп.

Ключевые слова: свободная группа, свободная полугруппа, C^*-алгебра, спектр, инвариантный идеал.

Пусть G – компактная абелева группа, группа характеров которой изоморфна дискретной абелевой группе Γ. По теореме Понтрягина группа G изоморфна группе характеров группы Γ. Для $a \in \Gamma$ пусть χ^a – соответствующий характер.

Пусть S – подгруппа, порождающая группу Γ. Обозначим через $A(S) = \{f \in C(G) : sp(f) \subseteq S\}$. Эта алгебра изоморфна операторной алгебре на $l^2(S)$, порожденной операторами сдвига T_a, $T_a e_b = e_{ab}$, где $\{e_b\}_{b \in S}$ – естественный базис в $l^2(S)$.

Пусть $\{\Gamma_i\}_{i=1}^n$ – семейство дискретных абелевых групп и $\{S_i\}_{i=1}^n$ – полугруппы, порождающие группы $\{\Gamma_i\}_{i=1}^n$, $S_i \subset \Gamma_i$. Группа характеров декартова произведения $\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_n$ изоморфна компактной группе $G_1 \times \ldots \times G_n$, где G_i – группа характеров группы $\Gamma_i, i = 1, \ldots, n$. Тензорное произведение $\mathscr{A}(S) = A(S_1) \otimes \ldots \otimes A(S_n)$ является равномерной алгеброй на $G_1 \times \ldots \times G_n$ (см. [1]). Некоммутативным аналогом этой алгебры является свободное произведение алгебр $A(S_1) * \cdots * A(S_n)$, порожденное регулярным представлением свободного произведения полугрупп $S = S_1 * \cdots * S_n$. Семейство функций $\{e_a\}_{a \in S}$, $e_a(b) = \delta_{a,b}$ – символ Кронекера, на S образует ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $l^2(S) = \{f\colon S \to \mathbb{C} : \sum_{a \in S} |f(a)|^2 < \infty\}$.

Пусть $T_a, a \in S$ – ограниченный линейный оператор на $l^2(S)$ такой, что $T_a e_b = e_{a*b}$. Пусть $S^0 = S_1 \times \ldots \times S_n$. Отождествляя S_j с $\{e_1\} \times \ldots \times \{e_{j-1}\} \times S_j \times \{e_{j+1}\} \times \ldots \times \{e_n\}$, можем считать, что S_j есть абелева подполугруппа полугруппы S^0 и $S^0 = S_1 \cdot \ldots \cdot S_n$.

Лемма 1. *Отображение $\gamma\colon S \to S^0, \gamma(a_{i_1} * \ldots * a_{i_m}) = a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_m}$ есть гомоморфизм свободного произведения абелевых групп $S = S_1 * \ldots * S_n$ в абелеву группу $S^0 = S_1 \cdot \ldots \cdot S_n$.*

Пусть $B_{\gamma(a)}$ – пространство, образованное линейными комбинациями операторов $T_b \in \mathfrak{A}(S), \gamma(a) = \gamma(b)$.

Теорема 1. *Семейство $\{B_{\gamma(a)}\}$ образует градуировку алгебры $\mathfrak{A}(S)$ и существуют проекторы $F_{\gamma(a)}\colon \mathfrak{A}(S) \to B_{\gamma(a)}, a \in S$, при этом $F_e\colon \mathfrak{A}(S) \to B_e$ есть гомоморфизм $\mathfrak{A}(S)$ в $\mathbb{C} \cdot I$.*

Инвариантные идеалы алгебры $\mathfrak{A}(S)$ Множество S^j есть подполугруппа, состоящая из тех слов $a = a_{i_1} * \ldots * a_{i_n}$, в которых нет буквы из полугруппы S_j. Пусть $\mathfrak{A}(S^j)$ – замкнутая подалгебра алгебры $\mathfrak{A}(S)$, порожденная операторами $T_a, a \in S^j$.

Теорема 2. *$I_j = \overline{\bigoplus_{a \in E_j} B_{\gamma(a)}}$ – замкнутый двусторонний инвариантный идеал в $\mathfrak{A}(S)$, и короткая точная последовательность $0 \longrightarrow I_j \xrightarrow{i} \mathfrak{A}(S) \xrightarrow{r} \mathfrak{A}(S^j) \longrightarrow 0$, где i - вложение, τ – фактор-отображение, расщепима.*

Укажем и на другой класс инвариантности идеалов. Пусть $\Lambda = \{(i_1, \ldots, i_m), 1 \le i_k \le n, i_k \ne i_{k+1}, m \in \mathbb{N}\}$. Множество Λ есть свободное произведение чисел $1, \ldots, n$. Превратим его в полугруппу, добавив операцию конкатенации $'*'$, и удаляя первую букву второго слова, если она совпадает с последней буквой первого. Пусть Λ_m – множество слов длины m в Λ. Тогда $\Lambda = \bigcup_1^\infty \Lambda_m$. Пусть $U_i = \{A_0(S_{i_1} \otimes \ldots \otimes A_0(S_{i_m}); i\}$ есть пара, состоящая из тензорного произведения пространств непрерывных функций на $G_{i_1} \times \ldots \times G_{i_m}$, ряд Фурье которых представляется характерами $\chi^{a_{i_1}}, \ldots, \chi^{a_{i_m}}, a_{i_k} \in S_{i_k} \setminus \{e_{i_k}\}$, и индекса $i \in \Lambda$.

Теорема 3. *$J_m = \overline{\bigoplus_m^\infty I_k}$, где $I_k = \bigoplus_{i \in \Lambda_k} U_i$ – инвариантный идеал алгебры $\mathfrak{A}(S)$, и $\mathfrak{A}(S)/J_m = \mathbb{C}I \oplus (A_0(S_1) \oplus \ldots \oplus A_0(S_n)) \oplus K_m, m \ge 2$, K_m – нильпотентный идеал степени m.*

Литература

1. Григорян С. А. *Обобщенные аналитические функции* // Успехи математических наук. – 1994. – Т. 49. – № 2(296). – С. 3–40.

"REAL" SUBALGEBRAS OF C^*-ALGEBRAS

T. A. Grigoryan, A. Sh. Sharafutdinov

We consider operator algebras generated by a free product of abelian semigroups. Such algebras are a noncommutative analog of uniform shift-invariant algebras on a compact abelian groups, that are "real" subalgebras of C^*-algebras generated by the regular representation of free products of abelian semigroups.

Keywords: Free group, free semigroup, C^*-algebra, spectrum, invariant ideal.

УДК 517.57

ОБОБЩЕННЫЙ ПРИВЕДЕННЫЙ МОДУЛЬ И АСИПТОТИКА ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

К. А. Гуляева[1], Е. Г. Прилепкина[2]

1 *karinagulyaeva8@gmail.com*; Институт прикладной математики ДВО РАН.
2 *pril-elena@yandex.ru*; Институт прикладной математики ДВО РАН.

В нашей предыдущей статье была установлена связь обобщенного приведенного модуля с постоянными потенциалами и асимптотикой интеграла Дирихле потенциальной функции в евклидовом пространстве. В данной работе мы получаем подобные результаты для приведенного модуля с переменными потенциалами.

Ключевые слова: конденсатор, функция Грина, функция Робена, модуль.

Евклидово пространство точек $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), n \geq 3$ обозначим через $\mathbb{R}^n$. Пусть ω_{n-1} – площадь единичной гиперсферы, B – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Обобщенным конденсатором в $\overline{B}$ называется упорядоченная совокупность $C = (\{F_0, F_1, \dots, F_m\}, \{\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_m\}, B)$, где $F_k \subset \overline{B}$ – замкнутые непустые попарно непересекающиеся множества, δ_k – вещественные числа, $k = 0, 1, \dots, m, m \geq 1$. Пусть $\Gamma \subset \partial B$ – замкнутое непустое подмножество границы B, $X = \{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^m$ – точки области B, $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^m$, $\Omega = \{\alpha_k\}_{k=1}^m$ – вещественные числа, $\Psi = \{\mu_k\}_{k=1}^m$ – положительные числа, $r > 0$ достаточно малое число, $\delta_k(r) = \delta_k + \alpha_k r^{n-2} + o(r^{n-2})$, $r \to 0$, замкнутые множества $F_k(r)$ при достаточно малом r содержат шары и содержатся в шарах вида $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k| \leq \mu_k r(1 + O(r^{n-1})), r \to 0$, $k = 1, \dots, m$. Определим конденсатор $C(r; B, X, \Delta, \Omega, \Psi) = (\{\Gamma, F_1(r), \dots, F_m(r)\}, \{0, \delta_1(r), \dots, \delta_m(r)\})$.

Приведенным модулем множества B относительно совокупностей X, Δ, Ω, Ψ назовем предел

$$M(B, X, \Delta, \Omega, \Psi) = \lim_{r \to 0} (|C(r; B, X, \Delta, \Omega, \Psi)| - \nu \lambda_n r^{2-n}),$$

где $\nu = (\sum \delta_l^2 \mu_l^{n-2})^{-1}$, $\lambda_n = 1/((n-2)\omega_{n-1})$. Здесь $|C(r; B, X, \Delta, \Omega, \Psi)|$ обозначает модуль конденсатора $C(r; B, X, \Delta, \Omega, \Psi)$, то есть величину, обратную емкости [1]. Понятие обобщенного приведенного модуля в евклидовом пространстве было введено в [1] для случая, когда $\Gamma = \partial B$ и $\delta_k(r) = \delta_k$ – постоянные уровни потенциалов. В работе [2] установлена связь обобщенного приведенного модуля с постоянными потенциалами и асимптотикой интеграла Дирихле так называемой потенциальной

функции. В данной работе мы получаем подобные результаты для приведенного модуля с переменными потенциалами.

Определим потенциальную функцию приведенного модуля $M(B,\Gamma,X,\Delta,\Omega,\Psi)$ с переменными потенциалами как $u(\mathbf{x}) = \sum\limits_{l=1}^{m} \mu_l^{n-2}(\delta_l(r) - 2\alpha_l r^{n-2}) g_B(\mathbf{x},\mathbf{x}_l,\Gamma)$, где $g_B(\mathbf{x},\mathbf{x}_l,\Gamma)$ – функция Робена области B относительно множества Γ с полюсом в точке $\mathbf{x}_k$ [2]. Интеграл Дирихле потенциальной функции $u(\mathbf{x})$ по области B обозначим как $I(u,B) = \int_B |\nabla u|^2\, d\mu$, где $d\mu = dx_1 \dots dx_n$.

Теорема. *Справедлива асимптотическая формула*

$$I(u,B_r) = r^{2-n} \sum_{k=1}^{m} \frac{\mu_k^{n-2}\delta_k^2}{(n-2)\omega_{n-1}} + \frac{M(B,\Gamma,X,\Delta,\Omega,\Psi)}{(n-2)\omega_{n-1}} + o(1),\ r \to 0,$$

где B_r – область B с выброшенными шарами $|\mathbf{x}-\mathbf{x}_l| \le \mu_l r$, $l = 1,\dots r$.

Указанная теорема позволяет распространить результаты работы [2] на случай модулей с переменными потенциалами. Приведем для примера аналог теоремы 2.3 из [2]. Пусть $B_i \subset B$ — попарно непересекающиеся подобласти B, $i = 1,\dots,p$, $(B \cap \partial B_i) \subset \Gamma_i$, $\Gamma \subset \left(\bigcup_{i=1}^{p} \Gamma_i\right) \bigcup \left[\mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{p} \overline{B}_i\right)\right]$, $X = \bigcup_{i=1}^{p} X_i$, так что каждая точка $\mathbf{x}_k \in X$ совпадает с некоторой точкой $\mathbf{x}_{ij} \in X_i$, то есть $\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_k$ при $k = k(i,j)$, $\mathbf{x}_k \in B$, $\mathbf{x}_{ij} \in B_i$. Кроме того, $\delta_{ij}(r) = \delta_k(r)$ при $k = k(i,j)$. Тогда справедливо неравенство $M \ge \sum_{i=1}^{p} M_i + \sum\limits_{i=1}^{p} I(u-u_i,B_i) \ge \sum_{i=1}^{p} M_i$, где $M = M(B,\Gamma,X,\Delta,\Omega,\Psi)$, $M_i = M(B_i,\Gamma_i,X_i,\Delta_i,\Omega_1,\Psi_i)$ и u, u_i — соответствующие потенциальные функции для модулей M и M_i. Заметим, что асимптотика вырождающегося конденсатора с переменными потенциалами в плоском случае подробно была рассмотрена в работе [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 23-21-00056.

Литература

1. Дубинин В.Н., Прилепкина Е.Г. Об экстремальном разбиении пространственных областей // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 1998. – Т. 254. – С. 95–107.

2. Gulyaeva K.A., Kalmykov S.I., Prilepkina E.G. Extremal decomposition problems in the Euclidean space // International Journal of Mathematical Analysis. – 2015. – V. 9. – № 56. – P. 2763–2773.

3. Дубинин В.Н. Асимптотика емкости конденсатора с переменными уровнями потенциала // Сиб. матем. журн. – 2020. – Т. 61. – № 4. – С. 796–802.

GENERALIZED REDUCED MODULI AND POTENTIAL FUNCTION ASYMPTOTICS

K. A. Gulyaeva, E. G. Prilepkina

The relation between the generalized reduced moduli with constant potentials and the asymptotics of the Dirichlet integral among the potential functions in the Euclidean space has been established and evaluated in our previous paper. We have obtained similar results for the reduced moduli with variable potentials in the current research.

Keywords: condenser, Robin function, Green function, modulus.

УДК 512.58, 517.986

О ПОЛНОТЕ C*-СООТНОШЕНИЙ

Р. Н. Гумеров[1], Е. В. Липачева[2], К. А. Шишкин[3]

1 *renat.gumerov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) Федеральный Университет.
2 *elipacheva@gmail.com*; Казанский Государственный Энергетический Университет.
3 *keril911@gmail.com*; Казанский (Приволжский) Федеральный Университет.

Т.А. Лорингом был предложен категорный подход к понятию универсальной C-алгебры, порождённой множеством образующих, удовлетворяющих набору соотношений. В рамках этого подхода рассматриваются категории, называемые C*-соотношениями. В докладе обсуждается свойство полноты компактных C*-соотношений.*

Ключевые слова: C*-соотношение, универсальная C*-алгебра, полная категория, кополная категория.

В работе Т.А. Лоринга [1] был предложен категорный подход к понятию универсальной C*-алгебры, порождённой множеством образующих, удовлетворяющих набору соотношений. В рамках этого подхода рассматриваются категории, называемые C*-соотношениями. Напомним необходимые определения из [1].

Определение 1. Пусть X – множество, *тривиальным C*-соотношением на множестве* X называется категория $\mathscr{F}_X$, чьи объекты – это отображения вида $j\colon X \to A$, где A – произвольная C*-алгебра. Морфизмом из $j\colon X \to A$ в $k\colon X \to B$ в категории $\mathscr{F}_X$ называется любой *-гомоморфизм $\varphi\colon A \to B$, такой, что $\varphi \circ j = k$.

Определение 2. Пусть X – множество. *C*-соотношением на множестве* X называется любая полная подкатегория $\mathscr{R}$ в $\mathscr{F}_X$, удовлетворяющая следующим условиям:

C1: отображение $X \to \{0\}$ является объектом категории $\mathscr{R}$;

C2: пусть $\varphi\colon A \to B$ – инъективный *-гомоморизм и $f\colon X \to A$ – отображение множеств, тогда, если $\varphi \circ f$ – объект категории $\mathscr{R}$, то f – объект категории $\mathscr{R}$;

C3: пусть $\varphi\colon A \to B$ – *-гомоморфизм и $f\colon X \to A$ – отображение множеств, тогда если f – объект категории $\mathscr{R}$, то $\varphi \circ f$ – объект в $\mathscr{R}$;

C4f: если $f_i\colon X \to A_i$ – объект $\mathscr{R}$ для любого $1 \le i \le n$, $n \in \mathbb{N}$, то

$$\prod_{i=1}^{n} f_i\colon X \to \prod_{i=1}^{n} A_i$$

также объект категории $\mathscr{R}$.

В этих терминах, *универсальная C*-алгебра, порождённая C*-соотношением* $\mathscr{R}$ – это инициальный объект в категории $\mathscr{R}$. Однако, универсальная C*-алгебра существует не для всякой категории $\mathscr{R}$. Чтобы сформулировать критерий существования универсальной C*-алгебры, приведём ещё одно определение из [1].

Определение 3. Пусть X – множество и $\mathscr{R}$ - C*-соотношение на X. Категория $\mathscr{R}$ называется *компактным* C*-соотношением на множестве X, если выполняется условие

C4: для любого непустого множества Λ, если $f_\lambda\colon X \to A_\lambda$ – объект $\mathscr{R}$ для любого $\lambda \in \Lambda$, то

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda\colon X \to \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$$

также объект категории $\mathscr{R}$.

Следующее утверждение является переформулировкой теоремы 2.10 из [1].

Предложение. *Пусть X – множество и $\mathscr{R}$ – C*-соотношение на множестве X. C*-соотношение $\mathscr{R}$ компактно тогда и только тогда, когда в $\mathscr{R}$ существует инициальный объект.*

В [2] было показано, что всякое компактное C*-соотношение изоморфно категории *-полиномиальных соотношений. Иначе говоря, порождающие соотношения соответствующей универсальной C*-алгебры могут быть представлены множеством инволютивных полиномов от порождающих элементов.

В докладе обсуждается следующий результат.

Теорема. *Всякое компактное C*-соотношение $\mathscr{R}$ является полной и кополной категорией.*

Литература

1. *Loring T.A.* C*-algebra relations // Math. Scand. – 2010. – V. 107. – P. 43–72.

2. *Berdnikov I. S., Gumerov R. N., Lipacheva E. V., Shishkin K. A.* On C*-algebra and *-polynomial relations // Lobachevskii J. Math. – 2023. – V. 44. – P. 1988–1995.

ON THE COMPLETENESS OF C*-RELATIONS

R. N. Gumerov, E. V. Lipacheva, K. A. Shishkin

The categorical approach to the notion of the universal C-algebra generated by a set of generators subject to relations has been proposed by T.A. Loring. In the framework of this approach one deals with categories which are called C*-relations. The report is concerned with the completeness of the compact C*-relations.*

Keywords: C*-relation, universal C*-algebra, complete category, cocomplete category.

УДК 517.984

КОНЕЧНОСТЬ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА ОДНОЙ 2×2 ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ

Э. Б. Дилмуродов[1]

1 *elyor.dilmurodov@mail.ru; e.b.dilmurodov@buxdu.uz*; Бухарский государственный университет и Бухарское отделение Института математики им. В. И. Романовского, Бухара, Узбекистан.

Рассматривается 2×2 операторной матрицы $\mathscr{A}_\mu$ ($\mu > 0$ – параметр взаимодействия), связанной с гамильтонианом системы с не более чем тремя частицами на решетке. Установлена конечность дискретного спектра оператора $\mathscr{A}_\mu$.

Ключевые слова: операторная матрица, существенный спектр, дискретный спектр.

Через $\mathbb{T}^{\mathrm{d}} := (-\pi,\pi]^3$ обозначим трехмерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней. Пусть $L_2(\mathbb{T}^3)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}^3$ и $L_2^{\mathrm{s}}((\mathbb{T}^3)^2)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) симметричных функций, определенных на $(\mathbb{T}^3)^2$. Обозначим через $\mathscr{H}$ прямую сумма пространств $\mathscr{H}_1 := L_2(\mathbb{T}^3)$ и $\mathscr{H}_2 := L_2^{\mathrm{s}}((\mathbb{T}^3)^2)$, т.е. $\mathscr{H} := \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$. В гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ рассматривается 2×2 операторная матрица

$$\mathscr{A}_\mu := \begin{pmatrix} A_{11} & \mu A_{12} \\ \mu A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}$$

где матричные элементы $A_{ij} : \mathscr{H}_j \to \mathscr{H}_i$, $i \le j$, $i,j = 1,2$, определяются по формулам

$$(A_{11}f_1)(k) = w_1(k)f_1(k), \quad (A_{12}f_2)(k) = \int_{\mathbb{T}^3} f_2(k,t)\,dt, \quad (A_{22}f_2)(k,p) = w_2(k,p)f_2(k,p),$$

где $f_i \in \mathscr{H}_i, i = 1,2$, и A_{12}^* сопряженный оператор к A_{12}. Здесь $\mu > 0$–параметр взаимодействия и $w_1(k) := \varepsilon(k) + \gamma, w_2(k,p) := \varepsilon(k) + \varepsilon(1/2\cdot(k+p)) + \varepsilon(p)$ с $\gamma \in \mathbb{R}$ и функция (дисперсии) $\varepsilon(\cdot)$ задается выражением $\varepsilon(k) := \sum_{i=1}^3 (1-\cos k_i)$, $k = (k_1,k_2,k_3) \in \mathbb{T}^3$.

В этих предположениях операторная матрица $\mathscr{A}_\mu$ является ограниченной и самосопряженной в $\mathscr{H}$.

Введем семейство ограниченных самосопряженных операторов (семейство обобщенных моделей Фридрихса) $\mathscr{A}_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^3$, действующую в $\mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_1$ ($\mathscr{H}_0 := \mathbb{C}$) по правилу

$$\mathscr{A}_\mu(k) := \begin{pmatrix} A_{00}(k) & \mu A_{01} \\ \mu A_{01}^* & A_{11}(k) \end{pmatrix},$$

с матричными элементами

$$A_{00}(k)f_0 = w_1(k)f_0,\ A_{01}f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\mathbb{T}^3} f_1(t)\,dt, \quad (A_{11}(k)f_1)(p) = w_2(k,p)f_1(p), f_i \in \mathscr{H}_i, i = 0,1.$$

Используя известной теоремы Г.Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга имеем, что для существенного спектра оператора $\mathscr{A}_\mu(k)$ справедливо равенство $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathscr{A}_\mu(k)) = [m(k); M(k)]$, где числа $m(k)$ и $M(k)$ определены как

$$m(k) := \min_{p\in\mathbb{T}^3} w_2(k,p), \quad M(k) := \max_{p\in\mathbb{T}^3} w_2(k,p).$$

Простые вычисления показывают, что функция $w_2(\cdot,\cdot)$ имеет единственный невырожденный минимум (соот. максимум) в точке $(\overline{0},\overline{0}) \in (\mathbb{T}^3)^2$ (соот. $(\overline{\pi},\overline{\pi}) \in (\mathbb{T}^3)^2$) и

$$\min_{k,p\in\mathbb{T}^3} w_2(k,p) = w_2(\overline{0},\overline{0}) = 0,\ \max_{k,p\in\mathbb{T}^3} w_2(k,p) = w_2(\overline{\pi},\overline{\pi}) = 18, \overline{0} := (0,0,0), \overline{\pi} := (\pi,\pi,\pi) \in \mathbb{T}^3.$$

Очевидно, что $\min\{\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathscr{A}_\mu(k)) : k \in \mathbb{T}^3\} = 0$ и $\max\{\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathscr{A}_\mu(k)) : k \in \mathbb{T}^3\} = 18$.

При каждом фиксированном $k \in \mathbb{T}^3$ определим регулярную в $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(\mathscr{A}_\mu(k))$ функцию

$$I(k;z) := \int_{\mathbb{T}^3} \frac{dt}{w_2(k,t) - z}.$$

С использованием приципа Бирмана-Шивенгера и теоремы Фредгольма можно легко утверждать, что для дискретного спектра оператора $\mathscr{A}_\mu(k)$ имеет место равенство [1]

$$\sigma_{\text{disc}}(\mathscr{A}_\mu(k)) = \{z \in \mathbb{C} \setminus [m(k); M(k)] : \, w_1(k) - z - \mu^2/2 \cdot I(k;z) = 0\}.$$

Положим $\Lambda_\mu := \bigcup_{k \in \mathbb{T}^3} \sigma_{\text{disc}}(\mathscr{A}_\mu(k))$.

С помощью свойств функции $w_2(\cdot,\cdot)$, а также теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега получим, что интеграл $I(\overline{0};0)$ конечен, см. [1].

Пусть

$$\mu_l^0(\gamma) := \sqrt{2\gamma}\left(I(\overline{0},0)\right)^{-1/2} \quad \text{для } \gamma > 0; \quad \mu_r^0(\gamma) := \sqrt{24 - 2\gamma}\left(I(\overline{0},0)\right)^{-1/2} \text{ для } \quad \gamma < 12;$$
$$E_\mu^{(1)} := \min\left\{\Lambda_\mu \cap (-\infty;0]\right\} \quad \text{для } \mu \geq \mu_l^0(\gamma); \quad E_\mu^{(2)} := \max\left\{\Lambda_\mu \cap [18;\infty)\right\} \quad \text{для } \mu \geq \mu_r^0(\gamma).$$

Теорема. 1) *Пусть либо $\gamma \geq 12$, $\mu > 0$ либо $\mu \neq \mu_r^0(\gamma)$ для любого $\gamma < 12$. Тогда операторная матрица $\mathscr{A}_\mu$ имеет конечное число собственных значений, лежащих правее $E_\mu^{(2)}$.*

2) *Пусть либо $\gamma \leq 0$, $\mu > 0$ либо $\mu \neq \mu_l^0(\gamma)$ для любого $\gamma > 0$. Тогда операторная матрица $\mathscr{A}_\mu$ имеет конечное число собственных значений, лежащих левее $E_\mu^{(1)}$.*

Литература

1. *Rasulov T.H., Dilmurodov E.B.* Eigenvalues and virtual levels of a family of 2×2 operator matrices // Methods of Functional Analysis and Topology. – 2019. – V. 25. – № 3. – P. 273–281.

FINITENESS OF THE DISCRETE SPECTRUM OF A 2×2 OPERATOR MATRIX

E. B. Dilmurodov

We consider the 2×2 operator matrix $\mathscr{A}_\mu$ ($\mu > 0$ – coupling parameter) associated with is the Hamiltonian system with no more than three particles on the lattice. The finiteness of the discrete spectrum of the operator $\mathscr{A}_\mu$ has been established.

Keywords: operator matrix, essential spectrum, discrete spectrum.

УДК 517.548

РАВЕНСТВО p-ЕМКОСТИ И p-МОДУЛЯ КОНДЕНСАТОРА В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ С p-ОГРАНИЧЕННОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

Ю. В. Дымченко[1], В. А. Шлык[2]

1 *dymch@mail.ru*; Институт прикладной математики ДВО РАН.
2 *shlykva@yandex.ru*; Институт прикладной математики ДВО РАН, Дальневосточный центр исследований и образования в математике.

Мы доказываем равенство между p-емкостью и p-модулем обобщенного конденсатора в метрическом пространстве с p-ограниченной геометрией, $1 < p < \infty$.

Ключевые слова: емкость и модуль конденсатора, метрическое пространство с мерой, пространство Соболева.

Ниже мы используем терминологию из [1], [2]. Метрическое пространство (X, d, μ) назовем пространством с p-ограниченной геометрией, если: 1) X является собственным, φ-выпуклым и оснащенным регулярной борелевской мерой μ, удовлетворяющей условию удвоения; 2) X поддерживает $(1, p)$-неравенство Пуанкаре; 3) для каждого шара $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$, где $x \in X$, $r > 0$, выполняется $0 < \mu(B(x, r)) < \infty$; 4) $\mu(\{x\}) = 0$ для всех $x \in X$.

Пусть E_0, E_1,..., E_m будут непустыми попарно непересекающимися компактами в области $\Omega \subset X$; δ_0, δ_1,..., δ_m будут различными действительными числами, ассоциированными с компактами E_0, E_1,..., E_m, $m \geq 1$. Тройку $\mathscr{K} = (\mathscr{E}, \Delta, \Omega)$, где $\mathscr{E} = \{E_i\}_{i=0}^m$, $\Delta = \{\delta_i\}_{i=0}^m$, назовем обобщенным конденсатором (далее конденсатором). Для конденсатора $\mathscr{K}$ мы определим коллекцию семейств кривых $H = \{H_{01}, H_{02}, \ldots, H_{m-1,m}\}$ и коллекцию чисел $\alpha = \{\alpha_{01}, \alpha_{02}, \ldots, \alpha_{m-1,m}\}$, где H_{ij} есть семейство спрямляемых кривых $\gamma = \gamma_{xy}$ в Ω с концевыми точками $x \in E_i$, $y \in E_j$ и $\gamma \cap E_k = \varnothing$ для всех $k \in \{0, 1, \ldots, m\} \setminus \{i, j\}$; $\alpha_{ij} = |\delta_i - \delta_j|$, $0 \leq i < j \leq m$. Определим $\mathrm{Mod}_p(\alpha H)$ как $\inf\limits_{\rho} \int\limits_{\Omega} \rho^p \, d\mu$, где инфимум берется по всем борелевским функциям $\rho : \Omega \to [0, +\infty]$ таким, что $\int\limits_{\gamma} \rho \, ds \geq \alpha_{ij}$ для всех $\gamma \in H_{ij}$, $0 \leq i < j \leq m$.

Емкость конденсатора $\mathscr{K}$ определим как

$$\mathrm{Cap}_p \, \mathscr{K} = \inf_{\rho} \int\limits_{\Omega} \rho^p \, d\mu,$$

где инфимум берется по всем верхним градиентам ρ борелевских функций $u : \Omega \to (-\infty, \infty)$ таким, что $u = \delta_i$ на E_i, $i = 0, 1, \ldots, m$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *$Mod_p(\alpha H) = Cap_p \, \mathscr{K}$.*

Исследование поддержано Министерством науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2023-946).

Литература

1. *Heinonen J., P. Koskela P.* Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry // Acta Mathematica. – 2000. – V. 181. – № 1. – P. 1–61.

2. *Shanmugalingam N.* Newtonian spaces: An extension of Sobolev spaces to metric measure spaces // Rev. Mat. Iberoamericana. – 2000. – V.16. – № 2. – P. 243–279.

EQUALITY OF p-CAPACITY AND p-MODULE OF THE GENERALIZED CONDENSER IN A METRIC SPACE WITH A p-BOUNDED GEOMETRY

Yu. V. Dymchenko, V. A. Shlyk

We prove an equality of p-capacity and p-module of the generalized condenser in a metric space with a p-bounded geometry, $1 < p < \infty$.

Keywords: capacity and module of condenser, metric measure space, Sobolev space.

УДК 530.145

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИЗМЕРЕНИЙ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ТРЕХУРОВНЕВОЙ КВАНТОВОЙ СИСТЕМОЙ С ДИНАМИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

М. А. Еловенкова[1], А. Н. Печень[2]

1 *elovenkova.m@phystech.edu*; Отдел Математических Методов Квантовых Технологий, Математический институт им. В. А. Стеклова.

2 *apechen@gmail.com*; Отдел Математических Методов Квантовых Технологий, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН.

Квантовые системы с динамическими симметриями имеют величины, которые сохраняются при когерентном управлении эволюцией, и, следовательно, такие системы не могут полностью управляться только когерентным управлением. Квантовые измерения позволяют в некоторой степени нарушить динамическую симметрию. Когерентное управление с помощью измерений в простейшей нетривиальной трехуровневой квантовой системе с динамической симметрией частично изучалось в [1], где вычислялась максимальная достигаемая вероятность между основным и промежуточным состоянием. В этом докладе мы представляем подробный анализ этого случая, предоставляя полное описание кинематического ландшафта управления, где мы находим в дополнение к глобальным максимумам и минимумам также седла и ловушки второго порядка [2].

Ключевые слова: квантовые измерения, управление посредством измерений, квантовый ландшафт управления, динамическая симметрия, ловушки второго порядка.

Управление квантовыми системами привлекает значительное внимание как с теоретической, так и экспериментальной точки зрения. В различных работах было показано, что подходящие измерения могут быть сильным инструментом для манипулирования квантовой динамикой. В данной работе мы изучаем кинематический ландшафт управления трехуровневой квантовой системой с динамической симметрией. Мы производим подробный анализ критических точек такой системы.

Рассмотрим трёхуровневую квантовую систему с динамической симметрией

со следующими свободным гамильтонианом и гамильтонианом взаимодействия

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad V = \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

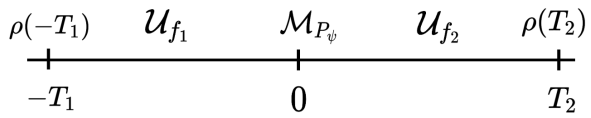

Рис. 1. Эволюция квантовой системы. Здесь $U^\dagger_{f_i}$ – это когерентная эволюция, $\mathscr{M}_{P_\psi}$ – измерение состояния $|\psi\rangle$.

Когерентное управление определяется следующим образом

$$\frac{dU^f_t}{dt} = -i(H_0 + f(t)V)U^f_t, \quad U^f_{t=0} = \mathbb{I},$$

а измерение действует на матрицу плотности как

$$\rho \to \mathscr{M}_{P_\psi}(\rho) = P_\psi \rho P_\psi + (\mathbb{I} - P_\psi)\rho(\mathbb{I} - P_\psi).$$

Итоговая матрица плотности в момент времени $t = T_2$ будет иметь вид

$$\rho(T_2) = U_{f_2}\mathscr{M}_{P_\psi}\Big(U_{f_1}\rho(-T_1)U^\dagger_{f_1}\Big)U^\dagger_{f_2}.$$

Положим $\rho(-T_1) = |1\rangle\langle 1|$ и будем измерять $|\psi\rangle = |1\rangle$ или $|\psi\rangle = |2\rangle$. Вероятность перехода между состоянием $|1\rangle$ и состоянием $|k\rangle$

$$P_{1\to k}(f_1, \mathscr{M}_{|j\rangle\langle j|}, f_2) = \langle k|U_{f_2}\mathscr{M}_{|j\rangle\langle j|}(U_{f_1}|1\rangle\langle 1|U^\dagger_{f_1})U^\dagger_{f_2}|k\rangle,$$

где $k = 2,3$ и $j = 1,2$.

Вероятность перехода в кинематическом представлении, то есть как функция на $\mathscr{R} \times \mathscr{R}$ имеет вид

$$P_{1\to k}(U(1), \mathscr{M}_{|j\rangle\langle j|}, U(2)) = \langle k|U(2)\mathscr{M}_{|j\rangle\langle j|}[U(1)|1\rangle\langle 1|U^\dagger(1)]U^\dagger(2)|k\rangle, \tag{1}$$

где

$$\mathscr{R} = \{U \in \mathscr{U}(3) \,|\, U \in \text{спин-1 представлению } \mathscr{SU}(2) \text{ группы Ли}\}. \tag{2}$$

В нашей работе мы использовали YZY и ZYZ параметризации углами Эйлера этого множества.

Литература

1. Shuang F., Zhou M., Pechen À., Wu R., Shir O.M. Control of quantum dynamics by optimized measurements // Phys. Rev. A 78, 063422 (2008).

2. Elovenkova M., Pechen A. Control landscape of measurement-assisted transition probability for a three-level quantum system with dynamical symmetry (in preparation).

ON MEASUREMENT-ASSISTED CONTROL IN A THREE-LEVEL QUANTUM SYSTEM WITH DYNAMICAL SYMMETRY

M. A. Elovenkova, A. N. Pechen

Quantum systems with dynamical symmetries have conserved quantities which are preserved under coherent control evolution and hence such systems can not be completely controlled by only coherent control. Quantum measurements allow to break to some degree the dynamical symmetry. Measurement-assisted coherent control of a simplest non-trivial three-level quantum system with dynamical symmetry was partially studied in [1], where maximum attained probability between the ground and the intermediate state was computed. In this talk, we present a detailed analysis of this case, providing complete description of the kinematic control landscape, where we find in addition to global maxima and minima also saddles and second-order traps [2].

Keywords: quantum measurement, measurement-assisted quantum control, quantum control landscape, dynamical symmetry, second-order trap.

УДК 517.987.5

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВПОЛНЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ВЫСОКИХ РАЗМЕРНОСТЯХ

Л. С. Ефремова[1]

1 *ludmila.efremova@itmm.unn.ru*; Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Московский физико-технический институт.

Введено понятие вполне геометрически интегрируемого отображения на n-мерной ($n \geq 2$) клетке, цилиндре и торе. Сформулированы и доказаны геометрический и аналитический критерии различения такого рода отображений. Как следствие этих результатов, получено обобщение известной теоремы А.Н. Шарковского для описания множества периодов периодических точек вполне геометрически интегрируемых отображений многомерных клеток в себя.

Ключевые слова: вполне геометрически интегрируемое отображение, косое произведение, локальная ламинация.

Первоначально понятие интегрируемости дискретных динамических систем было введено для систем, полученных дискретизациями известных дифференциальных уравнений. В докладе рассматриваются дискретные динамические системы, которые не связаны с дискретизациями дифференциальных уравнений, а понятие интегрируемой дискретной динамической системы введено так, что такого рода система является естественным обобщением косого произведения. Полученный в работе геометрический критерий интегрируемости дискретной динамической системы основан на доказательстве существования непрерывной инвариантной локальной ламинации, а аналитический критерий - на доказательстве возможности сведения такой дискретной системы к косому произведению (см. [1] - [3]).

Литература

1. Ефремова Л. С. *Динамика косых произведений*// УМН. – 2017. – Т.72. №1 (433). – С. 107-192.

2. Efremova L. S. *Geometrically integrable maps in the plane and their periodic orbits* // LJM. – 2021. – V. 42. – P. 2315–2324.

3. Efremova L. S. *Introduction to Completely Geometrically Integrable Maps in High Dimensions* // Mathematics. – 2023. – V. 11. No 4. – 926. https://doi.org/10.3390/math11040926.

4. Петров П. П. *Название материалов конференции* // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2007. – Т. 35. – С. 103–105.

INTRODUCTION TO COMPLETELY GEOMETRICALLY INTEGRABLE MAPS IN HIGH DIMENSIONS

L. S. Efremova

We introduce the concept of completely geometrically integrable self-maps of n-dimensional ($n \geq 2$) cells, cylinders and tori. We formulate and prove geometric and analytic criteria for the complete geometric integrability of maps on these manifolds. As a corollary, we obtain the generalization of the famous Sharkovsky's Theorem for the description of the set of periods for periodic points of completely geometrically integrable self-maps of multidimensional cells.

Keywords: completely geometrically integrable map, skew product, local lamination.

УДК 517.984

СУЩЕСТВОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ РЕШЕТЧАТОЙ МОДЕЛИ СПИН-БОЗОН С НЕ БОЛЕЕ ЧЕМ ОДНИМ ФОТОНОМ

Д. Х. Жумаева[1]

1 *d.x.jumayeva@buxdu.uz*; Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан.

В настоящей работе описывается спектр решетчатый модели светового излучения (так называемой модели "спин-бозон") с неподвижным атомом и не более чем одним фотоном. Установлено, что рассматриваемый оператор имеет четыре собственных значений. Найден условия существования собственных значений, лежащих в существенном спектре.

Ключевые слова: модель светового излучения, неподвижный атом, фотон, собственное значение, спектр.

Пусть $\mathbb{T}^{\mathrm{d}} := (-\pi;\pi]^{\mathrm{d}}$ – d-мерный тор, $\mathbb{C}$ – одномерное комплексное пространство, $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ и $\mathscr{H} := \mathbb{C}^2 \otimes (\mathbb{C} \oplus L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$. Рассмотрим решетчатый аналог модели светового излучения с неподвижным атомом и не более чем одним фотоном. Эта модель действует в гильбертовом постранстве $\mathscr{H}$ и задается 2×2 операторной матрицей

$$\mathscr{A} := \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{01}^* & A_{11} \end{pmatrix}$$

с матричными элементами

$$A_{00} f_0^{(\sigma)} = \sigma\varepsilon f_0^{(\sigma)},\ A_{01} f_1^{(\sigma)} = \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_1^{(-\sigma)}(t)\,dt,\ (A_{11} f_1^{(\sigma)})(x) = (\sigma\varepsilon + w(x)) f_1^{(\sigma)}(x),\ \sigma = \pm.$$

Здесь $\alpha > 0$ – параметр взаимодействия, $w(\cdot)$ и $v(\cdot)$ – вещественные непрерывные функции на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, а A_{01}^* сопряженный оператор к A_{01}. Норма элемента $f = \{f_0^{(\sigma)}, f_1^{(\sigma)}, \sigma = \pm\} \in \mathscr{H}$ задается формулой

$$\|f\|^2 = \sum_{\sigma=\pm} \Big(|f_0^{(\sigma)}|^2 + \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} |f_1^{(\sigma)}(x)|^2 dx \Big).$$

При этом оператор $\mathscr{A}$ является ограниченным и самосопряженным оператором в $\mathscr{H}$.

В силу известной теоремы Г. Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга имеем

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathscr{A}) = [-\varepsilon + m; -\varepsilon + M] \cup [\varepsilon + m; \varepsilon + M],\ m := \min_{x \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w(x),\ M := \max_{x \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w(x).$$

В непрерывном случае существенный спектр соответствующей модели состоит из полуоси $[-\varepsilon, \infty)$. В данном случае видно, что существенный спектр оператора $\mathscr{A}$ есть объеденение двух отрезков конечной длины, причем они не пересекаются при $\varepsilon > (M - m)/2$.

Видно, что $\min \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathscr{A}) = -\varepsilon + m$ и $\max \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathscr{A}) = \varepsilon + M$, а в случае $\varepsilon \le (M - m)/2$ для существенного спектра оператора $\mathscr{A}$ верно равенство $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathscr{A}) = [-\varepsilon + m; M + \varepsilon]$.

Определим регулярную в $\mathbb{C} \setminus [-\sigma\varepsilon + m; -\sigma\varepsilon + M]$ функцию

$$\Delta_\sigma(z) := \sigma\varepsilon - z - \alpha^2 \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t)dt}{-\sigma\varepsilon + w(t) - z}.$$

В работе [1] доказано, что $\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathscr{A}) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathscr{A}) : \Delta_-(z)\Delta_+(z) = 0\}$. В настоящей заметке с целью исследования собственных значений оператора $\mathscr{A}$ предположим, что

$$\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t)dt}{w(t) - m} = \infty, \quad \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t)dt}{M - w(t)} = \infty.$$

Случай конечности последних интегралов подробно исследованы в работе [1].

При $m < 0 < M$ положим $\alpha_{\min} := \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$ и $\alpha_{\max} := \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$, где

$$\alpha_1 := \sqrt{-m} \left(\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t)dt}{2\varepsilon + w(t) - m} \right)^{-1/2},\ \alpha_2 := \sqrt{M} \left(\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t)dt}{2\varepsilon + M - w(t)} \right)^{-1/2}.$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. а) *При всех значениях параметра взаимодействия $\alpha > 0$ оператор $\mathscr{A}$ имеет четыре собственных значений E_k, $k = 1, 2, 3, 4$ с условием $E_1 \le E_2 \le E_3 \le E_4$. Более, того $E_1 < -\varepsilon + m$ и $E_4 > \varepsilon + M$.*

б) *Если $m < 0 < M$ и $\alpha > \alpha_{\max}$, то для собственных значений оператора $\mathscr{A}$ имеет место неравенство $E_1 \le E_2 < -\varepsilon + m$ и $E_4 \ge E_3 > M + \varepsilon$.*

в) *Пусть $m < 0 < M$, $\varepsilon \le (M - m)/2$ и $0 < \alpha < \alpha_{\min}$. Тогда для собственных значений оператора $\mathscr{A}$ имеет место неравенства*

$$E_1 < -\varepsilon + m < E_3 \le E_4 \le M + \varepsilon < E_4,$$

т.е. собственные значения E_2 и E_3 оператора $\mathscr{A}$ лежат в существенном спектре, а именно, в интервале $(-\varepsilon + m; M + \varepsilon)$.

Литература

1. *Расулов Т.Х.* О ветвях существенного спектра решетчатой модели спин-бозон с не более чем двумя фотонами // ТМФ. – 2016. – V. 186. – № 2. – P. 293–310.

EXISTENCE OF THE EIGENVALUES OF A LATTICE SPIN-BOSON MODEL WITH AT MOST ONE PHOTON

D. Kh. Jumaeva

In the present paper the spectrum of a lattice model of radiative decay (so-called spin-boson model) with a fixed atom and not more than one photon is described. It is established that the considered operator has four eigenvalues. We find the existence condition of the eigenvalues in the essential spectrum.

Keywords: a model of radiative decay, a fixed atom, photon, eigenvalue, spectrum.

УДК 517.984

О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ МОДЕЛИ ФРИДРИХСА С ТРЕХМЕРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

Ч. И. Жумаева[1]

1 *ch.i.jumayeva@buxdu.uz*; Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан.

В настоящей работе рассматривается ограниченная и самосопряженная модель Фридрихса H_μ, $\mu := (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, $\mu_\alpha > 0$, $\alpha = 1, 2, 3$ с трехмерным возмущением. Изучены число и местонахождение собственных значений оператора H_μ. Установлена связь между дискретными спектрами оператора H_μ и трех моделей Фридрихса с одномерными возмущениями.

Ключевые слова: модель Фридрихса, параметр взаимодействия, собственное значение.

В последние годы заметно возрос интерес к исследованию операторов Шредингера (гамильтонианов), описывающих поведение решетчатых квантовых частиц. Один из важных вопросов в теории операторов Шредингера – описание существенного спектра и изучение числа собственных значений (связанных состояний), лежащих вне существенного спектра.

В настоящей работе изучена модель Фридрихса H_μ, $\mu := (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, $\mu_\alpha > 0$, $\alpha = 1, 2, 3$, ассоциированная с гамильтонианом системы двух квантовых частиц, движущихся на d-мерной решетке и взаимодействующих с помощью парных нелокальных потенциалов, которая возникает в модели Хаббарда на примесной решетке. Здесь ядра нелокальных операторов взаимодействия имеют ранг 3. Напомним, что для периодического оператора нелокальные потенциалы представляют собой сумму локального потенциала и некоторого конечномерного оператора.

Спектральные свойства моделья Фридрихса с одномерным и двумерным возмущением изучались во многих работах, см., напр., [1] для двумерного случая.

Пусть $\mathrm{d} \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{T}^{\mathrm{d}} := (-\pi;\pi]^{\mathrm{d}}$ – d-мерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней и $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$.

В гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ рассмотрим так называемую модель Фридрихса H_μ, $\mu := (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, $\mu_\alpha > 0$, $\alpha = 1,2,3$, действующую по формуле

$$H_\mu := H_0 - \mu_1 V_1 - \mu_2 V_2 - \mu_3 V_3,$$

где H_0 – оператор умножения на функцию $u(\cdot)$ в $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$:

$$(H_0 f)(p) = u(p) f(p),$$

а V_α, $\alpha = 1,2,3$ – нелокальные операторы взаимодействия вида

$$(V_\alpha f)(p) = v_\alpha(p) \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v_\alpha(t) f(t) dt, \quad f \in L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}).$$

При этом $\mu_\alpha > 0$, $\alpha = 1,2,3$ – параметры взаимодействия, а $v_\alpha(\cdot)$, $\alpha = 1,2,3$ и $u(\cdot)$ – вещественнозначные непрерывные функции на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$.

В этих предположениях модель Фридрихса H_μ является ограниченным и самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$.

Оператор возмущения $\mu_1 V_1 + \mu_2 V_2 + \mu_3 V_3$ оператора H_0 является самосопряженным оператором ранга не более чем три. Из известной теоремы Г.Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр $\sigma_{\mathrm{ess}}(H_\mu)$ оператора H_μ совпадает со спектром оператора H_0, т.е.

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H_\mu) = \sigma(H_0) = [m; M], \quad m := \min_{p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} u(p), \quad M := \max_{p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} u(p).$$

Теорема 1. *Оператор H_μ может иметь не более, чем 3 собственных значений (с учетом кратности), лежащих левее m и не имеет собственных значений, лежащих правее M.*

Наряду с оператором H_μ рассмотрим также ограниченный и самосопряженный оператор $H_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}$, действующий в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ по формулам

$$H_{\mu_\alpha}^{(\alpha)} := H_0 - \mu_\alpha V_\alpha, \ \alpha = 1,2,3.$$

Пусть $\mathrm{supp}\{v_\alpha(\cdot)\}$ – носитель функции $v_\alpha(\cdot)$ и $\mathrm{mes}(\Omega)$ – мера Лебега множества $\Omega \subset \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$.

Теорема 2. *Если для любых $\alpha \neq \beta$ верно* $\mathrm{mes}(\mathrm{supp}\{v_\alpha(\cdot)\} \cap \mathrm{supp}\{v_\beta(\cdot)\}) = 0$, *то число $z \in \mathbb{C} \setminus [m; M]$ является собственным значением оператора H_μ тогда и только тогда, когда число z является собственным значением хотя бы одного из операторов $H_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}$, $\alpha = 1,2,3$.*

Из теоремы 2 получим следующее утверждение.

Следствие 1. *Если* $\mathrm{mes}(\mathrm{supp}\{v_1(\cdot)\} \cap \mathrm{supp}\{v_2(\cdot)\}) = 0$, *то*

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(H_\mu) = \sigma_{\mathrm{disc}}(H_{\mu_1}^{(1)}) \cup \sigma_{\mathrm{disc}}(H_{\mu_2}^{(2)}) \cup \sigma_{\mathrm{disc}}(H_{\mu_3}^{(3)}).$$

Полученные результаты играют важную роль при исследование условий существования собственных значений, а также при определении кратности этих собственных значений оператора H_μ относительно μ.

Литература

1. *Rasulov T.H., Bahronov B.I.* Existence of the eigenvalues of a tensor sum of the Friedrichs models with rank 2 perturbation // Nanosystems: Phys. Chem. Math. – 2023. – V. 14. – № 2. – P. 151–157.

ON THE EIGENVALUES OF FRIEDRICHS MODEL WITH RANK 3 PERTURBATION

Ch. I. Jumaeva

In this paper we consider a bounded and self-adjoint Friedrichs model H_μ, $\mu := (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, $\mu_\alpha > 0$, $\alpha = 1,2,3$ with rank 3 perturbation. The number and location of the eigenvalues of H_μ are studied. A connection between the discrete spectra of the operator H_μ and three Friedrichs models with one-dimensional perturbations is established.

Keywords: model Friedrichs, coupling constant, eigenvalue.

УДК 513.23

СОСТОЯТЕЛЬНОСТЬ ЭМПИРИЧЕСКОГО АНАЛОГА БАЙЕСОВСКОЙ ОЦЕНКИ

Э. Заарур[1]

1 *zrwrz05@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет.

Изучается возможность построения байесовской оценки на основе ядерной оценки плотности безусловного распределения. Рассматривается ситуация, когда наблюдаемая случайная величина есть сумма неизвестного параметра и центрированной нормальной ошибки с известной дисперсией. Предлагается способ вычисления байесовской оценки через безусловную плотность наблюдений, что позволяет строить эмпирические аналоги байесовской оценки только на основе оценок плотности. Показывается состоятельность этих аналогов как при фиксированном результате текущего эксперимента, так и в среднем квадратическом.

Ключевые слова: эмпирическая байесовская оценка, ядерная оценка плотности, состоятельность в среднем квадратическом.

В эксперименте наблюдается случайная величина X, имеющая нормальное распределение (θ, σ^2) с известной дисперсией σ^2 и неизвестным математическим ожидание θ. В байесовской постановке считается, что параметр θ поступает случайным образом с неизвестной плотностью распределения $g(\theta)$, $\theta \in (-\infty, \infty)$.

Хорошо известно, что байесовская оценка θ относительно квадратичных потерь при фиксированном результате эксперимента $X = x$ равна апостериорному среднему

$$e(x) = \frac{1}{f(x)} \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{1}{\sigma} \varphi\Big(\frac{x-u}{\sigma}\Big) g(u)\, du,$$

где φ — плотность стандартного нормального закона, а безусловная плотность распределения X равна $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\big((x-u)/\sigma\big) g(u)\, du/\sigma$.

Справедлива следующая

Лемма. *Справедливо равенство*

$$e(x) \;=\; \sigma^2 \frac{f'(x)}{f(x)} + x.$$

Чаще всего плотность g не известна. Если задача построения оценки возникает многократно, то имеется архив уже проведенных экспериментов, в которых наблюдались значения случайной величины X, т.е. имеется набор $\Xi_n = \{X_1, \ldots, X_n\}$ реализаций независимых случайных величин с функцией плотности f. Следовательно, заменив f, f' на их оценки $\hat{f}, \hat{f}'$, можно построить эмпирический аналог $\hat{e}(x)$ для $e(x)$. Подобная идея впервые была высказана Г. Роббинсом и активно продвигалась в трудах по d-апостериорному подходу [5].

Мы используем ядерные оценки $\hat{f}$, предложенные в [1]. Предполагается, что ядро этих оценок ограничено по вариации и имеет конечную дисперсию. В [4] приведены неравенства относительно супремум-нормы отклонения оценок $\hat{f}, \hat{f}'$ от функций f и f'. Эти неравенства получены при специальных ограничениях на ширину полосы пропускания ядерной оценки (см. [4]).

Теорема. *Пусть*

$$\hat{e}(x; \Xi_n) \;=\; \sigma^2 \frac{\hat{f}'(x)}{\hat{f}(x)} + x.$$

Тогда при $n \to \infty$ по вероятности (относительно Ξ_n)

$$\text{(i)} \;\; \sup_x |\hat{e}(x; \Xi_n) - e(x)| \to 0;$$

$$\text{(ii)} \;\; \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{e}(x; \Xi_n) - e(x))^2 f(x)\, dx \;\to\; 0.$$

Литература

1. Nadaraya E. *On non-parametric estimates of density functions and regression curves* // The Annals of Mathematical Statistics. – 1965. – Т. 10. – № 1. – С. 186–190.

2. Schuster E. F. *Estimation of a probability density function and its derivatives* // The Annals of Mathematical Statistics. – 1969. – Т. 40. – № 4. – С. 1187–1195.

3. Simushkin D. S., Simushkin S. V., Volodin I. N. *On the d-posterior approach to the multiple testing problem* // Journal of Statistical Computation and Simulation. – 2020. – Т. 91. – № 4. – С. 651-666.

CONSISTENCY OF THE EMPIRICAL ANALOGUE OF BAYESIAN ESTIMATION

E. Zaarour

A method is proposed for calculating the Bayesian estimate through the unconditional density of observations, which makes it possible to build empirical analogues of the Bayesian estimate only on the basis of density estimates. The consistency of these analogues is shown both for a fixed result of the current experiment, and in the mean square.

Keywords: empirical Bayesian estimation, kernel density estimation, mean square consistency.

УДК 517.956.32, 517.929

КЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СО СДВИГАМИ В СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ

Н. В. Зайцева[1]

1 *n.v.zaiceva@yandex.ru*; МГУ имени М. В. Ломоносова.

В полупространстве для гиперболического дифференциально-разностного уравнения с операторами сдвига общего вида построены трехпараметрические семейства решений. Доказано, что полученные решения являются классическими, если вещественная часть символа дифференциально-разностного оператора положительна.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, дифференциально-разностное уравнение, классическое решение.

В полупространстве $\{(x,t) : x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0\}$ рассмотрено уравнение

$$u_{tt}(x,t) = a^2 \sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j}(x,t) + \sum_{j=1}^{n} b_j u_{x_j x_j}(x - h_j, t), \tag{1}$$

где $a \neq 0$, $b_1, \ldots, b_n$ — заданные вещественные числа; $h_j := (h_{j1}, \ldots, h_{jn})$, $j = \overline{1,n}$, — заданные векторы с действительными координатами, длины которых не равны нулю.

Определение. Функция $u(x,t)$ называется *классическим решением* уравнения (1), если в каждой точке полупространства $\{(x,t) : x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0\}$ существуют классические производные u_{tt} и $u_{x_j x_j}$ $(j = \overline{1,n})$, и в каждой точке этого полупространства выполняется соотношение (1).

Введем следующие обозначения:

$$G_1(\xi) := \rho(\xi)\sin\varphi(\xi), \quad G_2(\xi) := \rho(\xi)\cos\varphi(\xi); \tag{2}$$

$$\rho(\xi) := \left[\left(a^2|\xi|^2 + \alpha(\xi)\right)^2 + \beta^2(\xi)\right]^{1/4};$$

$$\varphi(\xi) := \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\beta(\xi)}{a^2|\xi|^2 + \alpha(\xi)}; \tag{3}$$

$$\alpha(\xi) := \sum_{j=1}^{n} b_j \xi_j^2 \cos\left(\sum_{k=1}^{n} h_{jk}\xi_k\right), \quad \beta(\xi) := \sum_{j=1}^{n} b_j \xi_j^2 \sin\left(\sum_{k=1}^{n} h_{jk}\xi_k\right).$$

Теорема. *При выполнении условия*

$$a^2|\xi|^2 + \sum_{j=1}^{n} b_j \xi_j^2 \cos\left(\sum_{k=1}^{n} h_{jk}\xi_k\right) > 0 \tag{4}$$

для всех $\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq \overrightarrow{0}$, *семейство функций*

$$G(x,t;A,B,\xi) := A\,e^{tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi) + \\ + B\,e^{-tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x\cdot\xi), \tag{5}$$

где $G_1(\xi)$ *и* $G_2(\xi)$ *определяются равенствами* (2), $\varphi(\xi)$ *определяется по формуле* (3), *удовлетворяет уравнению* (1) *в классическом смысле при любых вещественных значениях параметров* A, B *и* $\xi \neq \overrightarrow{0}$.

Знак "·" в (5) означает скалярное произведение векторов.

Неравенство (4) в теореме является условием положительности вещественной части символа дифференциально-разностного оператора в правой части уравнения (1).

Неравенство

$$a^2 > \max_{j=\overline{1,n}} |b_j|$$

является достаточным условием, гарантирующим существование семейства классических решений уравнения (1), определяемого по формуле (5).

С подробными результатами можно ознакомиться в работе [1].

Литература

1. *Зайцева Н. В., Муравник А. Б.* Классические решения гиперболического дифференциально-разностного уравнения со сдвигом на произвольный вектор // Известия вузов. Математика. – 2023. – № 5. – С. 34–40.

CLASSICAL SOLUTIONS OF A MULTIDIMENSIONAL HYPERBOLIC EQUATION WITH SHIFTS IN HIGHER DERIVATIVES

N. V. Zaitseva

We construct three-parameter families of solutions of hyperbolic differential-difference equation in a half-space with general shift operators. It is proved that the solutions obtained are classical if the real part of the symbol of the differential-difference operator is positive.

Keywords: hyperbolic equation, differential-difference equation, classical solution.

УДК 517.954

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ С НЕЛИНЕЙНЫМ УСЛОВИЕМ

М. Б. Зверева[1], М. И. Каменский[2]

1 *margz@rambler.ru*; Воронежский государственный университет, Воронежский государственный педагогический университет.

2 *mikhailkamenski@mail.ru*; Воронежский государственный университет, Воронежский государственный педагогический университет.

Проведено исследование моделей деформаций и колебаний упругих систем (струна, балка) с нелинейным условием. Доказаны теоремы существования и единственности решений; получены формулы представления решений; решен ряд задач граничного управления колебательными процессами; разработаны алгоритмы для нахождения приближенных решений.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, геометрический граф, sweeping процесс, нормальный конус.

Рассмотрим модель колебаний системы струн, расположенной вдоль геометрического графа - звезды. Пусть ребра графа имеют одинаковую длину, и граф ориентирован к узлу. Введенная параметризация ставит в соответствие узлу графа точку $x = l$, а граничным вершинам соответствует $x = 0$. Обозначим через $u(x,t)$ заданную на графе функцию, описывающую отклонение струнной системы от положения равновесия в точке x в момент времени t. Сужение $u(x,t)$ на ребра будем обозначать через $u^i(x,t)$, $i = 1,2,...,n$. Условие соединения струн в узле означает, что $u(l,t) = u^1(l,t) = ... = u^i(l,t) = ...u^n(l,t)$. Предположим, что начальная форма струн и начальная скорость струн заданы соответственно как $u^i(x,0) = \varphi^i(x)$, $\dfrac{\partial u^i}{\partial t}(x,0) = 0$. Будем предполагать, что концы струн жестко закреплены в граничных вершинах, что означает выполнение условий $u^i(0,t) = 0$.

Колебательный процесс для каждой струны описывается волновым уравнением $\dfrac{\partial^2 u^i}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u^i}{\partial t^2}, 0 < x < l, t > 0$, $i = 1,2,...,n$. При этом предполагается, что в ходе колебательного процесса узловая точка струнной системы $u(l,t)$ находится внутри ограничителя $C(t)$, т.е. выполнено условие $u(l,t) \in C(t)$, где $C(t) = [-h,h] + \xi(t)$. Пока $u(l,t)$ является внутренней точкой $C(t)$, выполняется условие $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u^i}{\partial x}(l,t) = 0$. Если узловая точка струнной системы касается граничных точек ограничителя, то выполнены условия $u(l,t) = \xi(t) + h$, и при этом $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u^i}{\partial x}(l,t) \le 0$, или $u(l,t) = \xi(t) - h$, и при этом $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u^i}{\partial x}(l,t) \ge 0$. Таким образом, имеем $-\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u^i}{\partial x}(l,t) \in N_{C(t)}(u(l,t))$, где множество $N_{C(t)}(u(l,t))$ обозначает внешний нормальный конус к $C(t)$ в точке $u(l,t) \in C(t)$, определяемый как

$$N_{C(t)}(u(l,t)) = \{\xi \in R^1 : \xi \cdot (c - u(l,t)) \le 0 \quad \forall c \in C(t)\}.$$

Для данной модели доказаны теоремы существования и единственности решений, получен аналог формулы Даламбера, для ряда случаев решена задача граничного управления колебательным процессом.

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Министерства просвещения Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы QRPK-2023-0002). Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 22-71-10008.

Литература

1. Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А. *Дифференциальные уравнения на геометрических графах.* – М.: Физматлит, 2005. – 272 с.

2. Зверева М. Б. *Модель деформаций струнной системы на графе - звезде с нелинейным условием в узле* // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2022. – Т. 63. – № 4. – С. 635–652.

3. Зверева М. Б. *Модель деформаций системы стилтьесовских струн с нелинейным условием* // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2022. – Т. 32. – № 4. – С. 528–545.

4. Kamenskii M., Wen Ch. F., Liou Y. Ch., Zvereva M. *On a hyperbolic equation on a geometric graph with hysteresis type boundary conditions* // Optimization : A Journal of Mathematical Programming and Operations Research. – 2020. – V. 69. – № 2. – P. 283–304.

ON MATHEMATICAL MODELS WITH A NONLINEAR CONDITION

M. B. Zvereva, M. I. Kamenskii

Models of deformations and oscillations of elastic systems (a string, a beam) with a nonlinear condition are studied. Existence and uniqueness theorems for solutions are proved; formulas for the representation of solutions are obtained; algorithms for finding approximate solutions are developed.

Keywords: differential equation, geometric graph, sweeping process, normal cone.

УДК 517.95

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ С ЗАДАННЫМ АСИМПТОТИЧЕСКИМ ПОВЕДЕНИЕМ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА НА МОДЕЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

К. А. Зубанкова[1], Е. А. Мазепа[2]

1 *bliznjukka@volsu.ru*; Волгоградский государственный университет.
2 *elena.mazepa@volsu.ru*; Волгоградский государственный университет.

В работе получены достаточные условия существования решения неоднородного уравнения Шредингера с заданным асимптотическим поведением на модельном римановом многообразии, а также оценка скорости приближения этого решения к краевым условиям.

Ключевые слова: неоднородное уравнение Шредингера, краевые задачи, асимптотическая оценка, модельное риманово многообразие.

В данной работе исследуется вопрос существования ограниченных решений с заданным асимптотическим поведением для неоднородного уравнения Шредингера

$$Lu \equiv \Delta u - c(x)u = f(x) \tag{1}$$

на модельном римановом многообразии M_g, где функции $c(x)$, $f(x) \in C^{0,\alpha}(G)$, $c(x) \geq 0$, $c(x) \not\equiv 0$, для любого предкомпактного подмножества $G \subset M_g, 0 < \alpha < 1$.

Опишем подробнее модельное многообразие. Пусть $M_g = B \cup D$, где B некоторый предкомпакт с непустой внутренностью, а D изометрично прямому произведению $[r_0; +\infty) \times S$ ($r_0 > 0$ и S – компактное риманово многообразие без края) с метрикой $ds^2 = dr^2 + g^2(r)d\theta^2$, где $g(r)$ – положительная, гладкая на $[r_0; +\infty)$ функция, а $d\theta^2$ – метрика на S.

Всюду в дальнейшем будем считать, что на D выполнено $c(r,\theta) \equiv c(r)$, $f_1(r) \leq f(r,\theta) \leq f_2(r)$, где $f_1(r)$, $f_2(r) \in C^{0,\alpha}(R_+)$.

Введем обозначение

$$I(r) = \int_r^\infty g^{1-n}(t)\left(\int_{r_0}^t g^{n-1}(\xi)(\frac{1}{g^2(\xi)} + c(\xi))d\xi\right)dt,$$

$$h_i(r) = I(r) + \int_r^\infty g^{1-n}(t)\left(\int_{r_0}^t |f_i(\xi)| g^{n-1}(\xi) d\xi\right) dt, \quad (i = 1,2)$$

$$h(r) = I(r) + \int_r^\infty g^{1-n}(t)\left(\int_{r_0}^t max\{|f_1(\xi)|, |f_2(\xi)|\} g^{n-1}(\xi) d\xi\right) dt.$$

Рассмотрим сначала на D неоднородные уравнения вида:

$$Lu = f_i(r), \qquad i = 1,2, \tag{2}$$

и сформулируем вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть многообразие M_g и правая часть $f_i(r)$ уравнения* (2) *таковы, что $h_i(r_0) < \infty$. Тогда для любых функций $\Psi(\theta) \in C^\infty(S), \Phi(\theta) \in C^\infty(S)$ на D существует единственное ограниченное решение $u_i(r,\theta)$ уравнения* (2) *такое, что*

$$u_i(r_0,\theta) = \Psi(\theta) \quad \text{и} \quad |u_i(r,\theta) - \Phi(\theta)| \le C \cdot h_i(r)$$

для любых (r,θ) при $r > r_0$, где константа $C > 0$ не зависит от (r,θ).

Следующее утверждение является основным результатом для уравнения (1) на модельном многообразии.

Теорема. *Пусть многообразие M_g и правая часть $f(x)$ уравнения* (1) *таковы, что $h(r_0) < \infty$. Тогда для любой функции $\Phi(\theta) \in C^\infty(S)$ на M_g существует единственное ограниченное решение $u(x)$ уравнения* (1) *такое, что на D выполнено*

$$|u(r,\theta) - \Phi(\theta)| \le C \cdot h(r)$$

для любых (r,θ) при $r > r_0$, где константа $C > 0$ не зависит от (r,θ).

Аналогичные результаты были получены в работе [1] для уравнения Пуассона на модельных многообразиях, а также в работе [2] для квазимодельных многообразий.

Литература

1. *Losev A.G., Mazepa E.A.* Asymptotic behavior of solutions of the Dirichlet problem for the Poisson equation on model Riemannian manifolds // Sib. electron. math. news. – 2022. – V. 19. – № 1. – P. 66–80.

2. *Мазепа Е.А., Рябошлыкова Д.К.* Асимптотическое поведение решений неоднородного уравнения Шредингера на некомпактных римановых многообразиях // Известия высших учебных заведений. Математика, 2023 (принята к печати 29.05.2023 г.).

ON THE EXISTENCE OF A SOLUTION WITH A GIVEN ASYMPTOTIC BEHAVIOR FOR THE INHOMOGENEOUS SCHRODINGER EQUATION ON MODEL MANIFOLDS

K. A. Zubankova, E. A. Mazepa

In this paper, sufficient conditions for the existence of a solution of the inhomogeneous Schrodinger equation with a given asymptotic behavior on a model Riemannian manifold are obtained, as well as an estimate of the rate of approximation of this solution to the boundary conditions.

Keywords: inhomogeneous Schrodinger equation, boundary value problems, asymptotic estimation, model Riemannian manifold.

УДК 517.984

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ МАТРИЧНОЙ МОДЕЛИ В ФЕРМИОННОМ ПРОСТРАНСТВЕ ФОКА

Д. Э. Исмоилова[1]

1 *d.e.ismoilova@buxdu.uz*; Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан.

Рассматривается матричная модель, ассоциированная с системой, описывающей два одинаковых фермиона и одну частицу иной природы, взаимодействующих с помощью операторов рождения и уничтожения. Установлены соотношения для спектра, существенного и точечного спетра рассматриваемого оператора.

Ключевые слова: матричная модель, спектр, существенный спектр, точечный спектр, оператор рождения, оператор уничтожения.

Через $\mathbb{T}^{\mathrm{d}} := (-\pi,\pi]^{\mathrm{d}}$ обозначим d-мерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней. Пусть $\mathscr{H}_0 := \mathbb{C}$ – одномерное комплексное пространство, $\mathscr{H}_1 := L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ и $\mathscr{H}_2 := L_2^{\mathrm{as}}((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$ – гильбертово пространство (комплекснозначных) анти-симметричных функций двух переменных, определенных на $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2$. Положим

$$\mathscr{F}_{\mathrm{as}}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})) := \mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_1; \quad \mathscr{F}_{\mathrm{as}}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})) := \mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2.$$

Пространство $\mathscr{F}_{\mathrm{as}}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$ $(m = 1,2)$ называется "$m+1$–частичным обрезанным" подпространство пространства $\mathscr{F}_{\mathrm{as}}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$. Элементы пространства $\mathbb{C}^2 \otimes \mathscr{F}_{\mathrm{as}}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$ представляются как векторы $f = \{f_0^{(\mathrm{s})}, f_1^{(\mathrm{s})}, f_2^{(\mathrm{s})}, \mathrm{s} = \pm\}$, где $f_i \in \mathscr{H}_i$, $i = 0,1,2$. Для двух элементов $f = \{f_0^{(\mathrm{s})}, f_1^{(\mathrm{s})}, f_2^{(\mathrm{s})}, \mathrm{s} = \pm\}, g = \{g_0^{(\mathrm{s})}, g_1^{(\mathrm{s})}, g_2^{(\mathrm{s})}, \mathrm{s} = \pm\} \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathscr{F}_{\mathrm{as}}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$ их скалярное произведение определяется как

$$\langle f, g\rangle := \sum_{\mathrm{s}=\pm}\Big(f_0^{(\mathrm{s})}\overline{g_0}^{(\mathrm{s})} + \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} f_1^{(\mathrm{s})}(k_1)\overline{g_1^{(\mathrm{s})}(k_1)}dk_1 + \frac{1}{2}\int_{(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2} f_2^{(\mathrm{s})}(k_1,k_2)\overline{g_2^{(\mathrm{s})}(k_1,k_2)}dk_1dk_2\Big).$$

В пространстве $\mathbb{C}^2 \otimes \mathscr{F}_{\mathrm{as}}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$ рассмотрим следующую операторную матрицу

$$\mathscr{A} := \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & 0 \\ A_{01}^* & A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix},$$

с матричными элементами

$$\mathscr{A}_{00}f_0^{(\mathrm{s})} = \mathrm{s}\varepsilon f_0^{(\mathrm{s})}, \mathscr{A}_{01}f_1^{(\mathrm{s})} = \alpha\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t)f_1^{(-\mathrm{s})}(t)dt, (\mathscr{A}_{11}f_1^{(\mathrm{s})})(k_1) = (\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1))f_1^{(\mathrm{s})}(k_1),$$

$$(\mathscr{A}_{12}f_2^{(\mathrm{s})})(k_1) = \alpha\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t)f_2^{(-\mathrm{s})}(k_1,t)dt, (\mathscr{A}_{22}f_2^{(\mathrm{s})})(k_1,k_2) = (\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1) + w(k_2))f_2^{(\mathrm{s})}(k_1,k_2),$$

$$\{f_0^{(\mathrm{s})}, f_1^{(\mathrm{s})}, f_2^{(\mathrm{s})}, \mathrm{s} = \pm\} \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathscr{F}_{\mathrm{as}}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})).$$

Здесь ε – фиксированное вещественное число, $w(\cdot)$ и $v(\cdot)$ – вещественнозначные непрерывные функции на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, а $\alpha > 0$ – "параметр взаимодействия".

С целью изучения спектральных свойств оператора $\mathscr{A}$ наряду с этим оператором рассмотрим еще следующие два ограниченных самосопряженных операторов $\mathscr{A}^{(\mathrm{s})}$, $\mathrm{s} = \pm$, которые действуют в $\mathscr{F}_{\mathrm{as}}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$ как 3×3 операторные матрицы

$$\mathscr{A}^{(\mathrm{s})} := \begin{pmatrix} \widehat{\mathscr{A}}_{00}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathscr{A}}_{01} & 0 \\ \widehat{\mathscr{A}}_{01}^{*} & \widehat{\mathscr{A}}_{11}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathscr{A}}_{12} \\ 0 & \widehat{\mathscr{A}}_{12}^{*} & \widehat{\mathscr{A}}_{22}^{(\mathrm{s})} \end{pmatrix}$$

с матричными элементами

$$\widehat{\mathscr{A}}_{00}^{(\mathrm{s})} f_0 = \mathrm{s}\varepsilon f_0, \quad \widehat{\mathscr{A}}_{01} f_1 = \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_1(t)\, dt,$$
$$(\widehat{\mathscr{A}}_{11}^{(\mathrm{s})} f_1)(k_1) = (-\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1)) f_1(k_1), \quad (\widehat{\mathscr{A}}_{12} f_2)(k_1) = \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_2(k_1, t)\, dt,$$
$$(\widehat{\mathscr{A}}_{22}^{(\mathrm{s})} f_2)(k_1, k_2) = (\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1) + w(k_2)) f_2(k_1, k_2), \quad (f_0, f_1, f_2) \in \mathscr{F}_{\mathrm{as}}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})).$$

Можно проверить, что

$$(A_{01}^{*} f_0)(k_1) = \alpha v(k_1) f_0; \; (A_{12}^{*} f_1)(k_1, k_2) = \alpha \left(v(k_1) f_1(k_2) - v(k_2) f_1(k_1) \right), \; (f_0, f_1) \in \mathscr{F}_{\mathrm{as}}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})).$$

Далее, под обозначениями $\sigma(\cdot)$, $\sigma_{\mathrm{ess}}(\cdot)$ и $\sigma_{\mathrm{pp}}(\cdot)$ понимаются спектр, существенный спектр и точечный спектр ограниченного самосопряженного оператора, соответственно.

Установим связь между спектрами операторов $\mathscr{A}$ и $\mathscr{A}^{(\mathrm{s})}$, $\mathrm{s} = \pm$.

Теорема. *Имеет место равенство* $\sigma(\mathscr{A}) = \sigma(\mathscr{A}^{(+)}) \cup \sigma(\mathscr{A}^{(-)})$. *Более того,*

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathscr{A}) = \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathscr{A}^{(+)}) \cup \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathscr{A}^{(-)}), \quad \sigma_{\mathrm{p}}(\mathscr{A}) = \sigma_{\mathrm{p}}(\mathscr{A}^{(+)}) \cup \sigma_{\mathrm{p}}(\mathscr{A}^{(-)}).$$

Аналогичный результат получено в работе [3] для решетчатой модели спин-бозон с не более чем двумя фотонами (действующей в бозонное пространство Фока).

Литература

1. *Muminov M., Neidhardt H., Rasulov T.* On the spectrum of the lattice spin-boson Hamiltonian for any coupling: 1D case // Journal of Mathematical Physics. – 2015. – V. 56.

SPECTRAL RELATIONS FOR A MATRIX MODEL IN FERMIONIC FOCK SPACE

D. E. Ismoilova

We consider a matrix model associated with a system describing two identical fermions and one particle another nature interacting via annihilation and creation operators. The relations for the spectrum, of essential spectrum and point spectrum are established.

Keywords: matrix model, spectrum, essential spectrum, point spectrum, creation operator, annihilation operator.

УДК 517.53, 517.98

О СТРУКТУРЕ ОПЕРАТОРОВ В НЕКОТОРЫХ ПАРАХ ПРОСТРАНСТВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

М. В. Кабанко[1]

1 *kabankom@gmail.com*; Курский государственный университет.

В работе исследуются некоторые частные случаи пространств целых функций, которые связаны с теорией интерполяционных пространств. Обсуждаются приложения действительного метода интерполяции для гильбертовых пар, связанных с пространствами аналитических функций.Рассмотрены свойства ограниченных операторов, действующих в гильбертовых парах таких пространств.

Ключевые слова: целая функция, гильбертова пара.

Рассмотрим пространство

$$\mathscr{H}(w) = \left\{ f(z) | f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_n z^n, (a_n)_{n=0}^{\infty} \in l_2(w) \cap \mathscr{E} \right\}$$

Норма в этом пространстве, индуцированная из $l_2(w)$, будет полной в том и только том случае, если

$$\liminf_{n\to\infty} (w_n)^{\frac{1}{n}} = +\infty$$

Такое пространтство с указанным условием обозначим $\mathscr{H}(w_{\mathscr{E}})$ (см. [1]).

В работе [2] авторы для пространства $\mathscr{H}(w_{\mathscr{E}})$ ввели в рассмотрение характеристику

$$w_\rho = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log w_n}{n \log n}$$

и доказали (Theorem 2.4, Corollary 2.6) следующее.

1. Пространство состоит из функций конечного порядка если и только если $w_\rho > 0$;

2. Пространство состоит из функций нулевого порядка если и только если $w_\rho = +\infty$.

Таким образом, имеет смысл рассматривать пары пространств целых функций с различным порядком и интерполяционные пространства для этих пар.

Определение. *Два гильбертовых пространства H_0, H_1 называются гильбертовой парой $\overline{H} = \{H_0, H_1\}$, если они линейно и непрерывно вложены в некоторое топологическое пространство $\mathfrak{A}$.*

Также можно ввести понятие суммы пространств и норму в сумме, одной из которых является т.н. К-функционал:

$$K(t, x, \overline{H}) = \inf_{x = x_0 + x_1, x_i \in H_i} \|x_0\| + t\|x_1\|$$

Определение. *Пространство H называется промежуточным пространством пары $\overline{H} = \{H_0, H_1\}$ если верны непрерывные вложения $H_0 \cap H_1 \hookrightarrow H \hookrightarrow H_0 + H_1$.*

Пространство H называется интерполяционным, если оно промежуточное и из того, что оператор ограниченно действует в пространствах пары следует, что он ограничен и в пространстве H.

Теорема 1. *Интерполяционное пространство* $(\mathscr{H}(w_{\mathscr{E}}), \mathscr{H}(v_{\mathscr{E}}))_{\theta,2}$ *при* $0 < w_\rho < \infty$, $v_\rho = \infty$, *построенное по вещественному методу, состоит из функций нулевого порядка.*

Интерполяционное пространство $(\mathscr{H}(w_{\mathscr{E}}), \mathscr{H}_\infty)_{\theta,2}$ *при* $0 < w_\rho < \infty$ *построенное по вещественному методу, состоит из целых функций конечного порядка.*

Рассмотрим в дальнейшем пару пространств $\{l_2, l_2(n^{cn})\}$ и операторы, действующие в пространствах этой пары. Мы будем применять удобное матричное представление этих операторов. Пусть $A : \{l_2, l_2(n^{cn})\} \to \{l_2, l_2(n^{cn})\}$ и $(a_{ij})_{i,j=0}^{\infty}$ – матрица этого оператора.

Теорема 2. *Оператор A, действующий в паре* $\{l_2, l_2(n^{cn})\}$, *можно представить в виде суммы двух операторов, каждый из которых имеет верхне- и нижнетреугольную структуру соответственно.*

Литература

1. Doan M. L., Khoi L. H., *Composition operators on Hilbert spaces of entire functions* // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. Ser I. – 2015. – V. 353. – no. 6. – P. 495-499.

2. Doan M. L., Khoi L. H., *Hilbert Spaces of Entire Functions and Composition Operators* // Complex Analysis and Operator Theory. – 2016. – V. 10. – P. 213–230; DOI: 10.1007/s11785-015-0497-0

ON THE STRUCTURE OF OPERATORS IN SOME COUPLES OF SPACES OF ANALYTIC FUNCTIONS

M. V. Kabanko

We investigate some particular cases of the spaces of entire functions, which are related to interpolation theory of linear operators. We discuss the application of the real method interpolation constructions to Hilbert couples of the space of sequense which connected with the spaces of holomorphic functions. We also consider some properties of linear operators, if these linear operators belong to the algebra of operators acting in the Hilbert couples of the space of sequense.

Keywords: entire functions, Hilbert couple.

УДК 517.53

ОЦЕНКА ТИПА МЕРОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

М. В. Кабанко[1]

1 *kabankom@gmail.com*; Курский государственный университет.

Пусть $f(z)$ *— мероморфная функция на комплексной плоскости конечного порядка* $\rho > 0$, $\rho(r)$ *— уточненный порядок в смысле Бутру, такой, что* $0 < \alpha = \liminf\limits_{r\to\infty} \rho(r) \leqslant \limsup\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho < \infty$. *Если* $[\alpha] < \alpha \leqslant \rho < [\alpha] + 1$, *то типы* $T(r, f)$ *и* $|N|(r, f)$ *относительно* $\rho(r)$ *совпадают. Если между* α *и* ρ *есть целые числа, то полученный критерий*

формулируется в терминах верхней плотности нулей и полюсов функции f и их аргументной симметрии.

Ключевые слова: мероморфная функция, порядок, тип функции, верхняя плотность, аргументная симметрия.

Настоящая работа является продолжением исследований, начатых в [1]. В этой работе рассматривалась задача о распределении нулей целой функции $f(z)$ по отношению к данному уточнённому порядку в смысле Бутру. Полученные критерии формулировались в терминах верхней плотности нулей функции.

В данной работе мы обобщаем некоторые из этих результатов на пространства мероморфных функций, рост которых также определяется уточнённым порядком в смысле Бутру.

Определение Абсолютно непрерывная функция $\rho(r)$, $r \in [0, +\infty)$, называется *уточнённым порядком в смысле Бутру*, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$-\infty < \alpha = \liminf_{r\to+\infty} \rho(r) \leqslant \rho = \limsup_{r\to+\infty} \rho(r) < +\infty; \tag{1}$$

$$\lim_{r\to+\infty} \rho'(r) r \ln r = 0.$$

Здесь под $\rho'(r)$ мы понимаем наибольшее производное число.

Пусть $f(z)$ — мероморфная функция на комплексной плоскости, $\{a_\nu\}$ и $\{b_\mu\}$ — последовательности отличных от $z = 0$ нулей и полюсов функции $f(z)$, с учетом их кратностей. Для $G \subset \mathbb{C}$ положим

$$\mu_f^+(G) = \sum_{a_\nu \in G} 1,\ \mu_f^-(G) = \sum_{b_\mu \in G} 1,\ \ \mu_f(G) = \mu_f^+(G) - \mu_f^-(G),\ \ |\mu_f| = \mu_f^+ + \mu_f^-,$$

$$|N|(r, f) = N_{|\mu_f|}(r),\ N(r, f) = N_{\mu_f^-}(r),\ N^+(r, f) = N_{\mu_f^+}(r),$$

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi,\ T(r, f) = m(r, f) + N(r, f).$$

Теорема 1. *Пусть ρ — порядок мероморфной функции $f(z)$, а $\rho(r)$ — уточненный порядок в смысле Бутру, удовлетворяющий условию* (1). *Если $[\alpha] < \alpha \leqslant \rho < [\alpha] + 1$, то типы $T(r, f)$ и $|N|(r, f)$ относительно $\rho(r)$ либо оба равны нулю, либо оба нормальные, либо равны бесконечности.*

Литература

1. Malyutin K. G., Kabanko M. V., Kostenko I. V. *Generalization of the Lindelöf Theorem to the Case of Boutroux Proximate Order. II* // Journal of Mathematical Sciences. – 2022. – V. 264. – Issue 5. – P. 609–616. https://doi.org/10.1007/s10958-022-06020-6.

2. Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б. *Точные оценки асимптотических характеристик роста целых функций с нулями на заданных множествах* // Фундаментальная и прикладная математика. – 2018. – Т.22. – №1. – С. 51–97.

ESTIMAITES OF TYPE OF THE MEROMORPHIC FUNCTION OF FINITE ORDER

M. V. Kabanko

Let $f(z)$ be a meromorphic function on the complex plane of a finite order $\rho > 0$. Let $\rho(r)$ be a proximate order in the Boutroux sense such that $\limsup_{r\to\infty} \rho(r) = \rho$, $\liminf_{r\to\infty} \rho(r) = \alpha > 0$. If $[\alpha] < \alpha \leqslant \rho < [\alpha] + 1$, then the types of $T(r, f)$ and $n(r; 0, \infty)$ with respect to $\rho(r)$ coincide. If between α and ρ there exist integers then the resulting criterion is formulated in terms of the upper density of zeros and poles of the function f and their argument symmetry.

Keywords: meromorphic function, function order, function type, upper density, argument symmetry.

УДК 517.928

ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ В ФОРМЕ SWEEPING ПРОЦЕССОВ

М. И. Каменский[1], В. В. Обуховский[2], Г. Г. Петросян[3], О. Ю. Петросян[4]

1 *mikhailkamenski@mail.ru*; Воронежский государственный университет.
2 *valerio-ob2000@mail.ru*; Воронежский государственный педагогический университет.
3 *garikpetrosyan@yandex.ru*; Воронежский государственный педагогический университет.
4 *garikpetrosyan@yandex.ru*; Воронежский государственный педагогический университет.

В настоящей работе мы рассматриваем управляемую систему с обратной связью в виде sweeping процессов в гильбертовых пространствах. Используя понятие обобщенного метрического пространства и принцип сжимающего отображения А.И. Перова, мы приводим теорему о существовании и единственности почти периодического решения для этой системы, а также обосновываем применение принципа усреднения для такого рода систем.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, дифференциальное включение, управляемая система, sweeping процесс, почти периодическая функция, обобщенное метрическое пространство, обобщенный оператор сжатия, экспоненциально устойчивая матрица.

Пусть $H_1, ..., H_p$ и $W_1, ..., W_q$ – гильбертовы пространства. Мы рассматриваем следующую управляемую систему с обратной связью

$$x_i'(t) = A_i x_i(t) + f_i(t, x_1(t), ..., x_p(t), u_1(t), ..., u_q(t)),\ t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$-u_j'(t) \in N_{C_j(t)}(u_j(t)) + g_j(t, x_1(t), ..., x_p(t), u_1(t), ..., u_q(t)) + \gamma_j u_j(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где $i = 1, ...p$, $j = 1, ..., q$, $C_j : \mathbb{R} \multimap W_j$ – многозначные функции с выпуклыми замкнутыми значениями, $A_i : D(A_i) \subset H_i \to H_i$ – линейные замкнутые операторы, порождающие C_0–полугруппы операторов $\{e^{A_i t}, t \geq 0\}$ в пространствах H_i, $\gamma_j > 0$ – заданные константы. Через $N_{C_j(t)}(u_j)$ обозначен нормальный конус, определяемый для замкнутого выпуклого множества $C_j(t) \subset W_j$ следующим образом:

$$N_{C_j(t)}(u_j) = \begin{cases} \{\xi \in W_j : \langle \xi, c - u_j \rangle \leq 0 \text{ для всех } c \in C_j(t)\}, & \text{если } u_j \in C_j(t), \\ \emptyset, & \text{если } u_j \notin C_j(t), \end{cases} \tag{3}$$

а отображения $f_i : \mathbb{R} \times H_1 \times \ldots \times H_p \times W_1 \times \ldots \times W_q \to H_i$, $g_j : \mathbb{R} \times H_1 \times \ldots \times H_p \times W_1 \times \ldots \times W_q \to W_j$ являются нелинейными и липшицевыми по всем переменным, кроме первой.

Пространство почти периодических функций на $\mathbb{R}$ со значениями в гильбертовом пространстве H будем обозначать через $AP(\mathbb{R}; H)$.

Определение. *Набор функций*

$$(x_1, \ldots, x_p, u_1, \ldots, u_q) \in AP(\mathbb{R}; H_1) \times \ldots \times AP(\mathbb{R}; H_p) \times AP(\mathbb{R}; W_1) \times \ldots \times AP(\mathbb{R}; W_q)$$

называется решением задачи (1)-(2)*, если функции x_i и u_j удовлетворяют соотношениям* (1)-(2).

Мы приводим теорему о существовании и единственности почти периодического решения для системы (1)-(2), а также устанавливаем для нее аналог принципа усреднения.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 22-71-10008.

Литература

1. *Monteiro Marques M.D.P.* Differential inclusions in nonsmooth mechanical problems. Shocks and dry friction. in: Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications. 9, (1993).

2. *Valadier M.* Rafle et viabilite (The sweeping process and viability) // Sém. Anal. Convexe Exp. 22 (17) (1992). (in French)

3. *Castaing C., Monteiro Marques M.* BV periodic solutions of an evolution problem associated with continuous moving convex sets // Set-Valued Anal. 3 (4) (1995), 381–399.

4. *Edmond J.F., Thibault L.* Relaxation of an optimal control problem involving a perturbed sweeping process // Math. Program. Ser. B. 104 (2005), 347–373.

5. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. – Walter de Gruyter, Berlin–New-York, 2001.

6. *M. Kamenskii, O. Makarenkov, L. N. Wadippuli, P. Raynaud de Fitte,* Global stability of almost periodic solutions to monotone sweeping processes and their response to non-monotone perturbations // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. 30 (2018), 213–224.

7. *Kamenskii M., Nistri P.* An Averaging Method for Singularly Perturbed Systems of Semilinear Differential Inclusions with C_0-Semigroups // Set-Valued Analysis. – 2003. – V. 11. – P. 345–357.

8. *Жиков В.В.* Некоторые вопросы допустимости и дихотомии. Принцип усреднения // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1976. – V. 40. – № 6. – P. 1380–1408.

9. *Левитан Б.М., Жиков В.В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. – М.: МГУ, 1978.

10. *Перов А.И.* Периодические, почти периодические и ограниченные решения дифференциального уравнения $dx/dt = f(t, x)$ // Докл. АН СССР. – 1960. – V. 132. – № 3. – P. 531-–534.

11. *Перов А.И.* Принцип обобщенных сжимающих отображений // Известия Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2005. – V. 5. – P. 196–207.

ALMOST PERIODIC TRAJECTORIES OF FEEDBACK CONTROL SYSTEMS IN THE FORM OF SWEEPING PROCESSES

M.I. Kamenskii, V.V. Obukhovskii, G.G. Petrosyan, O.Yu. Petrosyan

In this paper we consider a feedback control system in the form of sweeping processes in Hilbert spaces.

Using the concept of a generalized metric space and the contraction map principle by A.I. Perov, we present a theorem on the existence and uniqueness of an almost periodic solution for this system, and also justify the application of the averaging principle for such systems.

Keywords: differential equation, differential inclusion, control system, sweeping process, almost periodic function, generalized metric space, generalized contraction operator, exponentially stable matrix.

УДК 517.984

ПРОСТРАНСТВА ДЕ БРАНЖА И СВОЙСТВА НУЛЕЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

В. В. Капустин[1]

1 *kapustin@pdmi.ras.ru*; Санкт-Петербургское отделение математического института им. В.А.Стеклова.

В докладе обсуждаются несколько задач, связанных с дзета-функцией Римана, в связи с недавно построенным автором оператором в пространстве де Бранжа, спектр которого совпадает со множеством всех нетривиальных нулей дзета-функции с точностью до простого преобразования комплексной плоскости. Рассматриваются приложения построенной модели.

Ключевые слова: кси-функция Римана, оператор Гильберта–Пойа, кратные нули дзета-функции, парные корреляции множества точек на прямой.

В статье автора [1] был доказан следующий результат.

Теорема. *Пространство де Бранжа $\mathscr{H}_{\mathscr{E}}$ со структурной функцией $\mathscr{E}(z) = K_{\frac{1-iz}{2}}(2\pi)$, где K_s — определённая стандартным образом модифицированная функция Бесселя, содержит функции вида $\frac{\xi(\frac{1}{2}+iz)}{p(z)}$, где ξ — кси-функция Римана, а p — многочлен степени* 3 *или выше, нули которого являются нулями функции из числителя.*

Этот результат позволяет построить оператор в $\mathscr{H}_{\mathscr{E}}$, являющийся одномерным возмущением самосопряжённого оператора, спектр которого совпадает со множеством нетривиальных нулей дзета-функции, развёрнутым на вещественную ось.

Существование самосопряжённого оператора с таким спектром давало бы доказательство гипотезы Римана, и такой (гипотетически существующий) оператор называется оператором Гильберта–Пойа.

Попытка построения такого оператора через сплетающие соотношения с самосопряжёнными операторами умножения на z в весовом L^2-пространстве на прямой (если $XA = BX$ и ядро оператора X нулевое, то точечный спектр оператора A содержится в точечном спектре оператора B) приводит к операторам с требуемым спектром в пространстве Крейна.

Естественный вопрос об операторе, который был бы оператором Гильберта–Пойа при предположении, что гипотеза Римана верна, связан с вопросом о (не)существовании кратных нетривиальных нулей у дзета-функции. В докладе будет обсуждаться способ такого построения на предложенной модели.

И ещё одна тема, обсуждаемая в докладе, связана с так называемыми парными корреляциями нулей дзета-функции, описывающими расстояния между нулями. Известен результат Х. Монтгомери и его гипотеза о том, что плотность распределения разностей между нулями соответствует синус-процессу. В докладе будет рассмотрена операторная интерпретация этого свойства.

Литература

1. Капустин В. В. *Множество нулей дзета-функции Римана как точечный спектр оператора* // Алгебра и анализ – 2021. – Т. 33. – № 4. – С. 107–124.

DE BRANGES SPACES AND PROPERTIES OF ZEROS OF THE RIEMANN ZETA FUNCTION

V. V. Kapustin

In the talk we discuss several problems related to the Riemann zeta function in connection with an operator on a de Branges space. Recently the author constructed a de Branges space and an operator on it whose spectrum coincides with the set of all non-trivial zeros of the zeta function up to a simple transformation of the complex plane. Here we consider applications of this model.

Keywords: the Riemann xi function, Hilbert–Polya operator, multiple zeros, pair correlations for a set of points on a line.

УДК 519.233

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ d-АПОСТЕРИОРНАЯ ПРОЦЕДУРА ОТБОРА НАИБОЛЕЕ ВЕРОЯТНОГО МУЛЬТИНОМИАЛЬНОГО ИСХОДА, ОСНОВАННАЯ НА ТЕХНИКЕ ПЕРВОГО ПЕРЕСКОКА И КОНСЕРВАТИВНОМ АПРИОРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ С ЗОНОЙ БЕЗРАЗЛИЧИЯ

И. А. Кареев[1]

1 *kareevia@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского.

В работе представляется последовательная процедура отбора наиболее вероятного исхода в мультиномиальном эксперимента. Процедура строится на основе идей процедуры первого перескока и контроля d-апостериорной ошибки. Рассматривается априорное распределение, порождающее наименее благоприятные для отбора вероятности исхода с зоной безразличия. Для процедуры приведен вид правил управления и принятия решение, и результаты моделирования.

Ключевые слова: мультиномиальное распределение, процедура отбора, процедура первого перескока, d-апостериорный подход.

Пусть $\{X_i\colon i = 1, 2, \ldots\}$ — последовательность независимых мультиномиальных векторов с одним экспериментом и вероятностями исходов $p_1, \ldots, p_k$. Мы рассматриваем байесовскую модель, в которой $\tau \sim \mathrm{U}(\{1, \ldots, k\})$, $\Delta \in (0, 1)$ и

$$p_\tau = \frac{1}{1 + \Delta(k-1)}, \quad p_i = \frac{\Delta}{1 + \Delta(k-1)} \quad (i \neq \tau).$$

В работе строится последовательная процедура δ отбора компоненты с индексом τ, с контролем d-апостериорной надёжности статистического вывода, выражаемой неравенством

$$Q = \max_{i \in \{1,\dots,k\}} \mathrm{P}(\tau = i \,|\, \delta(\{X_1, \dots, X_\nu\}) = i) \geq P^*,$$

где ν — случайный объём выборки процедуры δ, $P^* \in (0,1)$ — заданный уровень надёжности. Процедура δ строится на основе концепции последовательной процедуры первого перескока [2]. Для процедур первого перескока по построению выполняется ограничение на Q. Параметр Δ имеет смысл зоны безразличия, а указанный набор вероятностей — наименее благоприятной конфигурации, в соответствии с идеями работы [1].

Теорема 1. *Пусть $T_l = (t_1, \dots, t_k) = \sum_{i=1}^{l} X_i$, где l — количество уже произведённых наблюдений. Процедура первого перескока δ останавливает эксперимент, если существует $i^* \in \{1, \dots, k\}$ такое, что:*

$$\sum_{j=1}^{k} \Delta^{t_{i^*} - t_j} \leq \frac{1}{P^*}.$$

При окончании эксперимента полагается $\delta = i^*$.

Теорема 2. *δ совершает конечное количество наблюдений, т.е.* $\mathrm{P}(\nu < \infty) = 1$.

В таблице 1 представлены результаты моделирования.

Таблица 1. Оценки характеристик процедуры при $P^* = 0.95$ по результатам моделирования с 100000 репликациями

k	Δ	$\mathrm{E}\,\nu$	$\sqrt{\mathrm{D}\,\nu}$	оценка Q	k	Δ	$\mathrm{E}\,\nu$	$\sqrt{\mathrm{D}\,\nu}$	оценка Q
3	0.50	23.9	15.1	0.963	5	0.50	46.2	26.8	0.962
3	0.75	138.8	86.5	0.956	5	0.75	294.0	164.7	0.955
3	0.90	1047.5	644.6	0.953	5	0.90	2305.2	1266.3	0.952
4	0.50	34.9	20.8	0.963	6	0.50	58.1	32.7	0.961
4	0.75	214.4	125.8	0.955	6	0.75	377.7	205.6	0.956
4	0.90	1655.8	951.9	0.953	6	0.90	2985.7	1583.8	0.952

Литература

1. Bechhofer R. E., Elmaghraby S., Morse N. *A single-sample multiple-decision procedure for selecting the multinomial event which has the highest probability //The Annals of Mathematical Statistics.* – 1959. – С. 102–119.

2. Simushkin D. S., Simushkin S. V., Volodin I. N. *D-guaranteed discrimination of statistical hypotheses: a review of results and unsolved problems //* Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – Т. 228. – С. 543–565.

A SEQUENTIAL D-POSTERIOR SELECTION PROCEDURE FOR FINDING THE MOST PROBABLE MULTINOMIAL OUTCOME, BASED ON THE FIRST-CROSSING PROCEDURE AND THE CONSERVATIVE PRIOR WITH THE INDIFFERENCE ZONE

I. A. Kareev

We present a sequential d-posterior selection procedure for finding the most probable multinomial

outcome. The procedure is based on the ideas of first-crossing procedure and control of d-posterior error. We consider prior generating the least favorable outcome probabilities with the indifference zone. The control and the decision rules are described among with modeling results.

Keywords: multinomial distribution, selection procedure, first-crossing procedure, d-posterior approach.

УДК 517.518.1, 517.518.182

СУБРИМАНОВЫ СВОЙСТВА КЛАССОВ НЕКОНТАКТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

М. Б. Карманова[1]

1 *maryka@math.nsc.ru, maryka84@gmail.com*; Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН

Мы выводим метрические субримановы свойства множеств уровня неконтактных отображений, определенных на группе Карно произвольной глубины и принимающих значения на двухступенчатой группе Карно. Данные результаты применены для вывода субримановой формулы коплощади нового типа.

Ключевые слова: неконтактное отображение, группа Карно, множество уровня, формула коплощади.

Целью доклада является описание основ геометрической теории меры на субримановых структурах для модельных случаев групп Карно, в частности, для нового случая неконтактных отображений. Задача такого типа впервые рассматривалась в [1], где размерность образа больше размерности прообраза, и в [2] для случая, когда размерность образа меньше. По сравнению с [2], в рассматриваемом случае сняты ограничения на глубину прообраза. Для лучшего понимания основных идей исследования глубина образа в рамках решаемой задачи равна двум; кроме того, размерности подрасслоений, соответствующих горизонтальным полям и полям степени два, на прообразе будут строго больше, чем таковые на образе. Последнее связано с возможными применениями установленных результатов к аппроксимации липшицевых во внутреннем смысле отображений гладкими. Такая аппроксимация может быть полезна при выводе в явном виде метрических свойств множеств уровня классов липшицевых во внутреннем смысле отображений. Эта задача является одной из трудных открытых проблем анализа на метрических структурах, и в настоящее время она решена только либо для некоторых частных случаев (см., например, [3, 4, 5, 6] и др.), либо в достаточно локальном виде [7], либо для достаточно гладких отображений [8]. Так как при построении отображений, аппроксимирующих исходное, свойство контактности (и, соответственно, липшицевости во внутреннем смысле) в общем случае исчезает, то возникает вопрос, как описать субримановы свойства аппроксимаций, которые могут быть и неконтактными отображениями. Доклад содержит решение данного вопроса.

Определение 1 (см., например, [10]). *Группой Карно* называется связная односвязная стратифицированная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой градуирована, т. е., представляется в виде

$$V = \bigoplus_{j=1}^{M} V_j,\ [V_1, V_j] = V_{j+1},\ j < M,\ [V_1, V_M] = \{0\}.$$

Число M называется *глубиной* группы Карно $\mathbb{G}$. Если векторное поле принадлежит V_1, то оно называется горизонтальным.

На группе Карно вводится аналог d_2 расстояния, являющийся квазиметрикой. Он согласован со структурой алгебры Ли векторных полей.

Определение 2. Пусть $y = \exp\Big(\sum\limits_{i=1}^{N} y_i X_i\Big)(x)$. Тогда $d_2(x, y)$ равно

$$\max_{k=1,\dots,M}\Big\{\Big(\sum_{j:\, X_j \in V_k} y_j^2\Big)^{1/2k}\Big\}.$$

Опишем субриманов аналог дифференцируемости.

Определение 3 ([11]; см. также [12])**.** Пусть $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно, $\Omega \subset \mathbb{G}$ и $\varphi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$. Отображение φ является *дифференцируемым в субримановом смысле*, в (предельной) точке $x \in \Omega$, если существует горизонтальный гомоморфизм $\mathscr{L}_x : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ такой, что

$$\widetilde{d}_2(\varphi(y), \mathscr{L}_x\langle y\rangle) = o(1) \cdot d_2(x, y), \text{ где } o(1) \to 0 \text{ при } \Omega \ni y \to x.$$

Субриманов дифференциал $\mathscr{L}_x$ обозначается символом $\widehat{D}\varphi(x)$.

Известно [12], что контактные отображения, по определению имеющие непрерывные производные вдоль горизонтальных полей и переводящие горизонтальные поля в горизонтальные, непрерывно дифференцируемы в субримановом смысле. В настоящее время для них исследована структура субриманова дифференциала (ее можно назвать блочно-диагональной) и выведены формулы геометрической теории меры. Но из-за сильного ограничения на образы горизонтальных полей построение нетривиальных примеров контактных отображений затруднительно и требует проведения отдельных исследований.

Однако, можно рассмотреть вопрос о выводе субримановых свойств классов неконтактных отображений. В качестве модельного случая рассмотрены классы отображений, определенных на группе Карно произвольной глубины и принимающие значения на группе Карно глубины два и топологической размерности $\widetilde{N}$. Оказалось, что для них можно ввести дифференциал субриманова типа $\widehat{D}^{\triangle}\varphi$ с помощью некоторого процесса диагонализации классического дифференциала. При этом, он определяется с точностью до ортогонального отображения, которое не влияет на значение $\sqrt{\det\big(\widehat{D}^{\triangle}\varphi\widehat{D}^{\triangle}\varphi^*\big)}$, и его структура также аналогична блочно-диагональной. Здесь мы пишем «аналогична», так как матрица в общем случае не является квадратной.

В качестве применения, выведена формула коплощади нового типа (ср. [2, 9]) для множеств, не пересекающихся с характеристическим χ (в котором минимальная сумма степеней нормальных к множеству уровня векторов, грубо говоря, слишком велика). Приведем ее для $\dim V_1 \le \widetilde{N}$.

Теорема 4. *Для открытых множеств $U \Subset \Omega \setminus \chi$ и значения μ, равного хаусдорфовой размерности множеств уровня и определяемого однозначно структурой прообраза и образа, справедлива формула коплощади*

$$\int\limits_U \sqrt{\det \widehat{D}^{\triangle}\varphi(x)\widehat{D}^{\triangle}\varphi(x)^*}\, d\mathscr{H}^{\nu}(x) = \int\limits_{\widetilde{\mathbb{G}}} d\mathscr{H}^{\widetilde{\nu}}(t) \int\limits_{\varphi^{-1}(t)\cap U} d\mathscr{H}^{\mu}(u).$$

Здесь $\widehat{D}^{\triangle}\varphi(x)$ — дифференциал φ субриманова типа, ν — хаусдорфова размерность $\mathbb{G}$ относительно d_2, а $\widetilde{\nu}$ — хаусдорфова размерность $\widetilde{\mathbb{G}}$ относительно квазиметрики $\widetilde{d}_2$ на ней, определенной по аналогии с d_2.

Подчеркнем, что, в отличие от контактных отображений, для неконтактных значение μ не совпадает с разностью $\nu - \widetilde{\nu}$. Кроме того, автором также исследованы классы неконтактных отображений, но для случая, когда размерность образа больше размерности прообраза. Получен следующий результат (приведем формулировку для модельного случая).

Теорема 5. *Для отображений-графиков, принимающих значения на группе Карно, справедлива формула площади*

$$\int\limits_{\Omega} \prod_{j=1}^{M} \sqrt{\det\left(E_{\dim V_j} + (\widehat{D}\varphi)^{*}_{\widetilde{V}_j, V_j}(x)(\widehat{D}\varphi)_{\widetilde{V}_j, V_j}(x)\right)}\, d\mathscr{H}^{\nu}(x) = \int\limits_{\varphi_{\Gamma}(\Omega)} d\mathscr{H}^{\nu}_{\Gamma}(y),$$

где $E_{\dim V_j}$ — единичная матрица размерности $\dim V_j$, $j = 1, \ldots, M$.

Литература

1. Карманова М. Б. Формулы площади для классов гёльдеровых отображений групп Карно // Сиб. мат. журн. – 2017. – Т. 58. – № 5. – С. 1056–1079.

2. Карманова М. Б. Субримановы свойства множеств уровня неконтактных отображений групп Гейзенберга // Мат. труды. – 2022. – Т. 25. – № 2. – С. 107–125.

3. Franchi B., Serapioni R., Serra Cassano F. Rectifiability and perimeter in the Heisenberg group // Math. Ann. – 2001. – V. 321. – P. 479–531.

4. Басалаев С. Г. Одномерные поверхности уровня hc-дифференцируемых отображений пространств Карно — Каратеодори // Вестн. НГУ. – 2013. – Т. 13. – № 4. – С. 16–36.

5. Kozhevnikov A. Propriétés métriques des ensembles de niveau des applications différentiables sur les groupes de Carnot. Géométrie métrique. Université Paris Sud – Paris XI, 2015.

6. Franchi B., Serapioni R. Intrinsic Lipschitz graphs within Carnot groups // Journal of Geometric Analysis. – 2016. – V. 26. – № 3. – P. 1946–1994.

7. Карманова М. О локальных метрических характеристиках множеств уровня C^1_H- отображений многообразий Карно // Сиб. мат. журн. – 2019. – Т. 60. – № 6. – С. 1291–1309.

8. Karmanova, M., Vodopyanov, S. A Coarea Formula for Smooth Contact Mappings of Carnot–Caratheodory Spaces // Acta Applicandae Mathematicae. – 2013. – V. 128. – № 1. – P. 67–111.

9. Карманова М. Множества уровня классов отображений двуступенчатых групп Карно в неголономной интерпретации // Сиб. мат. журн. – 2019. – Т. 60. – № 2. – P. 391–400.

10. Folland G. B., Stein E. M. Hardy spaces on homogeneous groups // Princeton : Princeton Univ. Press, 1982.

11. Pansu P. Métriques de Carnot–Carathéodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang 1 // Ann. Math. – 1989. – V. 129. – P. 1–60.

12. Vodopyanov S. Geometry of Carnot–Carathéodory Spaces and Differentiability of Mappings // The Interaction of Analysis and Geometry. Contemporary Mathematics. Providence, RI : Amer. Math. Soc. – 2007. – V. 424. – P. 247–301.

SUB-RIEMANNIAN PROPERTIES OF CLASSES OF NON-CONTACT MAPPINGS

M. Karmanova

We derive metric sub-Riemannian properties of level sets of non-contact mappings defined on a Carnot group of an arbitrary depth and taking values on a two-step Carnot group. These results are used to derive a sub-Riemannian coarea formula of a new type.

Keywords: non-contact mapping, Carnot group, level set, coarea formula.

УДК 517.54

СЕМЕЙСТВО ОТОБРАЖЕНИЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ НА ПОЛОСУ С РАЗРЕЗОМ, ВЫХОДЯЩИМ ИЗ БЕСКОНЕЧНОСТИ

М. Кармуши[1]

1 *maherkarmoushi1996@gmail.com*; Томский государственный университет.

Строится конформное отображение верхней полуплоскости на горизонтальную полосу с горизонтальным разрезом переменной длины, выходящим из бесконечно удаленной точки. Записано уравнение Левнера для такого семейства отображений.

Ключевые слова: конформное отображение, интеграл Кристоффеля–Шварца, уравнение Левнера.

В последнее время изучается управляющая функция в уравнении Левнера, генерирующая разрез в односвязной области, выходящий под нулевым углом к границе [1]–[4].

Теорема. *Семейство конформных отображений f верхней полуплоскости на полосу с разрезом $\Delta(t) = \{w : 0 < Im\, w < H\} \backslash \{w : Re\, w > t, Im\, w = h\}$, $-\infty < t < +\infty$, можно записать в виде*

$$f(z,t) = -\frac{1}{\pi}\left(h \ln\left(b(t) - z\right) + (H-h)\ln\left(a(t) - z\right)\right),$$

где

$$b(t) = -Qe^{-t\frac{\pi}{H}}, \quad a(t) = Q\frac{h}{H-h}e^{-t\frac{\pi}{H}}, \quad Q = \left(\frac{H}{h} - 1\right)^{\frac{h}{H}}.$$

Семейство f удовлетворяет дифференциальному уравнению Левнера

$$\frac{\partial f(z,\tau)}{\partial \tau} + \frac{2}{z - \mu(\tau)}\frac{\partial f(z,\tau)}{\partial z} = 0,$$

с начальным условием $f(z,0) = -\dfrac{H}{\pi}\ln(-z)$ и управляющей функцией

$$\mu(\tau) = 2\frac{2h - H}{\sqrt{h(H-h)}}\sqrt{\tau}, \quad \tau = \frac{1}{4}\left(\frac{H}{h} - 1\right)^{\frac{2h}{H}-1} e^{-2t\frac{\pi}{H}}.$$

В докладе будет рассматрен более общий случай, а именно, семейство отображений верхней полуплоскости на двуугольник Δ с разрезом по дуге окружности, выходящим из одной из вершин двуугольника Δ под нулевым углом к границе.

Литература

1. Lau K.-S., Wu H.-H. *On tangential slit solution of the Loewner equation* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2016. – №41. – P. 681–691.

2. Prokhorov D., Vasil'ev A. *Singular and tangent slit solutions to the Lowner equation* // Analysis and Mathematical Physics, Trends Math., Birkhauser. – 2009. – P. 455–463.

3. Прохоров Д.В., Самсонова К.А. *Интегралы уравнения Левнера со степенной управляющей функцией* // Изв. Сарат. ун-та Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2013. – V. 13. – №4(2). – С. 98–108.

4. Wu H.-H., Jiang Y.-P., Dong X.-H. *Perturbation of the tangential slit by conformal maps* // J. Math. Anal. Appl. – 2018. – V. 464. – №2. – P. 1107–1118.

A FAMILY OF MAPPINGS FROM THE HALF-PLANE ONTO A STRIP WITH A CUT FROM INFINITY POINT

M. Karmoushi

We describe a family of conformal mapping of the upper half-plane onto a horizontal strip with a horizontal cut of variable length coming from infinity. We write the Loewner equation for such family of mappings.

Keywords: conformal mapping, Schwarz–Christoffel integral, Loewner equation.

UDC 517.544

ANALYTIC SOLUTION TO THE LAPLACE-POISSON EQUATION FOR STRACK'S POTENTIAL MODELING TRANSPIRATIVE DRAWDOWN, DECONTAMINATION OF GROUNDWATER AND CARBON SEQUESTRATION BY RECTANGULAR-SHAPED URBAN GREENERY ZONE

A. R. Kacimov[1]

1 *anvar@squ.edu.om*; Sultan Qaboos University.

Analytical solutions to the problems of two-dimensional planar seepage flow in an unconfined aquifer to a transpiring city park are derived. Conformal mappings and conjugation of the Laplace and Poisson equations are used.

Keywords: Dirichlet's boundary-value problems for conjugated Laplace's-Poisson's equations, conformal mappings, travel time along flow paths and discharge streamlines, phreatic flow in urban aquifer.

Groundwater flow in an unconfined aquifer is induced by a strip of urban greenery (e.g. side-road vegetation), which is cultivated and generates a "distributed sink" acting on the aquifer and vadose zone ([1]). The ecohydrological action of transpiring phreatophytes of the strip causes a drawdown of the aquifer water table (free surface). Mathematically the problem is reduced to Laplace's equation for the piezometric head outside the strip and Poisson's equation in the strip interior, with conjugation ([2]) of the head and normal component of the Darcian flux along the rectangular contour of the strip. In the exterior zone, the Schwarz-Christoffel formula maps conformally the physical domain (an infinite pentagon) onto a half-strip in the complex potential plane. In the interior zone,

the Saint-Venant series expansions are used. The travel time of tracer particles along the streamlines in both zones are found. Porosity, hydraulic conductivity of the aquifer, transpiration rate and piezometric data in a remote observational well are given. Implications for ecohydrology of urban vegetation in the Gulf countries (arid environments) and Russian megalopolises (temperate climates) are discussed. Specifically, objective functions, involving advective groundwater contamination and its attenuation, CO2 sequestration by the park and O2 production, dewatering of waterlogged urban infrastructure, water savings by no irrigation of the vegetation, air-moistening in the park and its vicinity, among others, are introduced and computed.

This work was supported by the Russian Scientific Foundation, interdisciplinary project no. 23-64-10002 and by the grant IG/AGR/SWAE/22/02, Sultan Qaboos University.

References

1. *Strack, O.D.* Analytical Groundwater Mechanics. –Cambridge University Press, 2017.

2. *Strack, O.D.* Using Wirtinger calculus and holomorphic matching to obtain the discharge potential for an elliptical pond. 2 // Water Resources Research. – 2009. – V. 45. – №1.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА-ПУАССОНА ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА СТРАКА, МОДЕЛИРУЮЩЕГО ТРАНСПИРАЦИОННОЕ ВОДОПОНИЖЕНИЕ, ОЧИСТКУ ГРУНТОВЫХ ВОД И СЕКВЕСТРИРОВАНИЕ УГЛЕРОДА В ГОРОДСКОЙ ЗОНЕ ОЗЕЛЕНЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ

А. Р. Касимов

Построены аналитические решения задач двумерной плановой фильтрации в безнапорном пласте к транспирирующему городскому парку. Использованы конформные отображения и сопряжение уравнений Лапласа и Пуассона.

Ключевые слова: краевая задача Дирихле для сопряженных уравнений Лапласа и Пуассона; конформные отображения; время миграции вдоль траекторий; фильтрация в водоносном пласте.

UDC 517.544

ANALYTICAL AND NUMERICAL MODELING OF SEEPAGE IN DOMAINS WITH A FREE BOUNDARY, TILTED BEDROCK AND SEEPAGE FACE: THE PAVLOVSKII LEGACY REVISITED

A. R. Kacimov[1], Yu. V. Obnosov[2]

1 *anvar@squ.edu.om*; Sultan Qaboos University.
2 *yobnosov@kpfu.ru*; Kazan Federal University.

Saturated and saturated-unsaturated Darcian flows through a natural slope and into a tailwater of an earth dam is studied using three models. Analytical solutions are written for two-dimensional seepage with a free surface and one-dimensional flow approximated by a hydraulic model. Calculations on the base of the HYDRUS2D package, which was used to solve mixed boundary value problems for the two-dimensional Richards-Richardson equation, match well the analytical results.

Keywords: conformal mapping of a curvilinear triangle, hodograph domain, Hilbert

boundary value problem for two holomorphic functions, Dupuit-Forchheimer model, modeling of saturated-unsaturated seepage by HYDRUS2D.

The “hydrodynamic” Polubarinova-Kochina ([1]) 2-D model for Darcian seepage in a vertical plane is used for steady, phreatic flows in wedge-shaped aquifers subtended by a tilted bedrock and discharged through a hillslope seepage face. The theory of holomorphic functions is implemented for obtaining an exact solution to the Laplace equation, which governs the scalar field of piezometric head in a domain with a tilted bedrock (streamline), free boundary (another streamline) and exfiltrating tilted slope (seepage face segment). The curvilinear triangle in the hodograph domain is conformally mapped onto a reference half-plane, where the Hilbert problem is solved for two holomorphic functions similarly to the classical “dam problem” ([1]), [2]). Free boundaries and sizes of seepage faces are found for given flow rates of the incident flows which are transforming for “normal” regimes uphill to essentially 2-D flows tapering downhills. The approximate (Dupuit-Forchheimer) water table is also found with the help of the “hydraulic” model ([3]). A nonlinear ODE with respect to the locus of the phreatic line is exactly solved, with a front indicating the tip of the saturated zone. This tip is an artefact of the 1-D model and, therefore, the approximate uphill water table is conjugated with a saturated triangle where the exact 1-D solution to the Laplace equation gives a constant Darcian velocity as a function of the angles of the downhill soil wedge. A FEM numerical (HYDRUS-2D) model solves a boundary value problem to the Richards-Richardson nonlinear parabolic PDE, with the same wedge-shaped discharge zone as in the exact analytical model. The distributions of the pressure head, volumetric moisture content, isotachs, vector-fields of Darcian velocity and other characteristics of saturated-unsaturated seepage are found and cross-compared by HYDRUS and analytical models. Stability of exfiltrating zones near tailwaters of earth dams and hillslopes prone to landslides is assessed. Comparisons of the evaluated hydraulic gradients in the slope with the critical limit and evaluations of the Riesenkampf vector-field of the “force function” are done.

This work was supported by the Russian Scientific Foundation, interdisciplinary project no. 23-64-10002 and by the grant IG/AGR/SWAE/22/02, Sultan Qaboos University.

References

1. *Polubarinova-Kochina, P.Ya.* Theory of Ground Water Movement. – Princeton University Press, Princeton, 1962.

2. *Crank, J.* Free and Moving Boundary Problems. – Clarendon Press, Oxford, 1984.

3. *Pavlovskii, N.N.* Nonuniform Groundwater Motion. – Gostekhizdat, Moscow, 1930.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ В ОБЛАСТЯХ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ, НАКЛОННЫМ ВОДОУПОРОМ И УЧАСТКОМ ВЫСАЧИВАНИЯ: ВОЗВРАТ К НАСЛЕДИЮ ПАВЛОВСКОГО

А. Р. Касимов, Ю. В. Обносов

Насыщенная и насыщенно-ненасыщенная фильтрация в откосе естественного склона и на

участке высачивания земляной плотины изучена с помощь трех моделей. Аналитические решения выписаны для двумерной фильтрации со свободной поверхностью и одномерного течения в рамках гидравлической модели. Расчеты с использованием пакета HYDRUS2D, на котором решались смешанные краевые задачи для двумерного уравнения Ричардса-Ричардсона, хорошо согласуются с аналитическими решениями.

Ключевые слова: конформное отображение криволинейного треугольника, область годографа, краевая задача Гильберта для двух голоморфных функций, модель Дюпюи-Форхгеймера, моделирование насыщенно-ненасыщенной фильтрации на пакете HYDRUS2D.

УДК 517.962.8

О НАКОПЛЕНИИ ОШИБОК ПРИ ЧИСЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СТАБИЛИЗАЦИИ СВЯЗЕЙ

И. Е. Каспирович[1]

1 *kaspirovich-ie@rudn.ru*; Российский университет дружбы народов.

При численном интегрировании систем дифференциальных уравнений со связями малые отклонения в начальных данных способны вызвать неустойчивость численного решения. Для возвращения решения в невозмущенное состояние Й. Баумгарте предложил метод стабилизации связей. В данной работе приводится исследование зависимости разности решения, полученного путем численного интегрирования методом Эйлера первого порядка, и реального решения с учетом стабилизации связей.

Ключевые слова: численное интегрирование, метод Эйлера, стабилизация связей.

1. Введение

При решении задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x} = X(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ со связями $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, $m \leqslant n$ возможны малые отклонения в задании начальных данных. В начальный момент времени ввиду отклонений вектор состояния $x(t_0)$ не удовлетворяет начальным данным: $f(x(t_0)) \neq 0$. Для того, чтобы ограничить величину отклонения от уравнений связей необходимо ввести управляющую силу. Для этого в работе рассматривается метод стабилизации связей Баумгарте [1], согласно которому при разрешении системы дифференциально–алгебраических уравнений уравнения связей замещаются возмущенными: $\dot{f} = F(f, x, t)$, где функция F выбирается в виде произвольной однородной функции по связям f.

Данный метод применим при использовании численных методов интегрирования. На каждом шаге разностной схемы возможны отклонения от уравнений связей. Ввиду огромного количества шагов данная величина неизбежно накапливается. Для ограничения величины накопления используется метод стабилизации Баумгарте.

2. Постановка задачи и краткое ее решение

Для решения системы $\dot{x} = X(x)$ воспользуемся разностной схемой Эйлера:

$$x_{\alpha+1} = x_\alpha + \tau X(x_\alpha),$$

где τ – шаг интегрирования, индекс в скобках – значения переменной в соответствующем узле. Численное интегрирование проводилось с учетом уравнения возмущенных связей $\dot{f} = F(f, x, t)$.

Реальное решение обозначим $\tilde{x}(t)$. Рассмотрим разность реального решения и численного: $\Delta_\alpha = \tilde{x}(t_\alpha) - x_\alpha$. Используя известный алгоритм [2], модуль разности можно оценить следующим соотношением:

$$|\Delta_\alpha| \leqslant |\Delta_1| \left| \exp(t_k - t_0) \frac{\partial X}{\partial x}(x_\xi, t_\xi) \right| + R \frac{\left| \exp(t_k - t_0) \frac{\partial X}{\partial x}(x_\xi, t_\xi) \right| - 1}{\left| \frac{\partial X}{\partial x}(x_\xi, t_\xi) \right|},$$

где t_k – конечное время интегрирования, $x_\xi \in [x_\alpha, \tilde{x}(t_\alpha)]$, модуль вектора или матрицы подразумевает ее максимальный модуль компоненты, R – выражение, связанное со стабилизацией связей и функции F.

Из данного соотношения следует, что максимально возможная ошибка экспоненциально зависит от длины отрезка, на котором проходит интегрирование. Также второе слагаемое данного соотношения содержит стабилизационный член R, связанный с уравнениями возмущенных связей. Поэтому изменение величин параметров возмущений влияет на максимальную ошибку отклонений при численном интегрировании.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и г. Москва № 23-21-10065, https://rscf.ru/project/23-21-10065/.

Литература

1. Baumgarte J. *Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems* // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1972. – Vol. 1. – № 1. – P. 1–16.

2. Kendall A., *Numerical Solutions of Ordinary Differenetial equations.* – John Wiley and Sons, 2009. – 261 p.

ON THE ACCUMULATION OF ERRORS IN THE NUMERICAL INTEGRATION OF SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS AND CONSTRAINT STABILIZATION

I. E. Kaspirovich

During numerically integration of systems of differential equations with constraints, small deviations in the initial conditions can cause instability of the numerical solution. To return the solution to the undisturbed state, J. Baumgarte proposed a method of constraint stabilization. In this paper, we study the dependence of the difference between the solution obtained by numerical integration by the first-order Euler method and the real solution, taking into account the stabilization of constraint.

Keywords: numerical integration, Euler's method, constraint stabilization.

УДК 517.982

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ТЕОРЕМА МАРЦИНКЕВИЧА И КАСАТЕЛЬНОЕ ГРАНИЧНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ ТИПА ХАРДИ

И. Н. Катковская[1], В. Г. Кротов[2]

1 *vgkrotov@mail.ru*; Международный государственный экологический институт им. А.Д. Сахарова БГУ.

2 *krotov@bsu.by*; Белорусский государственный университет.

Хорошо известно, что функции из классов Харди почти всюду на границе имеют предельные значения. Например, в случае единичного круга это некасательные пределы. Некасательные области оптимальны и не могут быть заменены какими-либо касательными областями.

В рамках некоторой абстрактной версии классов типа Харди мы изучаем вопрос о существовании предельных значений, учитывающих все значения функции из малых окрестностей точек на границе.

Будут описаны также средства, использованные для решения этой задачи: модификация интерполяционной теоремы Марцинкевича для пространств типа Харди и обобщенные неравенства Харди–Литтлвуда.

Ключевые слова: касательное граничное поведение, пространства типа Харди, интерполяционная теорема Марцинкевича.

Пусть (X, d, μ) — множество с квазиметрикой d (неравенство треугольника заменено условием $\exists K_1 \geq 1 \quad \forall x, y, z \in X \quad d(x,z) \leq K_1[d(x,y) + d(y,z)]$); μ — σ-конечная борелевская мера на X, причем мера каждого шара

$$B(x,t) := \{y \in X : d(x,y) < t\}, \quad x \in X,\ t > 0,$$

конечна и положительна. Произведение $\mathbf{X} := X \times I$, где $I = (0, t_0)$, $0 < t_0 \leq +\infty$, снабдим мерой-произведением $\mu \times l_1$ [1, §3.3], где l_1 — одномерная мера Лебега на I.

Определим области

$$D(x) := \{(y,t) \in \mathbf{X} : d(x,y) < t\},\ x \in X,$$

подхода к точкам $x \in X$ «границы» $\mathbf{X}$ и для функции $u : \mathbf{X} \to \mathbb{C}$ введем максимальную функцию

$$\mathcal{N}u(x) := \sup\{|u(y,t)| : (y,t) \in D(x)\}.$$

Обозначим $\mathcal{H}^0(\mathbf{X})$ — множество всех измеримых функций (эквивалентные функции не отождествляются) $u : \mathbf{X} \to \mathbb{C}$, для которых максимальная функция $\mathcal{N}u$ конечна μ-почти всюду.

Далее для $0 < p \leq \infty$ введем классы $\mathcal{H}^p(\mathbf{X})$, состоящие из функций $u \in \mathcal{H}^0(\mathbf{X})$, для которых конечна величина

$$\|u\|_{\mathcal{H}^p(\mathbf{X})} := \begin{cases} \|\mathcal{N}u\|_{L^p(X)}, & 0 < p < \infty, \\ \sup\{|u(x,t)| : (x,t) \in \mathbf{X}\}, & p = \infty. \end{cases}$$

Пусть еще $\mathcal{H}^p_0(\mathbf{X})$ — замыкание по квазинорме пространства $\mathcal{H}^p(\mathbf{X})$ класса функций, непрерывных на $X \times [0, t_0)$ и принадлежащих $\mathcal{H}^p(\mathbf{X})$.

Впервые классы $\mathscr{H}_0^p(\mathbf{X})$ изучались в [2] при $\mathbf{X} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$, а в общем случае — в [3].

Точно так же, как в [3, лемма 2.5] доказывается, что для каждой функции $u \in \mathscr{H}_0^p(\mathbf{X})$ для μ-почти всех $x \in X$ существует $D(x) - \lim u$, который мы обозначим $\widetilde{u}(x)$.

При конкретном выборе (X, d, μ) и I классы $\mathscr{H}^p(\mathbf{X})$ и $\mathscr{H}_0^p(\mathbf{X})$ являются расширениями соответствующих классов Харди H^p.

Введем «окрестности» точки $x \in X$

$$\mathscr{D}(x, t, h) := B(x, h) \times (0, t) =$$

$$= \{(y, s) \in \mathbf{X} \colon d(x, y) < h,\ 0 < s < t\}, \quad x \in X,\ 0 < t, h < t_0,$$

и с помощью семейства мер

$$\nu_\alpha(A) := \alpha \int\limits_0^{t_0} t^{\alpha-1} \int\limits_X \chi_A(y, t)\, d\mu(y)\, dt, \quad A \subset \mathbf{X},\ \alpha > 0,$$

определим максимальные операторы

$$\mathscr{M}_\alpha^q u(x) := \sup \left(\frac{1}{\nu_\alpha(\mathscr{D}(x, t, h))} \int\limits_{\mathscr{D}(x,t,h)} |u|^q d\nu_\alpha \right)^{1/q},$$

где точная верхняя грань берется по всем $0 < h \le 1$ и $0 < t \le \min\{1, t_0\}$.

Говорят, что мера μ удовлетворяет условию удвоения, если существует число $K_2 = K_2(\mu) \ge 1$, для которого выполнены неравенства

$$\mu(B(x, 2r)) \le K_2 \mu(B(x, r)), \quad x \in X,\ r > 0. \tag{1}$$

С помощью итераций легко показать, что при условии (1) для некоторого $n > 0$

$$\mu(B(x, R)) \le K_2 \left(\frac{R}{r}\right)^n \mu(B(x, r)), \quad x \in X,\ 0 < r < R. \tag{2}$$

Можно взять $n = \log_2 K_2$.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие удвоения* (1) *и при некоторых* $K_3 > 0$ *и* $n > 0$

$$r^n \le K_3 \mu(B(x, r)), \quad x \in X,\ r \in I, \tag{3}$$

$0 < p < q < \infty$, $\alpha := n(q/p - 1)$.

Тогда существует такая постоянная $C_1 = C_1(p, q, n, K_2, K_3) > 0$, *что для любых* $u \in \mathscr{H}^p(\mathbf{X})$ *и* $\lambda > 0$ *выполнено неравенство*

$$\mu(\{\mathscr{M}_\alpha^q u > \lambda\}) \le C_1 \left(\frac{1}{\lambda} \|u\|_{\mathscr{H}^p(X)}\right)^q.$$

По поводу условия (3) в теореме 1 отметим следующее. Если пространство X ограничено, то при условии удвоения (1) при некотором $n > 0$ выполнено (3) — это вытекает из (2). Однако (3) из условия удвоения, вообще говоря, не следует в случае неограниченного X.

Теорема 2. *При условиях теоремы 1 для любой функции $u \in \mathscr{H}_0^p(\mathbf{X})$ для μ-почти всех $x \in X$ справедливо соотношение*

$$\lim_{t,h\to 0} \frac{1}{\nu_\alpha(\mathscr{D}(x,t,h))} \int\limits_{\mathscr{D}(x,t,h)} |u - \widetilde{u}(x)|^q d\nu_\alpha = 0.$$

Теорема 2 получается из теоремы 1 стандартным способом. Опишем теперь средства, с помощью которых доказывается теорема 1.

Введем обозначение

$$M_p(t,u) := \begin{cases} \left(\int\limits_X |u(y,t)|^p \, d\mu(y)\right)^{1/p}, & 0 < p < \infty, \\ \sup_{x\in X} |u(x,t)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Следующая теорема является обобщением неравенства Харди–Литтлвуда [4, теорема 31] для аналитических функций из классов Харди H^p в единичном круге из $\mathbb{C}$.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие удвоения* (1) *и при некоторых $K_3 > 0$ и $n > 0$ мера μ удовлетворяет условию* (3), *$0 < p < q \le \infty$ и $p \le l$. Тогда существует такая постоянная $C_2 = C_2(p,q,n,l,K_2,K_3) > 0$, что для любой функции $u \in \mathscr{H}^p(\mathbf{X})$ справедливы неравенства*

$$\left(\int\limits_0^{t_0} t^{nl(1/p-1/q)-1} M_q^l(t,u)\, dt\right)^{1/l} \le C_2 \|\mathscr{N} u\|_{L^p(X)}.$$

Теорема 3 опирается на следующий аналог диагонального варианта интерполяционной теоремы Марцинкевича (см., например, [2, теорема 1.3.2]) для классов $\mathscr{H}^p(\mathbf{X})$.

Оператор T, заданный на некотором подмножестве из $\mathscr{H}^0(\mathbf{X})$, со значениями в $\mathscr{H}^0(\mathbf{X})$, назовем квазисубаддитивным, если существует такое $K_4 > 0$, что выполнено поточечное неравенство $|T(u+v)| \le K_4(|Tu| + |Tv|)$.

Пусть (Y,ν) — множество с σ-конечной мерой ν. Введем слабую L^p-квазинорму

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(Y)} := \begin{cases} \sup\limits_{\lambda>0} \lambda \nu(\{|f| > \lambda\})^{1/p}, & 0 < p < \infty, \\ \|f\|_{L^\infty(Y)}, & p = \infty. \end{cases}$$

Теорема 4. *Пусть $0 < p_0 \ne p_1 \le \infty$ и $T : \mathscr{H}^{p_0}(\mathbf{X}) + \mathscr{H}^{p_1}(\mathbf{X}) \to L^0(Y)$ — квазисубаддитивный оператор, удовлетворяющий условиям: существуют такие положительные постоянные M_0 и M_1, что выполнены неравенства*

$$\|Tu\|_{L^{p_0,\infty}(Y)} \le M_0 \|u\|_{\mathscr{H}^{p_0}\mathbf{X})}, \quad u \in \mathscr{H}^{p_0}(\mathbf{X}),$$

$$\|Tu\|_{L^{p_1,\infty}(Y)} \le M_1 \|u\|_{\mathscr{H}^{p_1}\mathbf{X})}, \quad u \in \mathscr{H}^{p_1}(\mathbf{X}).$$

Если $\theta \in (0,1)$ и

$$\frac{1}{p} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1},$$

то существует такая постоянная $C_3 = C_3(p_0, p_1, \theta, K_4)$, *что*

$$\|Tu\|_{L^p(Y)} \le C_3 M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|u\|_{\mathscr{H}^p(\mathbf{X})}, \quad u \in \mathscr{H}^p(\mathbf{X}).$$

Литература

1. Богачев В.И. *Основы теории меры, Т. 1.* – Москва–Ижевск: РХД, 2021. – 584 с.

2. Coifman R.R., Meyer Y., Stein E.M. *Some new function spaces and their applications in harmonic analysis* // J. Funct. Anal. – 1985. – V. 62, № 2. – P. 304–335.

3. Кротов В.Г. *О граничном поведении функций из пространств типа Харди.* – Известия АН СССР. Сер. Матем. – 1990. – Т. 54, № 5. – С. 957–974.

4. Hardy G.H., Littlewood J.E. *Some properties of fractional integrals. II* // Math. Zeit. – 1932. – V. 34, № 2. – P. 403–439.

5. Grafakos, L. *Classical Fourier Analysis, Graduate Texts in Mathematics, № 249.* – New York: Springer; 3rd ed, 2014. – 655 p.

MARCINKIEWICZ INTERPOLATION THEOREM AND
TANGENTIAL BOUNDARY BEHAVIOR OF FUNCTIONS FROM HARDY-TYPE CLASSES

I. N. Katkovskaya, V. G. Krotov

It is well known that functions from Hardy classes have limit values almost everywhere on the boundary. For example, in the case of a unit circle, these are nontangent limits. Nontangent domains are optimal and cannot be replaced by any tangent domains.

Within the framework of some abstract version of Hardy-type classes, we study the question of the existence of limit values that take into account all values of a function from small neighborhoods of points on the boundary.

The means used to solve the problem will also be described: a modification of the Marcinkiewicz interpolation theorem for spaces of Hardy type and generalized Hardy–Littlewood inequalities.

Keywords: tangential boundary behavior, Hardy-type spaces, Marcinkiewicz interpolation theorem

УДК 514.822

ОЦЕНКИ В РАЗНЫХ МЕТРИКАХ В ТЕОРЕМЕ О КОРОНЕ И В ЗАДАЧЕ ОБ ИДЕАЛАХ В АЛГЕБРЕ ОГРАНИЧЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

С. В. Кисляков[1]

1 *skis@pdmi.ras.ru*; Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

“Задача об идеалах”, упомянутая в заглавии, первоначально ставилась как задача об описании идеала алгебры $H^\infty(\mathbb{D})$, *порождённого данным набором* $f_1, \dots, f_n$ *ограниченных аналитических функций в круге. Условие, когда этот идеал совпадает со всей алгеброй* $H^\infty(\mathbb{D})$, *известно и состоит в том, чтобы сумма модулей функций* f_j *равномерно в круге была отделена от нуля (знаменитая теорема Карлесона о короне). Однако в случае, когда этот идеал – собственный, столь же ясное его описание отсутствует, известны лишь достаточные условия на ограниченную аналитическую функцию* g, *обеспечивающие её принадлежность идеалу.*

После знаменитой работы Т. Вольфа, выполненной в конце 1970-х годов, в эту тематику прочно вошли оценки решений $\{h_j\}$ уравнения $g = \sum f_j h_j$, а с ними и вопрос о метриках, в которых такие оценки возможны. Некоторые варианты: можно пытаться взять функцию g не из $H^\infty(\mathbb{D})$, а из другого класса Харди; "качество" данных f_j (теперь эта последовательность может быть и бесконечной) можно "измерять" не в норме пространства l^1 (поточечная сумма модулей, упомянутая в предыдущем абзаце), а в какой-то другой норме.

В докладе будет приведён обзор результатов по указанной тематике, включая совсем недавние. Общий вид утверждений таков: в большинстве случаев, всегда можно перейти от оценок в какой-нибудь разумной метреке к оценкам в любой другой. В случае теоремы о короне и её аналогов это заявление можно понимать практически буквально, однако в случае аналогов общей задачи об идеалах уже сами по себе формулировки с различными метриками бывают не очевидны.

В доказательствах существенно используются теоремы о неподвижной точке.

Ключевые слова: теорема Карлесона о короне, классы Харди.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, грант № 23-11-00171, https://rscf.ru/project/23-11-00171/

ESTIMATES IN VARIOUS METRICS IN THE CORONA THEOREM AND IN THE PROBLEM OF IDEALS FOR THE ALGEBRA OF BOUNDED ANALYTIC FUNCTIONS IN THE DISK

S. V. Kislyakov

The "problem of ideals" mentioned in the title was originally posed as the problem of describing the ideal of the algebra $H^\infty(\mathbb{D})$ generated by a given set $f_1, \dots, f_n$ of bounded analytic functions in the disk. The condition for this ideal to coincide with the entire algebra $H^\infty(\mathbb{D})$ is known and says that the sum of the modules of the functions f_j should be bounded away from zero uniformly in the disk (the famous Carleson corona theorem). No exhaustive description of the mentioned ideal in the case when it is proper is known, only sufficient conditions are available to guarantee that a given function g, bounded and analytic in the disk, belongs to it.

Starting with the famous paper of T. Wolf, which appeared in the late 1970s, considerable attention has been paid to estimates of solutions $\{h_j\}$ to the equation $g = \sum f_j h_j$, and with them to the question about metrics suitable for such estimates. Some options: first, one can try to take functions g not from $H^\infty(\mathbb{D})$ but from some other Hardy class of analytic functions; second, the "quality" of the data f_j (now this sequence can be infinite) may be "measured" not in the norm of the space l^1 (the pointwise sum of modules mentioned in the previous paragraph), but in some other norm.

The talk will provide an overview of the results on the outlined topics, including the most recent ones. The general nature of the statements is as follows: in most cases, one can pass from estimates in any reasonable metric to estimates in any other. In the case of the corona theorem and its analogs, this claim can be understood almost literally, and in the case of analogs of the general problem of ideals, the statements themselves with various metrics are often not quite obvious.

Fixed point theorems play a prominent role in the proofs.

Keywords: Carleson corona theorem, Hardy classes.

УДК 517.544

ЭФФЕКТИВНАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ГЕЛЬДЕРОВСКИХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

С. Н. Киясов[1]

1 *sergey.kijasov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет.

Получены соотношения, связывающие элементы матрицы-функции третьего порядка, при выполнении которых возможна ее эффективная факторизация.

Ключевые слова: матрица-функция, задача линейного сопряжения, факторизация.

Пусть Γ – простой гладкий замкнутый контур, разбивающий плоскость комплексного переменного на две области D^+ и D^- $(0 \in D^+, \infty \in D^-)$,

$$G(t) = \begin{pmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) & g_{13}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) & g_{23}(t) \\ g_{31}(t) & g_{32}(t) & g_{33}(t) \end{pmatrix}, \ \Delta(t) = \det G(t) \neq 0, \ t \in \Gamma$$

– H-непрерывная на Γ матрица–функция третьего порядка. Однородная задача линейного сопряжения для трехмерного вектора, решение которой в замкнутой форме равносильно возможности эффективной факторизации матрицы-функции задачи, состоит в отыскании кусочно-аналитической вектор–функции $\mathbf{w}(z) = \left(w^1(z), w^2(z), w^3(z)\right)$ конечного порядка на бесконечности с H– непрерывными на Γ предельными значениями $\mathbf{w}^{\pm}(t)$, связанными условием

$$\mathbf{w}^+(t) = G(t)\mathbf{w}^-(t) \tag{1}$$

Определение 1. Пусть $\mathbf{w}(z) = \left(w^1(z), w^2(z), w^3(z)\right)$ – кусочно-мероморфное решение задачи. Будем называть его решением с тройкой $(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))$, если на Γ

$$\frac{w^{1+}(t)}{w^{1-}(t)} = \lambda_1(t), \ \frac{w^{2+}(t)}{w^{2-}(t)} = \lambda_2(t), \ \frac{w^{3+}(t)}{w^{3-}(t)} = \lambda_3(t). \tag{2}$$

Полагается, что компонента тройки λ_k равна нулю, неограничена или является неопределенной, что обозначается $0, \infty, 0/0$, если соответственно $w^{k+}(t) \equiv 0, \ w^{k-}(t) \equiv 0, \ w^{k\pm}(t) \equiv 0; \ k = 1,2,3, \ t \in \Gamma$.

Тройка с компонентами, отличными от $0, \infty, 0/0$, названа невырожденной.

Определение 2 Две невырожденные тройки определенных на Γ функций $(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))$ и $(\tilde{\lambda}_1(t), \tilde{\lambda}_2(t), \tilde{\lambda}_3(t))$ назовем подобными, если их соответствующие компоненты пропорциональны:

$$\frac{\lambda_1(t)}{\tilde{\lambda}_1(t)} = \frac{\lambda_2(t)}{\tilde{\lambda}_2(t)} = \frac{\lambda_3(t)}{\tilde{\lambda}_3(t)}, \quad t \in \Gamma.$$

В предположении существования у задачи линейного сопряжения двух решений с подобными тройками и при выполнении определенных соотношений между элементами матрицы-функции задачи, доказана возможность построения ее общего решения в заданном классе функций, с использованием результатов работы [1].

Так, например, при выполнении условий

$$g_{11}(t) \neq 0,\ g_{22}(t) \neq 0,\ g_{33}(t) \neq 0,\ g_{23}(t) \equiv 0,\ t \in \Gamma,$$

одного из тождеств

$$g_{12}\frac{g_{22}^{+}g_{11}^{-}}{g_{11}^{+}g_{22}^{-}}(P[K]+R)(-Q[K]+R)+g_{13}\frac{g_{22}^{+}g_{11}^{-}}{g_{11}^{+}g_{33}^{-}}(P[K]+R)(-Q[K_1]+R_1)\equiv-\frac{g_{21}}{r},$$
$$g_{12}\frac{g_{33}^{+}g_{11}^{-}}{g_{11}^{+}g_{22}^{-}}(P[K_1]+R_1)(-Q[K]+R)+g_{13}\frac{g_{33}^{+}g_{11}^{-}}{g_{11}^{+}g_{33}^{-}}(P[K_1]+R_1)(-Q[K_1]+R_1)\equiv-\frac{g_{31}}{r}$$

(r – рациональная функция) и условия их совместности

$$g_{21}g_{33}^{+}(P[K_1]+R_1)-g_{31}g_{22}^{+}(P[K]+R)\equiv 0,$$

частное решение задачи линейного сопряжения получим по формулам

$$g_{11}+g_{12}\Phi_1^{-}+g_{13}\Psi_1^{-}=\frac{w^{1+}}{w^{1-}},\ w^{2\pm}=\Phi_1^{\pm}w^{1\pm},\ w^{3\pm}=\Psi_1^{\pm}w^{1\pm},$$

в которых

$$\Phi_1^{+}=\frac{g_{22}^{+}}{g_{11}^{+}}(P[K]+R),\ \Phi_1^{-}=\frac{g_{11}^{-}}{g_{22}^{-}}(-Q[K]+R);$$
$$\Psi_1^{+}=\frac{g_{33}^{+}}{g_{11}^{+}}(P[K_1]+R_1),\ \Psi_1^{-}=\frac{g_{11}^{-}}{g_{33}^{-}}(-Q[K_1]+R_1),$$
$$K=\frac{(r+1)}{r}\frac{g_{21}}{g_{22}^{+}g_{11}^{-}},\ K_1=\frac{(r+1)}{r}\frac{g_{31}}{g_{33}^{+}g_{11}^{-}}+\frac{g_{32}}{g_{33}^{+}g_{22}^{-}}(-Q[K]+R).$$

(R, R_1 – рациональные функции).

Заметим, что требование выполнения одного из приведенных тождеств можно заменить условием существования корня квадратного уравнения

$$\left(g_{12}g_{21}g_{33}+g_{13}g_{22}g_{31}-g_{13}g_{21}g_{32}\right)g_{22}^{+}g_{11}^{-}(P[K]+R)^2+$$
$$\frac{(r+1)}{r}\left(g_{13}g_{21}^2g_{32}-g_{12}g_{13}g_{21}g_{31}-g_{12}g_{21}^2g_{33}\right)(P[K]+R)+\frac{1}{r}g_{21}^2g_{33}g_{11}^{+}g_{22}^{-}=0,$$

мероморфным образом продолжимого в область D^{+}.

Второе решение задачи линейного сопряжения получим по тем же формулам, в которых функции $\Phi_1(z)$, $\Psi_1(z)$ следует заменить на функции $\Phi_2(z) = r(z)\Phi_1(z)$, $\Psi_2(z) = r(z)\Psi_1(z)$.

Литература

1. Киясов С. Н. *Об одном дополнении к общей теории задачи линейного сопряжения для кусочно аналитического вектора* // Сиб. матем. журн. – 2018. – Т. 59. – № 2. – С. 369–377.

EFFECTIVE FACTORIZATION IN SOME CLASSES OF THIRD-ORDER HOLDER MATRIX-FUNCTIONS

S. N. Kiyasov

The relations connecting the elements of the matrix-function of the third order are obtained, under

which its effective factorization is possible.

Keywords: matrix-function, linear conjugation problem, factorization.

УДК 517.54

КОНФОРМНЫЙ МОДУЛЬ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА

И. А. Колесников[1]

1 *ia.kolesnikov@mail.ru*; Региональный научно-образовательный математический центр, Томский государственный университет.

Конформное отображение прямоугольника на четырехугольник с границей, состоящей из отрезков прямых, записано через эллиптические функции. Предлагается способ нахождения внутреннего модуля четырехугольника.

Ключевые слова: конформное отображение, конформный модуль, четырехугольник.

Теорема. *Конформное отображение f прямоугольника $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < p, 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$ на четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$ можно записать в виде*

$$f(z) = c\int_0^z e^{\gamma\zeta} \prod_{k=1}^{4} \left(\vartheta_1\left(\frac{\zeta - a_k}{2p}\pi\right)\right)^{2\alpha_k - 1} d\zeta + A_1,$$

где $a_1 = i$, $a_2 = 0$, $a_3 = p$, $a_4 = p + i$ — прообразы вершин A_1, A_2, A_3, A_4 соответственно, $\alpha_k\pi$ — угол при вершине A_k, $k = 1, 2, 3, 4$, $\gamma = \tau\pi(1 - \alpha_1 - \alpha_4)$, $\tau = \dfrac{i}{p}$, ϑ_1 — первая тэта функция, $\vartheta_1(v) = 2h^{\frac{1}{4}}\sin v - 2h^{\frac{9}{4}}\sin 3v + 2h^{\frac{25}{4}}\sin 5v - \ldots$, $h = e^{i\tau\pi}$, c — масштабирующая константа.

В работе [1] показано, что $p = \dfrac{K\left(\sqrt{1 - r^2}\right)}{2K(r)}$, где $r \in (0, 1)$ удовлетворяет уравнению

$$r^{\alpha_1+\alpha_4-1}{}_2\mathrm{F}_1\left[1, \frac{\alpha_1 + \alpha_4 - 1}{2}; \frac{\alpha_1 + \alpha_4 + 1}{2}; r^2\right] =$$
$$= 4^{1-\alpha_1-\alpha_4}\frac{|A_1A_4|}{|A_2A_3|}\frac{\sin\big((\alpha_1 + \alpha_4 - 1)\pi\big)}{\sin\big(\alpha_3\pi\big)}\frac{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_1 + \alpha_4)\Gamma(\alpha_1 + \alpha_4 - 1)}{\Gamma(\alpha_4)\Gamma(\alpha_1)\Gamma(1 - \alpha_3)},$$

где K — полный эллиптический интеграл первого рода, ${}_2\mathrm{F}_1$ — гипергеометрическая функция Гаусса, Γ — гамма функция, $\dfrac{|A_1A_4|}{|A_2A_3|}$ — отношение длин сторон четырехугольника A_1A_4 и A_2A_3.

Величина p называется конформным модулем четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ [2].

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2023-943).

Литература

1. Колесников И. А. *Interior Modulus of Polygonal Quadrilateral // Lobachevskii J. Math. – 2023. – V. 44. – № 4. – P. 1358–1364*

2. *Ahlfors L. V. Conformal Invariants: Topics in Geometric Function Theory // Am. Math. Soc, V. 371, 2010.*

CONFORMAL MODULUS OF QUADRILATERAL

I. A. Kolesnikov

We write the conformal mapping of a rectangle onto a quadrilateral restricted by four rectilinear segments in terms of elliptic functions. We suggest an approach to computation the interior modulus of a polygonal quadrilateral.

Keywords: conformal mapping, conformal modulus, polygonal quadrilateral.

УДК 517.538.5

СКОРОСТЬ АППРОКСИМАЦИИ В ПРОСТРАНСТВАХ БЕРГМАНА НАИПРОСТЕЙШИМИ ДРОБЯМИ С ПОЛЮСАМИ НА ОКРУЖНОСТИ

М. А. Комаров[1]

1 *kami9@yandex.ru*; Владимирский государственный университет.

Для классических пространств Бергмана $\mathbf{A}^p_\alpha$ в единичном круге обсуждается скорость аппроксимации функций $f \in \mathbf{A}^p_\alpha$ наипростейшими дробями с полюсами на единичной окружности.

Ключевые слова: наипростейшая дробь, аппроксимация, пространство Бергмана.

Наипростейшими дробями (НД) порядка n по предложению Е.П. Долженко принято называть рациональные функции вида

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k}, \qquad z_k \in \mathbb{C}; \quad n = 1, 2, \ldots$$

(логарифмические производные полиномов степени n). Начиная с 60-х годов в научной школе Я. Кореваара исследовались аппроксимации такими дробями, все полюсы которых z_k располагаются на том или ином предписанном множестве в $\mathbb{C}$. Так, из результатов Кореваара следует, что любую аналитическую в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$ функцию f на любом компакте $K \subset D$ можно сколь угодно точно равномерно приблизить наипростейшими дробями с полюсами, лежащими на единичной окружности:

$$g_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k}, \qquad |z_1| = \cdots = |z_n| = 1, \quad |z| < 1; \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

В интегральных пространствах такие аппроксимации стали изучаться по инициативе Ч.К. Чуи, который в 1971 году сформулировал задачу о существовании абсолютной константы $C > 0$ такой, что для любой НД вида (1) интеграл по площади

круга (интерпретируемый как средняя напряжённость гравитационного поля, создаваемого внутри круга n точечными массами, расположенными в точках z_k) допускает оценку

$$\iint_{|z|<1} |g_n(z)|\, dxdy > C > 0 \qquad (z = x + iy). \tag{2}$$

Задача была решена Д. Ньюманом (1972), который доказал оценку (2) с константой $C = \pi/18$. В то же время Чуи (1973) установил, что дроби вида (1) плотны в пространствах Бергмана $\mathbf{A}^1_\alpha$ с $\alpha > 0$; напомним, что пространство $\mathbf{A}^p_\alpha$, $0 < p < \infty$, $-1 < \alpha < \infty$, состоит из аналитических в круге D функций f, для которых

$$\|f\|_{\mathbf{A}^p_\alpha} := \Big(\iint_{|z|<1} |f(z)|^p (1-|z|^2)^\alpha\, dxdy\Big)^{1/p} < \infty.$$

Оценка Ньюмана $\|g_n\|_{\mathbf{A}^1_0} > \pi/18$ показывает неулучшаемость условия Чуи, так что справедлив критерий: *НД* (1) *плотны в пространстве* $\mathbf{A}^1_\alpha$*, если и только если* $\alpha > 0$. Совсем недавно Е.В. Абакумов, А.А. Боричев и К.Ю. Федоровский (2021) установили аналогичный критерий ($\alpha > 1$) для случая пространств $\mathbf{A}^2_\alpha$, а с помощью результатов автора [1], [2] оба критерия обобщаются на все пространства Бергмана: *дроби* (1) *плотны в пространстве* $\mathbf{A}^p_\alpha$*, если и только если*

$$\alpha > p - 1$$

(необходимость здесь получается при помощи оценки типа Ньюмана

$$\|g_n\|_{\mathbf{A}^p_\alpha} > C\, n^{-(\alpha-p+1)/p}, \qquad C = C_{p,\alpha} > 0, \tag{3}$$

где константа C зависит лишь от p и α). Возникает вопрос о скорости приближений.

Наилучшие приближения дробями (1) степени $\le N$ в $\mathbf{A}^p_\alpha$ обозначим

$$\mathscr{R}_N(p,\alpha; f) := \inf_{g_n;\, n\le N} \|g_n - f\|_{\mathbf{A}^p_\alpha}, \qquad N = 1, 2, \ldots.$$

В докладе обсуждается следующая теорема, а также некоторые её обобщения:

Теорема. *Если* $0 \le p - 1 < \alpha < \infty$ *и* $f \in H^p$*, то*

$$\mathscr{R}_n(p,\alpha; f) = O(n^{-(\alpha-p+1)/p}), \qquad n \to \infty. \tag{4}$$

Порядок этой оценки не может быть улучшен за счёт какой угодно дополнительной гладкости функции, что видно из примера $f(z) \equiv 0$ и оценки (3).

Литература

1. Komarov M. A. *A Newman type bound for $L_p[-1,1]$-means of the logarithmic derivative of polynomials having all zeros on the unit circle* // Constructive Approximation (published online 01 February 2023)

2. Комаров М. А., *О скорости аппроксимации в единичном круге функций класса H^1 логарифмическими производными полиномов с корнями на границе круга* // Изв. РАН. Сер. матем. – 2020. – Т. 84. – С. 3–14.

RATE OF APPROXIMATION IN THE BERGMAN SPACES BY SIMPLE PARTIAL FRACTIONS WITH POLES ON THE CIRCLE

M. A. Komarov

For the classical Bergman spaces $\mathbf{A}^p_\alpha$ in the unit disk, we discuss the rate of approximation to $f \in \mathbf{A}^p_\alpha$ by simple partial fractions with all poles on the unit circle.

Keywords: simple partial fraction, approximation, Bergman space.

УДК 517.956.2, 517.929.8

О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА КОНЦАХ НЕКОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

А. Н. Кондрашов[1]

1 *alexander.kondrashov@volsu.ru*; Волгоградский государственный университет, Институт математики и информационных технологий.

Указываются некоторые геометрические условия существования некоторых специальных решений уравнений эллиптического типа на концах некомпактных римановых многообразий. По этим решениям можно сделать вывод об L-параболичности или L-гиперболичности типа конца.

Ключевые слова: некомпактное риманово многообразие, конец многообразия, метод Перрона.

Пусть (M, g) — некомпактное риманово многообразие без края ($\dim M = N$) на котором задан эллиптический оператор

$$L = \Delta + \langle B(x), \nabla \rangle + c(x).$$

Здесь $B(x)$ — векторное поле класса $C(M)$, $c(x) \le 0$, $c(x) \in C(M)$, Δ — оператор Лапласа—Бельтрами в метрике g. Пусть $\rho(x) = \operatorname{dist}(x, x_0)$ — функция расстояния.

Зафиксируем конец $\mathscr{X} \subset M$. Будем обозначать $\Sigma_\tau = \mathscr{X} \cap \{x | \rho(x) = \tau\}$, $\tau \ge \tau_0$. Рассмотрим функции

$$\lambda_+(\tau) = \sup_{\Sigma_\tau}(\langle B(x), \nabla\rho(x)\rangle - H(x)), \quad \lambda_-(\tau) = \inf_{\Sigma_\tau}(\langle B(x), \nabla\rho(x)\rangle - H(x)),$$

$$\mu_+(\tau) = \sup_{\Sigma_\tau} c(x), \quad \mu_-(\tau) = \inf_{\Sigma_\tau} c(x).$$

Здесь $H(x) = -\Delta\rho(x)$. Чтобы обеспечить конечность почти всюду на $[\tau_0, +\infty)$ функций $\lambda_\pm(\tau)$ на ρ накладывается следующее условие (Y).

(Y) *Множество* $P_\infty = \{x \mid \limsup_{y \to x} |H(x)| = +\infty\}$ *имеет линейную меру* 0.

Следующие теоремы дают геометрические условия существования некоторых специальных решений уравнения $Lf = 0$, позволяющих установить тип конца $\mathscr{X}$ [1, 2]).

Теорема 1. *Пусть выполняется условие* (Y), $\rho(x) \in W^{2,p}_{loc}(\mathscr{X})$, $1 \le p \le N$. *Предположим на* $[\tau_0, +\infty)$ *существуют функции* $h(t), g(t) \in C^{(2)}[\tau_0, +\infty)$, *удовлетворяющие условиям*

$$0 < g(t) \le h(t), \quad h'(t) < 0, \quad g'(t) < 0,$$
$$h''(t) + \lambda_-(t)h'(t) + \mu_+(t)h(t) \le 0, \quad g''(t) + \lambda_+(t)g'(t) + \mu_-(t)g(t) \ge 0,$$
$$\lim_{t\to+\infty} h(t) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} g(t) = 0.$$

Тогда на $\mathscr{X}$ *существует решение уравнения* $Lu(x) = 0$, *для которого выполнены условия* $u|_{\partial\mathscr{X}} = 1$, $\lim\limits_{x\in\mathscr{X}, x\to\infty} u = 0$.

Теорема 2. *Пусть* $c(x) \equiv 0$, *выполняется условие* (Y), $\rho(x) \in W^{2,p}_{loc}(\mathscr{X})$, $1 \le p \le N$. *Предположим на* $[\tau_0, +\infty)$ *существуют функции* $h(t), g(t) \in C^{(2)}[\tau_0, +\infty)$, *удовлетворяющие условиям*

$$0 < g(t) \le h(t), \quad h'(t) > 0, \quad g'(t) > 0,$$
$$h''(t) + \lambda_+(t)h'(t) \le 0, \quad g''(t) + \lambda_-(t)g'(t) \ge 0,$$
$$\lim_{t\to+\infty} h(t) = +\infty, \quad \lim_{t\to+\infty} g(t) = +\infty.$$

Тогда на $\mathscr{X}$ *существует решение уравнения* $Lu(x) = 0$, *для которого выполнены условия* $u|_{\partial\mathscr{X}} = 1$, $\lim\limits_{x\in\mathscr{X}, x\to\infty} u = +\infty$.

Данные теоремы получены на основе одной специальной версии установленной нами метода Перрона [3] (см. теоремы 6.11, 6.13, 6.14, лемма 6.12).

Литература

1. Корольков С. А., *Гармонические функции на римановых многообразиях с концами* // Сиб. матем. журн. – 2008. – Т. 49. – № 6. – С. 1319—1332.

2. Миклюков В. М. *Некоторые признаки параболичности и гиперболичности граничных множеств поверхностей* // Изв. РАН. Сер. матем. – 1996. – Т. 60. – № 4. – С. 111—-158.

3. Гилбарг Д. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.* — М.: Наука, 1989. – 464 с.

ON THE EXISTENCE OF SOME SPECIAL SOLUTIONS OF ELLIPTIC EQUATIONS AT THE ENDS OF NON-COMPACT RIEMANNIAN MANIFOLDS

A. N. Kondrashov

Some geometric conditions for the existence of some special solutions of equations of elliptic type at the ends of non-compact Riemannian manifolds are indicated. Based on these solutions, one can conclude that the end-type is L-parabolic or L-hyperbolic.

Keywords: non-compact Riemannian manifold, end of manifold, Perron method.

УДК 517.547.24

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

И. И. Костенко[1]

1 *sandrakoh@mail.ru*; Курский государственный университет.

Рассматривается проблема интерполяции в пространстве мероморфных функций конечного порядка. Получены необходимые и достаточные условия интерполяционности дивизора в терминах канонических произведений и в терминах меры, определяемой узлами интерполяции.

Ключевые слова: мероморфная функция, дивизор, интерполяция, каноническое произведение, мера.

В работе [1] рассматривалась задача интерполяции в пространстве мероморфных функций, рост которых определяется заданной функцией. Мы изучаем интерполяционные проблемы в пространстве мероморфных функций конечного порядка Валирона на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Получаем необходимые и достаточные условия интерполяционности дивизора в терминах канонических произведений и в терминах меры, определяемой узлами интерполяции. Предположим, что $f(z)$ — мероморфная функция на плоскости $\mathbb{C}$, а $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ — фиксированная последовательность комплексных чисел, $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. Через $n(r, z_k, 1/f)$ и $n(r, z_k, f)$ мы обозначаем, соответственно, число нулей и полюсов (с учетом их кратностей) функции f в замкнутом круге $B(z_k, r) = \{z : |z - z_k| \le r\}$. Тогда мы имеем следующее разложение в ряд Лорана в окрестности каждой точки z_k:

$$f(z) = \sum_{j=-n_k}^{\infty} f_{k,j}(z - z_k)^j,\ f_{k,j} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_k)^{j+1}},\ \Gamma_k = \{z : |z - z_k| = \delta_k\}.$$

Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок в смысле Валирона. Обозначим через $\mathbf{M}_\rho$ пространство мероморфных функций f таких, что

$$T(r, f) \le K_f \exp(\rho(r))$$

для некоторой постоянной $K_f > 0$, не зависящей от r и зависящей от f.

Пусть $V = \{z_k, m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — дивизор, т. е. последовательность комплексных чисел $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}_+$, вместе с их кратностями $\{m_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Положим

$$\mathbf{A}_\rho(V) = \left\{ a = \{a_{k,j}\}_{0 \le j < m_k}^{k \in \mathbb{N}} : \sum_{j=0}^{m_k - 1} |a_{k,j}| \le K_a \exp(\rho(|z_k|)) \right\}$$

для некоторой постоянной $K_a > 0$, не зависящей от k и зависящей от a.

Сформулируем проблему интерполяции для функций мероморфных на плоскости: при каких условиях для любой последовательности $a = \{a_{k,j}\} \in \mathbf{A}_\rho(V)$ существует мероморфная функция $f \in \mathbf{M}_\rho$, такая, что для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство:

$$f_{k,j} = \begin{cases} 0, & \text{если } j < -n_k \\ a_{k,j}, & \text{если } -n_k \le j \le m_k - 1? \end{cases}$$

Другими словами, при каких условиях существует мероморфная функция $f \in \mathbf{M}_\rho$, которая имеет заданные коэффициенты Лорана, в частности, $f(z)$ имеет заданную сингулярную часть в полюсах z_k и заданные коэффициенты Тейлора в точках z_k?

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема. *Для того чтобы дивизор $V = \{z_k, m_k\}_{k=1}^{\infty}$ был интерполяционным в пространстве $\mathbf{M}_\rho$, необходимо и достаточно, чтобы его присоединенная функция $E(z)$ удовлетворяла соотношению*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{|z_k|^{\rho(|z_k|)}} \ln \frac{m_k!}{|L^{(m_k)}(z_k)|} < \infty.$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект No. 22-21-00012, https://rscf.ru/project/22-21-00012/).

Литература

1. C. A. Bernstein, B. Q. Li. Interpolating varieties for spaces of meromorphic functions // J. of Geometric Analysis. – 1995. – Vol. 5(1). P. 1-48.

INTERPOLATION IN THE SPACE OF MEROMORPHIC FUNCTIONS OF FINITE ORDER

I. I. Kostenko

The problem of interpolation in the space of meromorphic functions of finite order is considered. Necessary and sufficient conditions in terms of canonical products and in terms of the measure determined by the interpolation nodes for the divisor to be interpolation are obtained.

Keywords: meromorphic function, divisor, interpolation, canonical product, measure.

УДК 517.982

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ТЕОРЕМА МАРЦИНКЕВИЧА-ХАНТА ДЛЯ КЛАССОВ ХАРДИ-ЛОРЕНЦА

В. Г. Кротов[1], М. М. Логиновская[2]

1 *krotov@bsu.by*; Белорусский государственный университет.
2 *loginovskayamm@bsu.by*; Белорусский государственный университет.

Для некоторых классов функций, являющихся расширениями пространств Харди–Лоренца, доказывается интерполяционная теорема Марцинкевича–Ханта.

Ключевые слова: квазисубаддитивный оператор, максимальная функция, интерполяционная теорема Марцинкевича, классы Лоренца.

Пусть (X, d, μ) — множество с квазиметрикой d (неравенство треугольника заменено условием

$$\exists K_d \geq 1 \quad \forall\, x, y, z \in X \quad d(x,z) \leq K_d(d(x,y) + d(y,z))$$

и σ-конечной борелевской мерой μ. Рассмотрим произведение $\mathbf{X} := X \times I$, где $I = (0, t_0)$, $0 < t_0 \leq +\infty$, на котором задана мера-произведение $\mu \times m$ (m — мера Лебега на I).

Рассмотрим «некасательную» область

$$D(x) := \{(y,t) \in \mathbf{X} : d(x,y) < t\},\ x \in X,$$

и для функции $u : \mathbf{X} \to \mathbb{C}$. определим максимальную функцию

$$\mathcal{N}u(x) := \sup\{|u(y,t)| : (y,t) \in D(x)\},\ x \in X.$$

Обозначим $\mathcal{H}^0(\mathbf{X})$ — множество всех измеримых функций $u : \mathbf{X} \to \mathbb{C}$, для которых максимальная функция $\mathcal{N}u$ конечна μ-почти всюду.

Оператор T, заданный на некотором подмножестве из $\mathcal{H}^0(\mathbf{X})$, со значениями в $\mathcal{H}^0(\mathbf{X})$, назовем квазисубаддитивным, если существует такое $K > 0$, что выполнено поточечное неравенство $|T(u+v)| \le K(|Tu| + |Tv|)$.

Пусть $L^{p,q}(X)$ — стандартные пространства Лоренца, $0 < p, q \le \infty$, и $\|\cdot\|_{p,q}$ — обычная квазинорма в $L^{p,q}(X)$, f^* — убывающая перестановка для измеримой функции $f : X \to \mathbb{R}$ [2, п. 1.4].

Следующая теорема является аналогом известной теоремы Марцинкевича–Ханта [1] для классов

$$\mathcal{H}^{p,q}(\mathbf{X}) := \{u \in \mathcal{H}^0(\mathbf{X}) : \mathcal{N}u \in L^{p,q}(X)\},$$

которые являются расширениями тех или иных (при конкретном выборе X и I) классов Харди–Лоренца. Ее доказательство следует схеме работы [1].

Теорема. *Пусть* $0 < p_i,\ q_i,\ p_i',\ q_i' \le \infty$, *где* $i = 0,1$ *и* $p_0 < p_1,\ p_0' \ne p_1'$.

Если T — квазисубаддитивный оператор, удовлетворяющий условиям: существуют числа M_i, $i = 0,1$, со свойствами

$$\|Tu\|_{p_i',q_i'} \le M_i \|\mathcal{N}u\|_{p_i,q_i} \text{ при всех } u \in \mathcal{H}^{p_i,q_i}(\mathbf{X}),\ M_i > 0,\ i = 0,1.$$

Тогда для любого $0 < \theta < 1$ существует такое число $M_\theta > 0$, что при любых $1 \le q \le s$

$$\|Tu\|_{p_\theta',s} \le M_\theta \|\mathcal{N}u\|_{p_\theta,q} \text{ при всех } u \in \mathcal{H}^{p_\theta,q}(\mathbf{X}), \tag{1}$$

где

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{p_\theta'} = \frac{1-\theta}{p_0'} + \frac{\theta}{p_1'},$$

$$M_\theta = O\left(\frac{1}{\theta}\right) \text{ при } \theta \to 0 \text{ и } M_\theta = O\left(\frac{1}{1-\theta}\right) \text{ при } \theta \to 1.$$

Доказательство. Из того, что $L^{p,q}(X) \subset L^{p,s}(X)$ при $0 < q \le s \le \infty$, следует, что нам достаточно доказать (1) при $s = q$. Функцию $u \in \mathcal{H}^0(\mathbf{X})$ представим в виде $u = u_\lambda + u^\lambda$, где $\lambda > 0$ и

$$u^\lambda := \begin{cases} u & \text{на множестве } \{|u| > \lambda\}, \\ 0 & \text{на множестве } \{|u| \le \lambda\}, \end{cases} \qquad u_\lambda := \begin{cases} 0 & \text{на множестве } \{|u| > \lambda\}, \\ u & \text{на множестве } \{|u| \le \lambda\}. \end{cases}$$

Тогда будут выполнены следующие неравенства

$$\mathcal{N}u^{\lambda} \le \begin{cases} \mathcal{N}u & \text{на множестве } \{\mathcal{N}u > \lambda\}, \\ 0 & \text{на множестве } \{\mathcal{N}u \le \lambda\}, \end{cases} \qquad \mathcal{N}u_{\lambda} \le \begin{cases} \lambda & \text{на множестве } \{\mathcal{N}u > \lambda\}, \\ \mathcal{N}u & \text{на множестве } \{\mathcal{N}u \le \lambda\}. \end{cases}$$

Обозначим $p = p_\theta$ и $p' = p'_\theta$. Пусть $\delta > 0$ и $\gamma = \frac{1/p'_0 - 1/p'}{1/p_0 - 1/p} = \frac{1/p' - 1/p'_1}{1/p - 1/p_1}$.

Взяв $\lambda = (\mathcal{N}u)^*(\delta t^{\gamma})$ (δ будет выбрано позже), получаем

$$\begin{cases} (\mathcal{N}u^{\lambda})^*(s) \le (\mathcal{N}u)^*(s), & \text{если } 0 < s \le \delta t^{\gamma}, \\ \mathcal{N}u^{\lambda}(s) = 0, & \text{если } s > \delta t^{\gamma}, \\ (\mathcal{N}u_{\lambda})^*(s) = (\mathcal{N}u)^*(\delta t^{\gamma}), & \text{если } 0 < s \le \delta t^{\gamma}, \\ \mathcal{N}u_{\lambda}(s) \le (\mathcal{N}u)^*(s), & \text{если } s > \delta t^{\gamma}. \end{cases} \tag{2}$$

Пусть $p_1 < \infty$ и $q < \infty$ (оставшиеся случаи, а именно: $p_1 < \infty$, $q = \infty$; $p_1 = q_1 = \infty$, $q < \infty$ и $p_1 = q_1 = \infty$, $q = \infty$, рассматривать не будем в силу простоты их доказательств). Используя неравенство Минковского и очевидное неравенство

$$(T(u+v))^*(t) \le 2K\left((Tu)^*\left(\frac{t}{2}\right) + (Tv)^*\left(\frac{t}{2}\right)\right), \tag{3}$$

имеем

$$\|Tu\|_{p',q} \le 2K\left(\int_0^\infty t^{\frac{q}{p'}}\left((Tu^{\lambda})^*\left(\frac{t}{2}\right) + (Tu_{\lambda})^*\left(\frac{t}{2}\right)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le 2^{1+\frac{1}{p'}}K\Big[\left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p'}}(Tu^{\lambda})^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p'}}(Tu_{\lambda})^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\Big].$$

Из условия теоремы следует, что

$$\|Tu\|_{p'_i,\infty} \le M_i\|\mathcal{N}u\|_{p_i,1}, \text{ где, } i = 0,1,\ p_0 < p_1,\ p'_0 \ne p'_1,$$

тогда

$$\|Tu\|_{p',q} \le 2^{1+\frac{1}{p'}}K\Big[\left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{p'_0}}M_0\|\mathcal{N}u^{\lambda}\|_{p_0,1}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{p'_1}}M_1\|\mathcal{N}u_{\lambda}\|_{p_1,1}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\Big].$$

Используя (2), получаем

$$\|Tu\|_{p',q} \le 2^{1+\frac{1}{p'}}K\Big[M_0\left(\int_0^\infty \left(t^{-(\frac{1}{p'_0}-\frac{1}{p'})}\int_0^{\delta t^{\gamma}} s^{\frac{1}{p_0}-1}(\mathcal{N}u)^*(s)\,ds\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+M_1\left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{p'_1}}\int_{\delta t^{\gamma}}^\infty s^{\frac{1}{p_1}-1}(\mathcal{N}u)^*(s)\,ds\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+M_1\left(\int\limits_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{p_1'}}\int\limits_0^{\delta t^\gamma}s^{\frac{1}{p_1}-1}(\mathcal{N}u)^*(\delta t^\gamma)ds\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg]=2^{1+\frac{1}{p'}}K\left[M_0I_0+M_1I_1+M_1I_2\right].$$

Сделав замену переменной в интеграле I_0, получим

$$I_0=\left[\begin{array}{rcl}\delta t^\gamma&=&z\\ dt&=&\frac{1}{\gamma\delta^{\frac{1}{\gamma}}}\cdot z^{\frac{1}{\gamma}-1}dz\end{array}\right]=\gamma^{-\frac{1}{q}}\delta^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}}\left(\int\limits_0^\infty z^{-q(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p})-1}\left(\int\limits_0^z s^{\frac{1}{p_0}-1}(\mathcal{N}u)^*(s)ds\right)^q dz\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Используя первое неравенство Харди [2, п. 1.2], получаем

$$I_0\le\frac{\gamma^{-\frac{1}{q}}\delta^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}}\left(\int\limits_0^\infty s^{-q(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p})-1}\left(s\cdot s^{\frac{1}{p_0}-1}(\mathcal{N}u)^*(s)\right)^q ds\right)^{\frac{1}{q}}=\frac{\gamma^{-\frac{1}{q}}\delta^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}}\|\mathcal{N}u\|_{p,q}.$$

Аналогично, сделав замену переменной в интеграле I_1 и применив второе неравенство Харди [2, п. 1.2], получим

$$I_1\le\frac{\gamma^{-\frac{1}{q}}\delta^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}\|\mathcal{N}u\|_{p,q}.$$

Сделав замену переменной в интеграле I_2, получим

$$I_2=\left(\int\limits_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{p_1'}}\int\limits_0^{\delta t^\gamma}s^{\frac{1}{p_1}-1}(\mathcal{N}u)^*(\delta t^\gamma)ds\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}=\left[\begin{array}{rcl}\delta t^\gamma&=&z\\ dt&=&\frac{1}{\gamma\delta^{\frac{1}{\gamma}}}\cdot z^{\frac{1}{\gamma}-1}dz\end{array}\right]=$$

$$=\gamma^{-\frac{1}{q}}\delta^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}\left(\int\limits_0^\infty z^{q(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1})-1}\left(\int\limits_0^z s^{\frac{1}{p_1}-1}(\mathcal{N}u)^*(z)ds\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}}=p_1\gamma^{-\frac{1}{q}}\delta^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}\|\mathcal{N}u\|_{p,q}.$$

Таким образом, получаем неравенство

$$\|Tu\|_{p',q}\le 2^{1+\frac{1}{p'}}K\left[M_0I_0+M_1I_1+M_1I_2\right]\le$$

$$\le 2^{1+\frac{1}{p'}}\gamma^{-\frac{1}{q}}K\left[\frac{M_0\delta^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}}+\frac{M_1\delta^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}+p_1\delta^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}M_1\right]\|\mathcal{N}u\|_{p,q}.$$

Осталось минимизировать правую часть по δ.

Литература

1. *Hunt, R. A.* An extension of the Marcinkiewicz interpolation theorem to Lorentz spaces // Bull. Amer. Math. Soc. – 1964. – V. 70, № 2. – P. 803–807.

2. *Grafakos, L.* Classical Fourier Analysis, Graduate Texts in Mathematics № 249 // New York: Springer; 3rd ed. – 2014. – 655 p.

MARCINKIEWICZ–HUNT INTERPOLATION THEOREM FOR HARDY–LORENTZ CLASSES

V. G. Krotov, M. M. Loginovskaya

For some classes of functions, that are extensions of Hardy–Lorentz spaces, the Marcinkiewicz–Hunt interpolation theorem is proved.

Keywords: quasi-subadditive operator, maximal function, Marcinkiewicz interpolation theorem, Lorentz classes.

УДК 517.968.23

ОБ ОДНОЙ ОБОБЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА РИМАНА ДЛЯ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

С. Ю. Курицын[1], К. М. Расулов[2]

1 *kuritsynsergey@icloud.com*; Смоленский государственный университет.
2 *kahrimanr@yandex.ru*; Смоленский государственный университет.

В статье приводится конструктивный алгоритм решение одной из основных обобщенных краевых задач типа Римана для кусочно метааналитических функций второго типа в произвольных односвязных областях с гладкими границами. Установлены необходимые и достаточные условия, при которых решение рассматриваемой задачи сводится к последовательному решению двух невырожденных скалярных обобщенных краевых задач Римана в классах кусочно аналитических функций. Кроме того, получены условия нетеровости исследуемой задачи.

Ключевые слова: метааналитическая функция, обобщенная краевая задача типа Римана, интегральные члены, условия разрешимости, нетеровость.

1. Постановка задачи. Предположим, что T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым гладким контуром $L \in C^2_\mu$, а $T^- = \overline{\mathbb{C}} \setminus \left(T^+ \cup L\right)$.

Рассматривается следующая задача $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ (см. также [1, с. 141], [2]): *требуется найти все исчезающие на бесконечности кусочно метааналитические функции $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$ первого типа, принадлежащие классу $M_2(T^\pm) \cap H^{(1)}(L)$ и удовлетворяющие на L краевым условиям:*

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial x} - G_1(t)\frac{\partial F^-(t)}{\partial x} + \int\limits_L A_1(t,\tau)\frac{\partial F^+(\tau)}{\partial x}d\tau + \int\limits_L B_1(t,\tau)\frac{\partial F^-(\tau)}{\partial x}d\tau = g_1(t), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial y} - G_2(t)\frac{\partial F^-(t)}{\partial y} + \int\limits_L A_2(t,\tau)\frac{\partial F^+(\tau)}{\partial y}d\tau + \int\limits_L B_2(t,\tau)\frac{\partial F^-(\tau)}{\partial y}d\tau = ig_2(t), \qquad (2)$$

где $G_k(t)$, $g_k(t)$ $(k = 1, 2)$ – заданные на L функции класса $H^{(1)}(L)$, причем $G_k(t) \neq 0$ $(k = 1, 2)$, а $A_k(t,\tau)$, $B_k(t,\tau)$ $(k = 1, 2)$ – заданные фредгольмовы ядра, принадлежащие классу $H^{(1)}_*(L \times L)$.

2. Основной результат. Пусть выполняются условия:

$$\frac{G_1(t)}{G_2(t)} \neq -\frac{\lambda(t\bar{t}+m\bar{t}^2)}{2(1+\lambda\bar{t})t^{m+1}}, \qquad \frac{G_2(t)}{G_1(t)} \neq -\frac{\lambda t^{m+1}\bar{t}}{2\left(t^{m+1}+\lambda(t\bar{t}-m\bar{t}^2)\right)}, \qquad t \in L. \tag{3}$$

Далее, основываясь на методах решения обобщенных краевых задач типа Римана для полианалитических функций, изложенных в [1], мы устанавливаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Если выполняются условия* (3)*, то решение задачи* $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ *сводится к последовательному решению невырожденной обобщенной краевой задачи Римана вида*

$$\varphi_1^+(t) - G_{22}(t)\varphi_1^-(t) + \int\limits_L M(t,\tau)\varphi_1^+(\tau)d\tau + \int\limits_L N(t,\tau)\varphi_1^-(\tau)d\tau = g(t) \tag{4}$$

и невырожденной дифференциальной краевой задачи Римана вида

$$\frac{d\varphi_0^+(t)}{dt} + \lambda\varphi_0^+(t) - G_{11}(t)\frac{d\varphi_0^-(t)}{dt} - G_{10}(t)\varphi_0^-(t) + \int\limits_L A_{11}(t,\tau)\frac{d\varphi_0^+(\tau)}{d\tau}d\tau +$$
$$+ \int\limits_L A_{10}(t,\tau)\varphi_0^+(\tau)d\tau + \int\limits_L B_{11}(t,\tau)\frac{d\varphi_0^-(\tau)}{d\tau}d\tau + \int\limits_L B_{10}(t,\tau)\varphi_0^-(\tau)d\tau = Q_0(t) \tag{5}$$

относительно исчезающих на бесконечности кусочно аналитических функций $\varphi_k(z) = \{\varphi_k^+(z),\ \varphi_k^-(z)\}$ $(k = 0,\ 1)$. *Задача* $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ *разрешима тогда и только тогда, когда разрешимы обе вспомогательные краевые задачи* (4) *и* (5).

Кроме того, при выполнении условий (3) краевая задача $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ является нетеровой.

Литература

1. Расулов К. М. *Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения.* – Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. – 344 с.

2. Курицын С. Ю., Расулов К. М., *О решении одной обобщенной задачи типа Римана для метааналитических функций в случае круговых областей* // Известия Смоленского гос. унив. – 2015. – Т. 30. – № 2-1. – С. 195–204.

ON A GENERALIZED BOUNDARY VALUE PROBLEM OF RIEMANN TYPE FOR METAANALYTIC FUNCTIONS

S. Yu. Kuritsyn, K. M. Rasulov

This paper presents a constructive algorithm for solving one of the main generalized boundary value problems of Riemann type for piecewise metaanalytic functions of the second type in arbitrary simply connected domains with smooth boundaries. Necessary and sufficient conditions are established under which the solution of the considering problem is reduced to the sequential solution of two nondegenerate scalar generalized Riemann boundary value problems in classes of piecewise analytic functions. In addition, the conditions for the problem to be Noetherian are obtained.

Keywords: metaanalytic function, generalized boundary value problem of Riemann type, integral terms, solvability conditions, Noetherian property.

UDC 517.984

THE NUMBER AND LOCATION OF EIGENVALUES FOR THE TWO-PARTICLE SCHRÖDINGER OPERATORS ON LATTICES

S. N. Lakaev[1], M. O. Akhmadova[2]

1 *m. o. akhmadova*; Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan.
2 *mukhayyo.akhmadova@mail.ru*; Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan.

We study the Schrödinger operators $H_{\gamma\lambda\mu}(K)$, $K \in \mathbb{T}$ being a fixed (quasi)momentum of the particles pair, associated with a system of two identical bosons on the one-dimensional lattice $\mathbb{Z}$, where the real quantities γ, λ and μ describe the interactions between pairs of particles on one site, two nearest neighboring sites and next two neighboring sites, respectively. We found a partition of the three-dimensional space (γ, λ, μ) of interaction parameters into connected components and the exact number of eigenvalues of this operator that lie below and above the essential spectrum, in each component.

Keywords: two-particle system, discrete Schrödinger operator, essential spectrum, bound states, Fredholm determinant.

Lattice models of physical systems are one of the widely used mathematical models in mathematical physics. The few-body lattice Hamiltonians have been intensively studied over the past several decades [1, 2, 3, 4].

In the continuous case, the center-of-mass motion can be separated, which is not the case for lattice few-body problems. However, for the lattice Hamiltonian H acting in the functional Hilbert space $\mathbb{T}$ we have a von Neumann direct integral decomposition

$$\mathrm{H} \simeq \int_{K\in\mathbb{T}} \oplus H(K)\, dK, \tag{1}$$

where $\mathbb{T}$ is the one-dimensional torus. The so called fiber Hamiltonians $H(K)$ acting on the Hilbert space $\mathbb{T}$ nontrivially depends on the quasimomentum $K \in \mathbb{T}$ (see e.g., [1]). This decomposition allows us to reduce the problem to studying the operators $H(K)$.

In this work, we study the spectral properties of the fiber Hamiltonians $H(K)$, $K \in \mathbb{T}$ acting in the Hilbert space $L^{2,e}(\mathbb{T})$ as $H_{\gamma\lambda\mu}(K) := H_0(K) + V_{\gamma\lambda\mu}$, where $H_0(K)$ is the fiber kinetic-energy operator, $\big(H_0(K)f\big)(p) = \varepsilon_K(p)f(p)$, with $\varepsilon_K(p) := 2(1 - \cos(K/2)\cos p)$ and $V_{\gamma\lambda\mu}$ is the combined interaction potential. The parameters γ, λ and μ, called coupling constants, describe interactions between the particles which are located on one site, on the nearest neighboring sites of the lattice and in the next nearest neighboring sites, respectively.

Within this new model, we find both the exact number of eigenvalues and their locations of the operator $H_{\gamma\lambda\mu}(0)$. We describe the mechanisms of emission and absorption of the eigenvalues of $H_{\gamma\lambda\mu}(0)$ at the thresholds of its essential (continuous) spectrum depending on the interaction parameters. Furthermore, we establish sharp lower bounds for the number of isolated eigenvalues $H_{\gamma\lambda\mu}(K)$ depending on the quasi-momentum $K \in \mathbb{T}$, which lie both below the essential spectrum and above that. For this, we apply the results obtained for the operator $H_{\gamma\lambda\mu}(0)$ and the nontrivial dependence of the dispersion relation ε_K on the (quasi)momentum $K \in \mathbb{T}$. To study the eigenvalues of $H_{\gamma\lambda\mu}(K)$, we apply analytic function theory, namely, we investigate the corresponding Fredholm determinant $\Delta_{\gamma\lambda\mu}(K, z)$, as there is a one-to-one mapping between the sets of eigenvalues

of $H_{\gamma\lambda\mu}(K)$ and the zeros of $\Delta_{\gamma\lambda\mu}(K,z)$ (see [4]). Correspondingly, the change in the number of zeros of $\Delta_{\gamma\lambda\mu}(0,z)$ results in the change of the number of isolated eigenvalues of $H_{\gamma\lambda\mu}(0)$.

Our main finding is that the number of zeros of the determinant $\Delta_{\gamma\lambda\mu}(0,z)$ located below (resp. above) the essential spectrum changes if and only if the principal term $C^-(\gamma,\lambda,\mu)$ (resp. $C^+(\gamma,\lambda,\mu)$) of the asymptotics of the Fredholm determinant $\Delta_{\gamma\lambda\mu}(0,z)$ vanishes as z approaches the lower (resp. upper) threshold of the essential spectrum.

Using this property, we establish a partition of the three-dimensional (γ,λ,μ)-space into four disjoint connected components by means of surfaces $C^-(\gamma,\lambda,\mu) = 0$ or $C^+(\gamma,\lambda,\mu) = 0$. This allows us to prove that the number of zeros of the Fredholm determinant is constant in each connected component. We emphasize that, our results is an extension of [4].

References

1. *Albeverio S., Lakaev S.N., Makarov K.A., Muminov Z.I.* The Threshold Effects for the Two-particle Hamiltonians on Lattices // Comm. Math. Phys. – 2006. – V. 262. – P. 91–115.

2. *S.N. Lakaev*. The Efimov's effect of the three identical quantum particle on a lattice. Funct. Anal. Appl // – 1993. – V. 27. – P. 15–28.

3. *Lakaev S.N., Abdukhakimov S.Kh.* Threshold effects in a two-fermion system on an optical lattice // Theoret. and Math. Phys. – 2020. – V. 203. – № 2. – P. 251–268.

4. *Lakaev S.N., Kholmatov Sh.Yu., Khamidov Sh.I.* Bose-Hubbard model with on-site and nearest-neighbor interactions; exactly solvable case // J. Phys. A: Math. Theor. – 2021. – V. 54.

ЧИСЛО И МЕСТОПОЛОЖЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДВУХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА РЕШЕТКЕ

С. Н. Лакаев, М. О. Ахмадова

Изучается оператор Шредингера $H_{\gamma\lambda\mu}(K)$, $K \in \mathbb{T}$ фиксированный квазиимпульс пары частиц, ассоциированный с системой двух одинаковых бозонов на одномерной решетке $\mathbb{Z}$, где вещественные числа γ, λ и μ описывают взаимодействия между парами частиц на одном узле, двух ближайших соседних узлах и следующих двух соседних узлах, соответственно. Найдено разбиение трехмерного пространства (γ,λ,μ) параметров взаимодействия на компоненты связности и точное число собственных значений этого оператора, лежащих ниже и выше существенного спектра, в каждой компоненте.

Ключевые слова: система двух частиц, дискретный оператор Шредингера, существенный спектр, связанные состояния, определитель Фредгольма.

УДК 517.5

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА

М. Р. Лангаршоев[1]

1 *mukhtor77@mail.ru*; ГАПОУ Подмосковный колледж «Энергия».

В весовом пространстве Бергмана рассматривается экстремальная аппроксимационная характеристика, которая содержит обобщенный модуль непрерывности как под знаком интеграла, так и вне интеграла.

Ключевые слова: наилучшее приближение, обобщенный модуль непрерывности, весовое пространство Бергмана.

Пусть $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел и $\mathbb{Z}_+$ – множество целых положительных чисел.

Известно, что аналитическая в единичном круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,\ z = \rho e^{it},\ 0 \le \rho < 1$$

принадлежит весовому пространству Бергмана $B_{q,\gamma}, 1 \le q \le \infty$ с конечной нормой [1]

$$\|f\|_{q,\gamma} \overset{def}{=} \|f\|_{B_{q,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho\gamma(\rho) |f(\rho e^{it})|^q d\rho dt \right)^{1/q},$$

где $\gamma(\rho)$ – неотрицательная, суммируемая, неэквивалентная нулю на [0,1] функция, а интеграл понимается в смысле Лебега.

Всюду, далее совокупность всех комплексных алгебраических полиномов степени $\le n$, обозначим:

$$P_n = \left\{ p_n(z) : p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, a_k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Величина наилучшего приближения функции $f \in B_{q,\gamma}$ элементами подпространство P_n равна

$$E_n(f)_{q,\gamma} = \inf\left\{ \|f - p_n\|_{q,\gamma} : p_n \in P \right\}.$$

Гладкость функции $f \in B_{q,\gamma}$ при $t > 0$ характеризуем обобщенным модулем непрерывности

$$\Omega_m(f,t)_{q,\gamma} = \sup\left\{ \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho\gamma(\rho) |\Delta_m(f;\rho,\tau,u)|^q d\rho d\tau \right)^{1/q} : |u| \le t \right\},$$

где

$$\left|\Delta_m(f;\rho,\tau,u)\right|^q = \frac{1}{\tau^m} \int_0^{\tau} \cdots \int_0^{\tau} \|\Delta_{\bar{h}}^m f(\rho e^{iu})\|^q dh_1 \cdots dh_m,$$

$$\bar{h} = (h_1, h_2, \cdots h_m), \Delta_{\bar{h}}^m := \Delta_{h_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1.$$

Для любых $r \in \mathbb{Z}_+$ производную r-го порядка функции $f(z)$ определим равенством

$$f^{(r)}(z) = \frac{d^r f}{dz^r} = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k z^{k-r}, \alpha_{k,r} = k!\,[(k-r)!]^{-1}, k \geq r.$$

Через $B_{q,\gamma}^{(r)}$ обозначим множество функций $f(z) \in B_{q,\gamma}$, у которых $\|z^r f^{(r)}\|_{q,\gamma} < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$.

Введем следующую аппроксимационную характеристику

$$K_{m,n,r}(h) = \sup_{f \in B_{2,\gamma}^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left[\Omega_m^{2/m}\left(z^r f^{(r)}, h\right)_{2,\gamma} + \frac{n^2}{h}\int\limits_0^h u(h-u)\Omega_m^{2/m}\left(z^r f^{(r)}, u\right)_{2,\gamma} du\right]^{m/2}},$$

где $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $h > 0$.

Теорема. *Для произвольного $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ и $0 < h \leq \pi/n$, имеет место следующее равенство*

$$K_{m,n,r}(h) = \frac{3^{m/2}}{\alpha_{n,r}(nh)^m}.$$

Литература

1. *М.Ш. Шабозов, О.Ш. Шабозов.* О наилучшем приближение некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана // Докл. РАН. – 2007. – т. 412. – № 4. – С. 466-469.

ON THE BEST APPROXIMATION OF ANALYTIC FUNCTIONS IN THE WEIGHTED BERGMAN SPACE

M.R. Langarshoev

In the weighted Bergman space it is considered an extremal approximation characteristic which contains a generalized modulus of continuity both under the sign of the integral and outside the integral.

Keywords: best approximation, generalized modulus of continuity, weighted Bergman space.

УДК 517.984

ЧИСЛО СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОЙ ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Х. М. Латипов[1]

1 *h.m.latipov@buxdu.uz*; Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан.

Рассматривается операторная матрица $\mathscr{A}$ четвертого порядка, которая соответствует гамильтониану системы с несохраняющимся числом из не более четырех частиц на решетке. Показывается, что число простых собственных значений операторной матрицы $\mathscr{A}$, лежащих вне существенного спектра, не превосходит 16.

Ключевые слова: собственное значение, операторная матрица, пространство Фока.

Пусть $\mathrm{d} \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{T}^{\mathrm{d}} := (-\pi;\pi]^{\mathrm{d}}$ – d-мерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней.

Пусть $L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^m)$, $m = 1,2,3$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^m$ и

$$\begin{aligned}
&\mathscr{F}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})) := \mathbb{C} \oplus L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}) \oplus L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2) \oplus \ldots;\\
&\mathscr{F}^{(3)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})) := \mathbb{C} \oplus L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}) \oplus L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2) \oplus L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^3);\\
&\mathscr{H} := \mathbb{C}^2 \otimes \mathscr{F}^{(3)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})).
\end{aligned}$$

Гильбертово пространство $\mathscr{F}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$ называется пространством Фока, а $\mathscr{F}^{(3)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$ – четырехчастичное обрезанное подпространство пространства Фока.

Норма элемента $F = \{f_0^{(\mathrm{s})}, f_1^{(\mathrm{s})}, f_2^{(\mathrm{s})}, f_3^{(\mathrm{s})}, \mathrm{s} = \pm\} \in \mathscr{H}$ задается формулой

$$\|F\|^2 = \sum_{\mathrm{s}=\pm}\Big(|f_0^{(\mathrm{s})}|^2 + \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} |f_1^{(\mathrm{s})}(k_1)|^2 dk_1 + \int_{(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2} |f_2^{(\mathrm{s})}(k_1,k_2)|^2 dk_1 dk_2 + \\ + \int_{(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^3} |f_3^{(\mathrm{s})}(k_1,k_2,k_3)|^2 dk_1 dk_2 dk_3\Big).$$

Известно, что любой линейный ограниченный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, всегда представляется в виде операторной матрицы четвертого порядка [1]. В данной заметке рассмотрим тридиагональную операторную матрицу

$$\mathscr{A} := \begin{pmatrix} \mathscr{A}_{00} & \mathscr{A}_{01} & 0 & 0 \\ \mathscr{A}_{01}^* & \mathscr{A}_{11} & \mathscr{A}_{12} & 0 \\ 0 & \mathscr{A}_{12}^* & \mathscr{A}_{22} & \mathscr{A}_{23} \\ 0 & 0 & \mathscr{A}_{23}^* & \mathscr{A}_{33} \end{pmatrix},$$

действующую в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ с матричными элементами

$$\mathscr{A}_{00} f_0^{(\mathrm{s})} = \mathrm{s}\varepsilon f_0^{(\mathrm{s})}, \quad \mathscr{A}_{01} f_1^{(\mathrm{s})} = \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_1^{(-\mathrm{s})}(t)\, dt,$$
$$(\mathscr{A}_{11} f_1^{(\mathrm{s})})(k_1) = (\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1)) f_1^{(\mathrm{s})}(k_1), \; (\mathscr{A}_{12} f_2^{(\mathrm{s})})(k_1) = \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_2^{(-\mathrm{s})}(k_1, t)\, dt,$$
$$(\mathscr{A}_{22} f_2^{(\mathrm{s})})(k_1, k_2) = (\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1) + w(k_2)) f_2^{(\mathrm{s})}(k_1, k_2),$$
$$(\mathscr{A}_{23} f_3^{(\mathrm{s})})(k_1, k_2) = \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_3^{(-\mathrm{s})}(k_1, k_2, t)\, dt,$$
$$(\mathscr{A}_{33} f_3^{(\mathrm{s})})(k_1, k_2, k_3) = (\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1) + w(k_2) + w(k_3)) f_3^{(\mathrm{s})}(k_1, k_2, k_3).$$

Здесь $\{f_0^{(\mathrm{s})}, f_1^{(\mathrm{s})}, f_2^{(\mathrm{s})}, f_2^{(\mathrm{s})}, \mathrm{s} = \pm\} \in \mathscr{H}$; $\mathscr{A}_{ij}^*$ сопряженный оператор к $\mathscr{A}_{ij}$, $i < j$, функции $v(\cdot)$, $w(\cdot)$ являются вещественнозначными и непрерывными на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, причем

$$\min_{k \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w(k) = 0,$$

$\alpha > 0$ – "параметр взаимодействия". В этих предположениях операторная матрица $\mathscr{A}$ является ограниченной и самосопряженной в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема. *Число простых собственных значений оператора $\mathscr{A}$ не превосходит шестнадцати.*

Отметим, что в работе [2] рассматривается блочно-операторная матрица, ассоциированная с системой не более чем трех квантовых частиц на d-мерной решетке и доказано, что этот оператор может иметь четыре простых собственных значения.

Литература

1. *Tretter C.* Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications. – Imperial College Press, 2008.

2. *Расулов Т.Х., Умарова И.О.* Спектр и резольвента одной блочно-операторной матрицы // Сиб. электрон. матем. изв. – 2014. – V. 11. – С. 334–344.

NUMBER OF EIGENVALUES OF AN OPERATOR MATRIX OF ORDER FOUR

H. M. Latipov

An operator matrix $\mathscr{A}$ of order four, which is corresponding to the Hamiltonian of a system of non-conserved and at most four particles on a lattice, is considered. It is proven that, the number of eigenvalues of the operator matrix $\mathscr{A}$, lying outside of the essential spectrum, does not exceed 16.

Keywords: eigenvalue, operator matrix, Fock space.

UDC 533.539

MATHEMATICAL MODELING OF AND GAS PRODUCTION BASED ON THE CONSTRUCTION OF SELF-SIMULAR TRAVELING WAVE SOLUTIONS FOR TWO-COMPONENT FILTRATION EQUATIONS

K. V. Litvinova[1], V. L. Litvinov[2]

1 *kristinalitvinova900@rambler.ru*; Lomonosov Moscow State University.
2 *vladlitvinov@rambler.ru*; Branch of the Samara State Technical University In Syzran.

The work is devoted to the construction of self-similar solutions of the "travelling wave" type of the equations of two-component filtration of solutions, accompanied by phase transitions. A model is considered that is widely used to solve the problems of predicting the development of oil and gas reservoirs. Within this model, two-component isothermal filtration is described by a system of non-linear partial differential equations, the solutions of which are characterized by the presence of discontinuities in component concentrations. It is assumed that the pressure is continuous, because filtration rates are small enough and the pressure has time to be established. If no particular assumptions are made about the properties of fluids (Amago's law, incompressibility of fluids, etc.), then in this general case the nonlinear equations of two-component filtration cannot be reduced to hyperbolic, parabolic, and elliptic ones. The study of multicomponent filtration, accompanied by phase transitions, in the general formulation is possible only with the involvement of mathematical modeling methods.

Keywords: self-similar solutions, two-component isothermal filtration, phase transitions, development of oil and gas reservoirs.

A model of two-component filtration with phase transitions is considered, which is widely used to solve problems of predicting the development of oil and gas reservoirs [1] - [7]. It is assumed that the filtration rates are low, and the mass transfer occurs quite intensively, so that phase equilibrium has time to be established in each elementary volume. Depending on the temperature and pressure conditions, a two-component mixture can be either in a single-phase state or in a two-phase state. In the second case, we will conditionally consider the denser phase to be liquid and mark the quantities corresponding to it with the index L, and the less dense phase, the gas phase and mark it with the index G. Nonlinear equations of two-component filtration demonstrate the properties of hyperbolic, parabolic and elliptic types of equations. The solutions of the system of equations describing filtration are characterized by the presence of strong and weak concentration discontinuities propagating at a finite speed. The task becomes more complicated if phase transitions are present. Unpredictable changes in composition and phase saturation are one of the problems in the development of "carbonated" oil and gas condensate deposits. Self-similar solutions are of great interest both for testing numerical algorithms [2] and for studying complex filtration flows. In underground hydrodynamics, self-similar solutions of filtration equations obtained for incompressible phases without phase transitions are well known. Such solutions are used to study the processes of oil displacement by water or compressed gas. However, phase compressibility often plays a significant role. In this work, no particular assumptions about the properties of fluids are made, i.e. fluids can be either compressible or incompressible, and phase transitions occur in the system.

References

1. *Koldoba A.V., Poveshchenko Yu.A., Samarskaya E.A., Tishkin V.F.* Methods of mathematical modeling of the environment. - M : Nauka, 2000, 254 p.

2. *Koldoba E.V.* Self-similar solutions of two-component filtering with phase transitions / Tez. report scientific conf. "Lomonosov Readings", Moscow State University, 2005, p. 118.

3. *Koldoba A.V., Koldoba E.V.* Discontinuous Solutions of Multicomponent Filtration. – Preprint N85 IPM RAS, 1999, 20 p.

4. *Koldoba A.V., Koldoba E.V.* The Discontinuous Solutions of the Transport Equations for Compositional Flow in Porous Media // Transport in Porous Media. – 2003. – V. 52. – № 2. – P. 267-277.

5. *Litvinov V.L., Litvinova K.V.* Construction of self-similar solutions of two-component filtration equations in oil and gas production modeling / Geometric methods in control theory and mathematical physics. III International Scientific Conference (Ryazan, April 26–30, 2021). – P. 61–62.

6. *Litvinov V. L.* Modeling the filtration of multicomponent hydrocarbon solutions in the process of oil and gas production / Actual problems of applied mathematics, informatics and mechanics: Proceedings of the International Scientific Conference, Voronezh, December 7-9, 2020 - Voronezh, 2021. – P. 982–983.

7. *Brusilovsky A.I.* Phase transformations in the development of oil and gas fields. – Grail, 2002.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДОБЫЧИ НЕФТИ И ГАЗА НА ОСНОВЕ ПОСТРОЕНИЯ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ТИПА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ ФИЛЬРАЦИИ

К. В. Литвинова, В. Л. Литвинов

Работа посвящена построению автомодельных решений типа «бегущая волна» уравнений двухкомпонентной фильтрации решений, сопровождающихся фазовыми переходами. Рассмотрена модель, которая широко используется для решения задач прогнозирования разработки нефтегазовых залежей. В рамках этой модели двухкомпонентная изотермическая фильтрация описывается системой нелинейных уравнений в частных производных, решения которых характеризуются наличием разрывов концентраций компонентов. Предполагается, что давление постоянное, так как скорости фильтрации достаточно малы и давление успевает установиться. Если не делать особых предположений о свойствах жидкостей (закон Амаго, несжимаемость жидкостей и др.), то в этом общем случае нелинейные уравнения двухкомпонентной фильтрации не могут быть сведены к гиперболическим, параболическим и эллиптическим. Изучение многокомпонентной фильтрации, сопровождающейся фазовыми переходами, в общей постановке возможно только с привлечением методов математического моделирования.

Ключевые слова: автомодельные решения, двухкомпонентная изотермическая фильтрация, фазовые переходы, разработка нефтегазовых залежей.

УДК 517.958

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ПРИБЛИЖЕННЫХ СИММЕТРИЙ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. О. Лукащук[1], С. Ю. Лукащук[2]

1 *voluks@gmail.com*; Уфимский университет науки и технологий.
2 *lsu@ugatu.su*; Уфимский университет науки и технологий.

Предлагается новый конструктивный алгоритм нахождения приближенных симметрий дробно-дифференциальных уравнений с производными типа Римана–Лиувилля и Герасимова–Капуто, дробный порядок которых близок к целому. Алгоритм основан на использовании нелокального разложения дробных интегралов по малому параметру, выделяемому из порядка дробного интегрирования, и может быть использован в случае дробных интегро-дифференциальных операторов, определенных на всей оси или полуоси. Эффективность алгоритма иллюстрируется рядом примеров.

Ключевые слова: дробно-дифференциальные уравнения, малый параметр, приближенные симметрии.

Метод построения приближенных симметрий для дробно-дифференциальных уравнений с близкими к целым порядками входящих в них дробно-дифференциальных операторов был предложен в [1]. Однако он требует бесконечной дифференцируемости зависимой переменной и оказывается неприменим при бесконечных пределах интегрирования в операторах дробного дифференцирования. В данной работе предлагается конструктивный алгоритм нахождения приближенных симметрий дробно-дифференциальных уравнений, свободный от указанных недостатков.

Алгоритм основан на известном [2] разложении дробного интеграла порядка ε:

$$({}_{t_0}I_t^{\varepsilon}u)(t,x) = u(t,x) + \varepsilon\left[\gamma u(t,x) + \frac{\partial}{\partial t}(Lu)(t,x)\right] + o(\varepsilon), \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \tag{1}$$

$$(Lu)(t,x) = \int_{t_0}^{t} \ln(t-s)\,u(s,x)\,ds, \quad -\infty \le t_0 < t < \infty, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^m.$$

Доказана теорема о продолжении группы G точечных преобразований с инфинитезимальным оператором

$$X = \tau(t,x,u)\partial t + \xi^i(t,x,u)\partial x^i + \eta(t,x,u)\partial u \tag{2}$$

на нелокальную переменную $(Lu)(t,x)$.

Теорема. *Пусть* $u(t,x) \in C^{1,1}(\Omega \times (0,T))$ *и выполнены условия*

$$\tau[t,x]|_{t=t_0} = 0, \qquad \lim_{t\to t_0+0} \tau[t,x]u(t,x) = 0.$$

Тогда инфинитезимальное преобразование интеграла $(Lu)(t,x)$ *под действием группы* G *с оператором* (2) *имеет вид*

$$(L\bar{u})(\bar{t},\bar{x}) = (Lu)(t,x) + a\zeta_{Lu}[t,x] + o(a),$$

где $\zeta_{Lu}[t,x]$ *определяется формулой продолжения*

$$\zeta_{Lu}[t,x] = L(\eta - \tau u_t - \xi^i u_i)(t,x) + \tau D_t(Lu)(t,x) + \xi^i D_i(Lu)(t,x).$$

Здесь использовано условное обозначение $f[t,x] = f(t,x,u(t,x),u_t(t,x),(Lu)(t,x),\ldots)$.

Теорема дает возможность построения продолжений группы G на все переменные, возникающие в дробно-дифференциальном уравнении при разложении дробных производных типа Римана–Лиувилля или Герасимова–Капуто с использованием (1). Посредством решения определяющего уравнения с малым параметром, получающегося в результате использования приближенного критерия инвариантности, находятся приближенные симметрии исходного уравнения. Данный подход иллюстрируется в работе рядом примеров. В частности, найдены приближенные симметрии для дробно-дифференциального обобщения уравнения Кортевега – де Фриза.

Литература

1. Лукащук С. Ю. *Аналитические методы и численные алгоритмы исследования дробно-дифференциальных математических моделей диффузионного типа* // Дисс. … докт. физ.-мат. наук. – Уфа: УГАТУ, 2017. – 275 с.

2. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

ALGORITHM FOR FINDING APPROXIMATE SYMMETRIES OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

V. O. Lukashchuk, S. Yu. Lukashchuk

We present a new constructive algorithm for finding approximate symmetries of fractional differential equations with the Riemann–Liouville and Gerasimov–Caputo fractional derivatives which fractional order is close to integer. The algorithm is based on nonlocal expansion of fractional integrals with respect to a small parameter which can be extracted from the order of fractional differentiation. Such approach permits to use the algorithm for equations with fractional integro-differential operators on the real axis and half-axis. We illustrate an efficiency of the proposed algorithm by several examples.

Keywords: fractional differential equations, small parameter, approximate symmetries.

УДК 517.53

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПОЛУКОЛЬЦЕ

К. Г. Малютин[1], А. А. Наумова[2]

1 *malyutinkg@gmail.com*; Курский государственный университет.
2 *aliona.filatowa2013@yandex.ru*; Курский государственный университет.

Получено представление субгармонических функций на полукольце. Классическими результатами в этом направлении являются, например, формулы Неванлинны, Пуассона — Иенсена и Симидзу — Альфорса о представлении мероморфной функции в замкнутом круге и в замкнутом полукруге, а также теорема Рисса — Мартина о представлении субгармонических функций.

Ключевые слова: формула Левина, формула Карлемана, полуплоскость, полукольцо, полукруг, субгармоническая функция, граничная мера, полная мера, мера Рисса, сингулярная мера.

Обозначим через $D_+(R_1,R_2)=\{z:0<R_1<|z|<R_2<+\infty,\operatorname{Im} z>0\}$ открытое полукольцо на верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+:=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im} z>0\}$. В работах Т. Карлемана и Б. Я. Левина были получены формулы, связывающие логарифм модуля функции, аналитической в замкнутом полукольце $\overline{D_+(R_1,R_2)}$ с расположением её нулей. Эти формулы нашли многочисленные приложения в теории целых и мероморфных функций. Независимо друг от друга Дж. Ито [1] и А. Ф. Гришин [2] распространили формулы Б. Я. Левина и Т. Карлемана на ограниченные аналитические функции в полузамкнутом полукруге $B_+^*(0,R)=\{z:|z|\le R\}\cap\mathbb{C}_+$ и в полузамкнутом полукольце $D_+^*(0,R)=\overline{D_+(R_1,R_2)}\cap\mathbb{C}_+$. Мы распространяем формулы Ито–Гришина и Ито–Гришина–Говорова на функции, аналитические и ограниченные в открытом полукольце $D_+(R_1,R_2)$ и в открытом полукруге $C_+(0,R)$. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема. *Пусть функция v — субгармоническая функция в полукольце $D_+(R_1,R_2)$, имеющая в этом полукольце положительную гармоническую мажоранту, $G(z,\zeta)$ — функция Грина полукольца $D_+(R_1,R_2)$. Тогда существуют вещественные числа a_j, $j=1,\dots,4$, меры ν_j, $j=1,2$, на интервале $(0,\pi)$, причем, если z_0 такая точка, что $v(z_0)>-\infty$, то меры $\tilde\nu_j$, где $d\tilde\nu_j=\dfrac{\partial G(z_0,R_je^{i\varphi})}{\partial n_\zeta}$, $j=1,2$, имеют ограниченную полную вариацию на интервале $(0,\pi)$, мера ν на множестве $I=(-R_2,-R_1)\cup(R_1,R_2)$, причем мера $\tilde\nu$, где $d\tilde\nu=\dfrac{\partial G(z_0,t)}{\partial n_\zeta}$ имеет ограниченную полную вариацию на множестве I, такие, что при $z\in D_+(R_1,R_2)$ имеет место равенство*

$$v(z)=-\iint\limits_{D_+(R_1,R_2)}G(z,\zeta)\,d\mu(\zeta)+\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi\frac{\partial G(z,R_je^{i\varphi})}{\partial n_\zeta}\,d\nu_j(\varphi)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_I\frac{\partial G(z,t)}{\partial n_t}\,d\nu(t)$$
$$+a_1M(z,R_1)+a_2M(z,-R_1)+a_3M(z,R_2)+a_4M(z,-R_2)\,, \tag{1}$$

где $M(z,\zeta)$ — функция Мартина полукольца $D_+(R_1,R_2)$, отвечающая граничной точке ζ, а интегралы понимаются как несобственные с особыми точками на концах интегрирования. Также имеют место формулы:

$$\nu_1([\alpha,\beta])=\lim_{r\to R_1+0}R_1\int\limits_\alpha^\beta v(re^{i\varphi})\,d\varphi,\nu_2([\alpha,\beta])=\lim_{r\to R_2-0}R_2\int\limits_\alpha^\beta v(re^{i\varphi})\,d\varphi,$$
$$\text{если}\,0<\alpha<\beta<\pi,\quad \nu_j(\{\alpha\})=\nu_j(\{\beta\})=0,\quad j=1,2\,, \tag{2}$$

$$\nu([a,b])=\lim_{y\to+0}\int\limits_a^b v(x+iy)\,dx,\text{если}\,[a,b]\in I,\nu(\{a\})=\nu(\{b\})=0\,, \tag{3}$$

$$d\nu_j(\varphi)=R_jv(R_je^{i\varphi})\,d\varphi+d\sigma_j(\varphi)\,d\varphi,\ j=1,2,\quad d\nu(t)=v(t)\,dt+d\sigma(t)\,, \tag{4}$$

где почти всюду

$$v(R_1 e^{i\varphi}) = \lim_{r\to R_1+0} v(re^{i\varphi}),\ v(R_2 e^{i\varphi}) = \lim_{r\to R_2-0} v(re^{i\varphi}),\ v(t) = \lim_{y\to+0} v(t+iy), \tag{5}$$

а σ_j, $j = 1,2$, σ, *— меры, сингулярные относительно меры Лебега (невозрастающие ограниченные функции на* $(0,\pi)$, *на* I, *для которых почти всюду* $\sigma'_j = 0$, $\sigma' = 0$).

Если, кроме этого, функция v *является субгармонической и имеет положительную гармоническую мажоранту в более широком полукольце* $D_+(R'_1, R'_2)$, $0 < R'_1 < R_1 < R_2 < R'_2$, *то*

$$v(z) = -\iint\limits_{D_+(R_1,R_2)} G(z,\zeta)\,d\mu(\zeta) + \sum_{j=1}^{2}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{\partial G(z,R_j e^{i\varphi})}{\partial n_\zeta}\,v(R_j e^{i\varphi})\,d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int\limits_I \frac{\partial G(z,t)}{\partial n_t}\,d\nu(t). \tag{6}$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект No. 22-21-00012, https://rscf.ru/project/22-21-00012/).

Литература

1. *Ito Jun-Iti.* Subharmonic functions in a half-plane // Trans. Amer. Math. Soc. – 1967. – V. 129. – № 3. – P. 479–499.

2. *Гришин А. Ф.* Непрерывность и асимптотическая непрерывность субгармонических функций. I // Матем., Физ., Анализ, Геом. – 1994. – Т. 1. – № 2. – С. 193–215.

REPRESENTATION OF SUBHARMONIC FUNCTIONS IN THE HALF-RING

K. G. Malyutin, A. A. Naumova

The work contains results about representations of subharmonic functions on a half-ring. Classical results in this direction are, for example, the Nevanlinna, Poisson-Jensen and Shimizu-Ahlfors formulas of the representation of a meromorphic function in a closed disk and in a closed half-disk, as well as the Riesz-Martin theorem on the representation of subharmonic functions.

Keywords: Levin formula, Carleman formula, half-plane, half-ring, half-disk, subharmonic function, boundary measure, full measure, Riesz measure, singular measure.

УДК 517.5

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ БЛЯШКЕ ДЛЯ ОЦЕНКИ НАИЛУЧШИХ РАВНОМЕРНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ЧЕТНОГО И НЕЧЕТНОГО ПРОДОЛЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ

Т. С. Мардвилко[1]

1 *mardvilko@mail.ru*; Белорусский государственный университет.

В статье обсуждаются оценки наилучших равномерных рациональных приближений четного (нечетного) продолжения непрерывной функции через ее нечетное (четное)

продолжение и экстремальные произведения Бляшке.

Ключевые слова: наилучшее равномерное рациональное приближение, произведение Бляшке, четное продолжение функции, нечетное продолжение функции.

Для функции $f \in C[-1,1]$ введем наилучшее равномерное рациональное приближение. Именно

$$R_n\left(f;[-1,1]\right) = \inf\|f - r\|_{C[-1,1]},$$

где инфимум берется по всем рациональным функциям r степени не выше n.

Через f^+ и f^- будем обозначать соответственно четное и нечетное продолжение $f \in C[0,1]$ на отрезок $[-1,1]$; мы также предполагаем, что $f(0) = 0$.

Наилучшие равномерные рациональные приближения функций f^+ и f^- изучались в работах [1, 2, 3]. Здесь мы обсудим полученные в [3] верхние оценки величины $R_n(f^{\pm};[-1,1])$ через $R_n(f^{\mp};[-1,1])$ и одну дополнительную характеристику f, связанную с произведением Бляшке.

Нам понадобится произведение Бляшке

$$B_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{x - x_k}{x + x_k}, \quad x_k \in (0,1], \quad k = 1,2,\ldots,n, \tag{1}$$

для правой полуплоскости.

Для функции $f \in C[0,1]$ с $f(0) = 0$ введем характеристику

$$\rho_n(f) = \inf\left\|f \cdot B_n^2\right\|_{C[0,1]}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где инфимум берется по всем произведением Бляшке вида (1).

Теорема 1. *Пусть $f \in C[0,1]$ и $f(0) = 0$. Тогда для любых натуральных $n \geq 2$ и $m \leq n/2$ имеют место неравенства*

$$R_n\left(f^{\mp};[-1,1]\right) \leq 2\rho_m(f) + R_{n-2m}\left(f^{\pm};[-1,1]\right).$$

Доказательство теоремы 1 и следствия из нее изложены в работе [3].

Отметим также, что наилучшие полиномиальные приближения четного и нечетного продолжений функции обсуждались в [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ НАН Беларуси "Конвергенция" 2021 – 2025 г.

Литература

1. Мардвилко Т.С., Пекарский А.А. *Применение действительного пространства Харди–Соболева на прямой для исследования скорости равномерных рациональных приближений функций* // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2022. – № 3. – С. 16–36.

2. Мардвилко Т. С. *Аппроксимация четного и нечетного продолжения функций* // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы международной конференции : Воронежская зимняя математическая школа (27 января – 1 февраля 2023 г.). – Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2023. – С. 245–247.

3. Мардвилко Т.С. *Равномерная рациональная аппроксимация четного и нечетного продолжений функций* // Матем. заметки. (в печати).

APPLICATION OF THE BLASCHKE PRODUCT TO ESTIMATE THE BEST UNIFORM RATIONAL APPROXIMATIONS OF EVEN AND ODD CONTINUATIONS OF FUNCTIONS

T. S. Mardvilko

This paper describes estimates for the best uniform rational approximations of an even (odd) continuation of a continuous function in terms of its odd (even) continuation and Blaschke extremal products.

Keywords: best uniform rational approximation, Blaschke product, even continuation, odd continuation.

УДК 517.956.6

ОБ ОДНОМ ПРИЛОЖЕНИИ МЕТОДА С.Г.МИХЛИНА К РЕШЕНИЮ НЕСТАНДАРТНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ Ф.ТРИКОМИ

М. Мирсабуров[1], С. Б. Эргашева[2]

1 *mirsaburov@mail.ru*; Термезский государственный университет.
2 *sarvinozergasheva96@mail.ru*; Термезский государственный университет.

В работе изложен процесс регуляризации нестандартного сингулярного интегрального уравнения типа уравнения Трикоми первого рода со сдвигами в несингулярной части ядра и с различными числовыми параметрами α и β.

Ключевые слова: нестандартное сингулярное интегральное уравнение Трикоми первого рода, задача о скачке, факторизация, граничные значения.

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение типа уравнения Трикоми с некарлемановским сдвигом в несингулярной части ядра и с числовыми параметрами α и β

$$\int_{-1}^{c}\Big(\frac{\alpha}{s-x}+\frac{\beta b_3}{1-(a_3+b_3x)(a_3+b_3s)}\Big)\rho(s)\,ds=g(x),\quad x\in(-1,c). \tag{1}$$

Уравнение (1) является нестандартным сингулярным уравнением Ф. Трикоми, так как оно имеет две особенности.

1) Интегральный оператор Ф. Трикоми имеет сдвиги $a_3+b_3x,\ \ a_3+b_3s$ в несуммируемой части ядра, $a_3+b_3=1$;

2) Ядро уравнения (1) содержит числовые параметры α и β. В уравнении Ф.Трикоми $\alpha=\beta$, что существенно облегчает процесс решения уравнения (1).

Целью настоящей работы является решение уравнения (1).

Пусть z – произвольная точка комплексной плоскости $C=\{z=x+iy\}$. Следуя подходу Карлемана, развитому С.Г.Михлиным [1,2], положим

$$\Phi(\alpha,\beta;z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{c}\Big(\frac{\alpha}{s-z}+\frac{\beta b_3}{1-(a_3+b_3z)(a_3+b_3s)}\Big)\rho(s)\,ds. \tag{2}$$

Очевидно, что функция $\Phi(\alpha,\beta;z)$ голоморфна как в верхний, так и в нижней полуплоскостях и обращается в нуль на бесконечности. Обозначим через

$\Phi^+(\alpha,\beta;x);\Phi^-(\alpha,\beta;x)$ её предельные значения, когда z стремиться к точке x действительной оси, соответственно, из верхней или из нижней полуплоскости.

Дробно-линейное преобразование $W(z)=(c(1+a_3)-a_3z)/(a_3+b_3z)$– переводит верхную полуплоскость в нижную и наоборот. При этом промежуток $(-1,c)$ переходит в множество Δ, совпадаюшее с объединением интервалов $(-\infty,(c^2+c+1)/c)\cup(c;\infty)$ если $c<0$, с интервалом $(0,+\infty)$ если $c=0$ и интервалом $(c,(c^2+c+1)/c)$, если $c>0$.

Из определения (2) следует, что

$$\Phi\Big(\alpha,\beta;\frac{c(1+a_3)-a_3z}{a_3+b_3z}\Big)=-(a_3+b_3z)\Phi(\beta,\alpha;z). \tag{3}$$

Отсюда

$$\Phi^+(\alpha,\beta;x)+\Phi^-(\alpha,\beta;x)=\frac{g(x)}{\pi i},\quad x\in(-1,c). \tag{4}$$

Заменяв в (4) x на $W(x)$, с учетом (3) имеем

$$\Phi^-(\beta,\alpha;x)+\Phi^+(\beta,\alpha;x)=-\frac{g(W(x))}{\pi i(a_3+b_3x)},\quad x\in\Delta. \tag{5}$$

Далее используя методику работы [1], с учетом (4) и (5) получим решение уравнения (1)

$$\rho(x)=-\frac{1}{\alpha\pi^2}\int\limits_{-1}^{c}\frac{X^+(x)}{X^+(t)}\Big(\frac{1}{t-x}+\frac{b_3}{1-(a_3+b_3x)(a_3+b_3t)}\Big)g(t)\,dt.$$

Работа выполнена при поддержке Фонда Министерства высшего образования, науки и инновационного развития Республики Узбекистан (грант No Ф3-202009211).

Литература

1. Михлин С. Г. *Об интегральном уравнении F.Trikomi.* // Докл.АН СССР. – 1948. – Т. 59. – № 6. – С. 1053–1056.

ON ONE APPLICATION OF THE METHOD OF S.G. MIKHLIN TO THE SOLUTION OF NON-STANDARD SINGULAR INTEGRAL EQUATION F.TRICOMI

M. Mirsaburov, S. B. Ergasheva

The paper describes the process of regularization of a non-standard singular integral equation of the Tricomi type equation of the first kind with shifts in the nonsingular part of the kernel and with different numerical parameters α and β.

Keywords: Tricomi's non-standard singular integral equation of the first kind, jump problem, factorization, boundary values.

УДК 517.968.23

О ЯВНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТИПА ГАЗЕМАНА ДЛЯ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГОВЫХ ОБЛАСТЯХ

Т. И. Михалёва[1], К. М. Расулов[2]

1 *tat.timopheeva@yandex.ru*; Смоленский государственный университет.
2 *kahrimanr@yandex.ru*; Смоленский государственный университет.

Рассматривается краевая задача типа Газемана для квазигармонических функций в произвольных односвязных областях с гладкими границами. Устанавливается, что в случае круговых областей решение рассматриваемой задачи сводится к последовательному решению классической задачи Газемана для аналитических функций комплексного переменного и двух линейных дифференциальных уравнений Эйлера, причем решения исследуемой краевой задачи неустойчивы по отношению к малым изменениям носителя краевых условий.

Ключевые слова: квазигармоническая функция, краевая задача типа Газемана, круговая область, явное решение, неустойчивость решений.

Обозначим через T^+ конечную односвязную область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченную гладким замкнутым контуром L, и пусть $T^- = \overline{\boldsymbol{C}} \backslash (T^+ \cup L)$.

Напомним (см., например, [1-2]), что всякая исчезающая на бесконечности кусочно квазигармоническая функция $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$ рода $n (n \geq 1)$ с линией скачков L представляется в виде

$$W(z) = \begin{cases} W^+(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k^n \left(\frac{\overline{z}}{1+z\overline{z}}\right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k}, & z \in T^+, \\ W^-(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k^n \left(\frac{\overline{z}}{1+z\overline{z}}\right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^-(z)}{dz^k}, & z \in T^-, \end{cases} \tag{1}$$

где $A_k^n = (-1)^{n-k} \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$, а $\varphi^+(z)\left(\varphi^-(z)\right)$ – аналитическая в области T^+ (T^-) функция, причем $\varphi^-(\infty) = 0$.

В работе авторов [2] была поставлена следующая краевая ***задача*** $\boldsymbol{H}_n$: *требуется найти все исчезающие на бесконечности кусочно квазигармонические функции* $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$ *рода* $n (n \geq 1)$ *с линией скачков* L, *принадлежащие классу* $\boldsymbol{Q}_n(T^\pm) \bigcap H^{(n)}(L)$ *и удовлетворяющие на* L *краевому условию*

$$W^+[\alpha(t)] = W^-(t)G(t) + g(t), \tag{2}$$

где $G(t)$ *и* $g(t)$ *– заданные на* L *комплексные функции, причем* $G(t) \neq 0$ *на* L, *а* $\alpha(t)$ *– функция сдвига контура* L, *сохраняющая его ориентацию.*

Теорема. *Если* $T^+ = T_r^+ = \{z : |z| < r\}, r > 0$, *то решение краевой задачи* $\boldsymbol{H}_n$ *в классах кусочно квазигармонических функций рода* $n (n \geq 1)$ *сводится к последовательному решению классической задачи Газемана для аналитических функций комплексного переменного и двух линейных дифференциальных уравнений Эйлера* n*-го порядка, причем решения краевой задачи* $\boldsymbol{H}_n$ *неустойчивы по отношению к малым изменениям носителя краевых условий.*

Литература

1. Расулов К. М. *Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения.* – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. – 188 с.

2. Михалёва Т. И., Расулов К. М. *Об одном методе решения краевой задачи типа Газемана в классах квазигармонических функций в круговых областях* // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы междунар. конф. Вып. 23 / СмолГУ. – Смоленск, 2022. – С. 261–269.

ON THE EXPLICIT METHOD FOR SOLVING THE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF HASEMAN TYPE FOR QUASIHARMONIC FUNCTIONS IN CIRCULAR DOMAINS

T. I. Mikhalyova, K. M. Rasulov

We consider a Haseman type boundary value problem for quasiharmonic functions in arbitrary simply connected domains with smooth boundaries. We prove that a solution of the considered boundary value problem is reduced to solution of the usual Haseman problem in the classes of analytic functions and two linear Euler differential equations. It is establishes that solutions of the considered problem are unstable under small changes in the support of the boundary conditions.

Keywords: quasiharmonic function, boundary value problem of Haseman type, circular domain, explicit solution, instability of solutions.

УДК 517.2, 517.928.4, 550.834

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. С. Мокейчев[1], А. М. Сидоров[2]

1 *valery.mokeychev@kpfu.ru*; Казанский федеральный (Приволжский) университет.
2 *anatoly.sidorov@kpfu.ru*; Казанский федеральный (Приволжский) университет.

Излагается новый подход к теории разрешимости линейных уравнений. Он применим к обыкновенным дифференциальным уравнениям и дифференциальным уравнениям в частных производных как с отклонениями аргументов, так и без отклонений аргументов.

Ключевые слова: линейное уравнение, дифференциальное уравнение с частными производными, отклонение аргумента, φ-решение.

Целью работы является изложение подхода, позволяющего расширить понятие решения линейного уравнения. Исследуется формальное уравнение

$$Ax = y \tag{1}$$

где A – некоторая линейная операция.

Пусть $\varphi = \{\varphi_p\}$ – счетная система элементов, применимы операция A и понятие линейной комбинации. Предполагается, что φ относительно некоторого скалярного произведения имеет биортогональную систему. Составляются ряды

$$\sum_p a_p \varphi_p, \sum_p a_p A\varphi_p, \tag{2}$$

где a_p – числа. Если эти ряды сходятся соответственно в пространствах X, Y и x, y – соответствующие их суммы, то x называется φ-решением уравнения (1) [1]. Предлагаются наиболее широкие пространства X, Y, в которых сходятся ряды (2) при любых значениях их коэффициентов. Это позволяет расширить множество разрешимых дифференциальных уравнений, в том числе и тех, которые не имеют обобщенного решения [2].

Полученные результаты применены к исследованию разрешимости формального дифференциального уравнения в частных производных с отклонениями аргументов:

$$Ax \equiv \sum_{\alpha\in\Phi}\sum_{j=1}^{m} C_{\alpha,j}(t)x^{(\alpha)}(t+\tau_{\alpha,j}) = y(t), \quad t\in\Omega\subset R^n,$$

где Φ – конечное множество мультииндексов $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$, $x^{(\alpha)}$ – производная порядков α_1, по $t_1,...,\alpha_n$ по t_n, $\tau_{\alpha,j}\in R^n$ и не зависит от x и t, $C_{\alpha,j}(t)$ – тригонометрические многочлены.

Литература

1. *Мокейчев В.С.* Метрические, банаховы, гильбертовы пространства φ_B-распределений//Изв. вузов. Матем. – 2018. – №5. – С. 64–70.

2. *Мокейчев В.С.* Пространство, элементы которого и только они разлагаются в ряды Фурье по заданной системе элементов // Евразийское научное объединение. – 2016. – № 10. – С. 24–31.

INVESTIGATION OF THE SOLVABILITY OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

V. S. Mokeychev, A. M. Sidorov

A new approach to the theory of solvability of linear differential equations is presented. It is applicable to ordinary differential equations and partial differential equations, both with deviations of arguments and without deviations of arguments.

Keywords: linear equation, partial differential equation, deviation of the argument, φ-solution.

УДК 514.822

КЛАССИФИКАЦИЯ НОРМ БАРАБАНОВА ПЛАНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А. М. Мусаева[1]

1 *asya.musaeva2001@mail.ru*; Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики.

С 1980-х годов в связи с многочисленными применениями активно изучалась задача устойчивости линейных динамических систем с переключениями

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t), \ t\geq 0, \\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \end{cases} \tag{1}$$

где матрица $A(\cdot)$ является управляемым параметром, принимающим произвольные значения из заданного компактного множества матриц A. Одним из основных инструментов исследования устойчивости являлась, так называемая, норма Барабанова. Известно, что неприводимая d-мерная система всегда имеет норму Барабанова (инвариантную норму Ляпунова), определяющую её устойчивость и максимальный порядок роста траекторий. Мы доказываем, что в случае $d = 2$ инвариантная норма является кусочно-аналитической функцией и может быть построена в явном виде для любой системы с конечным числом матриц. Мы описываем метод построения, алгоритм вычисления показателя Ляпунова и способ определения устойчивости системы. Также мы даем полную классификацию инвариантных норм планарных систем.

Ключевые слова: линейная система с переключениями, норма Барабанова, динамическая система, устойчивость, функция Ляпунова, норма, траектория, показатель Ляпунова

Управляемые линейные динамические системы (1) естественным образом возникают в задачах электроники, механики, робототехники, планирования, и т.д. [4]. Один из центральных вопросов – максимальный рост траекторий и устойчивость системы. *Показатель Ляпунова* $\sigma(\mathscr{A})$ системы – инфимум чисел α таких, что для всех траекторий системы $\boldsymbol{x}(t)$ выполнено $\|\boldsymbol{x}(t)\| \leq C e^{\alpha t}\|\boldsymbol{x}_0\|, \quad t \in [0, +\infty)$. Самый быстрый рост траектории имеет порядок $C e^{\sigma t}, t \to \infty$. Если $\sigma < 0$, то все траектории стремятся к нулю и такая система называется *асимптотически устойчивой*. Известно [5], что система асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда $\sigma < 0$. Один из методов исследования роста траекторий – это *инвариантная норма Ляпунова*, которая определяется неравенством $\|\boldsymbol{x}(t)\| \leq e^{\sigma t}\|\boldsymbol{x}_0\|$ для любой траектории $\boldsymbol{x}(t)$, при этом для любой точки $\boldsymbol{x}_0$ существует траектория $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ такая, что $\tilde{\boldsymbol{x}}(0) = \boldsymbol{x}_0$ и $\|\tilde{\boldsymbol{x}}(t)\| = e^{\sigma t}\|\boldsymbol{x}_0\|$. Единичный шар в этой норме называется инвариантным телом системы $\mathscr{A}$.

В работе [1] Н.Барабанов показал, что для любой неприводимой системы с выпуклым множеством управления $\mathscr{A}$ инвариантное тело существует. Построение инвариантного тела – очень сложная задача (см. подробнее [3]). В работе [7] было показано существование общих квадратурных формул Ляпунова у планарных систем с двумя матрицами. В работах [2] был построен пример системы, имеющей единственную нестрого выпуклую норму Ляпунова, подробнее о таких системах написано в работе [6]. Мы, в свою очередь, представляем полное решение этой задачи в случае $d = 2$. Оказывается, что для двумерных систем можно не только эффективно вычислять показатель Ляпунова, но и строить инвариантное тело в явном виде. Приводим соответствующий алгоритм и численные примеры. Более того, получена полная классификация норм Ляпунова для двумерных систем.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-71-30001) в МГУ им. М.В. Ломоносова.

Литература

1. Barabanov N.E. *Absolute characteristic exponent of a class of linear nonstationary systems of differential equations* // Siberian Math. J. – 1988. – V. 29. – C. 521–530.

2. *Chitour, Y., Gaye, M., and Mason, P.* Geometric and asymptotic properties associated with linear switched systems // J. Differential Equations. – 2015. – V. 259. – № 11. – C. 5582–5616.

3. Guglielmi N., Laglia L., and Protasov V.Yu., *Polytope Lyapunov functions for stable and for stabilizable LSS* // Found. Comput. Math. – 2017. – V. 17. – № 2. – C. 567–623.

4. Liberzon D. *Switching in systems and control*, Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser – Boston, Inc., Boston, MA, 2003.

5. Molchanov A. P. and Pyatnitskiy Y. S. *Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory* // Systems Control Lett. – 1989. – V. 13. – № 1. – C. 59–64.

6. *Moris I. D.* An irreducible linear switching system whose unique barabanov norm is not strictly convex optimization, arXiv:2301.09942v1.

7. *Shorten R. and Narendra K.*, Necessary and sufficient conditions for the existence of a common quadratic Lyapunov function for two stable second order linear time-invariant systems // in Proc. Amer. Control Conf. – 1999. – P. 1410–1414.

CLASSIFICATION OF BARABANOV NORMS OF PLANAR DYNAMICAL SYSTEMS

A. M. Musaeva

Since the 1980s, due to numerous applications, the problem of stability of linear dynamical switching systems

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t), \ \ t \geq 0, \\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \end{cases}$$

has been actively studied; here the matrix $A(\cdot)$ is a controlled parameter taking arbitrary values from a given compact set of matrices A. One of the main tools of stability exploration was the Barabanov norm. It is known that an irreducible d-dimensional system always has a Barabanov norm (invariant Lyapunov norm), which determines its stability and the maximum order of growth of trajectories. We prove that in the case of $d = 2$ the invariant norm is a piecewise analytic function and can be constructed explicitly for any system with a finite number of matrices. We will describe the construction method, the algorithm for calculating the Lyapunov exponent and the method for determining the stability of the system. We have obtained and formulated a complete classification of invariant norms of planar systems.

Keywords: linear switching system, Barabanov norm, stability, Lyapunov function, norm, trajectory, Lyapunov exponent.

УДК 517.982.23

О ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬФАНДА-ШИЛОВА ТИПА *S* И ТИПА *W*

И. Х. Мусин[1]

1 *musin_ildar@mail.ru*; ИМВЦ УФИЦ РАН.

Будут рассматриваться пространства Гельфанда-Шилова типа S и типа W, задаваемые при помощи семейств раздельно радиальных весовых функций в $\mathbb{R}^n$. При определённых условиях на весовые функции будут описаны пространства преобразований Фурье функций из рассматриваемых пространств, установлены связи между введёнными пространствами Гельфанда-Шилова типа S и типа W.

Ключевые слова: преобразование Фурье, выпуклые функции.

Одно из рассматриваемых пространств – пространство $\mathscr{S}(\mathscr{H})$ – определяется по семейству $\mathscr{H} = \{h_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ раздельно радиальных выпуклых функций h_ν в $\mathbb{R}^n$ с $h_\nu(0) = 0$ таких, что для любого $\nu \in \mathbb{N}$:

$i_1)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{h_\nu(x)}{\|x\|} = +\infty$ ($\|\cdot\|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$);

$i_2)$ $\lim\limits_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n:\\ |\alpha|\to+\infty}} (h_\nu(\alpha) - h_{\nu+1}(\alpha)) = +\infty$ ($|\alpha|$ – длина мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$);

$i_3)$ каково бы ни было $M > 0$ найдётся число $A_{\nu,M} > 0$ такое, что

$$h_\nu(x) \le \sum_{1\le j\le n: x_j\ne 0} x_j \ln\frac{x_j}{M} + A_{\nu,M}, \quad x = (x_1,\dots,x_n) \in [0,\infty)^n.$$

Для произвольных $\nu \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ введём пространство

$$\mathscr{S}_m(h_\nu) = \{f \in C^m(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{m,h_\nu} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\beta\in\mathbb{Z}_+^n,\\ \alpha\in\mathbb{Z}_+^n:|\alpha|\le m}} \frac{|x^\beta (D^\alpha f)(x)|}{\beta! e^{-h_\nu(\beta)}} < \infty\}.$$

Пусть $\mathscr{S}(h_\nu)$ – проективный предел пространств $\mathscr{S}_m(h_\nu)$. Положим $\mathscr{S}(\mathscr{H}) := \bigcup\limits_{\nu=1}^\infty \mathscr{S}(h_\nu)$. Наделим $\mathscr{S}(\mathscr{H})$ топологией внутреннего индуктивного предела пространств $\mathscr{S}(h_\nu)$.

Пусть $\mathscr{M} = \{M_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ – произвольное семейство выпуклых функций $M_\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ с $M_\nu(0) = 0$ таких, что для любого $\nu \in \mathbb{N}$:

$j_1)$ $M_\nu(x) = M_\nu(|x_1|,\dots,|x_n|),\ x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$;

$j_2)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{M_\nu(x)}{\|x\|} = +\infty$;

$j_3)$ существует число $C_\nu > 0$ такое, что $M_{\nu+1}(2x) \le M_\nu(x) + C_\nu,\ x \in \mathbb{R}^n$.

Для любых $\nu \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ определим пространство

$$GS_m(M_\nu) = \{f \in C^m(\mathbb{R}^n) : q_{m,\nu}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,|\alpha|\le m} |(D^\alpha f)(x)| e^{M_\nu(x)} < \infty\}.$$

Пусть $GS(M_\nu)$ – проективный предел пространств $GS_m(M_\nu)$, $GS(\mathscr{M})$ – внутренний индуктивный предел пространств $GS(M_\nu)$.

Для каждого $\nu \in \mathbb{N}$ определим функцию φ_ν в $\mathbb{R}^n$, полагая

$$\varphi_\nu(x) = h_\nu^*(\ln^+|x_1|,\dots,\ln^+|x_n|),\ x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

где h_ν^* – преобразование Юнга-Фенхеля функции h_ν. Положим $\Phi^* = \{\varphi_\nu^*\}_{\nu=1}^\infty$.

Теорема 1. *Пусть семейство $\mathscr{H}$ таково, что для любого $\nu \in \mathbb{N}$:*

$i_4)$ существует число $l_\nu > 0$ такое, что

$$h_{\nu+1}(x+y) \le h_\nu(x) + h_\nu(y) + l_\nu,\ x, y \in [0,\infty)^n;$$

$i_5)$ существуют числа $a_\nu > 0$ и $\gamma_\nu > 0$ такие, что

$$h_\nu(x) - h_{\nu+1}(x) \ge a_\nu \cdot \sum_{j=1}^n x_j - \gamma_\nu,\ x = (x_1,\dots,x_n) \in [0,\infty)^n.$$

Пусть раздельно радиальные выпуклые функции $\theta_\nu\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *(*$\nu = 1,2,\ldots$*) таковы, что для любого* $\nu \in \mathbb{N}$ *существует число* $b_\nu > 0$ *такое, что*

$$\theta_\nu(x) - b_\nu \le \varphi_\nu(x) \le \theta_{\nu+1}(x) + b_\nu,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда $\mathscr{S}(\mathscr{H}) = GS(\Phi^*)$.

Теорема 2. *Существует семейство* $\mathscr{H} = \{h_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ *выпуклых функций, удовлетворяющих условиям* $i_1) - i_5)$*, такое, что* $GS(\mathscr{M}) = \mathscr{S}(\mathscr{H})$.

Литература

1. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции (Пространства основных и обобщенных функций). – М.: Физматгиз, 1958.

2. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции (Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений). – М.: Физматгиз, 1958.

3. *Гуревич Б.Л.* Новые типы пространств основных и обобщённых функций и проблема Коши для операторных уравнений. Диссертация, Харьков, 1956.

4. *Chung J., Chung S.-Y. and Kim D.* Characterizations of the Gelfand-Shilov spaces via Fourier transforms // Proceedings of the AMS. – 1996. – V. 124. – № 7.

ON GELFAND-SHILOV TYPE SPACES S AND W

I. Kh. Musin

We consider Gel'fand-Shilov spaces of S *and* W *type which are introduced with help of families of separately radial weight functions in* $\mathbb{R}^n$*. Under certain conditions on weight functions, spaces of Fourier transforms of functions from the spaces under consideration will be described, connections between the introduced Gelfand-Shilov spaces of* S *type and* W *type will be established.*

Keywords: Fourier transform, convex functions.

УДК 517.962.8

О ПОСТРОЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАДАННОЙ СТРУКТУРЫ ПО ИЗВЕСТНЫМ СВОЙСТВАМ РЕШЕНИЙ

Р. Г. Мухарлямов[1], И. Е. Каспирович[2]

1 *robgar@mail.ru*; Российский университет дружбы народов.
2 *kaspirovich-ie@rudn.ru*; Российский университет дружбы народов.

Излагаются методы построения систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, решения которых удовлетворяют условиям стабилизации связей. С использованием модифицированных условий Гельмгольца система приводится к форме уравнений Лагранжа. Приводится решение задачи построения лагранжиана, соответствующего движению точки в потенциальном силовом поле. Исследуется задача управления движением тележки, определяется выражение центральной силы, обеспечивающей стабилизацию траектории движения точки.

Ключевые слова: уравнения, система, динамика, связь, управление, устойчивость, стабилизация.

Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка обычно используются для описания процессов динамики систем различной физической природы и их разнообразных аналогов. Основными требованиями, которые предъявляются к этим системам, являются представление их определенной структурой и обеспечение необходимой точности численного решения. В случае, когда известны некоторые интегралы, определяющие свойства решений, можно построить множество систем дифференциальных уравнений, из которого выделяются уравнения, соответствующие постановке задачи. Из равенств, составляющих частные интегралы

$$\begin{aligned}
&g_\alpha(\mathbf{q},t)=0,\ \ g_{\alpha,i}(\mathbf{q},t)\dot{q}^i+g_{\alpha_i,t}(\mathbf{q},t)=0,\ g_{\alpha,i}=\frac{\partial g_\alpha}{\partial q^i},\ \ \alpha=1,\dots,a,\\
&g_{\beta,i}(\mathbf{q},t)\dot{q}^i+g_{\beta_i,t}(\mathbf{q},t)=0,\ \ \beta=a+1,\dots,b,\ \ b\leqslant n,\\
&\mathbf{q}=(q^1,\cdots,q^n),\ \ \dot{q}^i=\frac{dq^i}{dt}.
\end{aligned}\tag{1}$$

следуют соотношения между векторами переменных $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$, $\ddot{\mathbf{q}}$

$$f_i(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},\ddot{\mathbf{q}}),\quad i=1,\dots,n,\tag{2}$$

которые определяются из уравнений возмущений связей

$$f_i\equiv\frac{dy_i}{dt}-Y_i(\mathbf{y},\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q},t),\ \ y_i=\delta_{ij}(\dot{q}^j-v^j(\mathbf{q},c_{b+1},\cdots,c_{n-1},t)),\quad i,j=1,\dots,n,$$

и содержат произвольные функции $Y_i(\mathbf{y},\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q},t)$. Функции Y_i используются для стабилизации связей, определяемых частными интегралами. Система дифференциальных уравнений (2), линейная относительно вектора произвольных ускорений $\ddot{\mathbf{q}}$, на основе условий Гельмгольца преобразуется к форме уравнений Лагранжа с диссипативной функцией [1]. Приводится решение задачи построения лагранжиана, соответствующего движению точки в потенциальном силовом поле. Использование модифицированных условий Гельмгольца [2] и линейной системы уравнений возмущений связей, приводит рассматриваемую систему уравнений к форме уравнений Лагранжа с диссипативной функцией [3]. В работе также предложено решение задачи Бертрана об определении силы, под действием которой материальная точка совершает движение по коническому сечению с постоянной секторной скоростью и доказана возможность обеспечения асимптотической устойчивости движения по траектории управлением центральной силой

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и г. Москва № 23-21-10065, https://rscf.ru/project/23-21-10065/.

Литература

1. Мухарлямов Р. Г. Приведение к заданной структуре уравнений динамики систем со связями // ПММ. – 2007. – Т. 71. – № 3. – с. 401–410.

2. Kielau G., Maisser P. A generalization of the Helmholtz conditions for the existence of a first-order Lagrangian // Z. angew. Math. Mech. — 2006. – №86(9). -– P. 722–735.

3. Каспирович И.Е., Мухарлямов Р.Г. О методах построения уравнений динамики с учетом стабилизации связей // Известия РАН. МТТ. – 2019. – № 3. – С. 124–135.

ON THE ACCUMULATION OF ERRORS IN THE NUMERICAL INTEGRATION OF SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS AND CONSTRAINT STABILIZATION

I. E. Kaspirovich, R. G. Mukharlyamov

Methods for constructing systems of second-order ordinary differential equations whose solutions satisfy the constraint stabilization conditions are outlined. Modified Helmholtz conditions are used to bring the system to the form of the Lagrange equations. The solution of the problem of constructing a Lagrangian corresponding to the motion of a point in a potential force field is presented. The problem of controlling the movement of the trolley is investigated and the expression of the central force is determined, which ensures the stabilization of the points movement trajectory.

Keywords: system, equations, dynamics, constraint, control, stability, stabilization.

УДК 514.822

О ПОВЕДЕНИИ ВНЕШНЕГО КОНФОРМНОГО МОДУЛЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧЕТЫРЕХСТОРОННИКА ПРИ ЕГО РАСТЯЖЕНИИ

С. Р. Насыров[1], В. З. Нгуен[2]

1 *snasyrov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского.

2 *nvgiang.math@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского.

В настоящей работе мы приводим асимптотическую формулу, описывающую поведение внешнего конформного модуля достаточно произвольного четырехсторонника при его неограниченном растяжении вдоль оси абсцисс. Тем самым мы даем решение задачи М. Вуоринена для внешнего модуля.

Ключевые слова: конформный модуль, внешний конформный модуль, четырехсторонник, квазиконформное отображение, сходимость областей к ядру.

Одной из важных проблем геометрической теории функций и ее приложений является изучение конформных модулей областей и их искажения при квазиконформных отображениях. В 2005 г. профессор М. Вуоринен поставил задачу исследования искажения конформных модулей областей при растяжении $f_H : x + iy \mapsto Hx + iy$ $(H > 0)$ при $H \to +\infty$ [2]. Исследование искажения внешнего конформного модуля четырехсторонника под действием f_H представляет несомненный интерес [3, 4]. В недавней статье [1] была получена асимптотическая формула для внешнего конформного модуля четырехсторонника для случая, когда этот четырехсторонник симметричен относительно обеих осей координат. Здесь мы сосредоточимся на изучении искажения внешнего конформного модуля достаточно произвольного (несимметричного) четырехсторонника при неограниченном растяжении его вдоль оси абсцисс.

Четырехсторонник $\boldsymbol{Q} = (Q; z_1, z_2, z_3, z_4)$ — это жорданова область Q на сфере Римана с четырьмя отмеченными точками z_1, z_2, z_3, и z_4 (вершинами) на ее границе; при этом увеличение индекса j соответствует положительному обходу границы ∂Q. Для удобства будем полагать по определению $z_5 \equiv z_1$, а дуги (z_j, z_{j+1}) на границе ∂Q называть сторонами четырехсторонника.

Для заданного четырехсторонника $\boldsymbol{Q}$, по теореме Римана об отображении существует однолистное конформное отображение φ области Q на прямоугольник $[0,1]\times[0,m]$, такое что точки z_1, z_2, z_3, и z_4 переходят в точки 0, 1, $1+im$ и im. Определяемая единствнным образом величина $m = \mathrm{Mod}\,(\boldsymbol{Q})$ называется конформным модулем четырехсторонника $\boldsymbol{Q}$. Такой модуль $\mathrm{Mod}\,(\boldsymbol{Q})$ также часто называется внутренним конформным модулем четырехсторонника $\boldsymbol{Q}$. Точно так же можно конформно отобразить область Q^c, дополнительную к области Q, с помощью функции $\psi : Q^c \to [0,1]\times[0,k]$ так, что четыре граничные точки (вершины Q) отображаются в вершины прямоугольника $\psi(z_1)=0$, $\psi(z_2)=1$, $\psi(z_3)=1+ik$, $\psi(z_4)=ik$. Тогда число k определяется единственным образом и называется внешним модулем четырехсторонника $\boldsymbol{Q}$. Мы будем обозначать этот конформный модуль $\mathrm{ExtMod}\,(\boldsymbol{Q})$.

Пусть $\mathfrak{R}$ — семейство всех четырехсторонников $\boldsymbol{Q} = (Q; z_1, z_2, z_3, z_4)$ таких, что область Q ограничена двумя кривыми

$$\Gamma_1 = \{x+iy : y = f(x),\ a \le x \le b\}, \qquad \Gamma_2 = \{x+iy : y = g(x),\ a \le x \le b\}$$

и двумя вертикальными отрезками $[z_1, z_2]$ и $[z_3, z_4]$, оканчивающимися в точках

$$z_1 = a + ig(a),\ z_2 = a + if(a),\ z_3 = b + if(b),\ z_4 = b + ig(b);$$

здесь f и g — некоторые функции, непрерывные на отрезке $[a,b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, такие что $f(x) < g(x)$ для всех $x \in [a,b]$. Обозначим через $\boldsymbol{Q}_H$ образ четырехсторонника $\boldsymbol{Q}$ при отображении f_H.

Теорема. *Для каждого четырехсторонника $\boldsymbol{Q} \in \mathfrak{R}$ имеем*

$$\mathrm{ExtMod}\,(\boldsymbol{Q}_H) \sim \frac{1}{\pi}\ln H,\ H \to +\infty.$$

Литература

1. Dyutin A., Nguyen G. V. , Asymptotics of the exterior conformal modulus of a symmetric quadrilateral under stretching map // Lobachevskii J. of Mathematics. – 2023. – V. 44. – № 4. – P. 1280–1289.

2. Nasyrov S. R., Riemann–Schwarz reflection principle and asymptotics of modules of rectangular frames // Computational Methods and Function Theory. – 2015. – V. 15. – № 1. – C. 59–74.

3. Nasyrov S., Sugawa T., Vuorinen M. Moduli of quadrilaterals and quasiconformal reflection // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2023. – V. 524. – № 2.

4. Vuorinen M. and Zhang X., On exterior moduli of quadrilaterals and special functions // Journal of Fixed Point Theory and Applications. – 2013. – V. 13. – № 1. – C. 215–230.

ON THE EXTERIOR CONFORMAL MODULUS OF AN ARBITRARY QUADRILATERAL UNDER STRETCHING MAP

S. R. Nasyrov, G. V. Nguyen

In this work, we obtain a formula describing the asymptotic behavior of the exterior conformal modulus of a sufficiently arbitrary quadrilateral under the stretched mapping along the axis abscissa with coefficient tending to infinity. Therefore, we give a solution to the problem proposed by M. Vuorinen for the exterior modulus.

Keywords: conformal modulus, exterior conformal modulus, quadrilateral, quasiconformal mapping, convergence of domains to a kernel.

УДК 517.984

О КОМПОНЕНТАХ КВАДРАТИЧНОЙ ЧИСЛОВОЙ ОБЛАСТИ ЗНАЧЕНИЙ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ФРИДРИХСА

Ш. Б. Неъматова[1]

1 *sh.b.nematova@buxdu.uz*; Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан.

В данной работе приведены формулы для вычисления квадратичной числовой областью значений обобщенной модели Фридрихса. Найденные оценки границ компонент квадратичной числовой областью значений позволили определить расположение собственных значений обобщенной модели Фридрихса.

Ключевые слова: операторная матрица, квадратичная числовая область значений, компоненты, спектр, точечный спектр, обобщенная модель Фридрихса.

Пусть $\mathbb{T}$ – одномерный тор, $\mathbb{C}$ – одномерное комплексное пространство, $L_2(\mathbb{T})$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}$, и $\mathscr{H}$ – прямая сумма пространств $\mathscr{H}_0 := \mathbb{C}$ и $\mathscr{H}_1 := L_2(\mathbb{T})$.

В гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ рассмотрим обобщенную модель Фридрихса

$$\mathscr{A} := \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{01}^* & A_{11} \end{pmatrix} \tag{1}$$

с матричными элементами $A_{ij} : \mathscr{H}_j \to \mathscr{H}_i$, $i, j = 0, 1$:

$$A_{00} f_0 = \varepsilon f_0, \; A_{01} f_1 = \int_{\mathbb{T}} \sin(t) f_1(t) dt,$$

$$(A_{11} f_1)(x) = (\varepsilon + 1 - \cos(x)) f_1(x), \; f_\alpha \in \mathscr{H}_\alpha, \; \alpha = 0, 1.$$

Здесь ε – вещественное число. В этих предположениях операторная матрица $\mathscr{A}$ является ограниченным и самосопряженным в $\mathscr{H}$ оператором.

Из известной теоремы Г. Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр оператора $\mathscr{A}$ совпадает с отрезком $[\varepsilon, \varepsilon + 2]$, $\sigma_{\text{ess}}(\mathscr{A}) = [\varepsilon, \varepsilon + 2]$.

Множество всех собственных значений матрицы

$$\mathscr{A}_f := \begin{pmatrix} (A_{00} f_0, f_0)_0 & (A_{01} f_1, f_0)_0 \\ (A_{01}^* f_0, f_1)_1 & (A_{11} f_1, f_1)_1 \end{pmatrix}, \quad f = (f_0, f_1) \in \mathscr{H}$$

таких, что $\|f_i\|_i = 1$, $i = 0, 1$ называется *квадратичной числовой областью значений* оператора $\mathscr{A}$, определенного по формуле (1) и обозначается как $\mathscr{W}^2(\mathscr{A})$ (см. [1]), т.е.

$$\mathscr{W}^2(\mathscr{A}) := \bigcup_{\|f_i\|_i = 1,\, i = 0,1} \sigma_{\text{p}}(\mathscr{A}_f), \quad f = (f_0, f_1) \in \mathscr{H},$$

где $(\cdot, \cdot)_i$ – скалярное произведение в $\mathscr{H}_i$, $i = 1, 2$. Для формулировки основных результатов данной работы введем следующие обозначения:

$$\Lambda_- := \bigcup_{\|f_1\|_1 = 1} \left\{ \min\{\varepsilon, (u f_1, f_1)_1\} - |(v, f_1)_1| \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2|(v, f_1)_1|}{|\varepsilon - (u f_1, f_1)_1|} \right) \right\};$$

$$\Lambda_+ := \bigcup_{\|f_1\|_1=1} \left\{ \max\{\varepsilon, (uf_1, f_1)_1\} + |(v, f_1)_1| \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2|(v, f_1)_1|}{|\varepsilon - (uf_1, f_1)_1|} \right) \right\}.$$

Теорема. *Для границ множеств $\Lambda_\pm$ имеют место следующие оценки:*

$$\varepsilon - \frac{\pi\sqrt{\pi}}{4} \le \inf \Lambda_- \le \varepsilon, \quad \sup \Lambda_- \le \varepsilon;$$

$$\inf \Lambda_+ \ge \varepsilon, \quad \varepsilon + 2 \le \sup \Lambda_+ \le \varepsilon + 2 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{\pi}.$$

Можно легко проверить, что операторная матрица $\mathscr{A}$ имеет два простых собственных значения E_α, $\alpha = 1, 2$ таких, что $E_1 < \varepsilon$ и $E_2 > \varepsilon + 2$. Таким образом,

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathscr{A}) = \{E_1\} \cup [\varepsilon, \varepsilon + 2] \cup \{E_2\}.$$

Из сформулированной теоремы следует, что для собственных значений E_α, $\alpha = 1, 2$, оператора $\mathscr{A}$ имеет места оценки

$$\varepsilon - \frac{\pi\sqrt{\pi}}{4} \le E_1 \le \varepsilon, \quad \varepsilon + 2 \le E_2 \le \varepsilon + 2 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{\pi}.$$

Таким образом, эта теорема позволяет определить расположение собственных значений обобщенной модели Фридрихса $\mathscr{A}$.

Литература

1. *Tretter C.*. Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications. – Imperial College Press, 2008.

ON THE COMPONENTS OF QUADRATIC NUMERICAL RANGE OF THE GENERALIZED FRIEDRICHS MODEL

Sh. B. Nematova

In this paper, the formulas for the quadratic numerical range of the generalized Friedrichs model are given. The estimates for the boundaries of the components of the quadratic numerical range allowed us to determine the location of the eigenvalues of the generalized Friedrichs model.

Keywords: operator matrix, quadratic numerical range, component, spectrum, point spectrum, generalized Fridrichs model.

УДК 512.581, 512.573, 539.1.01

ОГРАНИЧЕНИЯ ПРАВИЛАМИ СУПЕРОТБОРА В ПЕРЕДАЧЕ КВАНТОВОЙ ИНФОРМАЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ СОПРЯЖЕННЫХ СУПЕРОТБОРНЫХ СЕКТОРОВ

А. С. Никитин[1], А. С. Ситдиков[2], Д. В. Буштец[3]

1 -; Казанский государственный энергетический университет.
2 *airat_vm@rambler.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет.
3 -; Казанский государственный энергетический университет.

В работе производится расширение алгебраической модели [1] для исследования влияния неабелевых правил суперотбора на акт передачи квантовой информации с учетом сопряженного эндоморфизма. Рассматривается процедура усреднения (по группе $G = SU(3)$) проекторов на базисные состояния когерентных ортогональных подпространств, на которые разлагается пространство двух трехуровневых систем. В качестве области применения модели рассматриваем кодирование информации с помощью трехуровневой системы.

Ключевые слова: алгебраическая модель, C^*-категория, алгебра Кунца, правила суперотбора, квантовая информация.

По аналогии со схемой, разработанной нами в [1] для случая двухуровневой системы с изоспином $T = 1/2$, рассмотрим трехуровневую квантовую систему с $T = 1$ (кутрит), пространством состояний которого является трехмерное гильбертово пространство $\mathscr{H}$, образованное линейной оболочкой $\mathscr{H} = \mathrm{Lin}\{\psi_i\}_{i=1}^3$ мультиплета ψ_1, ψ_2, ψ_3 (являющего базисом в $\mathscr{H}$, где реализуется фундаментальное представление π группы $SU(3)$).

Пространство состояний двух кутритов разлагается в прямую сумму двух когерентных подпространств $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H} = \mathscr{H}_6 \oplus \bar{\mathscr{H}}_3$, в каждом из которых действуют неприводимые представления π_6 и $\bar{\pi}_3$ группы $SU(3)$, где $\pi \otimes \pi = \pi_6 \oplus \bar{\pi}_3$. Базисом пространства $\mathscr{H}_6$ служат симметрические тензоры, образованные из базисных элементов ψ_1, ψ_2, ψ_3, удовлетворяющих соотношениям:

$$\psi_{11} = \psi_1\psi_1; \quad \psi_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1\psi_2 + \psi_2\psi_1); \quad \psi_{13} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1\psi_3 + \psi_3\psi_1);$$

$$\psi_{22} = \psi_2\psi_2; \quad \psi_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_2\psi_3 + \psi_3\psi_2); \quad \psi_{33} = \psi_3\psi_3.$$

Базис пространства $\bar{\mathscr{H}}_3$, в котором действует сопряженное представление $\bar{\pi}_3$ группы $SU(3)$, определяется выражением

$$\hat{\psi}_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_2\psi_3 - \psi_3\psi_2); \hat{\psi}_{31} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_3\psi_1 - \psi_1\psi_3); \hat{\psi}_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1\psi_2 - \psi_2\psi_1).$$

Таким образом, 9-мерное пространство состояний разбивается на два суперотборных сектора, один из которых является сопряженным сектором. Проекторы на базисные состояния пространства $\mathscr{H}_6$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} &\Pi_{11} = \psi_{11}\psi_{11}^*, \ \Pi_{12} = \psi_{12}\psi_{12}^*, \ \Pi_{13} = \psi_{13}\psi_{13}^*, \\ &\Pi_{22} = \psi_{22}\psi_{22}^*, \ \Pi_{23} = \psi_{23}\psi_{23}^*, \ \Pi_{33} = \psi_{33}\psi_{33}^*. \end{aligned} \tag{1}$$

Аналогично для проекторов на базисные состояния пространства $\bar{\mathscr{H}}_3$ получим выражения

$$\hat{\Pi}_{23} = \hat{\psi}_{23}\hat{\psi}^*_{23}, \;\; \hat{\Pi}_{31} = \hat{\psi}_{31}\hat{\psi}^*_{31}, \;\; \hat{\Pi}_{12} = \hat{\psi}_{12}\hat{\psi}^*_{12}. \tag{2}$$

Не вдаваясь в подробности, с использованием схемы работы [1] можно показать, например, что состояние, приготовленное Алисой в симметричном состоянии ψ_{11} в ее координатной системе, Боб будет получать после процедуры усреднения в виде состояния (смешанного):

$$\tilde{\Pi}_{11} = \frac{1}{6}\left(\Pi_{11} + \Pi_{12} + \Pi_{13} + \Pi_{23} + \Pi_{22} + \Pi_{33}\right). \tag{3}$$

При получении этого выражения мы воспользовались процедурой усреднения по группе $SU(3)$ с мерой Хаара $d\mu(g) = \frac{4\sqrt{3}}{\pi^5}\sin 2\alpha_2 \cos\alpha_4 \sin^3\alpha_4 \sin 2\alpha_6 d\alpha_1 d\alpha_2 \cdot \ldots \cdot d\alpha_8$, приведенной в работе [2], где $0 \le \alpha_1 \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7, \le \pi$; $0 \le \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6 \le \pi/2$; $0 \le \alpha_8 \le \pi/\sqrt{3}$ являются обобщенными углами Эйлера. Нетрудно также убедиться в том, что $[\tilde{\Pi}_{11}, G] = 0$, которое указывает на принадлежность $\tilde{\Pi}_{11}$ к алгебре наблюдаемых.

Литература

1. Sitdikov A.S., Nikitin A.S. International Journal of Quantum Information // – 2022. – V. 20.
2. Byrd M. // J. Math. Phys. – 1998. – V. 39.

LIMITATIONS BY SUPERSELECTION RULES IN THE TRANSMISSION OF QUANTUM INFORMATION IN THE PRESENCE OF CONJUGATED SUPERSELECTIVE SECTORS

A. S. Nikitin, A. S. Sitdikov, D. V. Bushets

The paper extends the algebraic model from [1] to study the effect of non-Abelian superselection rules on the act of transmitting quantum information, considering conjugate endomorphism. The procedure of averaging (over the group $G = SU(3)$) projectors to the basic states of coherent orthogonal subspaces into which the space of two three-level systems decomposes is considered. As a field of application of the model, we consider the encoding of information using a three-level system.

Keywords: algebraic model, C^*-category, Cuntz algebra, super-selection rules, quantum information.

УДК 519.681

ОПЕРАТОР ФАЗОВОГО СДВИГА И ВЕНТИЛИ ТИПА Z, УПРАВЛЯЕМЫЕ МНОЖЕСТВЕННЫМИ КАНАЛАМИ

А. А. Новиков[1], Р. Л. Зайнуллин[2]

1 *a.hobukob@gmail.com*; Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
2 *remiru@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казань, Татарстан, Российская Федерация.

Одним из самых известных алгоритмов квантовых вычислений является алгоритм поиска Гровера. При определенных предположениях этот алгоритм обеспечивает квантовое ускорение задачи поиска. Мы всегда предполагаем, что можем построить его

эффективно, но предположим на мгновение, что мы ограничены в воротах, которые нам разрешено использовать для реализации оператора диффузии Гровера. Например, если нам нужно использовать не более двухканальных вентилей. Какова будет сложность схемы разложения для самого оператора диффузии? Здесь мы показываем, что достаточно использовать только операторы Z-базы (такие как $\sqrt[2^n]{Z}$ и управляемые CZ) и операторы Адамара, но также устанавливаем, что в этом случае количество используемых ворот может расти в геометрической прогрессии. По крайней мере, количество мультиуправляемых Z-элементов, необходимое для построения схемы декомпозиции оператора диффузии только следующих элементов: Z, управляемых Z, мультиуправляемых Z-элементов, или суммируется в $2^n - 1$ для n-мерный фазовый сдвиг и не может быть уменьшен, если мы не допустим других вентилей.

Ключевые слова: алгоритм Гровера, диффузия Гровера, квантовая схема, вентиль Адамара, вентиль Z, вентиль CZ.

Одной из важных частей алгоритма поиска Гровера является оператор диффузии Гровера, который описывается как композиция n-мерных операторов Адамара $H^{\otimes n}$ и преобразования $\mathscr{G}$, обычно называемого фазовым сдвигом:

$$\mathscr{G} : |0\rangle \mapsto |0\rangle \text{ и } \mathscr{G} : |x\rangle \mapsto -|x\rangle \text{ для } x \neq 0.$$

Основным нашим результатом является то, что если мы используем предложенный базис элементов $\{C^k Z\}_{k=1}^n$, то разложение этого вентиля неприводимо – нам нужно ровно $2^n - 1$ элементов, все предложенные вентили, используемые с разными кубитами ровно один раз в каждой возможной позиции.

Мы используем элементы H, Z и $CR_\theta(Z)$ (которые мы понимаем как CPHASE(θ)) как раз достаточно для разложения любых n-фазовых сдвигов кубита на двухкубитные и однокубитные вентили на любом количестве кубитов. Можно быть уверенным, что если не брать аспекты надежности и отказоустойчивости, то общее количество двухкубитных вентилей, используемых в схеме, имеет верхнюю границу $O(4^n)$.

Для n-кубитной схемы мы называем $C_{i,j}Z$ двухкубитным оператором CZ с i-м управляющим квантовым каналом и j-м управляемым квантовым каналом. Очевидно, $C_{i,j}Z = C_{j,i}Z$ с $i, j \in 0, n-1$. Таким образом, мы можем обозначить его просто как $C_{i,j}Z$, где i, j — это индексы задействованных каналов.

Также предположим, что оператор $C_{i_0,i_1,i_2,\ldots i_k}Z$ является многоуправляемым оператором, который включает $i_0, i_1, \ldots i_{k-1}$ в качестве управляющих каналов и i_k — управляемый канал. Также очевидно, что

$$C_{i_0,i_1,i_2,\ldots i_k}Z = C_{\sigma(i_0),\sigma(i_1),\sigma(i_2),\ldots\sigma(i_{k-1})i_k}Z$$

для любого автоморфизма σ $\{i_0, i_1 \ldots i_{k-1}\}$ на себя. Таким образом, мы можем закодировать $C_{i_0,i_1,i_2,\ldots i_k}Z$ как C_jZ, где $j \in \overline{0, 2^n - 1}$ — число, представленное в двоичной форме в виде числа с 1 на i_k-х позициях и 0 на всех остальных.

Также предположим, что оператор $C_{i_0,i_1,i_2,\ldots i_k}Z$ является многоуправляемым оператором, который включает $i_0, i_1, \ldots i_{k-1}$ в качестве управляющих каналов и i_k — управляемый канал. Также очевидно, что

$$C_{i_0,i_1,i_2,\ldots i_k}Z = C_{\sigma(i_0),\sigma(i_1),\sigma(i_2),\ldots\sigma(i_{k-1})i_k}Z$$

для любого автоморфизма σ $\{i_0, i_1 \dots i_{k-1}\}$ на себя. Таким образом, мы можем закодировать $C_{i_0,i_1,i_2,\dots i_k}Z$ как C_jZ, где $j \in \overline{0, 2^n-1}$ — число, представленное в двоичной форме в виде числа с 1 на i_k-х позициях и 0 на всех остальных.

Предложение 1. *C_jZ корректно определен для $j = \overline{0, 2^n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.*

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $j = \overline{0, 2^n-1}$ и M_j^n — матричное представление C_jZ в 2^n–мерном фазовом пространстве. квантовой цепи, то*

$$\det M_j^n = -1 \text{ тогда и только тогда, когда } j = 2^n - 1,$$

в противном случае $\det M_j^n = 1$.

Теорема 2. *Для фазового сдвига n кубитов необходимо, чтобы все нетривиальные элементы системы $\{C_jZ\}_{j=0}^{2^n-1}$ были разложены на примитивы этой системы, т.е.*

$$2|0\rangle\langle 0| - \mathrm{Id} = \prod_{j=1}^{2^n-1} M_j^n.$$

Дальнейшие оценки сложности фазового сдвига в различных системах вентилей могут быть основаны на нашей декомпозиции, поскольку наша декомпозиция является точной в описанном смысле, поэтому она может быть основой для нижней граничной оценки количества вентилей, используемых для Реализация схемы фазового сдвига n-кубитов.

Благодарности

Работа А.А. Новиков выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке (Новосибирск), соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации №075-15-2022-281. Р.Л. Зайнуллин выполнял работу в рамках программы развития Поволжского математического центра (договор № 075-02-2020-1478).

Литература

1. Grover L.K. A fast quantum mechanical algorithm for database search / Proc. 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing (STOC), May (1996), P. 212-219.

2. Grover L. K. Quantum Mechanics Helps in Searching for a Needle in a Haystack // Phys. Rev. Lett. – 1997. – V. 79. – № 325.

3. Zalka C. Grover's quantum searching algorithm is optimal // Phys. Rev. A V. – 1999. – V. 60, 1999.

4. Dohotaru C., Hoyer P. Exact quantum lower bound for Grover's problem // Quantum Information & Computation. – 2009. – V. 9. – № 5. – C. 533–540.

PHASE SHIFT AND MULTI-CONTROLLED Z-TYPE GATES

A. A. Novikov, R. L. Zainullin

One of the most famous algorithms in quantum computations is the Grover search algorithm. Under certain assumptions, this algorithm provides quantum speedup for the search problem. We always assume that we can build it efficiently, but assume for a moment that you are limited in the gates you are allowed to use for the implementation of the Grover diffusion operator. For example, if you need to use at most two-channel gates. What would be the complexity of the decomposition circuit for the

diffusion operator itself? Here we show that it is sufficient to use just only the Z-base operators (such $\sqrt[2^n]{Z}$ *and controlled* CZ*) and Hadamard operators, but also we show that in this case, the number of used gates can grow exponentially. At least, the number of the multi-controlled Z-gates needed to build diffusion operator decomposition circuit only of the following gates: Z, controlled Z, multi-controlled Z-gates, or is summed into* $2^n - 1$ *for the n-dimensional phase shift and cannot be decreased if we will not allow other gates.*

Keywords: Grover algorithm, Grover diffusion, quantum circuit, Hadamard gate, Z gate CZ gate.

УДК 515.126.83

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ НЕЯВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

В. В. Обуховский[1], С. В. Корнев[2], Е. Н. Гетманова[3], В. А. Бочаров[4]

1 *valerio-ob2000@mail.ru*; Воронежский государственный педагогический университет.
2 *kornev_vrn@rambler.ru*; Воронежский государственный педагогический университет.
3 *ekaterina_getmanova@bk.ru*; Воронежский государственный педагогический университет.
4 *vladbotcharov@mail.ru*; Воронежский государственный педагогический университет.

В докладе рассматривается система управления со случайной обратной связью. Для исследования существования ее решения применяется теория случайного индекса совпадения.

Ключевые слова: система управления со случайной обратной связью, случайное решение, случайное мультиотображение, J-мультиотображение, CJ-мультиотображение, фредгольмов оператор нулевого индекса, функция управления.

Известно, что топологические методы и, в частности, задачи о неподвижных точках и точках совпадения нелинейных отображений могут быть эффективно применены к изучению систем управления со сложными звеньями.

В данном докладе рассматривается задача существования решений следующей неявной случайной системы управления с обратной связью.

Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с σ-конечной мерой. Рассмотрим систему управления, заданную следующими соотношениями:

$$A\big(t, x(t), x'(t)\big) = B\left(t, x(t), x'(t), \int_0^t y_\omega(s)\, ds\right), \quad t \in [0, a]; \tag{1}$$

$$y_\omega(\tau) \in C(\omega, \tau, x(\tau)), \quad \text{п.в. } s \in [0, a],\ \forall \omega \in \Omega; \tag{2}$$

$$x(0) = x_0\,, \tag{3}$$

где $\omega \in \Omega$, $A : [0, a] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $B : [0, a] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ – непрерывные отображения; $C : \Omega \times [0, a] \times \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^m$ – многозначное отображение и $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Под случайным решением задачи (1)-(3) понимается пара (x_ω, y_ω), состоящая из траектории – функции $x_\omega(\cdot)$ такой, что $\omega \in \Omega \mapsto x_\omega \in C^1\big([0, a]; \mathbb{R}^n\big)$ – измеримая функция такая, что функция x_ω при каждом $\omega \in \Omega$ удовлетворяет соотношениям (1)-(3). В то же время, функция управления $y_\omega(\cdot)$ такова, что $\omega \in \Omega \mapsto y_\omega \in L^1([0, a]; \mathbb{R}^m)$ –

измеримое отображение и функция y_ω удовлетворяет для каждого $\omega \in \Omega$ условиям (1)-(3).

В докладе показано, что существование траектории задачи (1)-(3) может быть сведено к нахождению точки совпадения для пары случайных отображений, одно из которых является нелинейным фредгольмовым оператором нулевого индекса, а второе – многозначным отображением с невыпуклыми значениями. Приведены условия, при которых многозначное отображение будет уплотняющим относительно фредгольмова оператора. Это дает возможность применить для отыскания точек совпадения новую топологическую характеристику – случайный индекс совпадения. После нахождения случайной траектории системы (1)-(3) соответствующее ей управление может быть найдено с помощью случайной версии леммы Филиппова.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 22-71-10008 и Минпросвещения России в рамках государственного задания (QRPK-2023-0002).

Литература

1. *Обуховский В. В., Гетманова Е. Н., Корнев С. В.* О некоторых классах измеримых многозначных отображений // Известия Воронежского государственного педагогического университета. – 2021. – №3. – С. 181-186.

2. *Обуховский В. В., Корнев С. В., Гетманова Е. Н.* О топологических характеристиках для некотрых классов многозначный отображений // Чебышевский сборник. – 2020. – Т. 21. – № 2. – С. 291-309.

3. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Series in Nonlinear Analysis and Applications. – Berlin – New York: De Gruyter, 2001. – 239 p.

4. *Obukhovskii V., Gel'man B.* Multivalued Maps and Differential Inclusions: Elements of Theory and Applications // Elements of Theory and Applications. World Scientific Publishing Co., Hackensack, NJ – 2020.

ON THE EXISTENCE OF A SOLUTION TO AN IMPLICIT RANDOM FEEDBACK CONTROL SYSTEM

V.V. Obukhovskii, S.V. Kornev, E.N. Getmanova, V.A. Bocharov

We consider a control system with random feedback. The theory of random coincidence index is used to study the existence of its solution.

Keywords: random feedback control system, random solution, random multimap, J-multimap, CJ-multimap, zero-index Fredholm operator, control function.

УДК 519.642

РАВНОМЕРНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО СИЛЬНО СИНГУЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА

А. В. Ожегова[1], Л. Э. Хайруллина[2]

1 *ozhegovaalla@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И.Лобачевского.

2 *liliya-v1@yandex.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий.

В работе устанавливается равномерная сходимость приближенных решений периодического сильно сингулярного интегрального уравнения первого рода. Это становится возможным за счет корректной постановки задачи на паре специально выбранных пространств.

Ключевые слова: сильно сингулярное интегральное уравнение первого рода, корректность задачи.

Рассматривается периодическое сильно сингулярное интегральное уравнение вида

$$Kx \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x(\sigma)d\sigma}{2\sin^2\frac{\sigma-s}{2}} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s,\sigma)x(\sigma)d\sigma = y(s),\ 0 < s < 2\pi, \tag{1}$$

где $h(s,\sigma), y(s)$ – известные 2π–периодические функции, $x(\sigma)$ – искомая функция, а интеграл

$$G(x;s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x(\sigma)d\sigma}{2\sin^2\frac{\sigma-s}{2}}$$

понимается в смысле конечной части по Адамару.

Указанное уравнение встречается при решении ряда задач электродинамики, гидродинамики, теории упругости. В замкнутом виде решение, как правило, не находится, поэтому применяют численные методы. Однако наличие сингулярности такого типа приводит к некорректной постановке задачи во многих функциональных пространствах, а тогда использование аппроксимативных методов невозможно.

В работе, следуя методике авторов [1], предлагается новая пара пространств, на которых устанавливается корректность рассматриваемых задач.

Пусть X – пространство непрерывных функций, для которых сингулярный интеграл

$$J(x;s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}x(\sigma)d\sigma,$$

понимаемый в смысле главного значения по Коши, является также непрерывной функцией, с нормой

$$\|x\|_X = \|x\|_C + \|Jx\|_C.$$

В монографии [2] рассмотрены условия существования и единственности решения характеристического уравнения.

В этих условиях справедлива

Теорема. *Оператор $G : X \to X$ обратим,*

$$x^*(s) = -\int_0^s J(y;\sigma)d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sigma J(y;\sigma)d\sigma$$

и справедлива оценка

$$\|G^{-1}\|_{X\to X} = 1.$$

Следовательно, уравнение (1) можно рассматривать как уравнение, приводящееся к уравнениям второго рода и применять к нему различные аппроксимативные методы.

В работе обоснованы проекционные методы в выбранных пространствах с установлением равномерных оценок погрешностей, зависящих от структурных свойств исходных данных.

Литература

1. Ozhegova A. V, Khairullina L. E. *Well-Posedness of a Problem of Solving Some Classes of Integral Equations of the First Kind*// Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – V. 43, Is. 12. – P. 3605-3615.

2. Габдулхаев Б. Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1995. – 231 с.

UNIFORM APPROXIMATIONS OF A PERIODIC STRONGLY SINGULAR EQUATION OF THE FIRST KIND

A. V. Ozhegova, L. E. Khairullina

The paper establishes uniform convergence of approximate solutions of a periodic strongly singular integral equation of the first kind. This becomes possible due to the correct formulation of the problem on a pair of specially selected spaces.

Keywords: strongly singular integral equation of the first kind, correctness of the problem.

УДК 517.518.336

ФОРМУЛА СЛЕДА ДЛЯ ПОЛИНОМОВ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ В УСИЛЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

Б. П. Осиленкер[1]

1 *b_osilenker@mail.ru*; НИУ Московский государственный строительный университет.

В усиленных пространствах Соболева получена формула следа для ортонормированных полиномов $\{\widehat{q}_n(x)\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Доказательства основаны на представлении обобщенного ядра Дирихле.

Ключевые слова: ортогональные полиномы, формула следа, полиномы Соболева, пространства Соболева, усиленные пространства Соболева, ядро Дирихле.

Пусть $\mu(x)$ – конечная положительная борелевская мера на промежутке $[-1,1]$ с бесконечным числом точек роста и a_k, $-\infty < a_k < \infty$, $k = 1,2,\ldots,m$. Для функций f и g из L^2_μ таких, что существуют их производные в точках a_k, введем скалярное произведение

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)d\mu(x) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{N_k} M_{k,i} f^{(i)}(a_k)g^{(i)}(a_k), \tag{1}$$

$$M_{k,i} > 0 (i = 0,1,\ldots,N_k; k = 1,2,\ldots,m), \mu'(x) > 0 \text{ почти всюду.}$$

Такие пространства являются частными случаями "усиленных пространств Соболева"(их также называют континуально-дискретными пространствами Соболева). Пусть$\{\widehat{q}_n(x)\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$,$\mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\ldots\}$, – система полиномов степени n, ортонормированных относительно скалярного произведения (1).

Пусть N_k^* – натуральное число, определяемое следующим образом:

$$N_k^* = \begin{cases} N_k + 1, \text{ если } N_k \text{ нечетно,} \\ N_k + 2, \text{ если } N_k \text{ четно,} \end{cases}$$

и положим

$$w_N(x) = \prod_{k=1}^{m}(x - a_k)^{N_k^*}, \quad N = \sum_{k=1}^{m} N_k^*.$$

Ортонормированные полиномы $\{\widehat{q}_n(x)\}(n \in \mathbb{Z}_+)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$w_N(x)\widehat{q}_n(x) = \sum_{j=0}^{N} d_{n+j,j}\widehat{q}_{n+j}(x) + \sum_{j=1}^{N} d_{n,j}\widehat{q}_{n-j}(x) \tag{2}$$

$$(n \in \mathbb{Z}_+; \widehat{q}_{-j}(x) = 0, j = 1,2,\ldots; d_{n,j} = 0, j > n\}.$$

Обозначим

$$\varepsilon_m = \begin{cases} (-1,1)\backslash\cup_{k=1}^{m}\{a_k\} \text{ при } |a_k| < 1, k = 1,2,\ldots,m, \\ (-1,1) \text{ при} |a_k| > 1, k = 1,2,\ldots,m. \end{cases}$$

Теорема. *Пусть для последовательности вещественных чисел δ_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, выполняются условия*

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n = \delta \neq 0, \sum_{j=0}^{N}\sum_{k=0}^{\infty}|\delta_k - \delta_{k+j}| < \infty.$$

и система полиномов $\{\widehat{q}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям:
(i) система $\{\widehat{q}_n(x)\}$ равномерно ограничена на каждом компактном подмножестве K из ε_m;
(ii) для рекуррентных коэффициентов (2) *выполняется оценка*

$$\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=0}^{\infty}|d_{k,j} - d_{k+r,j}| < \infty \quad (r = 1,\ldots,N).$$

Тогда равномерно на K из ε_m справедлива "формула следа":

$$\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=0}^{\infty}(\delta_k d_{k+r,j}-\delta_{k-j}d_{k,j})\widehat{q}_k(x)\widehat{q}_{k+r-j}(x)$$
$$+\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=0}^{\infty}(\delta_k d_{k+r+j,j}-\delta_{k+j}d_{k+j,j})\widehat{q}_k(x)\widehat{q}_{k+j+r}(x)=\frac{\delta}{\pi}U_{r-1}(x)\,w_N^{'}(x)\frac{\sqrt{1-x^2}}{\omega(x)},$$

где $U_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}(-1\le x\le 1)$ *– полиномы Чебышева II рода степени* $n\in\mathbb{Z}_+$. *Получена оценка скорости сходимости.*

Замечание. В предельном случае, когда все $M_{k,i}$ равны нулю, формула следа получена в [1]. Частный случай теоремы рассмотрен в [2] (см. также [3]).

Литература

1. *Dombrowski J., Nevai P.* Orthogonal polynomials,measures and recurrence relations // SIAM J. Math. Anal. – 1986. – V. 17. – P. 705–718.

2. *Osilenker B.P.* Generalized trace formula and asymptotics of the averaged Turan determinant.

3. *Осиленкер Б.П.* Обобщенная формула следа для полиномов, ортогональных в континуально-дискретных пространствах Соболева // Функциональный анализ и его приложения. – 2020. – V. 54. – С. 102–105.

TRACE FORMULA FOR POLYNOMIALS ORTHOGONAL IN THE STRONG SOBOLEV SPACES

B. P. Osilenker

In the strong Sobolev spaces, the trace formula for orthogonal polynomials $\{\widehat{q}_n(x)\}$, $n\in\mathbb{Z}_+$, *has been obtained. Proof of this formula is based on the representation of the generalized Dirichlet kernel.*

Keywords: orthogonal polynomials, trace formula, Sobolev polynomials, Sobolev spaces, strong Sobolev spaces, Dirichlet kernel.

УДК 517.5

УТОЧНЕНИЕ ОЦЕНКИ СКОРОСТИ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДА ФУРЬЕ НЕПРЕРЫВНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

А. Ю. Попов[1], Т. Ю. Семенова[2]

1 *station@list.ru*; Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова.
2 -; Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова.

Уточняется оценка скорости сходимости ряда Фурье непрерывной периодической функции ограниченной вариации

Ключевые слова: функции ограниченной вариации, скорость сходимости ряда Фурье.

Введём обзначения: $C_{2\pi}$ — пространство непрерывных на $\mathbb{R}$ 2π-периодических функций с нормой $\|f\|=\sup\{|f(x)|\,\big|\,x\in\mathbb{R}\}$; $CV_{2\pi}$ – подпространство $C_{2\pi}$, состоящее

из всех функций, имеющих ограниченную вариацию на $[-\pi, \pi]$, $V(f)$ – значение этой вариации; модуль непрерывности

$$\omega(f; h) = \max_{0 \le |t| \le h} \|\Delta_t f\|, \text{ где } \Delta_t f(x) = f(x+t) - f(x). \tag{1}$$

Через $r_n(f)$ обозначим разность между f и её n-й частичной суммой ряда Фурье по тригонометрической системе.

В 1881 году К. Жордан [1] для любой $f \in CV_{2\pi}$ доказал стремление к нулю $\|r_n(f)\|$ при $n \to \infty$. В 1952 году С.Б. Стечкин [2] (его результат уточнил С.А. Теляковский [3]) дал оценку скорости сходимости:

$$\|r_n(f)\| = O\left[\omega\left(f; \frac{\pi}{n}\right) \ln\left(\frac{V(f)}{\omega(f; \frac{\pi}{n})}\right)\right], \ f \in CV_{2\pi}, \ f \not\equiv \text{const}.$$

В.В. Жук ([4], стр. 241) вывел оценку сверху $\|r_n(f)\|$ для произвольной функции $f \in C_{2\pi}$, учитывающую "малость" наилучших приближений $E_{n,p}(f)$ функции f по L^p-норме тригонометрическими полиномами порядка не выше n. Результат получен В.В. Жуком для модулей непрерывности произвольных порядков. Мы приведём его оценку в частном случае, когда рассматривается модуль непрерывности (1).

Пусть $f \in C_{2\pi}, f \not\equiv \text{const}, \ n \in \mathbb{N}, \ \ p \in (1, +\infty)$. Тогда верно неравенство

$$\|r_n(f)\| \le \omega\left(f; \frac{\pi}{n+1}\right) \left[\frac{2}{\pi^2} \ln\left(1 + n\left(\frac{2E_{n,p}(f)}{\omega(f; \frac{\pi}{n+1})}\right)^p\right) + C(p)\right], \tag{2}$$

в котором

$$C(p) = 2R_2 + 2.5 + \tfrac{\pi}{4}\left(\int\limits_0^{+\infty} \left(\tfrac{u - \sin u}{u^2}\right)^q du\right)^{1/q}, \ \ q = p/(p-1),$$

а R_2 – оптимальная константа в оценке сверху приближения функции средними Рисса порядка 2 через её второй модуль непрерывности (см. [4], стр. 236). Значение $p = 1$ В.В. Жук не рассмотрел, однако переход в (2) к значению $p = 1$ возможен. Анализ доказательства неравенства (2) и численная оценка сверху R_2, согласно имеющимся в [4] рассуждениям, дают

$$\|r_n(f)\| \le \omega\left(f; \frac{\pi}{n+1}\right) \left[\frac{2}{\pi^2} \ln\left(1 + \frac{2nE_{n,1}(f)}{\omega(f; \frac{\pi}{n+1})}\right) + 9.5\right].$$

А так как согласно теореме С.Б. Стечкина [5] об оценке $E_{n,p}$ через интегральный модуль непрерывности и оценке последнего через вариацию функции ([4], стр. 110)

$$2nE_{n,1}(f) \le 3\pi V(f) \ \ \forall f \in C_{2\pi}, \ \ f \not\equiv \text{const}, \ \ n \in \mathbb{N},$$

то получаем неравенство

$$\|r_n(f)\| \le \omega\left(f; \frac{\pi}{n+1}\right) \left[\frac{2}{\pi^2} \ln\left(1 + \frac{3\pi V(f)}{\omega(f; \frac{\pi}{n+1})}\right) + 9.5\right].$$

Именно это следствие из результатов В.В. Жука, нигде в математической литературе нам не встретившееся, мы и уточняем. Нами доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть* $f \in CV_{2\pi}$, $f \not\equiv const$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда верно неравенство*

$$\|r_n(f)\| < \omega_n(f)\left[\frac{2}{\pi^2}\ln\left(\frac{V(f)}{\omega_n(f)}\right)+1.31\right], \text{ где } \omega_n(f)=\omega\Big(f;\frac{\pi}{1.5(n+0.5)}\Big).$$

Теорема 2. *Для любых чисел* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, *и* $\omega_n \in [1/n, 1/2]$ *существует функция* $\varphi = \varphi_n \in CV_{2\pi}$, *обладающая следующими свойствами:* $\omega_n(\varphi) = \omega_n$, $1 \leq V(\varphi) \leq 2$ *и* $|r_n(\varphi, 0)| > \omega_n\left(\frac{2}{\pi^2}\ln\left(\frac{V(\varphi)}{\omega_n}\right)+0.31\right)$.

Величина $\omega_n(f)$ была введена С.Б. Стечкиным и В.Т. Гаврилюк [6] в связи с доказанным ими неравенством

$$\|r_n(f)\| \leq \omega_n(f)\,\frac{L_n+1}{2} \quad \forall f \in C_{2\pi}, \quad f \not\equiv \text{const}, \quad n \in \mathbb{N},$$

в котором L_n — n-я константа Лебега тригонометрической системы.

Литература

1. *Jordan C.* // C. R. Acad. Sci. – 1881. – V. 92. – P. 228–230.

2. *Стечкин С.Б.* О приближении непрерывных функций суммами Фурье // УМН. – 1952. – Т. 7. – № 4. – С. 139–141.

3. *Теляковский С.А.* О работах С.Б. Стечкина по приближению периодических функций полиномами // Фундаментальная и прикладная математика. – 1997. – Т. 3. – № 4. – С. 1059–1068.

4. *Жук В.В.* Аппроксимация периодических функций. – Ленинград: ЛГУ, 1982.

5. *Стечкин С.Б.* Замечание к теореме Джексона // Труды МИАН СССР. – 1967. – Т. 88. – С. 17–19.

6. *Гаврилюк В.Т., Стечкин С.Б.* Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье // Труды МИАН СССР. – 1985. – Т. 172. – С. 107–127.

REFINEMENT OF THE ESTIMATE FOR THE RATE OF UNIFORM CONVERGENCE OF THE FOURIER SERIES OF A CONTINUOUS PERIODIC FUNCTION OF BOUNDED VARIATION

A. Yu. Popov, T. Yu. Semenova

An estimate for the convergence rate of the Fourier series of a continuous periodic function of bounded variation is refined.

Keywords: function of bounded variation, convergence rate of the Fourier series.

УДК 517.518.4

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОЦЕНКИ СНИЗУ С.А. ТЕЛЯКОВСКОГО СУММЫ СИНУС-РЯДА С ВЫПУКЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА БОЛЕЕ ДЛИННЫЙ ОТРЕЗОК

А. Ю. Попов[1], А. П. Солодов[2]

1 *aypopov.msu@yandex.ru*; Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
2 *apsolodov@mail.ru*; Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Уточняется одна из оценок снизу суммы синус-ряда с выпуклой последовательностью коэффициентов, найденная С.А. Теляковским.

Ключевые слова: ряды по синусам с выпуклыми коэффициентами.

Рассматриваются синус-ряды $g(b;x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$, последовательности коэффициентов $b = \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ которых выпуклы и стремятся к нулю. Для сумм таких рядов Салем [1] при условии неубывания kb_k вывел порядковое соотношение $g(b;x) \asymp b_{m(x)}/x$, $x \to 0+$, где $m(x) = [\pi/x]$. Если, кроме этого, $\lim_{k\to\infty}(b_{2k}/b_k) = 1$, то верна асимптотика $g(b;x) \sim b_{m(x)}/x \sim (1/2)b_{m(x)}\operatorname{ctg}(x/2)$, $x \to 0+$ (см. [2]). С. А. Теляковский [3] дополнил эти результаты, выведя неравенство

$$g(b;x) > \frac{b_m}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} \qquad \forall x \in \left[\frac{\pi}{m+1}, \frac{\pi}{m}\right], \tag{1}$$

в котором выпуклая и стремящаяся к нулю последовательность b может быть совершенно произвольной. Оно было доказано в [3] при любом $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 11$, а в [4] получено уже при всех $m \geqslant 2$. Также в [3] был найден порядок разности $g(b;x) - (b_{m(x)}/2)\operatorname{ctg}(x/2)$ при $x \to 0+$, а в [4] в порядковом соотношении Теляковского найдены точные константы. Цитированные результаты показывают, что неравенство (1) выполняется со “значительным” запасом и, видимо, может быть распространено на меньшие значения x.

Теорема 1. *Пусть $b = \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — произвольная выпуклая и стремящаяся к нулю последовательность, $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$. Тогда для разности $g_m(b;x) = g(b;x) - (b_m/2)\operatorname{ctg}(x/2)$ верна оценка снизу*

$$g_m(b;x) \geqslant \frac{m\sin x - 1}{2(1-\cos x)}(b_m - b_{m+1}) \qquad \forall x \in \left[\arcsin\frac{1}{m}, \frac{\pi}{m}\right].$$

Напомним, что в силу выпуклости последовательности b последовательность разностей $\Delta b_k = b_k - b_{k+1}$ монотонно стремится к нулю. Поэтому равенство нулю разности $b_m - b_{m+1}$ возможно тогда и только тогда, когда $g(b;x) = \sum_{k=1}^{m-1} b_k \sin kx$ (и, естественно, набор чисел $\{b_1, \ldots, b_{m-1}, 0\}$ является выпуклым).

Отметим, что $\arcsin(1/m) \leqslant \pi/(3m)$ для любого $m \geqslant 2$ (равенство достигается при $m = 2$, а при $m > 2$ неравенство строгое).

Теорема 1 позволяет поставить следующую задачу. При любом $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, найти величину x_m, по определению равную точной нижней грани значений x, при которых неотрицательны функции $g_m(b;x)$, какова бы ни была выпуклая и стремящаяся к нулю последовательность b. Теорема 1 дает неравенство $x_m \leqslant \arcsin(1/m)$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$. Нами получен следующий результат.

Теорема 2. *Справедливы равенство $x_2 = \pi/6$ и оценки снизу*

$$x_3 > \arcsin 0.33, \qquad x_4 > \arcsin 0.24, \qquad x_5 > \arcsin 0.19,$$
$$x_m > \frac{3\pi}{10m} > \arcsin\frac{0.93}{m} \quad \forall m \geqslant 6.$$

Работа Солодова А.П. выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (грант № 22-7-1-23-1).

Литература

1. Salem R. *Détermination de l'ordre de grandeur á l'origine de certaines séries trigonométriques* // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1928. – V. 186. – P. 1804–1806.

2. Aljančić S., Bojanić R., Tomić M. *Sur le comportement asymptotique au voisinage de zéro des séries trigonométriques de sinus à coefficients monotones* // Publ. Inst. Math. Serbe Sci. – 1956. – V. 10. – № 1. – P. 101–120.

3. Telyakovskiĭ S. A. *On the behavior near the origin of the sine series with convex coefficients* // Publ. Inst. Math. (Beograd). – 1995. – V. 58(72). – P. 43–50.

4. Солодов А. П. *Точные константы в двусторонней оценке С. А. Теляковского суммы ряда по синусам с выпуклой последовательностью коэффициентов* // Матем. заметки. – 2020. – V. 107. – № 6. – P. 906–921.

EXTENSION OF TELYAKOVSKIĬ'S LOWER ESTIMATE OF THE SUM OF A SINE SERIES WITH CONVEX COEFFICIENTS TO A LONGER SEGMENT

A. Yu. Popov, A. P. Solodov

One of the lower estimates of the sum of a sine series with a convex sequence of coefficients, found by S.A. Telyakovskiĭ, is refined.

Keywords: sine series with convex coefficients.

УДК 517.5

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ СУММИРОВАНИЯ РИССА В РАЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

П. Г. Поцейко[1], Е. А. Ровба[2], К. А. Смотрицкий[3]

1 *pahamatby@gmail.com*; Гродненский государственный университет имени Янки Купалы (г. Гродно, Республика Беларусь).
2 *rovba.ea@gmail.com*; Гродненский государственный университет имени Янки Купалы (г. Гродно, Республика Беларусь).
3 *k_smotritski@mail.ru*; Гродненский государственный университет имени Янки Купалы (г. Гродно, Республика Беларусь).

Исследуются аппроксимационные свойства одной суммы Рисса рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва с произвольным фиксированным количеством геометрически различных полюсов. Изучаются рациональные аппроксимации на отрезке $[-1,\ 1]$ *функции* $(1-x)^{\gamma}$, $\gamma \in (0,\ 1)$, *введенным методом. Найдены оптимальные значения параметров аппроксимирующей функции, при которых скорость убывания мажоранты равномерных приближений является наибольшей. В качестве следствия получены аппроксимационные свойства сумм Рисса полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва. Порядки наилучших равномерных приближений рациональными суммами Рисса являются более высокими в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами.*

Ключевые слова: суммы Рисса, рациональный интегральный оператор Фурье–Чебышёва, функция со степенной особенностью, равномерные приближения.

В начале XX века М. Рисс [1] ввел новый метод суммирования, названный впоследствии его именем. Этот метод нашёл широкое применение в теории рядов Дирихле и аналитической теории чисел [2], а также использовался в теории рядов Фурье [3].

Среди методов рациональной аппроксимации выделяется ряд операторов, являющихся аналогами известных полиномиальных периодических операторов, Фурье, Фейера, Джексона, Валле Пуссена [4]. В 1979 году Е. А. Ровба [5] ввел рациональный интегральный оператор Фурье–Чебышёва $s_n(f,\cdot),\ n \in \mathbb{N}$, на отрезке $[-1,\ 1]$, ассоциированный с системой рациональных функций Чебышёва–Маркова. Оператор $s_n : f \to \mathbb{R}_n(A)$, где $\mathbb{R}_n(A)$ – множество рациональных функций вида:

$$\frac{p_n(x)}{\prod_{k=1}^{n}(1+a_k x)}, \quad p_n(x) \in \mathbb{P}_n,$$

A – множество точек $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, причем $s_n(1,\ x) \equiv 1$. Если положить $a_k = 0,\ k = 1, 2, \ldots, n$, то образ оператора $s_n(f,\cdot),\ n \in \mathbb{N}$, представляет собой частичную сумму ряда Фурье по системе полиномов Чебышёва первого рода.

Пусть $q \in (0,\ n)$ – произвольное натуральное число. A_q – есть множество параметров $a_k,\ k = 1, 2, \ldots, n$, среди которых ровно q различных и кратность каждого параметра равна $m (n = mq)$. Таким образом, будем вести речь об аппроксимации рациональными функциями с q геометрически различными полюсами в расширенной комплексной плоскости. Выражение

$$R_{n,\ q}(f,\ x) = \frac{1}{(m+1)^2} \sum_{k=0}^{m} (2(m-k)+1) s_{kq}(f,\ x), \quad x \in [-1, 1],\ m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{1}$$

естественно назвать суммами Рисса рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышева с q геометрически различными полюсами [6].

В докладе планируется осветить круг вопросов, относящихся к аппроксимационным свойствам сумм Рисса рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва (1) с произвольным фиксированным количеством геометрически различных полюсов. В частности, получено в явном виде интегральное представление введенного оператора.

Изучены приближения функции $(1-x)^\gamma$, $\gamma \in (0,\ 1)$, суммами (1). Найдены интегральное представление приближений, оценка поточечных и равномерных приближений. Получено асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений. Установлены оптимальные значения параметров аппроксимирующей функции, при которых обеспечивается наибольшая скорость убывания этой мажоранты. Следствием полученных результатов являются асимптотические оценки равномерных приближений некоторых элементарных функций со степенной особенностью, а также оценки приближений функции $(1-x)^\gamma$, $\gamma \in (0,\ 1)$, суммами Рисса полиномиального ряда Фурье–Чебышёва.

Литература

1. *Riesz, M.* Sur la sommation des séries de Dirichlet // Comptes rendus de l'Académie des Sciences. – 1909. – V. 149. – P. 18–21.

2. *Козлов, В. В., Мадсен, Т. В.* Числа вращения Пуанкаре и средние Рисса и Вороного // Математические заметки. – 2003. – Т. 74. – № 2. – С. 314–315.

3. *Dodonov, N. Y., Zhuk, V. V.* On approximation of periodic functions by Riesz sums // Journal of Mathematical Sciences. – 2010. – V. 166. – № 2. – P. 134–144.

4. *Русак, В. Н.* Рациональные функции как аппарат приближения / Мн. : Издательство БГУ, 1979. 179 с.

5. *Ровба, Е. А.* Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации // Доклады АН БССР. – 1979. – Т. 23. – № 11. – С. 968–971.

6. *Szász, O.* On the Cesáro and Riesz means of Fourier series // Compositio Mathematica. – 1940. – T. 7. – P. 112–122.

ON ONE METHOD OF SUMMATION OF RIESZ IN RATIONAL APPROXIMATION

P. Patseika, Y. Rouba, K. Smatrytski

The approximation properties of one Riesz sum of rational integral Fourier – Chebyshev operators with an arbitrary fixed number of geometrically different poles are investigated. Rational approximations on the segment $[-1,\ 1]$ *of the function* $(1-x)^{\gamma}$, $\gamma \in (0,\ 1)$, *are studied by the introduced method. The optimal values of the parameters of the approximating function, at which the rate of decrease of the majorant of uniform approximations is the greatest are found. As a corollary, the approximation properties of Riesz sums of polynomial Fourier – Chebyshev series are studied. The orders of the best uniform approximations by rational Riesz sums are higher in comparison with the corresponding polynomial analogues.*

Keywords: Riesz sums, rational integral Fourier–Chebyshev operator, functions with power singularity, uniform approximations.

УДК 27.39.21

О ПЕРВОМ СОБСТВЕННОМ ЗНАЧЕНИИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ В ДИВЕРГЕНТНОЙ ФОРМЕ

В. А. Пчелинцев[1]

1 *va-pchelintsev@yandex.ru*; Томский государственный университет.

Статья посвящена нижним оценкам на первое собственное число задачи Дирихле для эллиптических операторов в дивергентной форме в плоских ограниченных областях. Предложенный подход базируется на взаимосвязях между операторами композиции в пространствах Соболева и теорией квазиконформных отображений.

Ключевые слова: эллиптические уравнения, пространства Соболева, квазиконформные отображения.

В настоящей работе мы дадим приложения теории квазиконформных отображений к задаче Дирихле для двумерных эллиптических операторов в дивергентной форме

$$L_A f(z) = -\mathrm{div}[A(z)\nabla f(z)], \quad z = (x, y) \in \Omega, \quad f(x, y) = 0 \text{ on } \partial\Omega,$$

в квазиконформных регулярных областях $\Omega \subset \mathbb{C}$. Предполагается, что $A \in M^{2\times 2}(\Omega)$, где $M^{2\times 2}(\Omega)$ – класс всех 2×2 симметричных матричных функций $A(z) = \{a_{kl}(z)\}$, $\det A = 1$ п.в. в Ω, с измеримыми компонентами, удовлетворяющих равномерному

условию эллиптичности

$$\frac{1}{K}|\xi|^2 \le \langle A(w)\xi,\xi\rangle \le K|\xi|^2 \text{ п.в. в } \Omega,$$

для любого $\xi \in \mathbb{C}$, где $1 \le K < \infty$.

При этих условиях матрица A порождает квазиконформный гомеоморфизм $\varphi_A : \Omega \to \widetilde{\Omega}$, который называется A-квазиконформным отображением [3].

Односвязная область Ω называется A-квазиконформной β-регулярной областью относительно области $\widetilde{\Omega}$, если

$$\iint\limits_{\widetilde{\Omega}} |J(w,\varphi_A^{-1})|^\beta \, du dv < \infty \quad \text{для некоторого} \quad \beta > 1,$$

где $J(w,\varphi_A^{-1})$ – якобиан обратного отображения к A-квазиконформному отображению $\varphi_A : \Omega \to \widetilde{\Omega}$.

Область $\Omega \subset \mathbb{C}$ называется квазиконформной регулярной областью, если она является A-квазиконформной β-регулярной областью для некоторого $\beta > 1$. Этот класс областей включает, в частности, области с липшицевой границей, области с гельдеровыми особенностями и области с условием Альфорса [2, 3].

Приложения основаны на геометрической теории операторов композиции в пространствах Соболева [3] в специальном случае операторов, порожденных A-квазиконформными отображениями [1]. На этом пути мы имеем следующие результаты [2].

Теорема 1. *Пусть A принадлежит классу $M^{2\times 2}(\Omega)$ и Ω – A-квазиконформная β-регулярная область относительно $\widetilde{\Omega}$. Тогда*

$$\frac{1}{\lambda_1(A,\Omega)} \le C^2_{\frac{2\beta}{\beta-1},2}(\widetilde{\Omega}) \| J_{\varphi_A^{-1}} \mid L^\beta(\widetilde{\Omega})\|,$$

где $J_{\varphi_A^{-1}}$ – якобиан обратного отображения к A-квазиконформному отображению $\varphi_A : \Omega \to \widetilde{\Omega}$ и

$$C_{\frac{2\beta}{\beta-1},2}(\widetilde{\Omega}) \le \inf_{p\in\left(\frac{2\beta}{2\beta-1},2\right)} \left(\frac{p-1}{2-p}\right) \frac{\left(\sqrt{\pi}\cdot\sqrt[p]{2}\right)^{-1} |\widetilde{\Omega}|^{\frac{\beta-1}{2\beta}}}{\sqrt{\Gamma(2/p)\Gamma(3-2/p)}}.$$

В предельном случае $\beta = \infty$ имеем следующее утверждение:

Теорема 2. *Пусть A принадлежит классу $M^{2\times 2}(\Omega)$ и Ω – A-квазиконформная ∞-регулярная область относительно $\widetilde{\Omega}$. Тогда*

$$\frac{1}{\lambda_1(A,\Omega)} \le C^2_{2,2}(\widetilde{\Omega}) \| J_{\varphi_A^{-1}} \mid L^\infty(\widetilde{\Omega})\| = \frac{\| J_{\varphi_A^{-1}} \mid L^\infty(\widetilde{\Omega})\|}{\lambda_1(\widetilde{\Omega})},$$

где $J_{\varphi_A^{-1}}$ – якобиан обратного отображения к A-квазиконформному отображению $\varphi_A : \Omega \to \widetilde{\Omega}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 075-02-2023-943).

Литература

1. Astala K., Iwaniec T., Martin G. *Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane.* – Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2008.

2. Gol'dshtein V., Pchelintsev V. *On the principal frequency of non-homogeneous membranes.* // J. PAFA – in press.

3. Gol'dshtein V., Pchelintsev V., Ukhlov A., *Quasiconformal mappings and Neumann eigenvalues of divergent elliptic operators* // Complex Var. Elliptic Equ. – 2022. – Vol. 67. – № 9. – P. 2281–2302.

ON THE FIRST DIRICHLET EIGENVALUE FOR ELLIPTIC OPERATORS IN DIVERGENCE FORM

V. A. Pchelintsev

The paper is devoted to lower estimates of the first Dirichlet eigenvalue for elliptic operators in divergence form in planar bounded domains. The suggested approach is based on connections between composition operators on Sobolev spaces and the quasiconformal mappings theory.

Keywords: elliptic equations, Sobolev spaces, quasiconformal mappings.

§

УДК 517.926.4

О ЛОКАЛЬНЫХ КЛАССАХ БЭРА ЛЯПУНОВСКИХ ИНВАРИАНТОВ

А. В. Равчеев[1]

1 *rav4eev@yandex.ru*; Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова.

Изучаются локальные классы Бэра ляпуновских инвариантов на пространстве линейных дифференциальных систем, заданных на полуоси, с одной из двух топологий: равномерной или компактно-открытой. Установлено, что в компактно-открытой топологии любой ляпуновский инвариант имеет один и тот же класс Бэра во всех точках. Построен пример счётного множества систем и ляпуновского инварианта, имеющего в равномерной топологии заданные классы Бэра в точках этого множества.

Ключевые слова: системы линейных дифференциальных уравнений, показатели Ляпунова, классы Бэра, ляпуновские инварианты.

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathscr{M}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty),$$

с непрерывными ограниченными оператор-функциями A (отождествляемыми с соответствующими системами).

В теории показателей Ляпунова на множестве $\mathscr{M}^n$ чаще всего рассматриваются две топологии: *равномерная*, задаваемая равномерной нормой $\|A\| = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |A(t)|$, $A \in \mathscr{M}^n$, и *компактно-открытая,* задаваемая метрикой

$$\rho_C(A, B) = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \min\{|A(t) - B(t)|, 2^{-t}\}, \quad A, B \in \mathscr{M}^n,$$

где $|A(t)| = \sup_{|x|=1} |A(t)x|$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

Соответствующие топологические пространства будем обозначать через $\mathcal{M}_U^n$ и $\mathcal{M}_C^n$.

Основным предметом современной теории показателей Ляпунова является изучение асимптотических характеристик линейных систем, являющихся инвариантами группы ляпуновских преобразований.

Определение 1. *Функционал $\varphi\colon \mathcal{M}^n \to \mathbb{R}$, принимающий одинаковые значения на любых ляпуновски эквивалентных системах [1, с. 63], будем называть ляпуновским инвариантом.*

В начале 80-х годов прошлого века В.М. Миллионщиков указал на необходимость использования бэровской классификации функций для описания зависимости ляпуновских инвариантов линейных систем от их коэффициентов как для пространства $\mathcal{M}_U^n$, так и для пространства $\mathcal{M}_C^n$ [2, 3, 4].

Напомним определение бэровских классов [5, §39.2].

Определение 2. *Пусть X – метрическое пространство. Классы Бэра на пространстве X определим по индукции следующим образом.*

1. Нулевой класс Бэра есть множество непрерывных на X функций.

2. Для всякого $k \in \mathbb{N}$, если $(k-1)$-й класс Бэра уже определён, то k-й класс Бэра состоит из функций φ, представимых в виде

$$\varphi(x) = \lim_{j\to\infty} \varphi_j(x), \quad x \in X,$$

где φ_j – функции, принадлежащие $(k-1)$-му классу Бэра.

Кроме того, будем говорить, что функция принадлежит в точности k-му классу Бэра ($k \geq 1$), если она принадлежит k-му классу Бэра и не принадлежит $(k-1)$-му классу Бэра.

И. Н. Сергеев в докладе [6] предложил рассматривать локальные классы Бэра.

Определение 3. *Пусть X — метрическое пространство. Функция $\varphi : X \to \mathbb{R}$ принадлежит k-му ($k \in \mathbb{N} \sqcup \{0\}$) классу Бэра в точке $x_0 \in X$, если существует такая окрестность U точки x_0, что сужение $\varphi|_U : U \to \mathbb{R}$ функции φ на U принадлежит k-му классу Бэра. Если функция φ принадлежит k-му классу Бэра в точке x_0 и не принадлежит $(k-1)$-му классу в той же точке, то будем говорить, что φ принадлежит в точности k-му классу в данной точке.*

Определение 4. *Будем говорить, что функция является однородной функцией k-го класса Бэра, если в каждой точке она принадлежит в точности k-му классу Бэра.*

Показатели Ляпунова с точки зрения локальной бэровской классификации в пространствах $\mathcal{M}_U^n$ и $\mathcal{M}_C^n$ исследовались И. Н. Сергеевым [6] и В. В. Быковым [7]. Представляет интерес вопрос о том, какие классы Бэра может иметь в этих пространствах в различных точках *произвольный ляпуновский инвариант*. Ответ содержится в следующих утверждениях.

Теорема 1. *Любой ляпуновский инвариант является в пространстве $\mathcal{M}_C^n$ однородной бэровской функцией.*

Замечание. *В работе [8] установлено, что ляпуновских инвариантов в точности первого класса Бэра на пространстве $\mathcal{M}_C^n$ не бывает. Более того, ляпуновские инварианты нулевого класса Бэра на этом пространстве суть константы.*

Теорема 2. *Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существуют такие последовательность систем $\{A_i \in \mathcal{M}^n : i \in \mathbb{N}\}$ и ляпуновский инвариант $\varphi\colon \mathcal{M}_U^n \to [0,1]$, что для всякого $i \in \mathbb{N}$ φ имеет в точности i-й класс Бэра в точке A_i.*

Теорема 3. *Для любых чисел $n \in \mathbb{N}$ и $N \geq 2$ существуют множество систем $\{A_i \in \mathcal{M}^n : i = \overline{1,N}\}$ и ляпуновский инвариант $\varphi\colon \mathcal{M}^n \to [0,1]$, имеющий на пространстве $\mathcal{M}_U^n$ для всякого $i = \overline{1,N}$ в точности i-й класс Бэра в точке A_i, а на пространстве $\mathcal{M}_C^n$ — в точности N-й.*

Литература

1. Адрианова Л. Я. *Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений* – СПб.: Изд-во С. Петербургского ун-та, 1992. – 240 с.

2. Миллионщиков В. М. *Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I* // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16. – № 8. – С. 1408–1416.

3. Миллионщиков В. М. *Об индексах экспоненциальной разделенности* // Матем. сб. – 1984. – Т. 124 (166). – № 4 (8). – С. 451–485.

4. Миллионщиков В. М. *Показатели Ляпунова как функции параметра* // Матем. сб. – 1988. – Т. 137 (179). – № 3 (11). – С. 364–380.

5. Хаусдорф Ф. *Теория множеств* – М.-Л.: ОНТИ, 1937. – 306 с.

6. Сергеев И. Н. *О локальных классах Бэра показателей Ляпунова* // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32. – № 11. – С. 1577.

7. Быков В. В.. *Локальная бэровская классификация показателей Ляпунова* // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2007. – Т. 26. – С. 56–70.

8. Ветохин А. Н. *О классах Бэра остаточных функционалов* // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31. – № 5. – С. 909–910.

ON LOCAL BAIRE CLASSES OF LYAPUNOV INVARIANTS

A.V. Ravcheev

Local Baire classes of Lyapunov invariants defined on the space of systems of linear differential equations with uniform and compact-open topologies are studied. It is shown that each Lyapunov exponent within compact-open topology belongs to the same Baire class at all points. It is also shown that while considering uniform topology, there exist a countable set of linear systems and Lyapunov invariant that belongs to predefined Baire classes at points of the given set.

Keywords: systems of linear differential equations, Lyapunov exponents, Baire classes, Lyapunov invariants.

УДК 517.984

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА РЕШЕТЧАТОЙ МОДЕЛИ СПИН-БОЗОН С НЕ БОЛЕЕ ЧЕМ ДВУМЯ ФОТОНАМИ

Т. Х. Расулов[1]

1 *rth@mail.ru, t.h.rasulov@buxdu.uz*; Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан.

Рассматривается решетчатый аналог модели спин-бозон с не более чем двумя фотонами $\mathscr{A}$. Установлена конечность числа собственных значений оператора $\mathscr{A}$, лежащих левее существенного спектра.

Ключевые слова: решетка, модель спин-бозон, фотон, дискретный спектр.

Через $\mathbb{T}^{\mathrm{d}} := (-\pi,\pi]^3$ обозначим трехмерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней. Пусть $\mathbb{C}$ – одномерное комплексное пространство, $L_2(\mathbb{T}^3)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}^3$ и $L_2^{\mathrm{s}}((\mathbb{T}^3)^2)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) симметричных функций, определенных на $(\mathbb{T}^3)^2$.

В хорошо известной модели светового излучения (так называемой модели "спин-бозон", см. [1, 2]) предполагается, что атом, который может находится в двух состояниях – основном с энергией $(-\varepsilon)$ и возбужденном с энергией ε, испускает и поглащает фотоны, переходя из одного состояния в другое. Решетчатый аналог [3, 4] этой модели с не более чем двумя фотонами $\mathscr{A}$ действует в гильбертовом пространстве

$$\mathscr{H} := \mathbb{C}^2 \otimes (\mathbb{C} \oplus L_2(\mathbb{T}^3) \oplus L_2^{\mathrm{s}}((\mathbb{T}^3)^2))$$

и записывается как тридиагональная 3×3-операторная матрица

$$\mathscr{A} := \begin{pmatrix} \mathscr{A}_{00} & \mathscr{A}_{01} & 0 \\ \mathscr{A}_{01}^* & \mathscr{A}_{11} & \mathscr{A}_{12} \\ 0 & \mathscr{A}_{12}^* & \mathscr{A}_{22} \end{pmatrix},$$

с матричными элементами

$$\mathscr{A}_{00} f_0^{(\mathrm{s})} = \mathrm{s}\varepsilon f_0^{(\mathrm{s})}, \quad \mathscr{A}_{01} f_1^{(\mathrm{s})} = \alpha \int_{\mathbb{T}^3} v(t) f_1^{(-\mathrm{s})}(t)\,dt,$$

$$(\mathscr{A}_{11} f_1^{(\mathrm{s})})(k_1) = (\mathrm{s}\varepsilon + w(p)) f_1^{(\mathrm{s})}(k_1), \quad (\mathscr{A}_{12} f_2^{(\mathrm{s})})(k_1) = \alpha \int_{\mathbb{T}^3} v(t) f_2^{(-\mathrm{s})}(k_1,t)\,dt,$$

$$(\mathscr{A}_{22} f_2^{(\mathrm{s})})(k_1,k_2) = (\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1) + w(k_2)) f_2^{(\mathrm{s})}(k_1,k_2), \quad \{f_0^{(\mathrm{s})}, f_1^{(\mathrm{s})}, f_2^{(\mathrm{s})}, \mathrm{s}=\pm\} \in \mathscr{H}.$$

Здесь $\mathscr{A}_{ij}^*$ сопряженный оператор к $\mathscr{A}_{ij}$, $i<j$, а норма элемента $F = \{f_0^{(\mathrm{s})}, f_1^{(\mathrm{s})}, f_2^{(\mathrm{s})}, \mathrm{s}=\pm\} \in \mathscr{H}$ задается формулой

$$\|F\|^2 = \sum_{\mathrm{s}=\pm} \Big(|f_0^{(\mathrm{s})}|^2 + \int_{\mathbb{T}^3} |f_1^{(\mathrm{s})}(k_1)|^2 dk_1 + \frac{1}{2}\int_{(\mathbb{T}^3)^2} |f_2^{(\mathrm{s})}(k_1,k_2)|^2 dk_1 dk_2 \Big).$$

В данной работе мы предпологаем, что выполнены следующие условия относительно параметр функций:

1) $v(\cdot)$ – вещественно-значная аналитическая функция на $\mathbb{T}^3$;

2) $w(\cdot)$ – вещественно-значная аналитическая функция на $\mathbb{T}^3$, имеет единственный невырожденный минимум, равный нулью, в точке $0 \in \mathbb{T}^3$;

3) $\alpha > 0$ – "параметр взаимодействия".

Из перечисленных условий вытекает, что операторная матрица $\mathscr{A}$, действующая в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, является ограниченным и самосопряженным оператором.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема. *При всех значениях параметра взаимодействия $\alpha > 0$ операторная матрица $\mathscr{A}$ имеет конечное число собственных значений, лежащих левее существенного спектра.*

Литература

1. *Hübner M., Spohn H.* Spectral properties of the spin-boson Hamiltonian // Ann. Inst. Henri Poincaré. – 1995. – V. 62. – № 3. – P. 289–323.

2. *Minlos R.A., Spohn H.* The three-body problem in radioactive decay: the case of one atom and at most two photons // Topics in Statistical and Theoretical Physics, American Mathematical Society Translations–Series 2. – 1996. – V. 177. – P. 159–193.

3. *Muminov M., Neidhardt H., Rasulov T.* On the spectrum of the lattice spin-boson Hamiltonian for any coupling: 1D case // Journal of Mathematical Physics. – 2015. – V. 56.

4. *Расулов Т.Х.* О ветвях существенного спектра решетчатой модели спин-бозона с не более чем двумя фотонами // Теоретическая и математическая физика. – 2016. – Т. 186. – № 2. – С. 293–310.

INVESTIGATION OF THE DISCRETE SPECTRUM OF A LATTICE SPIN-BOSON MODEL WITH AT MOST TWO PHOTONS

T. H. Rasulov

A lattice analog of a spin-boson model with at most two photons $\mathscr{A}$ is considered. The finiteness of the number of eigenvalues of operator $\mathscr{A}$, lying to the left of the essential spectrum, is established.

Keywords: lattice, spin-boson model, photon, discrete spectrum.

UDC 517.98

DESCRIPTION OF H_A-WEAKLY PERIODIC p-ADIC GENERALIZED GIBBS MEASURES FOR THE p-ADIC ISING MODEL ON THE CAYLEY TREE OF ORDER TWO

M. M. Rahmatullaev[1], Z. T. Abdukahorova[2]

1 *mrahmatullaev@rambler.ru*; Institute of mathematics after named V.I.Romanovsky, Tashkent, Uzbekistan, Namangan State University, Namangan, Uzbekistan.

2 *zulxumorabdukaxorova@gmail.com*; Namangan State University, Namangan, Uzbekistan.

In the present paper, we consider the p-adic Ising model on the Cayley tree of order two. The set of H_A-weakly periodic (non-periodic) p-adic generalized Gibbs measures in the case $|A| = 1$ for this model is described.

Keywords: Cayley tree, p-adic numbers, p-adic Ising model, weakly periodic Gibbs measure.

Let $\mathbb{Q}_p$ be a field of p-adic numbers (see [1]). Any p-adic number $x \neq 0$ can be uniquely represented in the canonical form

$$x = p^{\gamma(x)}(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + ...)$$

where $\gamma(x) \in \mathbb{Z}$ and the integers x_j satisfy: $x_0 \neq 0$, $x_j \in \{0, 1, ..., p-1\}$, $j \in \mathbb{N}$ (see [1]). In this case $|x|_p = p^{-\gamma(x)}$.

We consider p-adic Ising model on the Cayley tree $\Gamma^k = (V, L)$ (see [2]). Let $\Phi = \{-1, 1\}$.

For given configurations $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$ and $\varphi^{(n)} \in \Omega_{W_n}$ we define a configuration in Ω_{V_n} as follows

$$(\sigma_{n-1} \vee \varphi^{(n)})(x) = \begin{cases} \sigma_{n-1}(x), & \text{if } x \in V_{n-1}, \\ \varphi^{(n)}(x), & \text{if } x \in W_n. \end{cases}$$

A formal p-adic Hamiltonian $H : \Omega \to \mathbb{Q}_p$ of the p-adic Ising model is defined by

$$H(\sigma) = J \sum_{<x,y> \in L} \sigma(x)\sigma(y), \tag{1}$$

where $0 < |J|_p < p^{-1/(p-1)}$ for any $\langle x, y \rangle \in L$.

We define a function $h : x \mapsto h_x$, $\forall x \in V \setminus \{x_0\}$, $h_x \in \mathbb{Q}_p$ and consider a p-adic probability distribution $\mu_h^{(n)}$ on Ω_{V_n} defined by

$$\mu_h^{(n)}(\sigma_n) = \frac{1}{Z_n^{(h)}} \exp_p\{H_n(\sigma_n)\} \prod_{x \in W_n} h_{\sigma(x),x}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

where $Z_n^{(h)}$ is the normalizing constant.

A p-adic probability distribution $\mu_h^{(n)}$ is said to be consistent if for all $n \geq 1$ and $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$, we have

$$\sum_{\varphi \in \Omega_{W_n}} \mu_h^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \varphi) = \mu_h^{(n-1)}(\sigma_{n-1}).$$

In this case, by the p-adic analogue of the Kolmogorov theorem there exists a unique measure μ_h on the set Ω such that $\mu_h\left(\{\sigma|_{V_n} \equiv \sigma_n\}\right) = \mu_h^{(n)}(\sigma_n)$ for all n and $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$ (see [3]).

Theorem. *Let $|A| = 1$ and N be the number of H_A-weakly periodic (non-periodic) p-adic generalized Gibbs measures for the model (1) on the Cayley tree of order two. Then the following statements hold:*

$$N = \begin{cases} 6, & \text{if } p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4), \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

References

1. Vladimirov V. S., Volovich I. V. and Zelenov E. V. – *p -Adic Analysis and Mathematical Physics.* – World Sci. Publ., Singapore, 1994.

2. Rozikov U. A., *Gibbs Measures on Cayley Trees.* – World Sci. Publ., Singapore, 2013.

3. Khakimov O. N. *On a Generalized p-adic Gibbs Measure for Ising Model on Trees.* // p-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl. – 2014. – V. 6. – № 3. – P. 207–217.

ОПИСАНИЕ H_A-СЛАБО ПЕРИОДИЧЕСКИХ p-АДИЧЕСКИХ ОБОБЩЕННЫХ МЕР ГИББСА ДЛЯ p-АДИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИЗИНГА НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

М. М. Рахматуллаев, З. Т. Абдукахорова

В настоящей работе рассматривается p-адическая модель Изинга на дереве Кэли второго порядка. Описано множество H_A-слабо периодических (непериодических) p-адических обобщенных мер Гиббса в случае $|A| = 1$ для этой модели.

Ключевые слова: дерево Кэли, p-адические числа, p-адическая модель Изинга, слабо периодическая мера Гиббса.

UDC 517.98

PERIODIC GROUND STATES OF THE POTTS-SOS MODEL WITH AN EXTERNAL FIELD

M. M. Rahmatullaev[1], M. A. Rasulova[2]

1 *mrahmatullaev@rambler.ru*; V. I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan.
2 *m_rasulova_a@rambler.ru*; Namangan State University, Namangan, Uzbekistan.

In this work, the set of all periodic ground states for the Potts-SOS model with an external field on a Cayley tree of arbitrary order is described.

Keywords: Cayley tree, the Potts-SOS model with an external field, ground state.

The Cayley tree $\Gamma^k = (V, L)$ of order $k \geq 1$ is an infinite tree [1].

Potts-SOS model with an external field α is defined by the following Hamiltonian

$$H(\sigma) = J \sum_{\langle x,y\rangle \in L} |\sigma(x) - \sigma(y)| + J_p \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + \alpha \sum_{x \in V} \sigma(x), \tag{1}$$

where $J, J_p, \alpha \in \mathbb{R}, \sigma \in \{0,1,2\}^V$.

The energy of configuration σ_b on b is defined by the formula

$$U(\sigma_b) = \frac{1}{2} \sum_{x \in S_1(c_b)} \left(J|\sigma(x) - \sigma(c_b)| + J_p \delta_{\sigma(x)\sigma(c_b)} \right) + \alpha\sigma(c_b).$$

Lemma. *For each configuration φ_b, we have*

$$U(\varphi_b) \in \{U_{i,n}^{(j)} : i = 0,1,2,...,k+1, \quad n = 0,...,k+1-i, \quad j = 0,1,2\},$$

where

$$U_{i,n}^{(j)} = \frac{J}{2}(k+1+n-i) + \frac{J_p}{2}i + j\alpha.$$

Definition. *A configuration φ is called a ground state for the Hamiltonian (1), if*

$$U(\varphi_b) = \min\{U_{i,n}^{(j)} : i = 0,1,2,...,k+1, \quad n = 0,...,k+1-i, \quad j = 0,1,2\}$$

for any $b \in M$.

We denote

$$A_0 = \{(J, J_p, \alpha) \in \mathbb{R}^3 : J_p \le J, J_p \le 2J, \alpha > 0\},$$

$$A_2 = \{(J, J_p, \alpha) \in \mathbb{R}^3 : J_p \le J, J_p \le 2J, \alpha < 0\}.$$

Let $GS_p(H)$ denote the set of all periodic ground states of the Hamiltonian (1).

Theorem. *Let $\alpha \neq 0$. Then the following assertions hold:*
i) if $(J, J_p, \alpha) \in A_j$, then $GS_p(H) = \{\sigma(x) = j, \forall x \in V\}$;
ii) if $(J, J_p, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \setminus (A_0 \cup A_2)$, then $GS_p(H) = \emptyset$.

References

1. Rozikov U. *Gibbs Measures in Biology and Physics: The Potts Model.* – Singapore.: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2023. – 346 с.

2. Rahmatullaev M. M., Abdusalomova M. R., Rasulova M. A.,*Ground states for the SOS model with an external field on the Cayley tree* // Uzbek Mathematical Journal. – 2020. – № 2. – С. 145–156.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОСНОВНЫЕ СОСТОЯНИЯ МОДЕЛИ ПОТТС-SOS С ВНЕШНИМ ПОЛЕМ

М. М. Рахматуллаев, М. А. Расулова

В данной работе описано множество всех периодических основных состояний для модели Поттс-SOS с внешним полем на дереве Кэли произвольного порядка.

Ключевые слова: Дерево Кэли, модель Поттс-SOS с внешним полем, основное состояние.

УДК 517.958, 517.956.32

РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ СО СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ И ПОТЕНЦИАЛОМ ОБЩЕГО ВИДА

В. С. Рыхлов[1]

1 *rykhlovvs@yandex.ru*; Саратовский госуниверситет им. Н.Г. Чернышевского.

В статье дается решение обобщённой начально-граничной задачи в полуполосе для волнового уравнения со смешанной производной в уравнении и потенциалом общего вида. Обобщённое решение получается как решение соответствующего интегрального уравнения методом последовательных подстановок.

Ключевые слова: начально граничная задача, волновое уравнение, полуполоса, смешанная производная в уравнении, потенциал общего вида.

Рассмотрим обобщённую задачу для гиперболического уравнения

$$u_{xx} + p_1 u_{xt} + p_2 u_{tt} = f(x,t),\ u(0,t) = u(1,t) = 0,\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = 0, \qquad (1)$$

где $(x,t) \in Q = [0,1] \times [0,+\infty)$; $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$; $\varphi(x) \in L_1[0,1]$, $f(x,t) \in L_1(Q_T)$ $\forall T > 0$, $Q_T = [0,1] \times [0,T]$ (называем такую f функцией класса Q) и обе функции комплекснозначны.

Для уравнения (1) выполняется условие $p_1^2 - 4p_2 > 0$, то есть корни ω_1, ω_2 многочлена $\omega^2 + p_1\omega + p_2$ вещественны и различны. Предположим $\omega_1 < 0 < \omega_2$.

Обобщённое решение задачи (1) определяется аналогично [1].

В [2] доказано, что обобщённое решение $u(x,t)$ задачи (1) даётся формулой

$$u(x,t) = u_1(x,t) + \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x,t-\tau))}^{\eta(\beta(x,t-\tau))} f(\xi,\tau)\, d\xi, \qquad (2)$$

где $u_1(x,t)$ определяется через $\varphi(x)$, $\eta(s) = \frac{\{s\}}{a}\chi\big(a - \{s\}\big) + \frac{1-\{s\}}{1-a}\chi\big(\{s\} - a\big)$, $a = \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}$, $\alpha(x,t) := \frac{t+\omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1}$, $\beta(x,t) := \frac{t+\omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1}$, $\chi(x)$ – функция Хевисайда, $\{x\}$ – дробная часть $x \in \mathbb{R}$.

Приложением этой теоремы является случай обобщённой задачи с ненулевым потенциалом общего вида в дифференциальном уравнении

$$u_{xx} + p_1 u_{xt} + p_2 u_{tt} = q(x)u(x,t),\ u(0,t) = u(1,t) = 0,\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = 0, \qquad (3)$$

где $\varphi \in L_1[0,1]$, q класса Q и являются комплеснозначными.

Используя подход из [3] к решению аналогичной задачи в случае $p_1 = 0$, в котором правая часть в уравнении (4) рассаматривается как неоднородность в уравнении задачи (1) с требованием на «решение» $u(x,t)$, чтобы произведение $q(x,t)u(x,t)$ было класса Q, на основании формулы (2) от задачи (3) приходим к интегральному уравнению

$$u(x,t) = u_1(x,t) + \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x,t-\tau))}^{\eta(\beta(x,t-\tau)} q(\xi,\tau)u(\xi,\tau)\, d\xi \big(=: u_1(x,t) + (Au)(x,t)\big), \qquad (4)$$

где A есть линейный ограниченный оператор, действующий из $C(Q_T)$ в $C(Q_T)$.

Естественно назвать решение $u(x,t)$ интегрального уравнения (4), для которого функция $q(x,t)u(x,t)$ класса Q, *обобщённым решением* задачи (3).

Введем два предположения для п.в. $(x,t) \in Q_T$ при любом фиксированом $T > 0$:

$$(i)\ \ |q(x,t)| \le q_T(x) \in L_1[0,1]; \quad (ii)\ \ |q(x,t)| \le \tilde{q}(t) \in L_p[0,T]\ (p > 1).$$

Обозначим $v(x,t) := (Au_1)(x,t)$ ($v \in C(Q_T)$!) и образуем ряд $V(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A^n v)(x,t)$.

Теорема 2. *Если $\varphi \in L_1[0,1]$, q принадлежит классу Q и выполняется условие (i) или (ii), то ряд $V(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно в Q_T и функция $u(x,t) = u_1(x,t) + V(x,t)$ является единственным обобщённым решением задачи (3).*

Литература

1. Хромов А. П. *Расходящиеся ряды и обобщённая смешанная задача для волнового уравнения простейшего вида* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. – 2022. – Т. 22. – № 3. – С. 322–331.

2. Рыхлов В. С. *Обобщённое решение начально-граничной задачи для волнового уравнения со смешанной производной и ненулевым потенциалом* // Современные методы теории краевых задач: материалы Междун. конференции: Воронежская весенняя матем. школа (3–9 мая 2023 г.). – Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2023. – С. 343–345.

3. Корнев В. В., Хромов А. П. *Использование резольвентного подхода и расходящихся рядов при решении смешанных задач* // Математика. Механика: сб. науч. трудов. Вып. 21. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2021. – С. 18–24.

SOLUTION OF THE INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A WAVE EQUATION WITH A MIXED DERIVATIVE AND A POTENTIAL OF THE GENERAL FORM

V. S. Rykhlov

The article provides a solution to a generalized initial boundary value problem in a half-strip for a wave equation with a mixed derivative in the equation and a potential of a general form. The generalized solution is obtained as a solution of the corresponding integral equation by the method of successive substitutions.

Keywords: initial boundary value problem, wave equation, half-strip, mixed derivative in the equation, potential of the general form.

УДК 517.95

НАЧАЛЬНО–ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ

К. Б. Сабитов[1]

1 *sabitov_fmf@mail.ru*; Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологии.

В работе исследуются задачи с начальными условиями для уравнения колебаний круглой пластины при жестком, шарнирном закреплении края и когда контур пластины свободен. Эти случаи в имеющейся литературе исследованы в случае осесимметрических колебаний без соответствующих строгих математических обоснований. В каждом из этих трех случаях найдены уравнения для вычисления собственных частот и доказано, что они имеют счетное множество решений, чего ранее не было сделано, и построены в явном виде решения поставленных начально–граничных задач.

Ключевые слова: уравнение колебаний пластины, начальные и граничные условия, метод разделения переменных, существование, ряд, устойчивость.

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка

$$u_{tt} + \alpha^2 \Delta^2 u = F(x, y, t), \tag{1}$$

которое моделирует поперечные колебания тонкой однородной круглой пластины радиуса $r = a$ и толщины h, где $\alpha^2 = \rho h / D$, $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ – жесткость пластинки при изгибе, ρ – масса на единицу площади пластинки, μ – коэффициент Пуассона, Δu – оператор Лапласа, $F(x, y, t)$ – непрерывная внешняя сила, рассчитанная на единицу площади пластины, $u(x, y, t)$ – смещение (изгиб) точки (x, y) в момент времени t.

Отметим, что пластины применяются в различных областях современной техники: строительстве, авиастроении, машиностроении, судостроении, ядерных энергетических установках и т.д. Во многих случаях использование пластин связано с различными граничными условиями по их контуру.

Поскольку пластина – круг, то целесообразно записать дифференциальное уравнение (1) в полярных координатах (r, φ) и оно в этих координатах имеет вид

$$Lu \equiv u_{rrrr} + \frac{2}{r^2} u_{rr\varphi\varphi} + \frac{1}{r^4} u_{\varphi\varphi\varphi\varphi} + \frac{2}{r} u_{rrr} - \frac{2}{r^3} u_{r\varphi\varphi} -$$

$$-\frac{1}{r^2} u_{rr} + \frac{4}{r^4} u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r^3} u_r + \frac{1}{\alpha^2} u_{tt} = F(r, \varphi, t). \tag{2}$$

Вид граничных условий по контору $r = a$ круглой пластины $G = \{(r, \varphi) | 0 \le r < a,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ зависит от способа закрепления края. В случае жесткого закрепления (заделки) граничные условия имеют вид

$$u(r, \varphi, t)|_{r=a} = u_r(r, \varphi, t)|_{r=a} = 0. \tag{3}$$

При шарнирном закреплении

$$u(r, \varphi, t)|_{r=a} = 0, \quad M_r|_{r=a} = 0, \tag{4}$$

а когда контур пластины свободен, то

$$M_r|_{r=a} = Q_r|_{r=a} = 0, \tag{5}$$

где M_r – изгибающий момент, который определяется формулой

$$M_r = -D\Big[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \mu\big(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\big)\Big], \quad Q_r = N_r + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial \varphi},$$

здесь N_r – поперечная сила и $M_{r\varphi}$ – крутящий момент, они находятся по формулам

$$N_r = -D\frac{\partial}{\partial r}(\Delta u), \quad M_{r\varphi} = -(1-\mu)D\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\Big).$$

Начальные условия такие же, как и в случае колебаний мембраны:

$$u(r, \varphi, t)|_{t=0} = f(r, \varphi), \quad u_t(r, \varphi, t)|_{t=0} = g(r, \varphi), \quad (r, \varphi) \in \overline{G}. \tag{6}$$

Уравнение (2) рассмотрим в цилиндрической области

$$Q = \{(r, \varphi, t) |\ (r, \varphi) \in G,\ 0 < t < T\},$$

где T – заданная положительная постоянная, и поставим следующие задачи.

Начально-граничные задачи. Найти определенную в области Q функцию $u(r, \varphi, t)$ со свойствами:

$$u(r, \varphi, t) \in C^{4,2}_{r\varphi,t}(\overline{Q}), \tag{7}$$

$$Lu(r, \varphi, t) \equiv F(r, \varphi, t), \quad (r, \varphi, t) \in Q, \tag{8}$$

$u(r, \varphi, t)$ удовлетворяет начальным условиям (6) и одному из граничных условий (3) – (5), где F, f и g – заданные достаточно гладкие функции.

В монографиях [1, с. 444–449], [2, с. 211–219], [3, с. 282–286], [4, с. 13–146], [5] и других приведены численные расчеты частот осесимметрических колебаний круглых пластин с условиями (3) – (5). В работах [6, с. 278–284], [7] исследована начально-граничная задача (2), (3), (6) без строгих математических обоснований.

В статьях [8] – [11] нами изучены колебания прямоугольной пластины с различными граничными условиями на краях. Доказаны теоремы существования и устойчивости решения начально-граничных задач в классах регулярных и обобщенных решений.

В данной работе изучается колебания круглой однородной пластинки при жестком шарнирно закреплении края и когда контур пластины свободен. Эти случаи в указанной выше литературе исследованы в основном в случае осесимметрических колебаний без соответствующих строгих математических обоснований. В каждом из трех случаях найдены уравнения для вычисления собственных частот и доказано, что они имеют счетное множество решений, чего ранее не было сделано. Построены в виде суммы ряда решения поставленных начально-граничных задач.

Литература

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Физматлит, 1967.

2. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966.

3. Доннел Л.Г. Балки, пластины и оболочки. – М.: Наука, 1982. – 568 с.

4. Вайнберг Д.В., Вайнберг Е.Д. Расчет пластин. – Киев: Изд-во Будівельник, 1970. – 436 с.

5. Чижевский К.Г. Расчет круглых кольцевых пластин. Справочное пособие. – Ленинград: Машиностроение, 1977.

6. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Тарлаковский Д.В. Теория упругости и пластичности. – М.: Физматлит, 2011. – 416 с.

7. Яровая Ю.В. Вынужденные колебания круговых трехслойных пластин при локальных внезапно приложенных нагрузках // ПФМТ. – 2017. – Т.31. – №2. – С.78–83.

8. Сабитов К.Б. Начально-граничные задачи для уравнения колебаний прямоугольной пластины // Известия Вузов. Математика. – 2021. – № 10. – С. 60–70.

9. Сабитов К.Б. Колебания пластины с граничными условиями "шарнир - заделка"// Вестник Сам. гос. тех.ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2022. – № 4. – С. 650 - 671.

10. Сабитов К.Б. Колебания пластины со смешанными граничными условиями // Изв. Вузов. Математика. – 2023. – № 3. – С. 63–77.

11. Сабитов К.Б. Прямая и обратные задачи для уравнения колебаний прямоугольной пластинки по отысканию источника // Журн. выч. мат. и матем. физики. – 2023. – Т. 63. – № 4. – С. 614–628.

INITIAL-BOUNDARY PROBLEMS FOR THE EQUATIONS OF VIBRATIONS OF A ROUND PLATE

K. B. Sabitov

In this paper, we study problems with initial conditions for the equation of vibrations of a round plate with a rigid, hinged edge and when the contour of the plate is free. This cases have been studied in the available literature in the case of axisymmetric vibrations without corresponding rigorous justifications. In each of the three cases, equations of calculating the natural frequencies are found and it is proved that they have a countable set of solutions, which has not been done before, and the

solutions of the stated initial boundary problems are constructed in an explicit form
Keywords: equation of plate oscillations, initial and boundary conditions, method of separation of variables, existence, series, stability.

УДК 517.984

УРАВНЕНИЕ ФАДДЕЕВА ДЛЯ ОДНОЙ 3 × 3 ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ С НЕКОМПАКТНЫМ ВОЗМУЩЕНЕМ

Г. Р. Сайлиева[1]

1 *g.r.saylieva@buxdu.uz*; Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан.

В данном работе изучен аналог уравнения Фаддеева для собственных векторов одного матричного оператора $H_{\mu,\lambda}$, который играет важную роль при изучении существенного спектра рассматриваемого оператора.

Ключевые слова: матричный оператор, уравнение Фаддеева, существенный спектр.

Исследованию существенного спектра системы с несохраняющимся ограниченным числом частиц на решетке посвящены многие работы, см. например [1, 2]. В настоящей работе рассматривается (решетчатый) матричный оператор $H_{\mu,\lambda}$, $\mu, \lambda > 0$, действующий в трехчастичном обрезанном подпространстве фоковского пространства.

Пусть $\mathbb{T}$ – одномерный тор, $\mathbb{C}$ – одномерное комплексное пространство, $L_2(\mathbb{T})$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}$ и $L_2^{\mathrm{s}}(\mathbb{T}^2)$– гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) симметричных функций, определенных на $\mathbb{T}^2$. Обозначим через $\mathscr{H}$ прямую сумму пространств $\mathscr{H}_0 := \mathbb{C}$, $\mathscr{H}_1 := L_2(\mathbb{T})$ и $\mathscr{H}_2 := L_2^{\mathrm{s}}(\mathbb{T}^2)$.

Рассмотрим матричный оператор $H_{\mu,\lambda}$, действующий в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ и заданный как операторная матрица

$$H_{\mu,\lambda} := \begin{pmatrix} H_{00} & \mu H_{01} & 0 \\ \mu H_{01}^* & H_{11} & \mu H_{12} \\ 0 & \mu H_{12}^* & H_{22}^0 - \lambda V \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где элементы этой операторной матрицы, определяются по формулам

$$H_{00} f_0 = a f_0, \quad H_{01} f_1 = \int_{\mathbb{T}} \sin(t) f_1(t) dt;$$

$$(H_{11} f_1)(x) = (a + 1 + \cos(2x)) f_1(x), \quad (H_{12} f_2)(x) = \int_{\mathbb{T}} \sin(t) f_2(x,t) dt;$$

$$(H_{22}^0 f_2)(x,y) = (a + 2 + \cos(2x) - \cos(2y)) f_2(x,y), \quad V := V_1 + V_2;$$

$$(V_1 f_2(x,y) = \cos(y) \int_{\mathbb{T}} \cos(t) f_2(x,t) dt, \quad (V_2 f_2(x,y) = \cos(x) \int_{\mathbb{T}} \cos(t) f_2(t,y) dt$$

Пусть $\overline{\mathscr{H}_0} := \mathscr{H}_0$, $\overline{\mathscr{H}_1} = \overline{\mathscr{H}_2} = \mathscr{H}_1$, $\overline{\mathscr{H}} = \overline{\mathscr{H}_0} \oplus \overline{\mathscr{H}_1} \oplus \overline{\mathscr{H}_2}$ и операторные матрицы $\mathscr{A}_{\mu,\lambda}(z)$ и $\mathscr{K}_{\mu,\lambda}(z)$ при каждом $z \in \mathbb{C} \setminus [a, a+4]$ действуют в пространстве $\overline{\mathscr{H}}$ по формулам

$$\mathscr{A}_{\mu,\lambda}(z) := \begin{pmatrix} A_{00}(z) & 0 & 0 \\ 0 & A_{11}(z) & 0 \\ 0 & 0 & A_{22}(z) \end{pmatrix}, \quad \mathscr{K}_{\mu,\lambda}(z) := \begin{pmatrix} K_{00}(z) & K_{01} & 0 \\ K_{10} & K_{11}(z) & K_{12}(z) \\ 0 & K_{21}(z) & K_{22}(z) \end{pmatrix},$$

где операторы $A_{ii}(z) : \overline{\mathscr{H}_i} \to \overline{\mathscr{H}_i}$, $i = 0, 1, 2$ определены как

$$A_{00}(z)g_0 = g_0, \quad (A_{11}(z)g_1)(x) = (a + 1 - \cos(2x) - z)g_1(x);$$

$$(A_{22}(z)g_2)(x) = \left(1 - \lambda \int_{\mathbb{T}} \frac{\cos^2(t)\,dt}{a + 2 - \cos(2x) - \cos(2t) - z}\right) g_2(x),$$

а операторы $K_{ij}(z) : \mathscr{H}_j \longrightarrow \mathscr{H}_i$, $i, j = 0, 1, 2$ определены как

$$K_{00}(z)g_0 = (1 + a - z)g_0, \quad (K_{01}g_1)(x) = \mu \int_{\mathbb{T}} \sin(t)g_1(t)\,dt;$$

$$(K_{10}(z)g_0)(x) = -\mu \sin(x)g_0, \quad (K_{11}(z)g_1)(x) = \frac{\mu^2}{2}\sin(x) \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin(t)g_1(t)\,dt}{a + 2 - \cos(2x) - \cos(2t) - z};$$

$$(K_{12}(z)g_2)(x) = -\mu\lambda \cos(x) \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin(t)g_2(t)\,dt}{a + 2 - \cos(2x) - \cos(2t) - z};$$

$$(K_{21}(z)g_1)(x) = -\frac{\mu}{2}\sin(x) \int_{\mathbb{T}} \frac{\cos(t)g_1(t)\,dt}{a + 2 - \cos(2x) - \cos(2t) - z};$$

$$(K_{22}(z)g_2)(x) = \lambda \cos(x) \int_{\mathbb{T}} \frac{\cos(t)g_2(t)\,dt}{a + 2 - \cos(2x) - \cos(2t) - z}.$$

Теорема. *Число $z \in \mathbb{C} \setminus [a, a+4]$ является собственным значением операторной матрицы $H_{\mu,\lambda}$ тогда и только тогда, когда число $\lambda = 1$ является собственным значением оператора $T_{\mu,\lambda}(z) = \mathscr{A}^{-1}_{\mu,\lambda}(z)\mathscr{K}_{\mu,\lambda}(z)$. Кроме того, собственные значения z и 1 имеют одинаковую кратность.*

Литература

1. *Лакаев С.Н., Расулов Т.Х.* Об эффекте Ефимова в модели теории возмущений существенного спектра // Матем. заметки. – 2003. – Т. 73. – № 4. – С. 556–564.

2. *Расулов Т.Х.* Исследование существенного спектра одного матричного оператора // ТМФ. – 2010. – Т. 164. – № 1. – С. 62–77.

THE FADDEEV EQUATION FOR OF A 3×3 OPERATOR MATRIX WITH A NONCOMPACT PERTURBATION

G. R. Saylieva

In this paper, we study an analogue of the Faddeev equation for the eigenvectors of an operator matrix $H_{\mu,\lambda}$, which plays an important role in the study of the essential spectrum of the considered operator.

Keywords: matrix operator, Faddeev equation, essential spectrum.

УДК 517.987.5

УНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ И ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ

В. Ж. Сакбаев[1]

1 *fumi2003@mail.ru*; Институт Прикладной Математики им. М.В. Келдыша РАН, Московский физико-технический институт.

Построены конечно-аддитивные меры, инвариантные к действию некоторых групп на отделимом бесконечномерном вещественном гильбертовом пространстве. Инвариантность меры изучается относительно группы сдвигов на векторе гильбертова пространства, ортогональной группы и некоторых групп симплектоморфизмов гильбертова пространства, снабженных инвариантной к сдвигу симплектической формой. Рассматриваемая инвариантная мера локально конечна, σ-конечна, но она не является счетно-аддитивной. Получен аналог эргодического разложения инвариантных конечно-аддитивных мер относительно некоторых групп. Набор мер, инвариантных по отношению к группе, параметризуется с использованием полученной декомпозиции. В статье описываются пространства комплекснозначных функций, которые являются квадратично интегрируемый относительно построенных инвариантных мер. Это пространство используется для определения унитарного представления Купмана группы преобразований гильбертова пространства. Чтобы определить подпространства сильной непрерывности группы Купмана, мы анализируем спектральные свойства ее генератора.

Ключевые слова: теорема А. Вейля, конечно-аддитивная мера, банахов предел, инвариантная мера, купмановское представление гамильтонова потока.

Изучение мер на не являющихся локально компактными топологических пространствах, инвариантных относительно различных групп преобразований, приводит, согласно теореме А. Вейля, к анализу мер, не обладающих некоторыми из свойств меры Лебега.

Теорема А. Вейля. *Если топологическая группа G не является локально компактной, то не существует нетривиальной σ-аддитивной σ-конечной локально конечной борелевской лево-инвариантной меры на группе G.*

Для построения меры на гильбертовом пространстве, инвариантной относительно сдвига на произвольный вектор, требуется принести в жертву одно или несколько из перечисленных в теореме Вейля свойств (см. [1] - [3]). Мера Лебега на конечномерном евклидовом пространстве как на абелевой топологической группе помимо перечисленных в теореме Вейля свойств является также инвариантностью относительно преобразований сдвигов вдоль траекторий гладких бездивергентных векторных полей, в частности, относительно гамильтоновых преобразований.

Найдены конечно-аддитивные меры на вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве E, инвариантных относительно сдвигов, ортогональных преобразований и гамильтоновых потоков. Исследована эргодичность найденных инвариантных мер относительно группы преобразований. В пространстве квадратично интегрируемых по инвариантной мере функций определены инвариантные подпространства, на которых унитарное представление группы является сильно

непрерывным.

Литература

1. Сакбаев В. Ж. *Усреднение случайных блужданий и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвига*// ТМФ. – 2017. – Т.191. №3. – С. 473-502.

2. Glazatov V. A., Sakbaev V. Zh. *Measures on a Hilbert space that are invariant with respect to Hamiltonian flows* // Ufa. Mat. J. – 2022. – V. 14. – P. 3–22.

3. Sakbaev V. Zh. *Flows in Infinite-Dimensional Phase Space Equipped with a Finitely-Additive Invariant Measure* // Mathematics. – 2023. – V. 11. No 5. – 1161. https://doi.org/10.3390/math11051161.

UNITARY REPRESENTATIONS OF TRANSFORMATION GROUPS OF INFINITE-DIMENSIONAL SPACES AND INVARIANT MEASURES

V.Zh. Sakbaev

Finitely-additive measures invariant to the action of some groups on a separable infinite-dimensional real Hilbert space are constructed. The invariantness of a measure is studied with respect to the group of shifts on a vector of Hilbert space, the orthogonal group and some groups of symplectomorphisms of the Hilbert space equipped with the shift-invariant symplectic form. A considered invariant measure is locally finite, σ-finite, but it is not countably additive. The analog of the ergodic decomposition of invariant finitely additive measures with respect to some groups is obtained. The set of measures that are invariant with respect to a group is parametrized using the obtained decomposition. The paper describes the spaces of complex-valued functions which are quadratically integrable with respect to constructed invariant measures. This space is used to define the Koopman unitary representation of the group of transformations of the Hilbert space. To define the strong continuity subspaces of a Koopman group, we analyze the spectral properties of its generator.

Keywords: A. Weil theorem, finitely-additive measure, Banach limit, invariant measure, Koopman representation of a Hamiltonian flow.

УДК 514.822

ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИ МОНОТОННЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ ОБЛАСТИ

Р. Г. Салахудинов[1]

1 *rsalakhud@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского.

В статье построены новые геометрические функционалы выпуклой области, обладающие свойством изопериметрической монотонности по свободному параметру. В случае односвязных областей экстремальные области образуют двухпараметрическое семейство, а в случае выпуклых областей экстремальные области образуют широкий класс описанных круговых многоугольников, в том числе растяжимых. В качестве приложений рассмотрены оценки функционалов области в теории кручения.

Ключевые слова: евклидовы моменты порядка p, изопериметрическая монотонность, экстремальная область, жесткость кручения.

Пусть G – односвязная область на плоскости. Функционал

$$\mathbf{I}_p(G) := \int_G \rho(x,G)^p \, dA \tag{1}$$

называется евклидовым моментом области G порядка p ($p > -1$). Здесь $\rho(x,G)$ — функция расстояния от точки $x(\in G)$ до границы области. Функционал (1) появляется в различных областях математики и математической физики. Гипотеза об изопериметрической монотонности по свободному параметру была впервые сформулирована Дж. Хершем [1], позднее гипотеза была доказана М.-Т. Кехлер–Джобин [2]. Как частный случай было доказано изопериметрической неравенство между жесткостью кручения и первой основной частотой, носящее имена Полиа и Сегё [1]. На настоящий момент известно несколько изопериметрически монотонных функционалов области [2].

Обозначим через $\mathbf{A}(G)$ площадь область, а через $\rho(G)$ максимальный радиус круга, содержащийся в области.

Теорема 1. *Пусть G – односвязная область на плоскости конечной площади. Тогда если область G не является область типа Боннезена, то функционал*

$$\frac{1}{p\rho(G)^{p+2}}\left[\mathbf{I}_p(G) - \frac{\rho(G)^p}{p+1}\left(\mathbf{A}(G) - \frac{p\pi}{p+2}\rho(G)^{p+2}\right)\right] \tag{2}$$

является строго отрицательной и строго монотонно возростающей функцией от p.

Из доказанных ранее результатов [3], следует, что если функционал (2) домножить на $p(p+1)$, то полученный функционал будет строго монотонно убывать.

Пусть

$$l(\rho(G)) := \lim_{\mu\to\rho(G)} l(\mu),$$

где $l(\mu)$ — длина линии уровня, расположенной на расстоянии μ от границы. Обозначим через Γ класс многоугольников, описанных около окружности, причем некоторые их стороны или части сторон могут быть заменены на дуги окружности вокруг которой описан многоугольник, также включим в этот класс всевозможные растяжения описанных круговых многоугольников.

Теорема 2. *Пусть G – выпуклая область на плоскости конечной площади. Тогда если область G не принадлежит классу Γ, то функционал*

$$\frac{1}{p\rho(G)^{p+2}}\left[\mathbf{I}_p(G) - \frac{\rho(G)^p}{(p+1)(p+2)}\left(2\mathbf{A}(G) + pl(\rho(G))\rho(G)\right)\right] \tag{3}$$

является строго положительной и строго монотонно убывающей функцией от p.

Из доказанных ранее результатов [4], следует, что если функционал (3) домножить на $p(p+1)(p+2)$, то полученный функционал будет строго монотонно возрастать.

В качестве приложений утверждений получены оценки жесткости кручения сверху и снизу.

Литература

1. Hersch J. *Isoperimetric Monotonicity – some properties and conjectures (connection between Isoperimetric Inequalities)* // SIAM REV. – 1988. – V. 30. – No. 4. – P. 551–577.

2. Kohler-Jobin M.-Th. *Une propriété de monotonie isopérimétrique qui contient plusieurs théorèmes classiques* // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1977. – V. 284. – No. 3. – P. 917–920.

3. Салахудинов Р. Г. *Изопериметрическая монотонность евклидовых граничных моментов односвязной области* // Изв. вузов. Математика. – 2013 – №. 8. – С. 66–79.

4. Salakhudinov R. G., Gafiyatullina L. I. *Two-Sided Estimate for the Torsional Rigidity of Convex Domain Generalizing the Polya–Szego and Makai Inequalities* // Lobachevskii J. Math. – 2022. – V. 43. – P. 3020–3032. – DOI: https://doi.org/10.1134/S199508022213039X.

ISOPERIMETRIC MONOTONE DOMAIN FUNCTIONALS

R. G. Salakhudinov

In the article, new geometric functionals of a convex domain with the property of isoperimetric monotonicity with respect to a free parameter are constructed. In the case of simply connected regions, the extreme regions form a two-parameter family, and in the case of convex regions, the extreme regions form a wide class of circumscribed circular polygons, including extensible ones. Estimates of domain functionals in torsion theory are considered as applications.

Keywords: Euclidean moments of order p, isoperimetric monotonicity, extreme region, torsional rigidity.

УДК 517.958

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Ж. Ш. Сафаров[1]

1 *j.safarov65@mail.ru*; Институт Математики имени В.И.Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан.

Рассматривается одномерная обратная задача определения ядра интегрального члена интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа в ограниченной по переменной x области. Доказана теорема глобальной однозначной разрешимости.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, обратная задача, ядро интеграла,принцип сжимающих отображений, теорема Банаха.

Рассматривается начально-краевая задача для уравнения колебания струны с памятью в ограниченной по переменной x области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < l, t \in R\}$:

$$u_{tt} - u_{xx} - \int_0^t k(\tau) u_{xx}(x, t-\tau) d\tau = 0, \qquad (x,t) \in \Omega, \tag{1}$$

с начальным условием

$$u\,|_{t<0} \equiv 0, \tag{2}$$

и граничными условиями

$$u\,|_{x=0} = \delta(t), \qquad u_x\,|_{x=l} = 0, \qquad t \in R, \tag{3}$$

где $\delta(t)$– дельта-функция Дирака.

Нахождение функции $u(x,t)((x,t) \in D)$, удовлетворяющей уравнениям (1) – (3) назовем прямой задачей. Обратная задача заключается в определении неизвестной функции $k(t), t > 0$, если задано дополнительное условие

$$u_x(0,t) + \int_0^t k(\tau)u_x(0,t-\tau)d\tau = f(t), \tag{4}$$

где $f(t)$ – заданная при $t > 0$ функция.

Задание дополнительной информации в таком специальном виде использовалось в работах [1], [2] для определения функции памяти среды, входящей в гиперболическое и параболическое уравнения. Прямую задачу представляла начально-краевая задача для уравнений с распределенными источниками в ограниченных областях. Отличительной чертой нашей работы является то, что мы исследуем задачу с сосредоточенным источником, локализованным в окрестности граничной точки, ограниченной по переменной x области.

Сначала исследуется прямая задача (1)–(3), предполагая $k(t)$ известной. Доказывается $u(x,t) \equiv 0$, в области $D_1 := \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < x\}$. Исследуя эту задачу в области $D_2 := \{(x,t) : 0 < x < l,\ x < t < 2l - x\}$, мы получаем интегральное уравнение относительно искомой функции $u(x,t)$. При исследовании прямой задачи мы получаем также необходимые условия на данные задачи. Далее исследуется обратная задача по определению ядра интегрального члена. Для получения интегрального уравнения относительно функции $k(t), t > 0$, воспользуемся дополнительным условием (4). Обратная задача заменяется эквивалентной системой интегральных уравнений относительно неизвестных функций. К этой системе, как в работах [3]–[5], применяется принцип сжимающих отображений в пространстве непрерывных функций с весовыми нормами.

Определение. *Решением обратной задачи (1)–(4) назовем функцию $k(t)$ из класса $C^2(D_2)$, удовлетворяющую соотношениям (1)–(4).*

Предположим,что функция $f(t)$ имеет вид

$$f(t) = -\delta'(t) - \frac{h(0)}{2}\delta(t) + \theta(t)f_0(t), \tag{5}$$

где $f_0(t)$ – регулярная функция.

Основным результатом данной работы является следующая теорема глобальной однозначной разрешимости обратной задачи.

Теорема. *Пусть функция $f(t)$ имеет вид (5) и $f_0(t) \in C^1[0,2l]$, $l > 0$. Тогда в области D_2 существует единственное решение $k(t) \in C^2[0,2l]$ обратной задачи (1)–(4).*

Литература

1. *Janno J., Von Wolfersdorf L.* Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity // Mathematical Methods in the Applied Aciences. – 1997. – V. 20. – № 4. – P. 291–314.

2. *Janno J., Von Wolfersdorf L.* Inverse problems for identification of memory kernels in heat flow // J .Inv. Ill-Posed Problems. – 1996. – V. 4. – № 1. – P. 39–66.

3. *Safarov Z. S., Durdiev D. K.* Inverse Problem for an Integro-Differential Equation of Acoustics // Differential Equations. – 2018. – V. 54. – № 1. – P. 134–142.

4. *Jurabek Sh. Safarov.* Global solvability of the one-dimensional inverse problem for the integro-differential equation of acoustics // J. Sib. Fed. Univ. Math Phys. – 2018. – V. 11. – № 6. – P. 753–763. DOI: https://doi.org/10.17516/1997-1397-2018-11-6-753-763.

5. *Дурдиев Д. К., Сафаров Ж. Ш.* Обратная задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости в ограниченной области // Матем. заметки. – 2015. – Т. 97. – № 6. – С. 855–867.

ON THE SOLVABILITY OF AN INVERSE PROBLEM FOR AN INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH ADDITIONAL INFORMATION OF A SPECIAL FORM IN A BOUNDED DOMAIN

J. Sh. Safarov

We consider the one-dimensional inverse problem of determining the kernel of the integral term of an integro-differential equation of hyperbolic type in a region bounded in the variable x. The theorem of global unique solvability is proved.

Keywords: integro-differential equation, inverse problem, integral kernel, contraction mapping, Banach fixed poind theorem.

УДК 517.95

ТОЧНОЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЕ И ОГРАНИЧЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОГОУРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА-ГОРДОНА С ПОСТОЯННЫМИ ОТКЛОНЯЮЩИМИСЯ АРГУМЕНТАМИ

Д. С. Сафаров[1], С. К. Миратов[2]

1 *safarov-5252@mail.ru*; Бох.ГУ, Таджикистан.
2 *safarkhonop@mail.ru*; Бох.ГУ, Таджикистан.

В работе для одного нелинейного гиперболического дифференциально-разностного уравнения найдено ограниченное и периодическое решение с помощью функции Якоби дельта-амплитуды $\mathrm{dn}u$.

Ключевые слова: эллиптическая функция, двоякопериодическое решение, эллиптический интеграл, модуль функции.

На плоскости R^2 переменных (x, t) рассмотрим нелинейное уравнение вида [1]

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} + \alpha u_t(x,t) + \beta u_x(x,t) u(x, t-\nu_1) u(x+\tau_1, t) +$$
$$+ a u(x+\tau_2, t) - b u^2(x,t)(x, t-\nu_2) = 0, \tag{1}$$

где $c_0, \alpha, \beta, a, b, \nu_j, \tau_j, j = 1,2$ – постоянные.

При $\alpha = \beta = \tau_2 = \nu_2 = 0$ мы имеем уравнение Клейна-Гордона [1], решение которого в переменных бегущей волны найдено методом разложения по эллиптической функции Якоби $\mathrm{sn}u$ (эллиптический синус).

В переменных бегущей волны

$$u(x,t) = \varphi(\tau), \quad \tau = x - ct, \tag{2}$$

где c – волновое число, уравнение (2) принимает вид

$$\varphi''(\tau)+\alpha_1\varphi'(\tau)+\beta_1\varphi'(\tau)\varphi(\tau-c\upsilon_1)\varphi(\tau+\tau_1)+a_1\varphi(\tau+\tau_2)-b_1\varphi^2(\tau)\varphi(\tau-c\upsilon_2)=0, \quad (3)$$

где $c\neq c_0,\ \ \alpha_1=\alpha c/(c^2-c_0^2),\ \ \beta_1=\beta c/(c^2-c_0^2),\ \ a_1=ac/(c^2-c_0^2),\ \ b_1=bc/(c^2-c_0^2).$

Следуя упомянутой работе, решение уравнения (3) будем искать в виде

$$\varphi(\tau)=A\,\mathrm{dn}(\tau,k)=A\,\mathrm{dn}\tau, \qquad \tau=x-ct, \quad (4)$$

где A,k – неизвестные вместе с волновым числом c. Так как k^2 – модуль функции $\mathrm{dn}\tau$ является элементом ее построения, то при подстановке (4) в (3) будем считать, что $k^2, 0<k^2<1$, известно. Затем находим значения k^2 и дополнительный модуль $k'^2,\ \ k^2+k'^2=1$ в зависимости от параметров входящих в (1), (4).

Функция $\psi(\tau)=\mathrm{dn}\tau$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\psi''(\tau)-(2-k^2)\psi(\tau)+2\psi^3(\tau)=0, \quad (5)$$

кроме того функция $\mathrm{dn}\tau$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\mathrm{dn}(\tau+2K)\mathrm{dn}(\tau+K)=\mathrm{dn}\tau\,\mathrm{dn}(\tau+K)=k', \quad (6)$$

где k'– дополнительный модуль, а $K=K(k)$ полный эллиптический интеграл 1-го рода [2].

Теперь, учитывая свойства функции $\mathrm{dn}\tau$, и подставляя (4) в (3) при условии, что $\tau_1=K, c\upsilon_1, \tau_2, c\upsilon_2$ кратны $2K$, получим следующий результат.

Теорема. *Пусть в уравнении (1) все коэффициенты отличны от нуля,* $\alpha\beta>0,\ a\doteq -\varepsilon,\ \varepsilon>0,\ b<0$ *и волновое число удовлетворяет условию*

$$\varepsilon^2/2<(c^2-c_0^2)<\varepsilon^2.$$

Пусть модуль k *функции* $dn\tau$ *и ее дополнительный модуль* k' *определены по формулам*

$$k=\sqrt{2-\varepsilon/(c^2-c_0^2)}, \quad k'=-\alpha cb/2\beta(c^2-c_0^2)$$

и выполнено условие $k^2+k'^2=1$.

Тогда, если $\tau_1=K(k), c\upsilon_1, \tau_2, c\upsilon_2$ *кратны* $2K(k)$, *то уравнение (1) имеет решения вида*

$$u(x,t)=\pm\sqrt{-2(c^2-c_0^2)/b}\,\mathrm{dn}(x-ct,k^2).$$

Литература

1. Liu Sh., Fu Z., Liu Sh., Zhao Q. *Jacobi elliptic function expansion method and periodic wave solutions of nonlinear wave equations* // Physics Letter A. – 2001. – V. 289. – P. 69–74.

2. Сафаров Д.С., Миратов С.К. *Точное решение функционально – дифференциального уравнения Ван дер Поля –Дуффинга с постоянными отклонениями аргумента // Мат. межд. научной конф. “Уфимская осеняя математическая школа.*– 2021”, Уфа, 6 – 9 октября 2021 г., – Т. 2. – С. 90–92.

EXACT PERIODIC AND BOUNDED SOLUTION OF THE GENERALIZED KLEIN-GORDON EQUATION WITH CONSTANT DEVIATING ARGUMENTS

D. S. Safarov, S. K. Miratov

In the paper, for a nonlinear hyperbolic differential-difference equation, using the Jacobi delta-amplitude $\mathrm{dn}u$ *function, a limited and periodic solution is found.*

Keywords: elliptic function, binary periodic solution, elliptic integral, modulus of the function.

УДК 517.5

ОЦЕНКА СКОРОСТИ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДА ФУРЬЕ НЕПРЕРЫВНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ p-ВАРИАЦИИ

Т. Ю. Семенова[1]

1 *station@list.ru*; Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова.

Получена оценка скорости сходимости ряда Фурье непрерывной периодической функции через модуль непрерывности функции и значение ее p-вариации. Доказана неулучшаемость главного члена оценки.

Ключевые слова: функции ограниченной p-вариации, скорость сходимости ряда Фурье.

Понятие функции ограниченной вариации было введено К. Жорданом [1]. Н. Винер [2] определил значительно более широкие классы функций — функции ограниченной p-вариации. Пусть $p > 1$, $f(x)$ — определенная на отрезке $[a, b]$ действительнозначная функция; p-вариацией функции f на $[a, b]$ будем называть величину

$$V_p(f, [a, b]) = \sup_T \left(\sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p \right)^{1/p},$$

где точная верхняя грань берется по всем разбиениям $T = \{a = x_0 < \ldots < x_m = b\}$ отрезка.

Рассмотрим пространство $C_{2\pi}$ непрерывных на $\mathbb{R}$ действительнозначных 2π-периодических функций с нормой $\|f\| = \sup\{|f(x)| \,\big|\, x \in \mathbb{R}\} = \max\limits_{-\pi \le x \le \pi} |f(x)|$. Частичную сумму ряда Фурье функции f обозначим $S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \Big(a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx) \Big)$, $r_n(f, x) = f(x) - S_n(f, x)$ — остаток ряда Фурье. Функцию $f \in C_{2\pi}$ назовем функцией ограниченной p-вариации, если конечна величина

$$V_p(f) = \sup_{a \in \mathbb{R}} V_p(f, [a, a + 2\pi]).$$

Будем оценивать норму остатка ряда Фурье функции из $C_{2\pi}$, имеющей ограниченную p-вариацию, через модуль непрерывности этой функции

$$\omega(f; h) = \max_{\substack{x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \\ |x_1 - x_2| \le h}} |f(x_1) - f(x_2)|.$$

Напомним известные в этом направлении результаты. Пусть $V(f)$ — вариация f на отрезке $[0, 2\pi]$. В 1881 году К. Жордан [1] для произвольной функции из $C_{2\pi}$, $V(f) < +\infty$, доказал равномерную сходимость ряда Фурье на $\mathbb{R}$. В 1952 году С.Б. Стечкин [3]-[4] вывел следующую оценку скорости стремления к нулю нормы n-го остатка ряда Фурье:

$$\|r_n(f)\| = O\left[\omega\left(f; \frac{\pi}{n}\right) \ln\left(\frac{V(f)}{\omega(f; \frac{\pi}{n})} \right) \right].$$

В 2023 году А.Ю. Поповым и автором [5] для произвольной непостоянной функции из $C_{2\pi}$, $V(f) < +\infty$, доказано, что

$$\|r_n(f)\| \le \omega_n(f)\left[\frac{2}{\pi^2}\ln\left(\frac{V(f)}{\omega_n(f)}\right)+1.303\right], \text{ где } \omega_n(f)=\omega\Big(f;\frac{\pi}{1.5(n+0.5)}\Big). \tag{1}$$

В [5] также доказаны неулучшаемость постоянной $2\pi^{-2}$ в главном члене оценки (1) и невозможность уменьшения постоянной во втором члене более, чем на 1.

Для функций ограниченной p-вариации, принадлежащих $C_{2\pi}$, равномерную сходимость ряда Фурье (без оценки скорости сходимости) доказал Р. Салем [6].

Результатом данной работы являются теоремы 1 и 2.

Теорема 1. *Пусть $f \in C_{2\pi}$, $f \not\equiv \mathrm{const}$, $V_p(f) < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда верно неравенство*

$$\|r_n(f)\| \le \omega_n(f)\left[\frac{2p}{\pi^2}\ln\left(\frac{V_p(f)}{\omega_n(f)}\right)+C(p)\right], \tag{2}$$

где

$$C(p)=\frac{2p}{\pi^2}\Big(\frac{4}{3}\Big)^{1/p}+\frac{2p}{\pi^2}\ln\frac{\pi}{2}+1.14+\frac{2}{\pi^2}\ln\frac{3}{8p}.$$

Из выражения для $C(p)$ можно получить оценку сверху:

$$C(p)<\frac{2p}{\pi^2}\Big(\ln\frac{\pi}{2}+1\Big)+1.02 \quad \text{для любого} \quad p>1.$$

Теорема 2. *Для любого натурального $n \ge 2$ и для любого $\omega_n \in [n^{-1/p}, 2^{-1/p}]$ существует функция $\varphi=\varphi_n \in C_{2\pi}$, такая, что $\omega_n(\varphi)=\omega_n$, $2^{1/p-1} \le V_p(\varphi) \le 2^{1/p}$ и*

$$|r_n(\varphi,0)| > \omega_n\frac{2p}{\pi^2}\ln\left(\frac{V_p(\varphi)}{\omega_n}\right).$$

Из теоремы 2 следует, что множитель $2\pi^{-2}p$ в главном члене неравенства (2) является точным.

Литература

1. *Jordan C.* // C. r. Acad. sci. – 1881. – V. 92. – P. 228–230.

2. *Wiener N.* // Massachusetts Journal of Mathematics and Physics. – 1924. – V. 3. – P. 72–94.

3. *Стечкин С.Б.* О приближении непрерывных функций суммами Фурье. // УМН. – 1952. – Т. 7. – № 4. – С. 139–141.

4. *Теляковский С.А.* О работах С.Б. Стечкина по приближению периодических функций полиномами. // Фундаментальная и прикладная математика. – 1997. – Т. 3. – № 4. – С. 1059–1068.

5. *Попов А.Ю., Семенова Т.Ю.* Уточнение оценки скорости равномерной сходимости ряда Фурье непрерывной периодической функции ограниченной вариации // Матем. заметки. – 2023. – Т. 113. – № 4. – С. 544–559.

6. *Salem R.* Essais sur les séries trigonometriques. Actual. Sci. et Industr. – 1940. – V. 862.

AN ESTIMATE FOR THE RATE OF UNIFORM CONVERGENCE OF THE FOURIER SERIES OF A CONTINUOUS PERIODIC FUNCTION OF BOUNDED p-VARIATION

T. Yu. Semenova

For the rate of convergence of the Fourier series of a continuous periodic function an estimate is obtained in terms of the modulus of continuity of the function and the value of its p-variation. The sharpness of the leading term of the estimate is proved.

Keywords: function of bounded p-variation, convergence rate of the Fourier series.

УДК 519.233

О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ МОМЕНТА ОСТАНОВКИ УНИВЕРСАЛЬНОЙ D-ГАРАНТИЙНОЙ ПРОЦЕДУРЫ

Д. С. Симушкин[1], С. В. Симушкин[2]

1 *simdim555@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет.
2 *smshkn@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет.

Для задачи различения двух односторонних гипотез в нормально-нормальной байесовской модели устанавливается, что универсальная d-гарантийная процедура имеет бесконечное среднее значение момента остановки при истинном значении параметра на границе гипотез и конечное среднее для остальных параметров.

Ключевые слова: d-гарантийное различение гипотез, момент остановки.

Пусть в эксперименте наблюдается последовательность нормальных случайных величин с неизвестным средним θ и фиксированной дисперсией, скажем 1. Рассматривается задача построения гарантийной процедуры различения двух односторонних гипотез $H_0 : \theta < \theta_0, H_1 : \theta \geqslant \theta_0$. Предполагается, что значение параметра θ есть реализация случайной величины ϑ, априорное распределение которой также нормально с известными параметрами. Процедура называется d-гарантийной, если для нее обе условные вероятности того, что параметр ϑ попадает в область, соответствующую той или иной гипотезе, когда принято решение в пользу альтернативной гипотезы, меньше заданного уровня β.

Для этой задачи существует универсальная последовательная процедура, которая останавливается, когда апостериорная вероятность одной из гипотез будет меньше β (см., например, [1]). Пусть ν — момент остановки этой процедуры.

Теорема 1. *Универсальная d-гарантийная процедура имеет замкнутый момент остановки, т.е. вероятность* $\mathbf{P}_\theta\{\nu < \infty\} = 1$ *для любого* $\theta \in (-\infty, \infty)$.

Доказательство этого факта основано на законе повторного логарифма. Из теоремы следует, что и относительно безусловного распределения наблюдений момент остановки замкнут.

Теорема 2. *Для любого* $\theta \neq \theta_0$ *математическое ожидание* $\mathbf{E}_\theta \nu < \infty$. *Более того,* $\mathbf{E}_\theta \nu < C/\theta^2$.

Константа C в неравенстве теоремы 2 зависит от параметра θ. В статье [1] было высказано предположение, подкрепленное результатами численного моделирования, что безусловное математическое ожидание момента остановки этой процедуры бесконечно. Неравенство теоремы 2 не позволяет доказать справедливость этого предположения, хотя и не противоречит ему.

Обозначим через Φ функцию распределения стандартного нормального $(0,1)$ закона.

Теорема 3. *Пусть уровень β таков, что $q = \Phi^{-1}(1-\beta) > 1$, а среднее значение μ априорного распределения удовлетворяет условию $|\mu - \theta_0| \leqslant \sqrt{q^2-1}$. Тогда среднее значение $\mathbf{E}_{\theta_0}\nu = \infty$.*

При доказательстве этого утверждения используется известное тождество Вальда. Случай безусловного среднего момента остановки требует дальнейших изысканий. Аналогичный результат для симметричного случайного блуждания с бернуллиевским распределением приведен в [2].

Литература

1. Simushkin D. S., Simushkin S. V., Volodin I. N. *D-guaranteed discrimination of statistical hypotheses: a review of results and unsolved problems* // Journal of Mathematical Sciences. –2018. – V. 228. – № 5. – P. 543–565.

2. Siegmund D. *Sequential Analysis: Tests and Confidence Intervals.* – Springer Science & Business Media, 1985. – 272 p.

ON THE MEAN OF THE UNIVERSAL D-GUARANTEED PROCEDURE STOPPING MOMENT

D. S. Simushkin, S. V. Simushkin

For the problem of distinguishing two one-sided hypotheses in the normal-normal Bayesian model, it is established that the universal d-guaranteed procedure has an infinite average of the stopping time at the true value of the parameter at the boundary of the hypotheses and a finite average for the remaining parameters.

Keywords: d-guaranteed hypothesis discrimination, stop time.

UDC 517.9, 631.4

DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PROCESS MODELING OF DYNAMIC SYSTEMS WITH CARBON SEQUESTRATION: APPROACHES, MATHEMATICAL PROBLEMS, MODERN CHALLENGES

A. V. Smagin[1], N. B. Sadovnikova[2], V. I. Vasenev[3]

1 *smagin@list.ru*; Lomonosov Moscow State University.
2 *nsadovnik@rambler.ru*; Institute of Forest Science RAS.
3 *vasenyov@mail.ru*; RUDN University.

The widespread methodology with linear views on the functioning regimes and management of dynamic carbon cycle systems does not allow an adequate assessment of their dynamics, stability and response to external factors, including global climate change. The report presents

to the mathematical community actual and unsolved problems in this area that require an alternative approach emphasizing the importance of internal nonlinear relationships, complex endogenous dynamic regimes and spatial distribution effects in carbon sequestration processes and their computer simulation based on ODE and PDE systems.

Keywords: differential equations, dynamical systems, stability, attractors, nonlinear effects and regimes, carbon cycle, process modeling.

The vast majority of expert models for estimating organic carbon sequestration in soils and landscapes are represented by linear (quasi-linear) dynamic systems with a rigidly determined result of development along smooth trajectories to stable stationary states of the "stable knot" type [1], [2]. Any deviations from such trajectories, including quasi-periodic regimes, are explained by non-stationarity and the action of external control factors. Similar widespread linear view impoverishes the understanding of the real mechanisms of organization of natural and anthropogenic dynamic systems sequestering carbon, and leads to significant errors in the reconstruction and forecast of this process, its response to climate change and other external factors. An alternative approach takes into account the presence of internal nonlinear connections (functions) in the simulated dynamic systems of the carbon cycle, the possibility of delay in them, as well as the effect of their spatial distribution with the transition to process models in the form of partial differential equations of parabolic type. This approach, along with external organization, suggests the possibility of self-organization of dynamic systems outside the equilibrium states with the appearance of purely endogenous trigger, oscillatory and chaotic dynamic modes, contrasting forms of spatial distributions by the type of dissipative structures [3]. Illustrating the possibilities of this approach to the problem of carbon sequestration and technologies for its management, we applied the qualitative criteria of Lyapunov's stability theory and numerical modeling in the ODE, PDE packages of the Matlab 7.11 computer software to simulate the most interesting situations of forecasting and reconstructing carbon dynamics in soils and landscapes, including nonlinear trigger and oscillatory modes, as well as long-term spatial distribution of organic carbon in 1D porous media. The discussion includes a comparative analysis of different approaches to modeling dynamic systems of the carbon cycle and issues of estimating model parameters from analytical stationary solutions with ill-posed inverse problems.

This work was supported by the Russian Scientific Foundation, interdisciplinary project no. 23-64-10002.

References

1. *Chertov O. G., Nadporozhskaya M.A.* Models of dynamics of soil organic matter: problems and prospects // Computer research and modeling. – 2016. – V. 8. – № 2. – P. 391–399.

2. *Sulman B.N., Moore J.A.M., Abramoff R., Averill C., Kivlin, S., et al.* Multiple models and experiments underscore large uncertainty in soil carbon dynamics // Biogeochemistry. – 2018. – V. 141. – P. 109-–123.

3. *Smagin A.V.* Functioning Regimes of Bio-Abiotic Systems // Eurasian Soil Science. – 1999. – V. 32. – № 12. – P. 1277–1290.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРОЦЕССНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С КАРБОНОВОЙ СЕКВЕСТРАЦИЕЙ: ПОДХОДЫ, МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ, СОВРЕМЕННЫЕ ВЫЗОВЫ

А. В. Смагин, Н. Б. Садовникова, В. И. Васенев

Широко распространенная методология с линейными взглядами на режимы функционирования и управление динамических систем углеродного цикла не позволяет адекватно оценивать их динамику, устойчивость и реакцию на внешние факторы, включая глобальные климатические изменения. Доклад представляет математическому сообществу актуальные и не решенные проблемы в данной области, требующие альтернативного подхода с акцентом на значение внутренних нелинейных связей, сложных эндогенных динамических режимов и эффектов пространственного распределения в процессах карбоновой секвестрации и их компьютерного моделирования на базе систем ODE и PDE.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, динамические системы, устойчивость, аттракторы, нелинейные эффекты и режимы, углеродный цикл, процессное моделирование.

УДК 519.644

О КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ С КРАТНЫМИ УЗЛАМИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА ГИЛЬБЕРТА ПО ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ

Ю. С. Солиев[1]

1 *su1951@mail.ru*; МАДИ.

Построены и исследованы квадратурные формулы с кратными узлами для сингулярного интеграла по действительной оси.

Ключевые слова: сингулярный интеграл, квадратурные формулы, кратные узлы.

Рассмотрим понимаемый в смысле главного значения по Коши сингулярный интеграл (преобразование Гильберта)

$$Kf = K(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{t-x}dt, \tag{1}$$

где $f(x)$ – плотность интеграла, ограниченная на вещественной оси R функция.

Будем придерживаться обозначений работы [1].

По аналогии с [2] для $f \in B_{p,\sigma}$ введем интерполяционный оператор $H_N f = H_N(f;x)$, удовлетворяющий условиям $H_N^{(\upsilon)}\left(f;\frac{k\pi}{\sigma}\right) = f^{(\upsilon)}\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)(\upsilon = \overline{0,m-1})$:

$$H_N f = H_N(f;x) = \sum_{k=-N}^{N} sinc^m\sigma\left(x-\frac{k\pi}{\sigma}\right)\sum_{\upsilon=0}^{m-1}\frac{1}{\upsilon!}\left(x-\frac{k\pi}{\sigma}\right)^{\upsilon} f^{(\upsilon)}\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right). \tag{2}$$

Аппроксимируя плотность интеграла (1) выражением (2), получим квадратурную формулу (ср. с [3])

$$Kf = K(H_N f; x) + R_{Nm} f = \frac{1}{2^{2n-1}\sigma^{2n}} \sum_{k=-N}^{N} \sum_{\upsilon=0}^{2n-1} \frac{1}{\upsilon!} f^{(\upsilon)}\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right) \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^{n-s+1} C_{2n}^{s} \times$$

$$\times \left(\frac{\sin 2\sigma(n-s)\left(x - \frac{k\pi}{\sigma}\right)}{\left(x - \frac{k\pi}{\sigma}\right)^{2n-\upsilon}} - \sum_{\mu=1}^{2n-\upsilon} \frac{(2\sigma(n-s))^{\mu-1} \cos\frac{\mu\pi}{2}}{(\mu-1)!\left(x - \frac{k\pi}{\sigma}\right)^{2n-\upsilon-\mu+1}} \right) + R_{Nm} f, \ m = 2n;$$

$$Kf = K(H_N f; x) + R_{Nm} f = \frac{1}{2^{2n-2}\sigma^{2n-1}} \sum_{k=-N}^{N} \sum_{\upsilon=0}^{2n-2} \frac{1}{\upsilon!} f^{(\upsilon)}\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right) \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^{n-s+1} C_{2n-1}^{s} \times$$

$$\times \left(\frac{\cos\sigma(2n-2s-1)\left(x - \frac{k\pi}{\sigma}\right)}{\left(x - \frac{k\pi}{\sigma}\right)^{2n-\upsilon-1}} - \sum_{\mu=1}^{2n-\upsilon-1} \frac{(\sigma(2n-2s-1))^{\mu-1} \sin\frac{\mu\pi}{2}}{(\mu-1)!\left(x - \frac{k\pi}{\sigma}\right)^{2n-\upsilon-\mu}} \right) + R_{Nm} f, \ m = 2n-1, \tag{3}$$

где C_n^k – биномиальные коэффициенты, а $R_{Nm} f = R_{Nm}(f; x)$ – остаточный член.

Всюду ниже будем предполагать, что $f^{(\upsilon)}(x) = O\left((|x|+1)^{-d_\upsilon}\right)$, $d_\upsilon p > 1$, $\upsilon = \overline{0, m-1}$, $x \in R(|x| \to \infty)$.

Теорема 1. *Пусть* $f \in L_p^r(R)$, $r = 0, 1, \ldots$, $1 < p < \infty$, $\sigma > 1$. *Тогда*

$$\left\| R_{Nm} f \right\|_p \le C_{r,p,m} N^{-r+m-1} w_k\left(f^{(r)}, \frac{1}{N}\right)_p,$$

где $C_{r,p,m}$ *– постоянная, зависящая только от* r, p *и* m.

Следствие. *Пусть в условиях теоремы 1* $w_k(f, \delta)_p = 0(\delta^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$. *Тогда*

$$\left\| R_{Nm} f \right\|_p = O\left(N^{-r-\alpha+m-1}\right), \ r + \alpha > m - 1.$$

Теорема 2. *Пусть* $f \in L_\infty^r(R)$, $r = 1, 2, \ldots$, $\sigma > 1$, $w_k(f, \delta)_p = 0(\delta^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$. *Тогда*

$$\left\| R_{Nm} f \right\|_\infty = \left\| R_{Nm} f \right\|_C = O\left(\frac{\ln N}{N^{r+\alpha-m+1}}\right), \ r + \alpha > m - 1. \tag{4}$$

Теорема 3. *Если* $f(x) \in H^{r+\alpha}(R)$, $r = 0, 1, \ldots$, $0 < \alpha < 1$, *то для остаточного члена квадратурной формулы (3) справедлива оценка (4).*

Литература

1. *Солиев Ю.С.* О конечномерных аппроксимациях особого интеграла Гильберта по действительной оси // Материалы ВВМШ—2023. Воронеж: ВГУ, 2023. — С. 351-353.

2. *Хургин Я.И., Яковлев В.П.* Финитные функции в физике и технике. — М.: Наука, 1971. — 408 с.

3. *Солиев Ю.С.* Об аппроксимации преобразования Гильберта // Материалы ВЗМШ-2022. Воронеж: ВГУ, 2022. — С. 202–207.

ON QUADRATURE FORMULAS WITH MULTIPLE NODES FOR THE HILBERT SINGULAR INTEGRAL ON THE REAL AXIS

Yu. S. Soliev

Quadrature formulas with multiple nodes for a singular integral along the real axis are constructed and investigated.

Keywords: singular integral, quadrature formulas, multiple nodes.

УДК 19.642.5

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ I РОДА

С. В. Солодуша[1]

1 *solodusha@isem.irk.ru*; Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН.

В работе рассмотрен вопрос существования решений нелинейных интегральных уравнений I рода, возникающих в задаче моделирования систем автоматического управления на основе полиномов Вольтерра с векторным входом $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ и выходом $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$. Предполагается, что задача идентификации ядер Вольтерра решена, а входные сигналы $x(t)$, обеспечивающие заданные (желаемые) выходы $y(t)$, являются неизвестными.

Ключевые слова: нелинейные интегральные уравнения Вольтерра I рода, идентификация входных сигналов.

В силу своей универсальности аппарат интегро-степенных рядов Вольтерра хорошо известен в теории математического моделирования динамических систем типа вход-выход [1]. Постановка, рассмотренная в докладе, возникает в задаче автоматического регулирования техническими объектами. Теории полиномиальных интегральных уравнений Вольтерра I рода и их систем, возникающих в данной задаче, посвящено достаточно большое количество работ (подробнее см. [2, 3] и библиографию в [4]). Однако при всем многообразии развитых подходов и методов исследования изучение общих свойств этих уравнений до сих пор является актуальным направлением.

В данной работе рассматривается нелинейная система интегральных уравнений Вольтерра I рода второго порядка

$$y(t) = \int_0^t K(t,s)x(s)\,ds + Z[x], \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

где $K(t,s)$ – матрица размерности (2×2), компоненты которой являются достаточно гладкими функциями, $\det K(t,t) \neq 0$ для всех $t \in [0,T]$, $x(t)$ и $y(t)$ – искомая и заданная двумерные вектор-функции, т.е. $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$, $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$,

причем $y_i(0) = 0$, $y_i'(t) \in C_{[0,T]}$, $i = 1,2$, а оператор $Z[x]$ определен по правилу

$$Z[x] = \int_0^t \int_0^t [L_1(t,s_1,s_2)x_1(s_1)x_1(s_2) + L_2(t,s_1,s_2)x_1(s_1)x_2(s_2)]\, ds_1 ds_2,$$

где $L_1(t,s_1,s_2) = (0, K_{11}(t,s_1,s_2))^T$, $L_2(t,s_1,s_2) = (0, K_{12}(t,s_1,s_2))^T$, ядра Вольтерра K_{11}, K_{12} непрерывны по совокупности переменных и непрерывно-дифференцируемы по t. Отметим, что в отличие от [5], система (1) позволяет использовать векторный выход $y(t)$, компоненты которого имеют один и тот же физический смысл.

В работе сформулированы теоремы существования решения нелинейной системы (1). Показано, что, несмотря на условие $y(0) = 0$, данный вид систем интегральных уравнений Вольтерра I рода имеет решение в классе обобщенных функций.

Работа выполнена в Институте систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН (ИСЭМ СО РАН) за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00409), https://rscf.ru/project/22-21-00409/.

Литература

1. Schetzen M. *Nonlinear System Modelling and Analysis from the Volterra and Wiener Perspective* // Lecture Notes in Control and Inf. Sciences. – 2010. – Vol. 404. – P. 13–26.

2. Апарцин А. С. *К исследованию устойчивости решения полиномиального уравнения Вольтерра I рода* // АиТ. – 2011. – № 6. – С. 95–102.

3. Solodusha S. V., Bulatov M. V. *Integral Equations Related to Volterra Series and Inverse Problems: Elements of Theory and Applications in Heat Power Engineering* // Mathematics. – 2021. – № 16. – P. 1905.

4. Солодуша С. В., Гражданцева Е. Ю. *Тестовое полиномиальное уравнение Вольтерра I рода в задаче идентификации входных сигналов* // Тр. ИММ УрО РАН. – 2021. – № 4. – С. 161–174.

5. Солодуша С. В. *Об одном классе систем билинейных интегральных уравнений Вольтерра I рода второго порядка* // АиТ. – 2009. – № 4. – С. 110–118.

ON A CLASS OF NONLINEAR SYSTEMS OF INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND

S. V. Solodusha

The paper considers the question of the existence of solutions to nonlinear integral equations of the first kind that arise in the problem of modeling automatic control systems based on Volterra polynomials with vector input $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ and output $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$. It is assumed that the problem of identifying Volterra kernels has been solved, and the input signals $x(t)$ that provide the given (desired) outputs $y(t)$ are unknown.

Keywords: nonlinear integral Volterra equations of the first kind, identification of input signals.

УДК 514.9

О НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕВЫПУКЛОЗНАЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ИМПУЛЬСНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М. С. Сорока[1], В. В. Обуховский[2]

1 *marya.afanasowa@ya.ru*; ФГБОУ ВО Воронежский государственный педагогический университет.
2 *valerio-ob2000@mail.ru*; ФГБОУ ВО Воронежский государственный педагогический университет.

На основе теории неподвижных точек для уплотняющих операторов исследуется начальная задача для полулинейных дифференциальных включений дробного порядка $q \in (0,1)$ с импульсными характеристиками в банаховых пространствах. Предполагается, что линейная часть включения порождает семейство косинус оператор-функций, а нелинейная часть является многозначным отображением с невыпуклыми значениями. Доказывается глобальная теорема существования интегральных решений начальной задачи.

Ключевые слова: начальная задача, дробная производная, дифференциальное включение, мера некомпактности, интегральный оператор, уплотняющее отображение,импульсные характеристики.

Для разбиения отрезка $[0,T]$ точками $0 < t_1 < ... < t_m < T,\ m \geq 1$, и для функции $c : [0,T] \to E$ обозначим

$$c(t_k^+) = \lim_{\xi \to 0+} c(t_k + \xi), \qquad c(t_k^-) = \lim_{\xi \to 0-} c(t_k + \xi),$$

где $k = 1, ..., m$.

Рассмотрена начальная задача для полулинейных дифференциальных включений дробного порядка q с импульсными характеристиками в сепарабельном банаховом пространстве E следующего вида:

$$^C D_0^q x(t) \in Ax(t) + F(t, x(t)),\ t \in [0,T], \tag{1}$$

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

$$x(t_k^+) = x(t_k) + I_k x(t_k), \quad k = 1, ..., m, \tag{3}$$

где $^C D^q$, $0 < q < 1$, – дробная производная Капуто, $F : [0,T] \times E \multimap E$ почти полунепрерывное снизу многозначное отображение, $A : D(A) \subset E \to E$ замкнутый линейный оператор в E, порождающий C_0-полугруппу, $x_0 \in E$, $I_k : E \to E$ – непрерывные импульсные функции.

Применяя методы теории дифференциальных уравнений и включений, топологические методы нелинейного и многозначного анализа, а также методы дробного анализа мы получаем условия существования интегральных решений множества решений задачи (1) - (3).

Результаты получены при поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 22-71-10008.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства просвещения Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы QRPK-2023-0002).

Литература

1. *Afanasova M., Obukhovskii V., Petrosyan G.* A Controllability Problem for Causal Functional Inclusions with an Infinite Delay and Impulse Conditions. Advances in Systems Science and Applications. – 2021. – 21, vol.3. – P. 40-62.

2. *Afanasova M., Petrosyan G.* On the boundary value problem for functional differential inclusion of fractional order with general initial condition in a Banach space, Russian Mathematics. – 2019. – 63. – P. 1-12.

3. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier Science B.V., Amsterdam: North-Holland Mathematics Studies, 2006. – 540 p.

4. *Obukhovskii V., Gelman B.* Multivalued Maps and Differential Inclusions. Elements of Theory and Applications. Singapore: World Scientific, 2020. – 220 p.

5. *Obukhovskii V., Petrosyan G., Wen C.-F., Bocharov V.* On semilinear fractional differential inclusions with a nonconvex-valued right-hand side in Banach spaces // J. Nonlinear Var. Anal. - 2022. - 6. - P. 185-197.

6. *Obukhovskii V., Zecca P., Afanasova M.* On Some Boundary Value Problems for Fractional Feedback Control Systems // Differential Equations and Dynamical Systems. – 2018. P. 1-24.

ON THE INITIAL PROBLEM FOR NONCONVEX-VALUED DIFFERENTIAL INCLUSIONS OF FRACTIONAL ORDER WITH IMPULSE CHARACTERISTICS IN BANACH SPACE

M. S. Soroka, V. V. Obukhovskii

Based on the theory of fixed points for compacting operators, the initial problem for semilinear differential inclusions of fractional order $q \in (0,1)$ with impulse characteristics in Banach spaces is investigated. It is assumed that the linear part of the inclusion generates a family of cosine operator functions, and the nonlinear part is a multi-valued mapp with non-convex values. The global theorem of the existence of mild solutions of the initial problem is proved.

Keywords: initial problem, fractional derivative, differential inclusion, non-compactness measure, integral operator, compact mapp,impulse characteristics.

УДК 517.538.52+517.538.53+517.518.84

СОВМЕСТНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

А .П. Старовойтов[1], Е. П. Кечко[2], Т. М. Оснач[3]

1 *svoitov@gsu.by*; Гомельский государственный университет.
2 *ekechko@gmail.com*; Гомельский государственный университет.
3 *osnach@gsu.by*; Гомельский государственный университет.

Для системы тригонометрических рядов определены тригонометрические аппроксимации Эрмита-Паде. Установлен критерий существования и единственности тригонометрических многочленов Эрмита-Паде, ассоциированных с произвольным набором из k тригонометрических рядов, найден явный вид этих многочленов.

Ключевые слова: тригонометрические ряды, тригонометрические аппроксимации Эрмита-Паде, тригонометрические многочлены Эрмита-Паде.

Пусть $\mathbf{f^t} = (f_1^t, ..., f_k^t)$ – набор тригонометрических рядов

$$f_j^t(x) = \frac{a_0^j}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} \left(a_l^j \cos lx + b_l^j \sin lx \right), \ j = 1, ..., k \tag{1}$$

с действительными коэффициентами. Множество k–мерных мультииндексов, являющихся упорядоченным набором k целых неотрицательных чисел, обозначим $\mathbb{Z}_+^k$. Порядок мультииндекса $\overrightarrow{m} = (m_1, ..., m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ — это сумма $m = m_1 + ... + m_k$. Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\overrightarrow{m} = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ и рассмотрим тригонометрический аналог задачи **A** (см. [1; гл. 4, §1, задача A]) для системы (1).

Задача $\mathbf{A^t}$. *Для набора тригонометрических рядов (1) найти тождественно не равный нулю тригонометрический многочлен $Q_m^t(x)$, $\deg Q_m^t \leqslant m$ и такие тригонометрические многочлены $P_j^t(x)$, $\deg P_j^t \leqslant n_j$, $n_j = n + m - m_j$, чтобы для $j = 1, ..., k$*

$$R_j^t(x) := Q_m^t(x) f_j^t(x) - P_j^t(x) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \left(\tilde{a}_l^j \cos lx + \tilde{b}_l^j \sin lx \right). \tag{2}$$

Запишем ряды (1) и полиномы $Q_m^t(x), P_j^t(x)$ в комплексной форме:

$$f_j^t(x) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l^j e^{ilx}, \ Q_m^t(x) = \sum_{p=-m}^{m} u_p e^{ipx}, \ P_j^t(x) = \sum_{p=-n_j}^{n_j} v_p^j e^{ipx}, \ j = 1, ..., k.$$

Тогда равенства (2) примут вид

$$R_j^t(x) = \sum_{l=n+m+1}^{+\infty} \left(\tilde{c}_l^j e^{ilx} + \tilde{c}_{-l}^j e^{-ilx} \right), \ j = 1, ..., k.$$

Введём в рассмотрение матрицы и определители, элементами которых являются коэффициенты тригонометрических рядов $f_j^t(x)$ системы $\mathbf{f^t} = \{f_1^t, ..., f_k^t\}$. Каждому действительному числу x поставим в соответствие матрицу-строку

$$E_m^t(x) = \left(e^{-imx} \ e^{-i(m-1)x} \ ... \ e^{-ix} \ 1 \ e^{ix} \ ... \ e^{i(m-1)x} \ e^{imx} \right).$$

Для $j \in \{1, ..., k\}$, индекса n и ненулевого мультииндекса $\overrightarrow{m} = (m_1, \ldots, m_k)$ в предположении, что $m_j \neq 0$, определим матрицы порядка $m_j \times (2m + 1)$

$$F_+^j := \begin{pmatrix} c_{n_j+m+m_j}^j & c_{n_j+m+m_j-1}^j & \cdots & c_{n_j-m+m_j}^j \\ c_{n_j+m+m_j-1}^j & c_{n_j+m+m_j-2}^j & \cdots & c_{n_j-m+m_j-1}^j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n_j+m+1}^j & c_{n_j+m}^j & \cdots & c_{n_j-m+1}^j \end{pmatrix},$$

$$F_-^j := \begin{pmatrix} c_{-n_j+m-1}^j & c_{-n_j+m-2}^j & \cdots & c_{-n_j-m-1}^j \\ c_{-n_j+m-2}^j & c_{-n_j+m-3}^j & \cdots & c_{-n_j-m-2}^j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{-n_j+m-m_j}^j & c_{-n_j+m-m_j-1}^j & \cdots & c_{-n_j-m-m_j}^j \end{pmatrix},$$

где $c_0^j = a_0^j/2$, $c_l^j = (a_l^j - i b_l^j)/2$, $c_{-l}^j = \overline{c}_l^j$, $j = 1, ..., k$; $l = 1, 2, \ldots$. Введём в рассмотрение определитель порядка $2m+1$

$$D(n, \overrightarrow{m}; x) := \det \left[\begin{array}{ccccccccc} F_+^k & \ldots & F_+^2 & F_+^1 & E_m^t(x) & F_-^1 & F_-^2 & \ldots & F_-^k \end{array} \right]^T.$$

Обозначим через $H_{n,\overrightarrow{m}}^t$ матрицу порядка $2m \times (2m+1)$, полученную из элементов определителя $D(n, \overrightarrow{m}; x)$ после удаления в нём $(m+1)$-ой строки $E_m^t(x)$. Если в определителе $D(n, \overrightarrow{m}; x)$ строку $E_m^t(x)$ заменить на строку $\mathbb{C}_l^j = \left(c_{l+m}^j \; c_{l+m-1}^j \ldots c_{l+1}^j \; c_l^j \; c_{l-1}^j \ldots c_{l-m+1}^j \; c_{l-m}^j \right)$, получим новый определитель $d_l^j(n, \overrightarrow{m})$.

Теорема. *Для того чтобы для фиксированного мультииндекса* $(n, \overrightarrow{m})$ *и системы* $\mathbf{f^t}$ *задача* $\mathbf{A^t}$ *имела единственное (с точность до числового множителя) решение, необходимо и достаточно, чтобы* $\operatorname{rank} H_{n,\overrightarrow{m}}^t = 2m$. *В этом случае при определённом выборе нормирующего множителя для решений задачи* $\mathbf{A^t}$ *справедливы представления:*

$$Q_m^t(x) = D(n, \overrightarrow{m}; x), \; P_j^t(x) = \sum_{p=-n_j}^{n_j} d_p^j(n, \overrightarrow{m}) e^{ipx},$$

$$R_j^t(x) = \sum_{p=n+m+1}^{\infty} \left(d_p^j(n, \overrightarrow{m}) e^{ipx} + d_{-p}^j(n, \overrightarrow{m}) e^{-ipx} \right), \; j = 1, ..., k.$$

Литература

1. *Никишин Е. М., Сорокин В. Н.* Рациональные аппроксимации и ортогональность. – М.: Наука, 1988. – 256 с.

CONSISTENT RATIONAL APPROXIMATIONS OF TRIGONOMETRIC SERIES

A. P. Starovoitov, E. P. Kechko, T. M. Osnach

For a system of trigonometric series, we defined trigonometric Hermite-Padé approximations. We established criterion of the existence and uniqueness of trigonometric Hermite-Padé polynomials, associated with an arbitrary set of k trigonometric series, and we found explicit form of these polynomials.

Keywords: trigonometric series, Hermite-Padé trigonometric approximations, Hermite-Padé trigonometric polynomials.

УДК 517.51

АССОЦИИРОВАННАЯ РЕФЛЕКСИВНОСТЬ НЕКОТОРХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ

В. Д. Степанов[1]

1 *stepanov@mi-ras.ru*; Вычислительный центр ДВО РАН, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН.

В докладе представлен обзор недавних результатов по проблеме описания ассоциированных и дважды ассоциированных пространств к функциональным классам, включающим как идеальные, так и неидеальные структуры. Последние включают в себя двухвесовые пространства Соболева первого порядка на положительной полуоси [1]. Показано, что, в отличие от понятия двойственности, ассоциированность может быть "сильной"и "слабой". В то же время дважды ассоциированные пространства делятся еще на три типа. В этом контексте установлено, что пространство функций Соболева с компактным носителем обладает слабо ассоциированной рефлексивностью, а сильно ассоциированное к слабо ассоциированному пространству состоит только из нуля [2]. Аналогичными свойствами обладают весовые пространства типа Чезаро и Копсона, для которых проблема полностью изучена и установлена их связь с пространствами Соболева со степенными весами [3]. В качестве приложения рассматривается проблема ограниченности преобразования Гильберта из весового пространства Соболева в весовое пространство Лебега [4].

Ключевые слова: двухвесовые пространства Соболева, весовые пространства типа Чезаро и Копсона, преобразование Гильберта.

Работа поддержана Российским Научным Фондом (https://rscf.ru/en/project/19-11-00087/, Project 19-11-00087).

Литература

1. Прохоров Д. В., Степанов В. Д., Ушакова Е. П. *Характеризация функциональных пространств, ассоциированных с весовыми пространствами Соболева первого порядка на действительной оси* // Успехи матем. наук. – 2019. – Т. 74. – № 6. – С. 119–158.

2. Степанов В. Д., Ушакова Е. П. *О сильной и слабой ассоциированности весовых пространств Соболева первого порядка* // Успехи матем. наук. – 2023. – Т. 78. – № 1. – С. 167–204.

3. Stepanov V.D. *On Cesàro and Copson type function spaces. Reflexivity* // J. Math. Anal. Appl. – 2022. – V. 507. – № 1. – 18 p.

4. Stepanov V.D. *On the boundedness of the Hilbert transform from weighted Sobolev space to weighted Lebesgue space* // J. Fourier Anal. Appl. – 2022. – V. 28. – № 46. – 17 p.

ASSOCIATED REFLEXIVITY OF SOME FUNCTION CLASSES

V. D. Stepanov

The report provides an overview of recent results on the problem of describing associated and doubly associated spaces to functional classes that include both ideal and non-ideal structures. The latter include first-order two-weight Sobolev spaces on the positive semiaxis [1]. It is shown that, unlike the concept of duality, associativity can be "strong" and "weak". At the same time, the doubly associated

spaces are divided into three more types. In this context, it is established that the space of Sobolev functions with a compact carrier has weakly associated reflexivity, and strongly associated with a weakly associated space consists only of zero [2]. Weighted spaces of Cesaro and Copson type have similar properties, for which the problem has been fully studied and their connection with Sobolev spaces with power weights [3] has been established. As an application, the problem of the boundedness of the Hilbert transformation from the Sobolev space to the Lebesgue space [4] is considered.

Keywords: two-weight Sobolev spaces, weighted spaces of Cesaro and Copson type, Hilbert transformation.

УДК 517.983

О «ДВИЖЕНИИ» СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОГО КВАДРАТИЧНОГО ПУЧКА

Л. И. Сухочева[1]

1 *l.suhocheva@yandex.ru*; Воронежский государственный университет.

Рассматривается квадратичный операторный пучок с параметром $L_\varepsilon(\mu) = \mu^2 A + \mu(\varepsilon Q - I) + C$ с компактными самосопряженными операторами A, C, Q в гильбертовом пространстве H, такими что $A > 0, C \geq 0$. Если $\varepsilon||Q|| \leq 1$, то все собственные значения пучка находятся в открытой правой комплексной полуплоскости. Обсуждается вопрос, каким образом с ростом ε собственные значения пучка из правой полуплоскости попадают в левую.

Ключевые слова: квадратичный операторный пучок, собственные значения.

Задача об условиях устойчивости движений неравномерно нагретой вязкоупругой жидкости в частично заполненном сосуде [1] редуцируется к изучению спектральных свойств квадратичного пучка

$$L_\varepsilon(\mu) = \mu^2 A + \mu(\varepsilon Q - I) + C \tag{1}$$

в гильбертовом пространстве H, где операторы, определяющие пучок, обладают свойствами: $A > 0$, $C \geq 0$, $Q = Q^*$, $A, C, Q \in \sigma_\infty$ и ε – положительный параметр.

Поэтапное решение этой задачи приводит к изучению спектра модельного пучка вида

$$L(\mu) = \mu^2 A - \mu J_k + C$$

в конечномерном пространстве $H = C^n$, где в качестве коэффициентов A и C выступают положительные матрицы с доминирующей главной диагональю и $J_k = \mathrm{diag}(I_{n-k}, -I_k)$.

В работе [2] приводятся достаточные условия, при которых $2k$ собственных значений пучка L лежат в открытой левой полуплоскости, что соответствует неустойчивости нормальных колебаний и, $2(n-k)$ – в открытой правой полуплоскости.

Для исходного пучка L_ε устойчивость нормальных колебаний зависит от параметра ε. При $\varepsilon||Q|| \leq 1$ все собственные значения пучка (1) находятся в открытой правой полуплоскости. С ростом ε (при $\varepsilon||Q|| \leq 1$), вообще говоря, некоторые собственные значения пучка могут «перейти» в открытую левую полуплоскость.

Обозначим $k(\varepsilon, Q)$– число отрицательных собственных значений оператора $(I - \varepsilon Q)$ с учётом кратности, $k(Q) = \lim\limits_{\varepsilon\to\infty} k(\varepsilon)$. Оказывается, что существует такое ε_0 $(\varepsilon_0||Q|| > 1)$, что для всех $\varepsilon > \varepsilon_0$ пучок (1) имеет хотя бы одно отрицательное собственное значение; для каждого натурального $k \le k(Q)$ существует такое $\varepsilon > 0$, что при $\varepsilon > \varepsilon_0$ число отрицательных собственных значений L_ε не менее k и при каждом $\varepsilon > \varepsilon_0$ количество собственных значений μ в открытой левой полуплоскости конечно.

Подобная задача была рассмотрена в статье Н.Д. Копачевского и В.Н. Пиоварчика [3], где в терминах операторных коэффициентов A, C, Q даны достаточные условия существования собственных значений исходного пучка в левой полуплоскости.

А.С. Костенко в [4], накладывая некоторые дополнительные ограничения, рассматривает условия, обеспечивающие равенство $k_-(L_\varepsilon) = 2k(\varepsilon, Q)$, где $k_-(L_\varepsilon)$– количество собственных значений пучка L_ε в левой полуплоскости.

Таким образом, вопрос как осуществляется «движение» собственных значений пучка из правой полуплоскости в левую, оказывается актуальным.

Теорема. *Пусть операторный пучок L_ε удовлетворяет условиям* (2), $\ker C$ *будет* $(\varepsilon Q - I)$*–отрицательным подпространством и пусть некоторые собственные значения пучка переходят из правой полуплоскости в левую при $\varepsilon \to \infty$, тогда они пересекают мнимую ось не в нуле.*

Литература

1. *Копачевский Н.Н.* Операторные методы в линейной гидродинамике. / Н.Н. Копачевский, С.Г. Крейн, Нго Зуй Кан.-М. Наука, 1989.-416 с.

2. *Сухочева Л.И.* О некоторых спектральных свойствах квадратичного самосопряженного пучка матриц с доминирующими главными диагоналями // Матем. Заметки. – 1997. – Т. 61, – № 3. – С. 381–390.

3. *Копачевский Н.Д., Пивоварчик В.Н.* О достаточном условии неустойчивости ковективных движений жидкости в открытом сосуде//ЖВМ и МФ. – 1993. – Т. 33. № 1. – С. 101–117.

4. *Костенко А.С.* Об индексе дефекта квадратичных самосопряженных операторных пучков // Матем. заметки. – 2002. – Т. 72. – № 2. – С. 315–320.

ON THE "MOTION" OF THE EIGENVALUES OF QUADRATIC PENCIL

L. I. Suhocheva

A quadratic operator pencil with parameter $L_\varepsilon(\mu) = \mu^2 A + \mu(\varepsilon Q - I) + C$ is considered with compact self-adjoint operators A, C, Q in a Hilbert space H $A > 0, C \ge 0$. If $\varepsilon||Q|| \le 1$, then all the eigenvalues of the pencil L_ε lie in the open right half-plane. We discuss how some eigenvalues of L_ε move from the right to the left half-plane in the case $\varepsilon||Q|| > 1$.

Keywords: quadratic operator pencil, eigenvalues.

УДК 517.518

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ф. М. Талбаков[1]

1 *talbakov_90@mail.ru*; ТГПУ им. С.Айни.

В работе исследуется вопрос об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических в смысле Безиковича функций в случае, когда показатели Фурье имеют единственную предельную точку в бесконечности.

Ключевые слова: почти-периодические функции Безиковича, ряды Фурье, спектр функции, коэффициенты Фурье, показатели Фурье, модуль непрерывности.

Пусть $B_p \quad (1 \le p \le \infty)$ – линейное пространство, состоящее из функции $f(x)$, для которых $|f(x)|^p \quad (1 \le p < \infty)$ интегрируемы по Лебегу на любом конечном отрезке действительной оси и удовлетворяют условию

$$||f||_{B_p} = \{\overline{M}[|f(x)|^p]^{\frac{1}{p}}\} = \{\overline{\lim_{T\to\infty}} \int_{-T}^{T} |f(x)|^p dx\}^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

а при $p = \infty$ условию

$$||f||_{B_\infty} = \sup_{-\infty<x<\infty} |f(x)| < \infty.$$

При $1 \le p \le \infty$, следуя А. Безиковичу [1], вводится следующее понятие почти-периодической функции.

Функция $f(x)$ называется почти-периодической в смысле Безиковича или $f(x) \in B^p$ $(p \ge 1)$, если существует последовательность конечных тригонометрических полиномов $\{P_n(x)\}$ вида

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(f) e^{i\lambda_k x},$$

где $\{\lambda_k\}$ – некоторое счетное множество действительных чисел, для которых

$$\lim_{n\to\infty} ||f(x) - P_n(x)||_{B_p} = 0.$$

Пусть для $x \ge 1$ функция $\lambda(x)$ возрастающая и $\lim_{x\to\infty} \lambda(x) = \infty$. Обозначим через $\mu(x)$ обратную для $\lambda(x)$ функцию, кроме того, $\lambda_k = \lambda(k)$. Предположим, что функция $f(x)$ почти-периодической в смысле Безиковича ($f \in B^2$).

Рассмотрим ряд

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f)\cos\lambda_k x + b_k(f)\sin\lambda_k x), \tag{1}$$

где $a_0(f) = M\{f(x)\}$, $a_k(f) = M\{f(x)\cos\lambda_k x\}$, $b_k(f) = M\{f(x)\sin\lambda_k x\} \quad (k = 1, 2, \ldots)$;

$$M\{g(x)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} g(x) dx.$$

Если, в частности, функция $f(x)$ интегрируемая в $(0,2\pi)$ и 2π-периодическая, кроме того λ_n целые, то ряд (1) является ее рядом Фурье.

Теорема 1. *Пусть $f \in B_2$ – ограниченная функция. Предположим, что функция $\phi(u)$ неубывающая такая, что $\phi(u) > 0$ при $u > 0$ и $\frac{u^2}{\phi(u)}$ также неубывающая функция. Если для $0 < \gamma < 2$ имеет место неравенство*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} [\mu(2^\nu \pi) - \mu(2^{\nu-1}\pi) + 1]^{1-\frac{\gamma}{2}} \omega^\gamma(2^{-\nu}) \omega_\phi^{\gamma/2}(2^{-\nu}) \phi^{-\gamma/2}[\omega(2^{-\nu})] < \infty,$$

где

$$\omega(h) = \text{vrai} \sup_{-\infty<x<\infty} \sup_{|\delta|\le h} |f(x+\delta) - f(x)|,$$

$$\omega_\phi(h) = \sup_{|\delta|\le h} \overline{M}\{|f(x+\delta) - f(x)|\},$$

то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k(f)|^\gamma + |b_k(f)|^\gamma) \tag{2}$$

сходится.

Теорема 2. *Пусть функции $f \in B_2$. Если при $0 < \gamma < 2$ выполняется условие*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} [\mu(2^\nu \pi) - \mu(2^{\nu-1}\pi) + 1]^{1-\frac{\gamma}{2}} \omega_2^\gamma(2^{-\nu}),$$

где

$$\omega_2(h) = [\sup_{|\delta|\le h} M\{|f(x+\delta) - f(x-\delta)|^2\}]^{\frac{1}{2}},$$

то ряд (2) сходится.

Литература

1. *Besicovich A.S.* Almost periodic functions. – Cambrige Univerity Press, 1932. – 253 p.

2. *Musielak J.* O bezwzgledj zbieznoscic szeregow Fouriera pewnych funcji prawie okresowich // Zeszyty Nauk. Uniw. im. A. Mickiwicza, Mat. chtm. – 1957. – P. 9–17.

3. *Хасанов Ю.Х., Талбаков Ф.М.* Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций Безиковича // ДАН РТ. – Т. 61. – № 11-12. – С. 813–821.

ON THE ABSOLUTE CONVERGENCE OF FOURIER SERIES OF ALMOST PERIODIC FUNCTIONS

F. M. Talbakov

We investigate the question of the absolute convergence of Fourier series of almost periodic functions in the sense of Bezikovich in the case when the Fourier exponents have a single limiting point at infinity.

Keywords: almost periodic Bezikovich functions, Fourier series, function spectrum, Fourier coefficients, Fourier exponents, modulus of continuity.

UDC 517.984

SPECTRA OF THE ENERGY OPERATOR OF TWO-MAGNON SYSTEMS WITH FOUR-SPIN EXCHANGE HAMILTONIAN

S. M. Tashpulatov[1]

1 *sadullatashpulatov@yandex.com*; Institute of Nuclear Physics of Academy of Sciences of Republic of Uzbekistan.

We consider the energy operator of two-magnon systems in the four-spin exchange Hamiltonian and investigate the considering system in the ν–dimensional lattice Z^ν. We proof that the spectrum of the system is purely discrete and consists of no more then six eigenvalues.

Keywords: four-spin exchange Hamiltonian, two-magnon systems, spectrum, discrete spectrum, continuous spectrum.

The Hamiltonian of the considering system has the form [1]

$$H = J\Sigma_{m,\tau}(\overrightarrow{S}_m \overrightarrow{S}_{m+\tau})(\overrightarrow{S}_{m+2\tau} \overrightarrow{S}_{m+3\tau}), \tag{1}$$

where J is the four-spin exchange parameter between atoms, $\tau = \pm e_j$, $j = 1,2,...,\nu$; here e_j are unit mutually orthogonal vectors, $\overrightarrow{S}_m = (S_m^x; S_m^y; S_m^z)$ is the operator of the atomic spin $s, s > \frac{1}{2}$, at the site m. The Hamiltonian (1) acts in the symmetric Fock space $\mathscr{H}_{symm}$. Let φ_0 denote the vector, called the vacuum, uniquely defined by the conditions $S_m^+\varphi_0 = 0$, and $S_m^z\varphi_0 = s\varphi_0$, where $||\varphi_0|| = 1$. We set $S_m^\pm = S_m^x \pm iS_m^y$, where S_m^+ and S_m^- are the magnon creation and annihilation operators at the site m. The vectors $S_m^- S_n^- \varphi_0$ describes the state of the system of two magnons at the sites m and n with the spin s. The vector space spanned by them is denoted by $\widehat{\mathscr{H}_2}$. It is a Euclidean space under the given inner product. Let $\mathscr{H}_2$ denote the closure of this space, called the space of two-magnon states of the operator H. We denote the restriction of H to the space $\mathscr{H}_2$ by H_2.

Theorem 1. *The space $\mathscr{H}_2$ is invariant under the operator H. The operator H_2 is a bounded self-adjoint operator; it generates a bounded self-adjoint operator $\overline{H}_2$ acting in the space $l_2((Z^\nu)^2)$ as*

$$(\overline{H}_2 f)(p,q) = J\sum_{p,q,\tau}\{[2s^2\delta_{p,q+2\tau}+2s^2\delta_{p+2\tau,q}+s^2\delta_{p+\tau,q}+s^2\delta_{p,q+\tau}+s^2\delta_{p+3\tau,q}+s^2\delta_{p,q+3\tau}]\times \tag{2}$$

$$\times f(p,q)+(-s^2\delta_{p+3\tau,q}-2s^2\delta_{p+2\tau,q}-s^2\delta_{p+\tau,q})f(p-\tau,q)+(-s^2\delta_{p,q+3\tau}-2s^2\delta_{p,q+2\tau}-s^2\delta_{p,q+\tau})\times$$

$$\times f(p,q-\tau)+(-s^2\delta_{p+3\tau,q}-2s^2\delta_{p+2\tau,q}-s^2\delta_{p+\tau,q})f(p+\tau,q)+(-s^2\delta_{p,q+3\tau}-2s^2\delta_{p,q+2\tau}-s^2\delta_{p,q+\tau})\times$$

$$\times f(p,q+\tau)+2s^2\delta_{p+2\tau,q}f(p-\tau,q-\tau)+(s^2\delta_{p+3\tau,q}+s^2\delta_{p,q+\tau})f(p+\tau,q-\tau)+(s^2\delta_{p,q+3\tau}+s^2\delta_{p+\tau,q})\times$$

$$\times f(p-\tau,q+\tau)+2s^2\delta_{p+2\tau,q}f(p+\tau,q+\tau)\},$$ *where $\delta_{k,j}$ is the Kronecker symbol, and the summation over τ is over the nearest neighbors. The operator H_2 acts on the vector $\psi \in \mathscr{H}_2$ by the formula $H_2\psi = \sum_{p,q}(\overline{H}_2 f)(p,q)S_p^- S_q^- \varphi_0$.*

Let $\mathscr{F} : l_2((Z^\nu)^2) \to L_2((T^\nu)^2) \equiv \mathscr{H}_2$ be the Fourier transform, where T^ν is the ν–dimensional torus endowed with the normalized Lebesgue measure $d\lambda$, i.e., $\lambda(T^\nu) = 1$. We set $\widetilde{H}_2 = \mathscr{F}\overline{H}_2\mathscr{F}^{-1}$.

Theorem 2. *The Fourier transform of the operator $\overline{H}_2$ is the operator $\widetilde{H}_2 = \mathscr{F}\overline{H}_2\mathscr{F}^{-1}$ acting in the space $L_2^{symm}((T^\nu)^2)$ by the formula*

$$(\widetilde{H}_2 f)(\lambda,\mu) = J\sum_{i=1}^{\nu}\int_{T^\nu} f(s,\Lambda-s)\{8s^2\cos(\Lambda-2s)\cos(\Lambda-2\lambda)+4s^2\cos(\frac{3\Lambda}{2}-3s) \tag{3}$$

$$\times\cos(\frac{3\Lambda}{2}-3\lambda)-4s^2\cos(\frac{\Lambda}{2}-2s)\cos(\frac{3\Lambda}{2}-3\lambda)-4s^2\cos s\cos(\Lambda-2\lambda)-4s^2\cos(2\Lambda-3s)\times$$

$$\times\cos(\Lambda-2\lambda)-4s^2\cos(\frac{3\Lambda}{2}-2s)\cos(\frac{\Lambda}{2}-\lambda)-4s^2\cos(\Lambda-3s)\cos(\Lambda-\lambda)+4s^2\cos 2s\cos(\frac{\Lambda}{2}-\lambda)+$$

$$+4s^2\cos(\frac{3\Lambda}{2}-3s)\cos(\frac{\Lambda}{2}-\lambda)-4s^2\cos(\Lambda-s)\cos(\Lambda-2\lambda)-4s^2\cos(\frac{3\Lambda}{2}-2s)\cos(\frac{3\Lambda}{2}-3\lambda)+$$

$$+4s^2\cos(\Lambda-2\lambda-s)\cos(\Lambda-2\lambda)+4s^2\cos(2\Lambda-2s)\cos(\Lambda-2\lambda)\}ds.$$

Let $\nu = 1$.

Theorem 3. *The spectra of operator H_2 are purely discrete, and consists of no more then six eigenvalues.*

References

1. Nagaev E. L. Anomalous magnetic structures and phase transitions in non-Heisenberg magnets // *Advances in physical sciences*. – 1982. – V. 132. – № 1. – P. 61–103.

СПЕКТР ОПЕРАТОРА ЭНЕРГИИ ДВУХМАГНОННЫХ СИСТЕМ С ЧЕТЫРЕХ СПИНОВЫМ ОБМЕННЫМ ГАМИЛЬТОНИАНОМ

С. М. Ташпулатов

В этой работе мы рассматриваем оператор энергии двухмагнонных систем с четырех спиновым обменным гамильтонианом и исследуем спектр рассматриваемой системы в ν–мерном решетке Z^ν. Мы покажем, что спектр рассматриваемой системы чисто дискретен и состоит из не более, чем шести собственных значений.

Ключевые слова: четырехспиновый обменный гамильтониан, двухмагнонные системы, спектр, дискретный спектр, непрерывный спектр.

УДК 517.958, 539.3

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ РАВНОВЕСИЯ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО

С. Н. Тимергалиев[1]

1 *samat_tim@mail.ru*; Казанский государственный архитектурно-строительный университет.

Доказывается разрешимость краевой задачи для системы пяти нелинейных дифференциальных уравнений при заданных нелинейных граничных условиях, описывающей состояние равновесия упругих пологих неоднородных изотропных оболочек с незакрепленными краями в рамках сдвиговой модели Тимошенко, отнесенных к произвольным криволинейным координатам.

Ключевые слова: пологая изотропная неоднородная оболочка типа Тимошенко, нелинейная краевая задача, обобщенное решение, операторное уравнение.

В плоской односвязной ограниченной области Ω, гомеоморфной срединной поверхности оболочки, рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$(DT^{j\lambda})_{\alpha^\lambda} + DG^j_{\lambda\mu}T^{\lambda\mu} + DR^j = 0, j = 1,2,$$

$$(DT^{\lambda\mu}w_{3\alpha^\mu})_{\alpha^\lambda} + (DT^{\lambda 3})_{\alpha^\lambda} + DB_{\lambda\mu}T^{\lambda\mu} + DR^3 = 0,$$

$$(DM^{j\lambda})_{\alpha^\lambda} - DT^{j3} + DG^j_{\lambda\mu}M^{\lambda\mu} + DL^j = 0, j = 1,2, \tag{1}$$

при выполнении на границе Γ области Ω условий

$$D(T^{j1}d\alpha^2/ds - T^{j2}d\alpha^1/ds) = P^j(s), j = 1,2,$$

$$D(T^{13}d\alpha^2/ds - T^{23}d\alpha^1/ds + T^{1\lambda}w_{3\alpha^\lambda}d\alpha^2/ds - T^{2\lambda}w_{3\alpha^\lambda}d\alpha^1/ds) = P^3(s),$$

$$D(M^{j1}d\alpha^2/ds - M^{j2}d\alpha^1/ds) = N^j(s), j = 1,2. \tag{2}$$

Система (1) совместно с граничными условиями (2) описывает состояние равновесия упругой пологой изотропной неоднородной оболочки с незакрепленными краями в рамках сдвиговой модели Тимошенко, отнесенной к криволинейной системе координат.

Задача (1),(2). *Требуется найти решение системы (1), удовлетворяющее граничным условиям (2).*

Определение. *Назовем вектор обобщенных перемещений* $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2)$ *обобщенным решением задачи (1),(2), если* a *принадлежит пространству* $W_p^{(2)}(\Omega)$, *почти всюду удовлетворяет системе (1) и поточечно граничным условиям (2).*

Метод исследования задачи (1),(2) включает в себя три основных этапа. На первом этапе строятся интегральные представления для обобщенных перемещений, содержащие произвольные голоморфные функции $\Phi_j(z)$ $(j = 1,2) \in C_\alpha(\overline{\Omega})$, $\Psi_k(z)$ $(k = \overline{1,3}) \in C^1_\alpha(\overline{\Omega})$, $\alpha = (p-2)/p$ и произвольные функции $\rho^j(z)$ $(j = \overline{1,3}) \in L_p(\Omega)$. На втором этапе произвольные функции находятся таким образом, чтобы обобщенные перемещения удовлетворяли линейной системе уравнений и линейным граничным условиям, которые получаются из (1),(2) переносом нелинейных слагаемых в правые части. Голоморфные функции ищутся в виде интегралов типа Коши с действительными плотностями. Выводятся условия, при выполнении которых задача (1),(2) сводится к нелинейному операторному уравнению вида

$$a - G(a) = a_F, \tag{3}$$

где $G(a)$ – нелинейный оператор, a_F– известная функция, зависящая от внешних сил, действующих на оболочку.

Третий этап метода исследования посвящен исследованию разрешимости уравнения (3) в пространстве $W_p^{(2)}(\Omega)$. Доказывается, что $G(a)$ – нелинейный ограниченный оператор в $W_p^{(2)}(\Omega)$, причем для любых $a^j \in W_p^{(2)}(\Omega)(j = 1,2)$, принадлежащих шару $\|a\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < r$, справедлива оценка $\|G(a^1) - G(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} \le q_*\|a^1 -$

$a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}$, $q_* = 2c_* r(1+r)$, где c_* – известная положительная постоянная, зависящая от физико-геометрических характеристик оболочки.

Предположим, что радиус r шара и внешние силы таковы, что выполняются неравенства

$$q_* < 1, \ \|a_F\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < (1-q_*)r.$$

Тогда уравнение (3) в шаре $\|a\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < r$ имеет единственное обобщенное решение.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 23-21-00212.

ON THE EXISTENCE OF SOLUTIONS TO NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE EQUILIBRIUM OF SHALLOW SHELLS OF THE TIMOSHENKO TYPE

S. N. Timergaliev

We prove the solvability of a boundary value problem for a system of five nonlinear differential equations under given nonlinear boundary conditions, which describes the equilibrium state of elastic shallow inhomogeneous isotropic shells with loose edges in the framework of the Timoshenko shear model, referred to arbitrary curvilinear coordinates.

Keywords: shallow isotropic inhomogeneous Timoshenko type shell, nonlinear boundary value problem, generalized solution, operator equation.

УДК 517.984

ОПЕРАТОР КАНАЛА ДЛЯ СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРНЫХ МАТРИЦ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Н. А. Тошева[1]

1 *n.a.tosheva@buxdu.uz*; Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан.

Рассматриваются семейства операторных матриц третьего порядка. Выделен соответствующий канальный оператор и описан его спектр.

Ключевые слова: операторная матрица, канальный оператор, спектр.

Пусть $\mathbb{T}^3$ – трехмерный тор. Через $\mathscr{H}$ обозначим прямую сумму пространств $\mathscr{H}_0 := \mathbb{C}$, $\mathscr{H}_1 := L_2(\mathbb{T}^3)$ и $\mathscr{H}_2 := L_2^s(\mathbb{T}^3)^2$, т.е. $\mathscr{H} := \mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$.

В гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ рассмотрим семейства операторных матриц

$$H(K) := \begin{pmatrix} H_{00}(K) & H_{01} & 0 \\ H_{01}^* & H_{11}(K) & H_{12} \\ 0 & H_{12}^* & H_{22}(K) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Здесь матричные элементы определяются по формулам

$$H_{00}(K)f_0 = w_0(K)f_0, \quad H_{01}f_1 = \int_{\mathbb{T}^3} v_0(t)f_1(t)\,dt;$$

$$(H_{11}(K)f_1)(p) = w_1(K;p)f_1(p), \quad (H_{12}f_2)(p) = \int_{\mathbb{T}^3} v_1(t)f_2(p,t)\,dt;$$

$$(H_{22}(K)f_2)(p,q) = w_2(K;p,q)f_2(p,q), \quad f_i \in \mathscr{H}_i, \quad i = 0,1,2,$$

H_{ij}^* $(i < j)$ сопряжённый оператор к оператору H_{ij}, а функции $w_0(\cdot)$ и $v_i(\cdot)$, $i = 0,1$, вещественнозначные ограниченные функции на $\mathbb{T}^3$ и

$$w_1(K;p) := l_1\varepsilon(p) + l_2\varepsilon(K-p) + 1, \quad w_2(K;p,q) := l_1\varepsilon(p) + l_1\varepsilon(q) + l_2\varepsilon(K-p-q)$$

соответственно, $l_1, l_2 > 0$ и

$$\varepsilon(q) := \sum_{i=1}^{3}(1-\cos(nq^{(i)})), \quad q = (q^{(1)}, q^{(2)}, q^{(3)}) \in \mathbb{T}^3, \quad n \in \mathbb{N}.$$

При изучении спектральных свойств семейства операторных матриц $H(K)$ рассмотрим еще обобщенную модель Фридрихса $h(k)$, $k \in \mathbb{T}^3$, действующую в $\mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_1$ по правилу

$$h(k) := \begin{pmatrix} h_{00}(k) & h_{01} \\ h_{01}^* & h_{11}(k) \end{pmatrix},$$

здесь

$$h_{00}(k)f_0 = (l_2\varepsilon(k)+1)f_0, \quad h_{01}f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\mathbb{T}^3} v_1(t)f_1(t)\,dt,$$

$$(h_{11}(k)f_1)(q) = E_k(q)f_1(q), \quad E_k(q) := l_1\varepsilon(q) + l_2\varepsilon(k-q).$$

Из теоремы Вейля о сохранении существенного спектра при конечномерных возмущениях вытекает, что для существенного спектра операторной матрицы $h(k)$ имеет место равенство

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(h(k)) = [E_{\min}(k); E_{\max}(k)],$$

где числа $E_{\min}(k)$ и $E_{\max}(k)$ определяются следующим образом:

$$E_{\min}(k) := \min_{q\in\mathbb{T}^3} E_k(q) \quad \text{и} \quad E_{\max}(k) := \max_{q\in\mathbb{T}^3} E_k(q).$$

При каждом $k \in \mathbb{T}^3$ в области $\mathbb{C} \setminus [E_{\min}(k); E_{\max}(k)]$ определим функцию

$$\Delta(k;z) := l_2\varepsilon(k) + 1 - z - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^3} \frac{v_1^2(t)\,dt}{E_k(t) - z}.$$

Обычно функция $\Delta(k;\cdot)$ называется определителем Фредгольма, ассоциированным с операторной матрицей $h(k)$. Установим связь между собственными значениями операторной матрицы $h(k)$ и нулями функции $\Delta(k;\cdot)$.

Лемма. *При каждом $k \in \mathbb{T}^3$ число $z \in \mathbb{C} \setminus [E_{\min}(k); E_{\max}(k)]$ является собственным значением операторной матрицы $h(k)$ тогда и только тогда, когда $\Delta(k;z) = 0$.*

Рассмотрим так называемый канальный оператор, соответствующий операторной матрице $H(K)$ и действующий в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^3) \oplus L_2((\mathbb{T}^3)^2)$ как

$$H_{\mathrm{ch}}(K) := \begin{pmatrix} H_{11}(K) & \frac{1}{\sqrt{2}}H_{12} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}H_{12}^* & H_{22}(K) \end{pmatrix}, \quad K \in \mathbb{T}^3.$$

Введем следующие обозначения:

$$m_K := \min_{p,q\in\mathbb{T}^3} w_2(K;p,q), \quad M_K := \max_{p,q\in\mathbb{T}^3} w_2(K;p,q), \quad \sigma_K := \bigcup_{p\in\mathbb{T}^3} \{\sigma_{\mathrm{disc}}(h(K-p))+l_1\varepsilon(p)\}.$$

В следующем утверждении описан спектр оператора канала $H_{\mathrm{ch}}(K)$.

Теорема. *Канальный оператор $H_{\mathrm{ch}}(K)$ имеет чисто существенный спектр и имеет место равенство $\sigma(H_{\mathrm{ch}}(K)) := [m_K; M_K] \cup \sigma_K$.*

CHANNEL OPERATOR FOR A FAMILY OF OPERATOR MATRICES OF ORDER THREE

N. A. Tosheva

We consider family of operator matrices of order three. The corresponding channel operator is determined and its spectrum is described.

Keywords: operator matrix, channel operator, spectrum.

УДК 517.518.8

ОДИН МЕТОД СУММИРОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ С ПОМОЩЬЮ СИНК-АППРОКСИМАЦИЙ

А. Ю. Трынин[1]

1 *atrynin@gmail.com*; Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского.

Предложен новый метод суммирования тригонометрических рядов Фурье. Используется секвенциальный подход к определению обобщённой функции.

Ключевые слова: синк-аппроксимации, интерполяция функций, равномерное приближение.

Если коэффициенты Фурье в каждой частичной сумме ряда Фурье заменить на члены специально построенных, сходящихся к этим коэффициентам последовательностей, то можно существенно улучшить аппроксимативные свойства по норме пространства непрерывных функций рядов по собственным функциям $\hat{U}_m(q,\alpha,\beta,x)$ задачи Штурма-Леувилля, определенным ниже. При этом основные преимущества аппарата рядов Фурье сохранятся. Пусть

$$L_n(\phi,f,x) = \sum_{k=0}^{n-\mathrm{sign}(\phi_n)} \frac{(-1)^k \sin n(x-\phi_n)}{n(x-\phi_n)-k\pi} f(x_{k,n}) = \sum_{k=0}^{n-\mathrm{sign}(\phi_n)} l_{k,n}(x-\phi_n) f(x_{k,n}). \qquad (1)$$

На множестве функций f, заданных в точках $\{x_{k,n}\}_{k=0,n=1}^{n-\mathrm{sign}(\phi_n),\infty}$, определим оператор

$$AT_n^{\phi}(f,x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-\mathrm{sign}(\phi_n)} \left\{ f(x_{k,n}) - \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi} x_{k,n} - f(0) \right\} \times$$
$$\left(l_{k-1,n}(x-\phi_n) + l_{k,n}(x-\phi_n) \right) + \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi} x + f(0),$$

где фундаментальные функции $l_{k,n}(x-\phi_n)$ определены в (1).

Рассмотрим эталонную задачу Штурма-Лиувилля

$$\hat{U}'' + \hat{\lambda}\hat{U} = 0, \quad \hat{U}(0)\cos\alpha + \hat{U}'(0)\sin\alpha = 0, \quad \hat{U}(\pi)\cos\beta + \hat{U}'(\pi)\sin\beta = 0, \tag{2}$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Обозначим собственные значения и соответствующие им ортонормированные собственные функции задачи (2) через $\hat{\lambda}_m := \hat{\lambda}_m(q,\alpha,\beta)$ и $\hat{U}_m := \hat{U}_m(q,\alpha,\beta,x)$, $m = 0,1,2,3,\ldots$ соответственно. Коэффициенты Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля (2) функций $l_{k,n}(x-\phi_n)$ и линейной функции обозначим следующим образом:

$$\tau_{k,n,m} = \int\limits_0^\pi \hat{U}_m(q,\alpha,\beta,\xi)\, l_{k,n}(\xi-\phi_n)\, d\xi, \tau_m^{(0)} = \int\limits_0^\pi \hat{U}_m(q,\alpha,\beta,\xi)\, d\xi, \quad \tau_m^{(1)} = \int\limits_0^\pi \xi\hat{U}_m(q,\alpha,\beta,\xi)\, d\xi$$

$$\begin{aligned}\widehat{AT}^{\phi}_{n,m}[f] :=& \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\tau_{k-1,n,m} + \tau_{k,n,m}\right)\left\{f(x_{k,n}) - \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x_{k,n} - f(0)\right\} \\ &+ \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}\tau_m^{(1)} + f(0)\tau_m^{(0)}.\end{aligned}$$

Положим $\mu_n = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\lambda_n}$,

$$\nu_n = \begin{cases} -e^{-\lambda_n}\left(AT_n^{\phi}(f,0)\operatorname{ctg}\alpha + AT_n^{\phi'}(f,0)\right) & \text{при } \alpha \neq \pi m_1, m_1 \in \mathbb{Z}, \\ AT_n^{\phi}(f,0) & \text{при } \alpha = \pi m_1, m_1 \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$\tilde{\nu}_n = \begin{cases} -e^{-\lambda_n}\left(AT_n^{\phi}(f,\pi)\operatorname{ctg}\beta + AT_n^{\phi'}(f,\pi)\right) & \text{при } \beta \neq \pi m_2, m_2 \in \mathbb{Z}, \\ AT_n^{\phi}(f,\pi) & \text{при } \beta = \pi m_2, m_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

На множестве функций f, заданных в $\{x_{k,n}\}_{k=0,n=1}^{n-\operatorname{sign}(\phi_n),\infty}$, определим оператор

$$\eta(x,\lambda_n) = \begin{cases} 2\sqrt{\frac{1}{3}}\nu_n\mu_n x \text{ при } x \in [0, \frac{1}{|\mu_n|}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)], \alpha \neq \pi m_1, m_1 \in \mathbb{Z}, \\ \nu_n \sin^3\left(\mu_n\left(x + \frac{1}{|\mu_n|}\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right)\right) \\ \text{при } x \in [\frac{1}{|\mu_n|}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right), \frac{\pi}{|\mu_n|} - \frac{1}{|\mu_n|}\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)], \alpha \neq \pi m_1, m_1 \in \mathbb{Z}, \\ \nu_n\left(\frac{\pi}{|\mu_n|} - \frac{1}{|\mu_n|}\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right)^{-3}\left(x - \frac{\pi}{|\mu_n|} + \frac{1}{|\mu_n|}\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right)^3 \\ \text{при } x \in [0, \frac{\pi}{|\mu_n|} - \frac{1}{|\mu_n|}\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)], \alpha = \pi m_1, m_1 \in \mathbb{Z}, \\ 0 \text{ при } x \in [\frac{\pi}{|\mu_n|} - \frac{1}{|\mu_n|}\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right), \pi], \end{cases}$$

Аналогично определяется оператор $\widetilde{\eta}(x,\lambda_n)$ на правом конце отрезка. Положим

$$\sigma_1 = \begin{cases} 1 \text{ при } (\alpha = \pi m_1, m_1 \in \mathbb{Z}) \wedge f(0) \neq 0 \\ 0 \text{ при } (\alpha \neq \pi m_1, m_1 \in \mathbb{Z}) \vee f(0) = 0, \end{cases} \quad \tilde{\sigma}_1 = \begin{cases} 1 \text{ при } (\beta = \pi m_2, m_2 \in \mathbb{Z}) \wedge f(\pi) \neq 0 \\ 0 \text{ при } beta \neq \pi m_2, m_2 \in \mathbb{Z}) \vee f(\pi) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Обозначим

$$\hat{\eta}_{\lambda_n,m} = \langle \hat{U}_m(q,\alpha,\beta,\cdot), \eta(\cdot,\lambda_n)\rangle = \int\limits_0^\pi \hat{U}_m(q,\alpha,\beta,\xi)\eta(\xi,\lambda_n)\,d\xi,$$

$$\hat{\tilde{\eta}}_{\lambda_n,m} = \langle \hat{U}_m(q,\alpha,\beta,\cdot), \tilde{\eta}(\cdot,\lambda_n)\rangle = \int\limits_0^\pi \hat{U}_m(q,\alpha,\beta,\xi)\tilde{\eta}(\xi,\lambda_n)\,d\xi.$$

Пусть

$$\widehat{AT}^{\phi}_{n,m}[f,\eta] := \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\tau_{k-1,n,m}+\tau_{k,n,m}\right)\left\{f(x_{k,n}) - \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x_{k,n} - f(0)\right\}$$
$$+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}\tau^{(1)}_m + f(0)\tau^{(0)}_m + \hat{\eta}_{\lambda_n,m} + \hat{\tilde{\eta}}_{\lambda_n,m} \tag{4}$$

Теорема ([1]). *Пусть $T>0$, $\varepsilon>0$, $\tilde{\varepsilon}>0$, $f\in C[0,\pi]$ и функция $j(n)$, принимающая целые значения или бесконечность, удовлетворяет соотношению $\left[n^{2+\varepsilon}\right] \le j(n) \le \infty$. Тогда*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{j(n)} \widehat{AT}^{\phi}_{n,m}[f,\eta]\hat{U}_m(q,\alpha,\beta,x), \tag{5}$$

где функционалы $\widehat{AT}^{\phi}_{n,m}[\cdot,\eta]$ определены с помощью (4). *При этом, сходимость в* (5) *равномерна на $[\sigma_1\tilde{\varepsilon}, \pi-\tilde{\sigma}_1\tilde{\varepsilon}]$, где $\sigma_1, \tilde{\sigma}_1$ определяются в* (3).

Литература

1. *Trynin A. Yu.* A summation method for trigonometric fourier series based on sinc-approximations // Journal of Mathematical Sciences. – 2023. – V. 270. – № 6.

ONE METHOD OF SUMMATION OF TRIGONOMETRIC FOURIER SERIES USING SINC APPROXIMATIONS

A. Yu. Trynin

A new method for summing trigonometric Fourier series is proposed. A sequential approach to the definition of a generalized function is used.

Keywords: sinc approximation, interpolation functions, uniform approximation.

УДК 519.63, 533, 537

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ГАЗОВЗВЕСЕЙ В АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЯХ

Д. А. Тукмаков[1]

1 *tukmakovda@imm.knc.ru*; ИММ ФИЦ КазНЦ РАН.

Работа посвящена математическому моделированию динамики неоднородных электрически заряженных сред. В работе рассматривались неоднородные среды газовзвеси

– взвешенные в газе твердые частицы. Математическая модель реализует континуальный подход к моделированию динамики неоднородных сред. Полная гидродинамическая система уравнений решалась для каждого компонента.

Ключевые слова: вычислительная математика, математическое моделирование, механика жидкости и газа, теплофизика, физика плазмы.

Многие природные явления и процессы, протекающие в технике связаны с движением сплошных сред, являющихся неоднородными по своим механическим и физико-химическим свойствам [1,2]. Примером таких сред могут быть взвеси твёрдых или жидких дисперсных включений в газе-аэрозоли и газовзвеси [4]. Эффекты и явления, наблюдаемые в многофазных средах, имеют отличие от аналогичных процессов протекающих в однородной аэро- и гидродинамике [8,9]. Дисперсная фаза многофазной смеси в данной работе состоит из совокупности некоторого количества фракций твердых частиц, при этом каждая фракция отличается объемным содержание в общем объеме многофазной среды, физической плотностью вещества, размером частиц и их теплопроводность. В ряде практических приложений необходимо также учитывать воздействие электрического поля. Для описания движения полидисперсной смеси применяется система уравнений динамики полидисперсной многоскоростной и многотемпературной газовзвеси со скоростным и температурным скольжением фаз [2]. Система включает в себя уравнения движения несущей среды и дисперсной фазы. Движение несущей среды описывается системой уравнений Навье-Стокса [3-9] с учетом межфазного силового взаимодействия и теплообмена. Компоненты силы межфазного взаимодейсвия F_{xi} и F_{yi} определяются с учетом аэродинамических и электрических сил [1-7]. Составляющие силы Кулона на единицу объема газовзвеси определяются через ее удельный заряд, объемную плотность твердой фазы и напряженность электрического поля:

$$F_{Exi} = -q_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad F_{Eyi} = -q_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

где q_0 – удельный заряд единицы массы твердой фракции, φ – потенциал электрического поля. Потенциал электрического поля в расчетной области определяется из решения уравнения Пуассона с граничными условиями 2-го рода [10]:

$$\mathrm{div} E = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0}, \quad E = -\nabla\varphi \, q = \rho_2 q_0, \quad \rho_2 = \sum \rho_i \tag{1}$$

В правой части уравнения Пуассона содержится плотность заряда газовзвеси, отнесенная к абсолютной диэлектрической проницаемости несущей среды. Система уравнений решалась при момоши явного конечно-разностного метода Мак-Кормака [8] с последующим применением схемы нелинейной коррекции численного решения [9].

Литература

1. *Нигматулин Р.И.* Основы механики гетерогенных сред.

2. *Кутушев А. Г.* Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах

3. *Тукмаков А.Л., Тукмаков Д.А.* Применение неявной конечно-разностной схемы с весами для моделирования колебаний газа в акустическом резонаторе.

4. *Тукмаков Д. А., Ахунов А. А.* Численное исследование влияния электрического заряда дисперсной фазы на распространение ударной волны из чистого газа в запылённую среду

5. *Тукмаков Д. А.* Методика преподавания элементов динамики многокомпонентных и многофазных сред для специальности «Прикладная математика»

6. *Тукмаков Д. А.* Численное моделирование обтекания пластины потоком электрически заряженной двухфазной среды

7. *Тукмаков Д.А.* Численное исследование влияния учёта изменения сечения канала на параметры динамики среды при математическом моделировании одномерных стационарных течений

8. *Fletcher C. A.* Computation Techniques for Fluid Dynamics

9. *Тукмаков А.Л.* Численное моделирование акустических течений при резонансных колебаниях газа в закрытой трубе

10. *Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И.* Вычислительные методы.

NUMERICAL STUDY OF THE DYNAMICS OF GAS SUSPENSIONS IN AERODYNAMIC AND ELECTRIC FIELDS

D. A. Tukmakov

The work is devoted to mathematical modeling of the dynamics of inhomogeneous electrically charged media. In this work, inhomogeneous media of gas suspension were considered – solid particles suspended in the gas. The mathematical model implements a continuum approach to modeling the dynamics of inhomogeneous media. The complete hydrodynamic system of equations was solved for each component.

Keywords: computational mathematics, mathematical modeling, fluid and gas mechanics, thermal physics, plasma physics.

УДК 517.958

РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛИ КЕЛЬВИНА-ФОЙГТА С ПАМЯТЬЮ

М. В. Турбин[1], А. С. Устюжанинова[2]

1 *mrmike@mail.ru*; Воронежский государственный университет.
2 *nastyzhka@gmail.com*; Воронежский государственный университет.

Доклад посвящён доказательству разрешимости в слабом смысле начально-краевой задачи для модели Кельвина-Фойгта с учётом памяти вдоль траекторий движения частиц жидкости. Доказательство проводится на основе аппроксимационно-топологического подхода к исследованию задач гидродинамики.

Ключевые слова: Модель Кельвина-Фойгта, слабое решение, теорема существования.

Одной из хорошо известных моделей неньютоновой гидродинамики является модель Кельвина-Фойгта с конечным числом дискретно распределённых времён релаксации и ретардации. Исследование этой модели с частной производной

в реологическом соотношении было начато А.П. Осколковым (см. [1] и имеющуюся там библиографию). Дальнейшее исследование моделей Кельвина-Фойгта с частной производной по времени в реологическом соотношении проводилось рядом авторов, в том числе и авторами этого доклада (см. обзор [2]). В настоящее время активно исследуются различные задачи для моделей Кельвина-Фойгта и их модификаций (см., например, [3,4]).

При этом реологическое соотношение с частной производной по времени является только приближением. Для учёта памяти вдоль траекторий движения жидкости необходимо рассматривать реологическое соотношение с полной (субстанциональной) производной по времени, а именно

$$\left(1+\sum_{i=1}^{L}\lambda_i\frac{d^i}{dt^i}\right)\sigma=2\left(\mu+\sum_{i=1}^{L+1}\kappa_i\frac{d^i}{dt^i}\right)\mathscr{E}(v).$$

Здесь σ — девиатор тензора напряжений, $\mathscr{E}(v)=\frac{1}{2}(\nabla v+(\nabla v)^T)$ — тензор скоростей деформаций, $\lambda_i, i=\overline{1,L}$ — времена релаксации, $\kappa_i, i=\overline{1,L+1}$ — времена ретардации, μ — вязкость жидкости, $\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}v_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ это субстанциональная производная по времени.

Из этого соотношения при помощи преобразование Лапласа девиатор тензора напряжений σ выражается через $\mathscr{E}(v)$. При подстановке его в систему уравнений движения жидкости в форме Коши получается следующая система уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\mu_1\Delta v+\sum_{i=1}^{n}v_i\frac{\partial v}{\partial x_i}-\mu_2\frac{\partial\Delta v}{\partial t}-2\mu_2\mathrm{Div}\left(v_k\frac{\partial\mathscr{E}(v)}{\partial x_k}\right)-$$

$$-2\mathrm{Div}\int_0^t\sum_{i=1}^{L}\beta_i e^{\alpha_i(t-s)}\mathscr{E}(v)(s,z(s,t,x))\,ds+\nabla p=f; \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\,v=0,\quad (t,x)\in Q_T=[0,T]\times\Omega; \tag{2}$$

$$z(\tau;t,x)=x+\int_t^{\tau}v(s,z(s;t,x))\,ds,\quad 0\leqslant t,\tau\leqslant T,\quad x\in\Omega. \tag{3}$$

Здесь $\Omega\subset\mathbb{R}^n, n=2,3$ — ограниченная выпуклая область с гладкой границей, $[0,T], T<\infty$, — промежуток времени, v и p – скорость и давление в жидкости, f — плотность внешних сил, константа $\mu_2>0$ характеризует время запаздывания. Div — матричная дивергенция. Неизвестными являются скорость движения v и давление жидкости p, а также траектории движения частиц жидкости z, определяемые полем скоростей.

Для этой системы уравнений рассматривается начально-краевая задача с начальным и граничным условиями

$$v|_{t=0}=a(x),\quad x\in\Omega,\quad v|_{\partial\Omega\times[0,T]}=0. \tag{4}$$

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема. *Начально-краевая задача* (1)–(4) *имеет хотя бы одно слабое решение.*

Для доказательства рассматривается аппроксимационная задача, разрешимость которой устанавливается при помощи теоремы Лере-Шаудера о неподвижной точке. После этого на основе априорных оценок решений показывается, что из

последовательности решений аппроксимационной задачи можно извлечь подпоследовательность, слабо сходящуюся к слабому решению начально-краевой задачи (1)—(4) при стремлении параметра аппроксимации к нулю.

Работа выполнена за счёт Российского Научного Фонда (грант № 23-21-00091).

Литература

1. *Осколков А.П.* Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. МИАН СССР. — 1988. — Т. 179. — С. 126–164.

2. *Звягин В.Г., Турбин М.В.* Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина–Фойгта // СМФН. — 2009. — Т. 31. — С. 3–144.

3. *Ustiuzhaninova A., Turbin M.* Feedback Control Problem for Modified Kelvin-Voigt Model // J. Dyn. Control Syst. — 2022. — V. 28. — P. 465–480.

4. *Turbin M., Ustiuzhaninova A.* Pullback attractors for weak solution to modified Kelvin-Voigt model // Evolution Equations and Control Theory. — 2022. — V. 11. №. 6. — P. 2055–2072.

SOLVABILITY OF THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE KELVIN-VOIGT MODEL WITH MEMORY

M. V. Turbin, A. S. Ustiuzhaninova

The report is devoted to the proof of the solvability in the weak sense of the initial-boundary value problem for the Kelvin-Vogit model, taking into account the memory along the trajectories of fluid particles. The proof is carried out on the base of the approximation-topological approach to the study of fluid dynamic problems.

Keywords: Kelvin-Voigt model, weak solution, existence theorem.

УДК 517.984

НЕКОТОРЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СЕМЕЙСТВА МОДЕЛЕЙ ФРИДРИХСА

Г. Х. Умиркулова[1]

1 *g.h.umirqulova@buxdu.uz*; Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан.

В работе рассматривается семейства моделей Фридрихса $h_\mu(k)$, $\mu > 0$, $k \in (-\pi, \pi]^3$. Изучены условия существования нулевого собственного значения и резонанс с нулевой энергией для модели Фридрихса $h_\mu(\mathbf{0})$, $\mathbf{0} := (0,0,0)$. Более того, найдены условия положительности семейства модели Фридрихса.

Ключевые слова: модель Фридрихса, собственное значение, резонанс с нулевой энергией, положительность оператора.

Пусть $\mathbb{T}^3$ – трехмерный тор и $L_2(\mathbb{T}^3)$– гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}^3$. Рассмотрим семейства моделей Фридрихса $h_\mu(k)$, $\mu > 0$, $k \in \mathbb{T}^3$, действующий в $L_2(\mathbb{T}^3)$ как

$$h_\mu(k) := h_0(k) - \mu v,$$

где операторы $h_0(k)$, $k \in \mathbb{T}^3$ и v определяются по правилам:

$$(h_0(k)f)(p) = (l_1\varepsilon(p) + l_2\varepsilon(k+p))f(p), \quad (vf)(p) = \varphi(p)\int_{\mathbb{T}^3}\varphi(t)f(t)dt.$$

Здесь функция $\varepsilon(\cdot)$ определена как

$$\varepsilon(p) := \sum_{j=1}^{3}(1-\cos(mp^{(j)})),\ p = (p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}) \in \mathbb{T}^3, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим следующие подмножества множества $\mathbb{T}^3$:

$$\Lambda := \left\{(p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}) : p^{(i)} \in \left\{0, \pm\frac{2}{m}\pi; \pm\frac{4}{m}\pi; \ldots; \pm\frac{m'}{m}\pi\right\} \cup \Pi_m,\ i = 1,2,3\right\},$$

где

$$m' := \begin{cases} m-2, \text{ если } m \text{ четно} \\ m-1, \text{ если } m \text{ нечетно} \end{cases} \quad \text{и} \quad \Pi_m := \begin{cases} \{\pi\}, \text{ если } m \text{ четно} \\ \varnothing, \quad \text{если } m \text{ нечетно} \end{cases}.$$

Прямые вычисления показывает, что число элементов множества Λ равно m^3. Так как $\mathbf{0} := (0,0,0) \in \Lambda$, для любого $k \in \Lambda$ имеет место равенство $h_\alpha(\mathbf{0}) \equiv h_\alpha(k)$. В этом случае, для существенного спектра оператора $h_\alpha(\mathbf{0})$ имеет место равенство $\sigma_{\text{ess}}(h_\alpha(\mathbf{0})) = [0; 2(l_1 + l_2)]$.

Пусть $C(\mathbb{T}^3)$ (соот. $L_1(\mathbb{T}^3)$) – банахово пространство непрерывных (соот. интегрируемых) функций на $\mathbb{T}^3$.

Определение 1. *Говорят, что оператор $h_\mu(\mathbf{0})$ имеет резонанс с нулевой энергией, если число* 1 *является собственным значением интегрального оператора*

$$(G_\mu\psi)(p) = \frac{\mu\varphi(p)}{l_1+l_2}\int_{\mathbb{T}^3}\frac{\varphi(t)\psi(t)dt}{\varepsilon(t)}, \quad \psi \in C(\mathbb{T}^3),$$

и по крайней мере одна (*с точностью до константы*) *соответствующая собственная функция ψ удовлетворяет условию $\psi(k') \neq 0$ для некоторого $k' \in \Lambda$.*

Положим

$$\mu_0 := (l_1+l_2)\left(\int_{\mathbb{T}^3}\frac{\varphi^2(t)dt}{\varepsilon(t)}\right)^{-1}.$$

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия того, чтобы либо число $z = 0$ являлось собственным значением оператора $h_\mu(\mathbf{0})$, либо оператор $h_\mu(\mathbf{0})$ имел резонанс с нулевой энергией.

Теорема 1. а) *Оператор $h_\mu(\mathbf{0})$ имеет нулевое собственное значение тогда и только тогда, когда $\mu = \mu_0$ и $\varphi(k') = 0$ при всех $k' \in \Lambda$;*
б) *Оператор $h_\mu(\mathbf{0})$ имеет резонанс с нулевой энергией тогда и только тогда, когда $\mu = \mu_0$ и $\varphi(k') = 0$ при некотором $k' \in \Lambda$.*

Заметим, что если оператор $h_\mu(\mathbf{0})$ имеет резонанс с нулевой энергией, тогда решение уравнения $G_\mu\psi = \psi$ равно (с точностью до константы) функции $\varphi(\cdot)$. Отметим, что в определении 1 требование наличия собственного значения $\lambda = 1$ оператора G_μ соответствует существованию решения уравнения $h_\mu(\mathbf{0})f = 0$, а из условия $\varphi(k') \neq 0$ при некотором $k' \in \Lambda$ следует, что решение f этого уравнения не

принадлежит пространству $L_2(\mathbb{T}^3)$. Точнее, если оператор $h_\mu(\mathbf{0})$ имеет резонанс с нулевой энергией, то функция

$$f(p) = \frac{\mu\varphi(p)}{(l_1 + l_2)\varepsilon(p)}, \tag{1}$$

удовлетворяет уравнению $h_\mu(\mathbf{0})f = 0$ и $f \in L_1(\mathbb{T}^3) \setminus L_2(\mathbb{T}^3)$. Если оператор $h_\mu(\mathbf{0})$ имеет нулевое собственное значение, то функция f, определенная по формуле (1), удовлетворяет уравнению $h_\mu(\mathbf{0})f = 0$ и $f \in L_2(\mathbb{T}^3)$.

Пусть I – единичный оператор в $L_2(\mathbb{T}^3)$.

Теорема 2. *Если оператор $h_\mu(\mathbf{0})$ имеет либо резонанс с нулевой энергией либо нулевое собственное значение, то $h(k) + l_1\varepsilon(k)I$ является положительным оператором.*

SOME SPECTRAL PROPERTIES OF THE FAMILY OF FRIEDRICHS MODELS

G. H. Umirkulova

In this paper, we consider a family of Friedrichs models $h_\mu(k)$, $\mu > 0$, $k \in (-\pi, \pi]^3$. The existence conditions for the zero eigenvalue and zero energy resonance for the Friedrichs model $h_\mu(\mathbf{0})$, $\mathbf{0} := (0,0,0)$ are studied. Moreover, the positivity condition for the family of Friedrichs models is found.

Keywords: Friedrichs model, eigenvalue, zero-energy resonance, positive operator.

УДК 517.987

О ЗАРЯДАХ НА КВАНТОВЫХ ЛОГИКАХ МНОЖЕСТВ

Х. Фауаз[1]

1 *khattab1058@hotmail.com*; Казанский государственный энергетический университет, Институт цифровых технологий и экономики; Казанский Приволжский федеральный университет, НОМЦ Приволжского федерального округа.

Исследованы конечные квантовые логика множеств $X(km, k)$ и заряды на них. Изучен вопрос, когда квантовая логика $X(km, k)$ является симметричной (или асимметричной) логикой. Исследована регулярность зарядов на логике $X(km, k)$.

Ключевые слова: квантовая логика множеств, логика $X(km, k)$, атом, симметричная логика, асимметричная логика, заряд.

Наши исследования продолжают работы [1]–[6].

Квантовая логика. Пусть Ω – непустое множество, 2^Ω – семейство всех подмножеств Ω. Положим $\Omega_n = \{1, 2, ...n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Семейство $\mathscr{E} \subseteq 2^\Omega$ называется квантовой логикой множеств, если выполнены условия:

[У$_1$] $\Omega \in \mathscr{E}$, [У$_2$] $A \in \mathscr{E} \Rightarrow A^c := \Omega \setminus A \in \mathscr{E}$,

[У$_3$] для всех $A, B \in \mathscr{E}, A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{E}$.

Квантовая логика $\mathscr{E}$ называется σ-классом, если она удовлетворяет ещё условию: $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathscr{E}, A_m \cap A_n = \emptyset, m \neq n \Rightarrow \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{E}$.

Семейство $\mathscr{E} \subseteq 2^\Omega$ является квантовой логикой множеств тогда и только тогда оно удовлетворяет условию (У$_1$) и следующему условию:

[У$_4$] Для всех $A, B \in \mathscr{E}, A \subseteq B \Rightarrow B \setminus A \in \mathscr{E}$.

Пример 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\Omega_{2n} = \{1, 2, ..., 2n\}$. Тогда семейство $\mathscr{E}_{2n}^{even} = \{A \subseteq \Omega_{2n} \mid \mathrm{card} A$ счетно$\}$ является квантовой логикой множеств.

Симметричной логикой называется квантовая логика множеств $\mathscr{E}$, удовлетворяющая условию:

[C] $A, B \in \mathscr{E} \Rightarrow A \Delta B \in \mathscr{E}$.

Семейство $\mathscr{E} \subseteq 2^{\Omega}$ является симметричной логикой тогда и только тогда оно удовлетворяет условию (У$_1$) и (C).

Пример 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\Omega_{2n} = \{1, 2, ..., 2n\}$. Тогда семейство $\mathscr{E}_{2n}^{even} = \{A \subseteq \Omega_{2n} \mid \mathrm{card} A$ счетно$\}$ является симметричной логикой.

Асимметричной логикой называется квантовая логика множеств $\mathscr{E}$, удовлетворяющая условию: $A \Delta B \in \mathscr{E} \Leftrightarrow A \cap B \in \mathscr{E}, \forall A, B \in \mathscr{E}$.

Логика $X(km, k)$. Пусть m, k – натуральные числа, конечное множество $X = \{x_1, x_2, .., x_{mk}\}$. Обозначим через $X(km, k)$ логику множеств (σ-класс) на X, множество таких подмножеств X, число элементов которых кратно k. $X(km, k) = \{A \subseteq X \mid \mathrm{card}(A) = sk, s = 1, 2.., m\}$. A - атомом $X(km, k)$ называется подмножество X, для которого $\mathrm{card}(A) = k$.

Предложение 1. *Логика множеств $X(km, k)$ на X является симметричной логикой тогда и только тогда, когда*
(i) $m = 1$ для лобого числа k ($k \in \mathbb{N}$), (ii) $k = 1$ и $k = 2$ для любого числа m ($m \in \mathbb{N}$).

Предложение 2. *Логика множеств $X(km, k)$ на X является асимметричной логикой, тогда и только тогда,*
(i) $m = 1$ для любого числа k ($k \in \mathbb{N}$), (ii) k нечетно для любого числа $m \in \mathbb{N}$.

Зарядом на логике $X(km, k)$ называется ортоаддитивная функция $V : X(km, k) \longrightarrow \mathbb{R}$ такая, что для всех $A, B \in X(km, k)$ с $A \cap B = \emptyset \Rightarrow V(A \cup B) = V(A) + V(B)$.

Регулярность зарядов на логике $X(km, k)$. Пусть f – произвольная функция $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, тогда регулярным зарядом на логике $X(km, k)$ называется заряд такой, что $V_f = \sum\limits_{x \in A} f(x), A \in X(km, k)$.

Теорема. *Пусть k, m – натуральные числа, где $m \geq 3, k$ – нечетное число. Тогда любой заряд V на асимметричной логике $X(km, k)$ является регулярным и существует единственная функция f такая, что $V = V_f$.*

Литература

1. Bikchentaev A. M., Navara M., Yakushev R. S. *Quantum Logics of Idempotents of unital rings* // Internat. J. Theoret. phys. – 2015. – V. 54. – № 6. – P. 1987–2000.

2. Bikchentaev A. M., Navara M. *States on symmetric logis: extensions* // Math. Slovaca – 2016. – V. 66. – № 2. – P. 359–366.

3. Ovchinnkov P. G., Sultanbekov F. F. *Finite concrete logics: their structure and measures on them* // Internat. J. Theoret. Phys. – 1998. – V. 37. – № 2. – P. 147–153.

4. Navara M. *Quantum logics representable as kernels of measures* // Czechoslovak Math. J. – 1996. – V. 46. – № 4. – P. 587–597.

5. Ovchinnkov P. G. *Measure on finite concrete logics* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1999. – V. 127. – № 7. – P. 1957–1966.

6. Султанбеков Ф. Ф. *Заряды и автоморфизмы одного класса конечных логик множеств* // Конструктивная теория функций и функц. анализ (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1992). Вып. 8. – С. 57–68.

QUANTUM LOGICS AND STATES ON THEM

Kh. Fawwaz

We investigate a finite quantum logics of sets $X(km,k)$ and charges on them. The question is investigated when the quantum logic of sets $X(km,k)$ is a symmetric logic and when it is an asymmetric logic. Also we study the regularity of charges on the logic $X(km,k)$.

Keywords: quantum logic of sets, logic $X(km,k)$, atom, symmetric logic, asymmetric logic, charge.

УДК 517.53, 517.57, 517.95

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

К. Ю. Федоровский[1]

1 *kfedorovs@yandex.ru*; Механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

В докладе планируется обсудить задачу Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка с постоянными комплексными коэффициентами и для общих эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами в ограниченных односвязных областях комплексной плоскости. Будут рассмотрены как сильно эллиптический случай, так и случай систем, не являющихся сильно эллиптическими. Планируется также обсудить связь задачи Дирихле и задачи равномерной приближаемости функций на компактах в $\mathbb{C}$ полиномиальными решениями рассматриваемых уравнений и систем.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, эллиптическая система, задача Дирихле, равномерная аппроксимация.

В докладе планируется обсудить задачу Дирихле (в ее классической постановке) для эллиптических систем второго порядка в $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2_{(x,y)}$ с постоянными коэффициентами.

Нам понадобятся дифференциальные операторы $\partial_x = \partial/\partial x$ и $\partial_y = \partial/\partial y$, а также $\overline{\partial} = \frac{1}{2}\big(\partial_x + i\partial_y\big)$ — оператор Коши–Римана — и $\partial = \frac{1}{2}\big(\partial_x - i\partial_y\big)$. Точки $z = (x,y)$ плоскости $\mathbb{R}^2$ мы будем отождествлять, там где это удобно, с комплексными числами $z = x + iy$. Всюду в дальнейшем мы будем отождествлять пару функций $u, v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ с комплекснозначной функцией комплексного переменного $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, и наоборот. При этом $\partial_x f = \partial_x u + i\partial_x v$ и $\partial_y f = \partial_y u + i\partial_y v$. Кроме того, символ f будет, при необходимости, обозначать вектор-столбец с компонентами u и v. Наконец, мы будем использовать стандартные обозначения $u_x = \partial_x u$, $u_{xy} = \partial_x\partial_y u$ и т.д.

Пусть A, B, C — вещественные 2×2-матрицы. Определим дифференциальный оператор

$$\mathscr{L} = A\partial_{xx} + 2B\partial_{xy} + C\partial_{yy}.$$

Другими словами, $\mathscr{L} f = \widetilde{u} + i\widetilde{v}$, а функции $\widetilde{u}$ и $\widetilde{v}$ определяются так:

$$\begin{pmatrix}\widetilde{u}\\ \widetilde{v}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}u_{xx}\\ v_{xx}\end{pmatrix} + 2B\begin{pmatrix}u_{xy}\\ v_{xy}\end{pmatrix} + C\begin{pmatrix}u_{yy}\\ v_{yy}\end{pmatrix}.$$

Мы будем рассматривать однородную систему уравнений вида

$$\mathscr{L} f = 0. \tag{1}$$

Важным частным случаем, который будет интересовать нас особо, является система, определяемая матрицами A, B, C вида $xI + yS$, где I — единичная 2×2-матрица, а S — кососимметрическая 2×2-матрица. Такие системы эквивалентны одному уравнению второго порядка с постоянными *комплексными* коэффициентами на (комплекснозначную) функцию f, т.е. уравнению вида

$$af_{xx} + 2bf_{xy} + cf_{yy} = 0, \tag{2}$$

где $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Задача Дирихле для системы (1) состоит в следующем: *пусть даны ограниченная односвязная область D на плоскости и непрерывная функция h на границе ∂D области D; требуется найти функцию f класса $C^2(D) \cup C(\overline{D})$ такую, что $\mathscr{L} f = 0$ в D и $f|_{\partial D} = h$*. Естественным образом возникает *вопрос описания таких областей D, в которых задача Дирихле разрешима для любой заданной непрерывной функции h на ∂D*. Области, удовлетворяющие этому условию, называются *$\mathscr{L}$-регулярными*.

В задаче описания $\mathscr{L}$-регулярных областей естественно возникает понятие эквивалентности систем рассматриваемого вида. Две системы вида (1) будем называть *эквивалентными*, если они сводятся друг к другу при помощи следующих *допустимых преобразований*: невырожденной вещественно линейной замены переменных и искомых функций, а также невырожденной линейной комбинации уравнений. При этом если две системы вида (1), заданные операторами $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$, эквивалентны, а область D является $\mathscr{L}_1$-регулярной, то область, полученная из D подходящим линейным преобразованием, будет $\mathscr{L}_2$-регулярной. Такое понятие эквивалентности систем было предложено, например, в [1].

Наиболее простой случай возникает, если система (1) эквивалентна системе с верхнетреугольными матрицами A, B и C (такие системы называются *разделимыми* так как они распадается на пару независимых уравнений, одно из которых является однородным и эквивалентно уравнению Лапласа, а второе имеет ненулевую правую часть и эквивалентно уравнению Пуассона).

Для гармонических функций (т.е. для системы, заданной оператором Лапласа Δ, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$) хорошо известен результат о том, что всякая ограниченная односвязная область в $\mathbb{R}^2$ является Δ-регулярной (этот выдающийся результат был получен в 1907 году Лебегом [2]). Аналогичный результат верен и для любой разделимой системы. Заметим, что системы, связанные с уравнениями вида (2), не являются разделимыми.

Вопрос об описании $\mathscr{L}$-регулярных областей существенно отличается в случае операторов $\mathscr{L}$, соответствующих *сильно эллиптическим системам* и системам, не являющихся сильно эллиптическими. Не приводя формального определения сильной эллиптичности, скажем, что дифференциальный оператор, соответствующий системе (1), эквивалентен одному из следующих двух операторов: оператору

$$\mathscr{L}_{\tau,\sigma} f = (\partial\overline{\partial} + \tau\partial^2) f + \sigma(\tau\partial\overline{\partial} + \partial^2)\overline{f}$$

при $0 \leqslant \tau < 1$ и $0 \leqslant \sigma < 1$ в сильно эллиптическом случае, и оператору

$$\mathscr{L}_{\tau,\sigma} f = (\overline{\partial}^2 + \tau\partial\overline{\partial}) f + \sigma^{-1}(\tau\overline{\partial}^2 + \partial\overline{\partial})\overline{f}$$

при $0 \leqslant \tau < 1$ и $\sigma > 1$ в не сильно эллиптическом случае. В обоих случаях (канонические) параметры τ и σ однозначно определяются по исходной системе, причем случай $\sigma = \infty$ для не сильно эллиптических систем также не исключается. При этом оператор $\mathscr{L}_{\tau,0}$ соответствует сильно эллиптической, а оператор $\mathscr{L}_{\tau,\infty}$ соответствует не сильно эллиптической системе, заданной уравнением вида (2).

Первый результат, который планируется обсудить в докладе, относится к случаю систем, не являющихся сильно эллиптическими, см. [3, Теорема 1]:

Теорема 1. *Пусть $\alpha \in (0,1)$, а G — жорданова область в $\mathbb{C}$ с границей класса $C^{1,\alpha}$. Тогда для любого $\tau \in [0,1)$ область G не является $\mathscr{L}_{\tau,\infty}$-регулярной.*

Соответствующий результат сохраняется и для всех операторов $\mathscr{L}_{\tau,\sigma}$ в не сильно эллиптическом случае (т.е. при $\tau \in [0,1)$ и $\sigma > 1$).

Заметим, что до настоящего времени задача Дирихле для не сильно эллиптических операторов изучалась практически только в бианалитическом случае, т.е. для оператора $\mathscr{L}_{0,\infty} = \overline{\partial}^2$ (этот оператор часто называют *оператором Бицадзе*). В частности, М.Я. Мазаловым [4] было показано, что любая жорданова область с Дини-гладкой границей не является $\overline{\partial}^2$-регулярной, и приведен пример $\overline{\partial}^2$-регулярной жордановой области с липшицевой границей. Таким образом, результат, приведенный в Теореме 1, является почти точным.

Перейдем к сильно эллиптическому случаю. Здесь, во первых, планируется обсудить недавно полученный в [5] результат о том, что *для неразделимых сильно эллиптических систем указанного вида не существует неотрицательно определенных функционалов энергии вида*

$$f \mapsto \int_D \Phi(u_x, v_x, u_y, v_y)\, dx dy,$$

где D — область, в которой рассматривается задача, Φ — квадратичная форма в $\mathbb{R}^4$, а $f = u + iv$. Из этого, в частности, следует, что для уравнений вида (2), отличных от уравнения Лапласа (которое соответствует разделимой системе), не существует неотрицательно определенного функционала энергии рассматриваемого вида. Это обстоятельство показывает, что непосредственное распространение теоремы Лебега на сильно эллиптические уравнения вида (2) и на неразделимые сильно эллиптические системы общего вида не представляется возможным и для доказательства аналога теоремы Лебега для таких уравнений необходимо привлечение существенно другой техники.

В связи с этим планируется обсудить недавно предложенный А.О. Багапшем метод решения задачи Дирихле для сильно эллиптических систем вида (1) в каноническом виде, который состоит в следующем: *решение задачи Дирихле для системы, заданной сильно эллиптическим оператором вида $\mathscr{L}_{\tau,\sigma}$, ищется в виде ряда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n f_n$$

по степеням малого параметра $\rho = (\tau + \sigma)/(1 + \tau\sigma) < 1$, где f_0 — это решение классической гармонической задачи Дирихле с исходной граничной функцией h, а f_n при $n \geqslant 1$ — это решения подходящих задач Пуассона, определяемый при помощи специального

итерационного процесса. Будет обсужден следующий результат, недавно полученный в [6] для уравнений вида (2) и в [7] для систем (1) общего вида:

Теорема 2. *Пусть жорданова область D и функция h, заданная на ∂D таковы, что $f \circ \varphi \in C^{\alpha}(\mathbb{T})$ при $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, где $\mathbb{T} = \{|z| = 1\}$, а φ — некоторое конформное отображение круга $\{|z| < 1\}$ на D. Тогда для любых $\tau \in [0, 1)$ и $\sigma \in [0, 1)$ описанный выше ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n f_n$ сходится в пространстве $C(\overline{D})$ к решению задачи Дирихле для уравнения $\mathscr{L}_{\tau,\sigma} f = 0$ в D с граничной функцией h.*

Далее, планируется обсудить задачу равномерной аппроксимации функций на компактах в $\mathbb{C}$ решениями (в основном полиномиальными) уравнений $\mathscr{L}_{\tau,\sigma} f = 0$ и связь этой задачи с задачей Дирихле для этих уравнений. Речь пойдет о результатах недавних работ [8], [9].

Доклад основан на работах, выполненных при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22–11–00071).

Литература

1. Hua Loo Keng, Lin Wei, Wu Ci-Quian, *Second-order systems of partial differential equations in the plane.* – Boston, London, Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program. – 1985.

2. Lebesgue H. *Sur le problème de Dirichlet* // Rend. Circ. Mat. di Palermo. – 1907. – V. 29. – P. 371–402.

3. Багапш А. О., Мазалов М.Я., Федоровский К.Ю. *О задаче Дирихле для не сильно эллиптических уравнений второго порядка* // УМН. – 2022. – Т. 77. – No. 2(464). – С. 197–198.

4. Мазалов М.Я., *О задаче Дирихле для полианалитических функций* // Матем. сб. – 2009. – Т. 200. – No. 10. – С. 59–80.

5. Багапш А. О., Федоровский К.Ю. *О функционалах энергии для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами* // Уфимский матем. журнал. – 2022. – Т. 14. – No. 4. – С. 16–28.

6. Bagapsh A. O. *The perturbation method for the skew-symmetric strongly elliptic systems of PDEs* // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2023. – V. 68. – No. 1. P. 57–66.

7. Bagapsh A. O. *Perturbation method for second order strongly elliptic systems of PDEs with constant coefficients* // arXiv. – 2307.04575.

8. Fedorovskiy K. Yu. *Two problems on approximation by solutions of elliptic systems on compact sets in the plane* // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2018. – V. 63. – No. 7–8. P. 961–975.

9. Fedorovskiy K. Yu. *Uniform approximation by polynomial solutions of elliptic systems on boundaries of Carathéodory domains in $\mathbb{R}^2$* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2023. – V. 44. – No. 4. – P. 1299–1310.

ON DIRICHLET PROBLEM FOR SECOND-ORDER ELLIPTIC SYSTEMS WITH CONSTANT COEFFICIENTS

K. Yu. Fedorovskiy

In the talk we plan to discuss the Dirichlet problem for second-order elliptic equations with constant complex coefficients and for general second-order elliptic systems with constant coefficients in bounded simply connected domains in the complex plane. Both the strongly elliptic case and the case of systems that are not strongly elliptic will be considered. We also plan to discuss the connections between Dirichlet problem and the problem on uniform approximation of functions on compact sets in $\mathbb{C}$ by

polynomial solutions of equations and systems under consideration.
Keywords: elliptic equation, elliptic system, Dirichlet problem, uniform approximation.

УДК 517.956.2

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ТЕОРЕМЫ ТИПА ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ ПОЛУЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ НА МОДЕЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

В. В. Филатов[1]

1 *filatov@volsu.ru*; Волгоградский государственный университет, Институт математики и информационных технологий.

В статье изучаются ограниченные решения полулинейного уравнения вида

$$\Delta u - u\phi(|u|) = 0$$

на модельных римановых многообразиях. Работа ориентирована на выявление специфических условий, накладываемых на эти многообразия, при выполнении которых все ограниченные решения указанного полулинейного уравнения будут тривиальны. А именно, получены условия на модельные многообразия, при выполнении которых всякое ограниченное решение полулинейного уравнения будет являться тождественным нулём.

Ключевые слова: теоремы типа Лиувилля, полулинейные эллиптические уравнения, модельные многообразия.

Данная работа посвящена изучению поведения ограниченных решений полулинейных уравнений вида

$$\Delta u - u\phi(|u|) = 0, \tag{1}$$

где $\phi(\xi) \geq 0$ – гладкая, монотонно неубывающая функция, на модельных римановых многообразиях.

Пусть M – полное риманово многообразие, представимое в виде объединения $M = B \cup D$, где B – некоторый компакта, а D изометрично прямому произведению $(r_0, +\infty) \times S$, где S – компактное риманово многообразие размерности $n-1$. Пусть метрика на D имеет следующий вид

$$ds^2 = dr^2 + g^2(r)d\theta^2.$$

Здесь $g(r)$ – положительная, гладкая на $(r_0, +\infty)$ функция, а $d\theta^2$ – метрика на S. Примерами таких многообразий могут служить евклидово пространство ($g(r) = r$), пространство Лобачевского ($g(r) = \operatorname{sh} r$) и другие.

Положим

$$I = \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{g^{n-1}(t)}, \quad K = \int\limits_{r_0}^{\infty} \left(\frac{1}{g^{n-1}(t)} \int\limits_{r_0}^{t} g^{n-1}(z)dz \right) dt.$$

Теорема. *Если на M выполнено хотя бы одно из условий $I = \infty$ или $I < \infty$ и $K = \infty$, то всякое ограниченное решение уравнения* (1) *на M тождественно равно нулю.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90110.

Литература

1. Лосев А. Г., Мазепа Е. А. *Об асимптотическом поведении решений некоторых уравнений эллиптического типа на некомпактных римановых многообразиях* //Изв. вузов. Матем. – 1999. – №6. – С. 41–49.

2. Григорьян А. А., Надирашвили Н. С. *Лиувиллевы теоремы и внешние краевые задачи* //Изв. вузов. Матем. – 1987. – №5. – С. 25–33.

3. Лосев А. Г. *Некоторые лиувиллевы теоремы на римановых многообразиях специального вида* //Изв. вузов. Матем. – 1991. – №12. – С. 15–24.

4. Лосев А. Г., Филатов В. В. *Liouville type theorems for solutions of semilinear equations on non-compact Riemannian manifolds* //Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. – 2021. – Т.31. – №4. – С. 629–639.

SUFFICIENT CONDITIONS FOR THE FULFILLMENT OF THE LIOUVILLE-TYPE THEOREM FOR BOUNDED SOLUTIONS OF SEMILINEAR EQUATIONS ON MODEL MANIFOLDS

V. V. Filatov

The article studies bounded solutions of a semilinear equation of the form

$$\Delta u - u\phi(|u|) = 0$$

on model Riemann manifolds. The work is focused on identifying specific conditions imposed on these manifolds, under which all bounded solutions of the indicated semilinear equation will be trivial. Specifically, conditions have been obtained on model manifolds, under the fulfillment of which any bounded solution of a semilinear equation will be identically zero.

Keywords: Liouville-type theorems, semilinear elliptic equations, model manifolds.

УДК 517.538.2, 514.17, 517.518.244

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ ПОЛНОТЫ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ НА КОМПАКТАХ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Б. Н. Хабибуллин[1]

1 *khabib-bulat@mail.ru*; Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН.

Устанавливается новая шкала условий полноты экспоненциальных систем в пространствах функций, непрерывных на компакте и одновременно голоморфных во внутренности этого компакта, если эта внутренность не пустая. Эти условия формулируются в терминах мажорирования смешанных площадей выпуклой оболочки компакта разнообразными характеристиками распределения показателей экспоненциальной системы. Они позволяют получить условия полноты экспоненциальных систем в геометрических терминах периметра и евклидовой площади, а также критерии полноты экспоненциальных систем в терминах ширины в направлении, наименьшей ширины и диаметра этого компакта.

Ключевые слова: полнота систем, экспоненциальная система, голоморфная функция, распределение корней, смешанная площадь, выпуклая оболочка, опорная функция.

Пустое множество обозначаем через $\varnothing$, $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ — все *натуральные числа,* $\mathbb{N}_0 := \{0\} \bigcup \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ рассматриваем с отношением порядка $\leqslant$ и расширением $\overline{\mathbb{N}_0} := \mathbb{N}_0 \bigcup \{+\infty\}$, где $+\infty := \sup \mathbb{N}_0 \notin \mathbb{N}_0$, $\mathbb{R}$ — *вещественная ось* с отношением порядка $\leqslant$, $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \bigcup \{\pm\infty\}$ — *расширенная* вещественная ось с верхней и нижней гранями $+\infty := \sup \mathbb{R} = \inf \varnothing \notin \mathbb{R}$ и $-\infty := \inf \mathbb{R} = \sup \varnothing \notin \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+ := \left\{ r \in \mathbb{R} \,\middle|\, r \geqslant 0 \right\}$ — *положительной полуось* с *расширением* $\overline{\mathbb{R}}^+ := \mathbb{R}^+ \bigcup \{+\infty\}$.

Для подмножества S в *комплексной плоскости* $\subset \mathbb{C}$ через $\operatorname{cl} S$, $\operatorname{int} S$ и $\operatorname{co} S$ обозначаем соответственно *замыкание, внутренность* и *выпуклую оболочку* S в $\mathbb{C}$.

Через Z обозначаем *распределение точек* на $\mathbb{C}$, среди которых могут быть повторяющиеся. Распределение точек Z однозначно определяется функцией, действующей из $\mathbb{C}$ в $\overline{\mathbb{N}_0}$ и равной в каждой точке $z \in \mathbb{C}$ количеству повторений этой точки z в Z. Для этой функции, которую называют *функцией кратности,* или *дивизором,* распределения точек Z, сохраняем то же обозначение Z и пишем $z \in Z$, если $Z(z) > 0$.

Система векторов из топологического векторного пространства *полна* в нём, если замыкание линейной оболочки этой системы совпадает с ним. Далее обсуждается полнота лишь *экспоненциальных систем* $\operatorname{Exp}^Z := \left\{ w \underset{w \in \mathbb{C}}{\longmapsto} w^p \exp(zw) \,\middle|\, z \in Z,\ Z(z) - 1 \geqslant p \in \mathbb{N}_0 \right\}$ *с распределением показателей* Z. Для функции f на $S \subset \mathbb{C}$ со значениями в $\mathbb{C}$ или в $\overline{\mathbb{R}}$ полагаем $\|f\|_S := \sup\limits_{z \in S} \left| f(z) \right|$, а $C(S)$ — *пространство непрерывных функций* $f\colon S \to \mathbb{C}$ *с* sup-*нормой* $\|f\|_S$. Для *открытого* подмножества $S \subset \mathbb{C}$ через $\operatorname{Hol}(S)$ обозначаем *пространство голоморфных функций* на S. Для *компакта* $S \subset \mathbb{C}$ с *внутренностью* $\operatorname{int} S$ через $C(S) \bigcap \operatorname{Hol}(\operatorname{int} S)$ обозначаем *банахово пространство непрерывных на* S *и голоморфных на внутренности* $\operatorname{int} S$ *функций* $f\colon S \to \mathbb{C}$ *с* sup-*нормой* $\|f\|_S$. Таким образом, если $\operatorname{int} S = \varnothing$, то $C(S) \bigcap \operatorname{Hol}(\operatorname{int} S) = C(S)$. *Основная задача* — для пространств $C(S) \bigcap \operatorname{Hol}(\operatorname{int} S)$ дать, по возможности, максимально широкую шкалу геометрических условий полноты экспоненциальных систем Exp^Z для произвольного распределения показателей Z.

Для 2π-*периодической положительной функции* s на $\mathbb{R}$ *считающую радиальную функцию для распределения точек* Z *с весом* s *по аргументам* определим как функцию

$$Z_s^{\mathrm{rad}}\colon r \underset{r \in \mathbb{R}^+}{\longmapsto} Z(0)\|s\|_{\mathbb{R}} + \sum_{\substack{z \in Z \\ 0 < |z| \leqslant r}} s(\arg z) \in \overline{\mathbb{R}}^+; \quad Z^{\mathrm{rad}}(r) := Z_1^{\mathrm{rad}}(r). \tag{1}$$

Если граница подмножества $S \subset \mathbb{C}$ — спрямляемая замкнутая кривая, то евклидову длину этой границы обозначаем через $\operatorname{prm}(S)$ — *периметр* S. Одно из первых условий полноты системы Exp^Z без ограничений на Z в геометрических терминах — следующая

Теорема A ([1; гл. IV, § 1], [2; п. 3.4.1]). *Если* $S \neq \varnothing$ *— выпуклый компакт в* $\mathbb{C}$ *и*

$$\limsup_{0 < R \to +\infty} \frac{1}{R} \int_0^R \frac{Z^{\mathrm{rad}}(t) - Z(0)}{t} \mathrm{d}t > \frac{1}{2\pi} \operatorname{prm}(S), \tag{2}$$

то система Exp^Z *полна в* $C(S)\bigcap\mathsf{Hol}(\operatorname{int}S)$*, где в* (2) *нельзя заменить* $>$ *на* $\geqslant$.

Широкий круг условий полноты экспоненциальных систем Exp^Z представлен в [3; теорема 4.1], [4; § 7, п. 4, теорема единственности], [5; теорема A], [2; гл. 3]. Значительную их часть обобщают и усиливают наши новые результаты, приведённые ниже.

Опорную функцию множества $S\subset\mathbb{C}$ обозначаем как $\mathsf{spf}_S\colon \theta\underset{\theta\in\mathbb{R}}{\longmapsto}\sup\limits_{s\in S}\operatorname{Re}se^{-i\theta}\in\overline{\mathbb{R}}$.

Евклидову площадь измеримого по мере Лебега множества $S\subset\mathbb{C}$ обозначаем через $\mathsf{area}(S)$, а *для пары произвольных ограниченных подмножеств* $K\subset\mathbb{C}$ и $S\subset\mathbb{C}$ полагаем

$$\mathsf{area}(K,S):=\frac{1}{2}\big(\mathsf{area}(\mathsf{co}\,K+\mathsf{co}\,S)-\mathsf{area}(\mathsf{co}\,K)-\mathsf{area}(\mathsf{co}\,S)\big)\in\mathbb{R}^+.$$

В случае *выпуклых* K и S эта величина $\mathsf{area}(K,S)$ — *смешанная площадь* K и S, [6]–[8].

Для подмножества $K\subset\mathbb{C}$ через $\bar{K}$ обозначаем подмножество, зеркально симметричное K относительно вещественной оси. Наш главный результат — следующая

Основная теорема. *Пусть* Z *— распределение точек на* $\mathbb{C}$ *и для некоторого числа* $r_0>0$ *функция* $f\colon[r_0,+\infty)\to\mathbb{R}^+$ *выпуклая и ограниченная. Если* $S\neq\varnothing$ *— компакт в* $\mathbb{C}$ *со связным дополнением* $\mathbb{C}\setminus S$ *и для ограниченного* $K\subset\mathbb{C}$ *с* $0\in\mathsf{cl}\,\mathsf{co}\,K$ *имеем*

$$\sup_{r_0\leqslant r<R<+\infty}\left(\int_r^R\frac{Z^{\mathsf{rad}}_{\mathsf{spf}_{\bar{K}}}(t)}{t^2}f\big(t^2\big)\mathrm{d}t-\frac{\mathsf{area}(K,S)}{\pi}\int_r^R\frac{f\big(t^2\big)}{t}\mathrm{d}t\right)=+\infty,\tag{3}$$

то система Exp^Z *полна в* $C(S)\bigcap\mathsf{Hol}(\operatorname{int}S)$*, а условие* (3) *точное.*

Из Основной теоремы можно получить новые условия полноты в терминах простых геометрических характеристик выпуклой оболочки $\mathsf{co}\,S$ компакта $S\subset\mathbb{C}$.

1. Условия полноты в терминах периметра. Выбор в Основной теореме в качестве K замкнутого круга с центром в нуле единичного радиуса даёт

Следствие 1. *Пусть* Z*,* $r_0>0$ *и* f *те же, что в Основной теореме,* $0<P\in\mathbb{R}^+$ *и*

$$\sup_{r_0\leqslant r<R<+\infty}\left(\int_r^R\frac{Z^{\mathsf{rad}}(t)}{t^2}f\big(t^2\big)\mathrm{d}t-\frac{P}{2\pi}\int_r^R\frac{f\big(t^2\big)}{t}\mathrm{d}t\right)=+\infty.\tag{4}$$

Тогда для любого компакта $S\subset\mathbb{C}$ *со связным дополнением* $\mathbb{C}\setminus S$ *и с периметром выпуклой оболочки* $\mathsf{prm}(\mathsf{co}\,S)\leqslant P$ *система* Exp^Z *полна в* $C(S)\bigcap\mathsf{Hol}(\operatorname{int}S)$*, а условие* (4) *точное.*

Уже при $f=1$ это следствие 1 содержит в себе Теорему A, обобщая и усиливая её.

2. Условия полноты в терминах евклидовой площади. Из свойств смешанной площади выпуклых множеств по Основной теоремы получаем

Следствие 2. *Если* Z*,* $r_0>0$ *и* f *те же, что в Основной теореме,* $S\subset\mathbb{C}$ *— компакт со связным дополнением* $\mathbb{C}\setminus S$ *и для некоторого* $s_0\in\mathsf{co}\,\bar{S}$ *имеем*

$$\sup_{r_0\leqslant r<R<+\infty}\left(\int_r^R\frac{Z^{\mathsf{rad}}_{\mathsf{spf}_{\bar{S}-s_0}}(t)}{t^2}f\big(t^2\big)\mathrm{d}t-\frac{\mathsf{area}(\mathsf{co}\,S)}{\pi}\int_r^R\frac{f\big(t^2\big)}{t}\mathrm{d}t\right)=+\infty,\tag{5}$$

то система Exp^Z *полна в* $C(S)\bigcap\mathsf{Hol}(\operatorname{int}S)$*, а условие* (5) *точное.*

3. Условия полноты в терминах ширины в направлении. *Направление* $\theta\in\mathbb{R}$ *на* $\mathbb{C}$ определяется направлением радиус-вектора точки $e^{i\theta}$. *Ширина подмножества* $S\subset\mathbb{C}$ *в направлениях* $\theta\in\mathbb{R}$ [5; **33**], [6; гл. I, § 4], [7; 4.1.1], [8, п. 3.2], [2; п. 3.2] может быть определена как функция $\mathsf{brd}_S\colon\theta\underset{\theta\in\mathbb{R}}{\longmapsto}\mathsf{spf}_S(\theta)+\mathsf{spf}_S(\theta+\pi)$.

Умножение $w\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ на все точки из Z определяет распределение точек wZ. В частности, $-Z:=(-1)Z$, а для направления $\theta\in\mathbb{R}$ распределение точек $e^{i\theta}Z$ — это *поворот распределения точек* Z *на угол* θ.

Для распределения точек Z на $\mathbb{C}$ с определёнными в (1) при всех $t\in\mathbb{R}^+$ двумя считающими радиальными функциями

$$Z^{\mathsf{rad}}_{\cos^+}(t)=Z(0)+\sum_{\substack{z\in Z\\0<|z|\leqslant t}}\cos^+(\arg z),\quad Z^{\mathsf{rad}}_{\cos^-}(t):=(-Z)^{\mathsf{rad}}_{\cos^+}(t)$$

с весами соответственно $\cos^+\theta\underset{\theta\in\mathbb{R}}{:=}\max\{0,\cos\theta\}$ и $\cos^-\theta\underset{\theta\in\mathbb{R}}{:=}\max\{0,-\cos\theta\}$ по аргументам, а также при $r_0>0$ для функции $f\colon[r_0,+\infty)\to\mathbb{R}^+$ можем рассматривать следующую *f-логарифмическую субмеру промежутков* $(r,R]\subset[r_0,+\infty)$

$$\ell^f_Z(r,R):=\max\left\{\int_r^R\frac{Z^{\mathsf{rad}}_{\cos^+}(t)}{t^2}f(t^2)\,\mathrm{d}t,\int_r^R\frac{Z^{\mathsf{rad}}_{\cos^-}(t)}{t^2}f(t^2)\,\mathrm{d}t\right\}\in\overline{\mathbb{R}}^+.$$

Следствие 3. *Если* Z, $r_0>0$ *и* f *те же, что в Основной теореме,* $b\in\mathbb{R}^+$, $\theta\in\mathbb{R}$ *и*

$$\sup_{r_0\leqslant r<R<+\infty}\left(\ell^f_{e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}Z}(r,R)-\frac{b}{2\pi}\int_r^R\frac{f(t^2)}{t}\,\mathrm{d}t\right)=+\infty,\tag{6}$$

то для любого компакта $S\subset\mathbb{C}$ *со связным дополнением* $\mathbb{C}\setminus S$ *и ширины* $\mathsf{brd}_S(\theta)\leqslant b$ *в направлении* θ *система* Exp^Z *полна в* $C(S)\bigcap\mathsf{Hol}(\operatorname{int}S)$*, а условие* (6) *точное.*

4. Условия полноты в терминах широты, или толщины. *Широтой* [7; гл. I, § 4], [8; п. 3.2], или *толщиной* [9; 4.1.1], множества S называется наименьшее значение его ширины по направлениям $\mathsf{wid}(S):=\inf\limits_{\theta\in\mathbb{R}}\mathsf{brd}_S(\theta)\in\{-\infty\}\bigcup\overline{\mathbb{R}}^+$. Из Следствия 3 имеем

Следствие 4. *Если* Z, $r_0>0$ *и* f *те же, что в Основной теореме,* $b\in\mathbb{R}^+$ *и* (6) *выполнено для каждого* $\theta\in\mathbb{R}$*, то для любого компакта* $S\subset\mathbb{C}$ *со связным дополнением* $\mathbb{C}\setminus S$ *широты* $\mathsf{wid}(S)\leqslant b$ *система* Exp^Z *полна в* $C(S)\bigcap\mathsf{Hol}(\operatorname{int}S)$.

5. Условия полноты в терминах диаметра. *Диаметр* $\mathsf{diam}(S):=\sup\limits_{z,v\in S}|z-w|$ подмножества $S\subset\mathbb{C}$ можно определить и как наибольшее значение его ширины по направлениям $\mathsf{diam}(S)=\sup\limits_{\theta\in\mathbb{R}}\mathsf{brd}_S(\theta)$ [7; гл. I, § 4]. Из Следствия 3 сразу получаем

Следствие 5. *Если* Z *и* f *те же, что и в Основной теореме,* $b\in\mathbb{R}^+$ *и для некоторого* $\theta\in\mathbb{R}$ *выполнено* (6)*, то для любого компакта* $S\subset\mathbb{C}$ *диаметра* $\mathsf{diam}(S)\leqslant b$ *со связным дополнением* $\mathbb{C}\setminus S$ *система* Exp^Z *полна в* $C(S)\bigcap\mathsf{Hol}(\operatorname{int}S)$.

Дальнейшие перспективы. Следствия 3–5 могут быть доведены до уровня критериев, если накладывать на распределение точек Z некоторые дополнительные условия в определённых направлениях в духе развития классической теории

Бёрлинга – Мальявена. Возможны также как распространение основных результатов с полноты экспоненциальных систем на полноту параметризованных систем целых функций в пространствах $C(S)\bigcap \mathrm{Hol}(\int S)$, так и многомерные комплексные версии всех наших результатов.

Поддержка. Исследование велось в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FMRS-2022-0124).

Литература

1. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функции. – М.: ГИТТЛ, 1956.

2. *Хабибуллин Б. Н.* Полнота систем экспонент и множества единственности. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2012, https://matem.anrb.ru/sites/default/files/userfiles/u35721/expkhbn.pdf .

3. *Хабибуллин Б. Н.* Теорема единственности для субгармонических функций конечного порядка // Матем. сб. – 1991. – Т. 182. – № 6. – С. 811–827.

4. *Хабибуллин Б. Н.* Множества единственности в пространствах целых функций одной переменной // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1991. – Т. 55. – № 5. – С. 1101–1123.

5. *Хабибуллин Б. Н.* Полнота систем целых функций в пространствах голоморфных функций // Матем. заметки. – 1999. – Т. 66. – № 4. – С. 603–616.

6. *Боннезен Т., Фенхель В.* Теория выпуклых тел. – М.: Фазис, 2002.

7. *Сантало Л.* Интегральная геометрия и геометрические вероятности. – М.: Наука, 1983.

8. *Хабибуллин Б. Н.* Теорема Хелли и сдвиги множеств. II. Опорная функция, системы экспонент, целые функции // Уфимск. матем. журн. – 2014. – Т. 6. – № 4. – С. 125–138.

9. *Хадвигер Г.* Лекции об объёме, площади поверхности и изометрии. – М.: Наука, 1966.

GEOMETRIC CONDITIONS OF COMPLETENESS FOR EXPONENTIAL SYSTEMS IN SPACES OF FUNCTIONS ON COMPACTS OF THE COMPLEX PLANE

B. N. Khabibullin

We give a new scale of completeness conditions for exponential systems in spaces of functions that are continuous on a compact and simultaneously holomorphic inside this compact if this interior is not empty. These conditions are formulated in terms of the majorization of mixed areas of the convex hull of the compact by various characteristics of the distribution of exponential system indicators. They allow us to obtain conditions for the completeness of exponential systems in geometric terms of the perimeter and Euclidean area, as well as criteria for the completeness of exponential systems in terms of the width in the direction, the smallest width and diameter of this compact.

Keywords: completeness of systems, exponential system, holomorphic function, distribution of zeros, mixed area, convex hull, support function.

УДК 517.98, 519.72, 530.145

О ДЕЛИМОСТИ КВАНТОВЫХ ПРОЦЕССОВ, ДЕМПФИРУЮЩИХ ФАЗЫ

Р. Л. Хажин[1]

1 *ruslan.khazhin@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского.

Рассматриваются однопараметрические семейства, состоящие из квантовых каналов, демпфирующих фазы. Эти семейства называются квантовыми процессами, демпфирующими фазы. В докладе обсуждаются свойства делимости таких квантовых процессов.

Ключевые слова: делимость квантового процесса, квантовый канал, квантовый процесс, демпфирующий фазу.

Пусть H – конечномерное гильбертово пространство, $L(H)$ – комплексное векторное пространство всех линейных операторов, действующих на H. Вполне положительные сохраняющие след линейные операторы на $L(H)$ называются *квантовыми каналами*. Выпуклое компактное множество всех квантовых каналов на $L(H)$ обозначается через $O_c(H)$. Фиксируя действительное число $T > 0$, мы рассматриваем однопараметрические семейства вида

$$\Phi := \{\Phi_t \in O_c(H) \mid 0 \leqslant t \leqslant T,\ \Phi_0 = I\},$$

где I – тождественный канал. Такое семейство называется *квантовым процессом*. Квантовые процессы описывают изменения состояний квантовых систем со временем.

Квантовый процесс Φ называется *CP-делимым*, если для любых чисел s и t, удовлетворяющих неравенству $0 \leqslant s < t \leqslant T$, найдется квантовый канал $\Phi_{t,s} \in O_c(H)$, такой, что будет справедливо равенство:

$$\Phi_t = \Phi_{t,s} \circ \Phi_s.$$

Если при этом $\Phi_{t,s}$ – линейный оператор, действующий на $L(H)$, который сохраняет положительность операторов и их следы, то квантовый процесс Φ называется *P-делимым*.

Мотивацией к нашей работе послужили результаты статей [1, 2, 3]. В [1] и [3] рассматриваются различные свойства делимости квантовых процессов. В [2] изучаются свойства пропускной способности *квантовых каналов, демпфирующих фазы*.

Пусть k – непрерывная функция, такая, что

$$k : [0, T] \longrightarrow \left[-\frac{1}{n-1}, 1\right], \quad k(0) = 1,$$

где $n \geqslant 2$ – размерность пространства H.

В пространстве H зафиксируем произвольный ортонормированный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ рассмотрим одномерный проектор $E_i := |e_i\rangle\langle e_i|$, заданный на пространстве H. Затем для каждого момента времени $t \in [0; T]$

определим квантовый канал $\Phi_{k(t)} : L(H) \longrightarrow L(H)$, *демпфирующий фазу*, следующим образом:

$$\Phi_{k(t)}(X) = k(t)X + (1 - k(t)) \sum_{i=1}^{n} E_i X E_i, \quad X \in L(H).$$

Построим квантовый процесс, состоящий из этих каналов:

$$\Omega_k = \{\Phi_{k(t)} \in O_c(H) \mid 0 \leqslant t \leqslant T,\ \Phi_{k(0)} = I\}.$$

Это семейство квантовых каналов мы называем *квантовым процессом, демпфирующим фазы*.

Имеет место следующая

Теорема. *Для квантового процесса Ω_k, демпфирующего фазы, следующие условия эквивалентны:*

1) *процесс Ω_k является CP-делимым;*

2) *процесс Ω_k является P-делимым;*

3) *функция k является невозрастающей и положительной.*

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю профессору Гумерову Р.Н. и всем участникам совместного научно-исследовательского семинара КГЭУ и КФУ «Функциональный анализ и квантовые системы» за плодотворные обсуждения результатов работы.

Литература

1. Холево А. С. *Об измерениях параметров квантового случайного процесса* // ТМФ – 1983. – Т. 57. – № 3. – С. 424–437.

2. Амосов Г. Г. *Оценка выходной энтропии тензорного произведения двух квантовых каналов* // ТМФ – 2015. – Т. 182. – № 3. – С. 453–464.

3. Гумеров Р. Н., Хажин Р. Л. *О делимых квантовых динамических отображениях* // Уфимский матем. журнал. – 2022. – Т. 14. – № 2. – С. 23–36.

ON DIVISIBILITY OF PHASE-DAMPING QUANTUM PROCESSES

R. L. Khazhin

We consider one-parameter families consisting of phase-damping quantum channels. These families are said to be phase-damping quantum processes. In this report, we discuss the divisibility properties of such processes.

Keywords: divisibility of a quantum process, phase-damping quantum process, quantum channel.

УДК 519.2, 531.19

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ АЛГЕБРЫ И УЛЬРАПРОИЗВЕДЕНИЯ

С. Г. Халиуллин[1]

1 *samig.haliullin@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет.

В статье рассматриваются так называемые вероятностные алгебры, их представления. Также рассматриваются условные ожидания относительно подалгебр вероятностных алгебр и их свойства. Вводится ультрапроизведение вероятностных алгебр, приводятся их свойства.

Ключевые слова: вероятностная алгебра, условное ожидание, ультрапроизведения.

Определение 1. (см., например, [1]) *Пусть задана *-алгебра $\mathscr{A}$ над полем комплексных чисел с инволюцией * и единицей, $\omega : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ — точное состояние на $\mathscr{A}$. Тройка $(\mathscr{A}, ^*, \omega)$ называется вероятностной алгеброй.*

Пусть $(\mathscr{A}, ^*, \omega)$ — вероятностная алгебра. Введём скалярное произведение, полагая $\langle x, y\rangle = \omega(y^* x)$. Пусть H — гильбертово пространство, являющееся пополнением алгебры $\mathscr{A}$ относительно этого скалярного произведения. Продолжение состояния ω с $\mathscr{A}$ на H обозначим той же буквой ω.

Определение 2. (см., например, [2]) *Для $x \in \mathscr{A}$ определим оператор $\pi(x) : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ формулой $\pi(x)y = xy$. Тогда оператор π называется *-представлением вероятностной алгебры $\mathscr{A}$ в плотной инвариантной области $D(\pi) = \mathscr{A} \subseteq H$.*

Сопряжённое представление π^* определим следующим образом:

$$D(\pi^*) = \bigcap\{D(\pi(x)^*) : x \in \mathscr{A}\}, \quad \pi^*(x) = [\pi(x^*)]^*|D(\pi^*).$$

Пусть далее $(\mathscr{A}, ^*, \omega)$ — вероятностная алгебра и $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$ — *-подалгебра. В этом случае $\mathscr{B}$ является подпространством H и её замыкание $\bar{\mathscr{B}}$ есть замкнутое подпространство H. Обозначим через $\pi|\mathscr{B}$ *-представление подалгебры $\mathscr{B}$.

Определение 2. (см., например, [2]) *Для $x \in \mathscr{A}$ условным ожиданием элемента x относительно подалгебры $\mathscr{B}$ называется $\mathbb{E}(x|\mathscr{B})$, если*

$$\mathbb{E}(x|\mathscr{B}) \in D[(\pi|\mathscr{B})^*] \subseteq \bar{\mathscr{B}}, \quad \omega(yx) = \omega[(\pi|\mathscr{B})^*(y)\mathbb{E}(x|\mathscr{B})]$$

для всех $y \in \mathscr{B}$.

Определение 3. *Пусть $(\mathscr{A}_n, ^*, \omega_n)_{n\geq 1}$ — последовательность вероятностных алгебр, $\mathscr{U}$ — нетривиальный ультрафильтр на множестве $\mathbb{N}$. Положим*

$$l(\mathbb{N}, \mathscr{A}_n) = \{(x_n), x_n \in \mathscr{A}_n\},\ \mathscr{N}_{\mathscr{U}}(\mathscr{A}_n, \omega_n) = \{(x_n) \in l(\mathbb{N}, \mathscr{A}_n) : \lim_{\mathscr{U}} \omega_n(x_n^* x_n + x_n x_n^*)^{\frac{1}{2}} = 0\},$$

$$\mathscr{A}(\mathscr{A}_n, \omega_n) = \{(x_n) \in l(\mathbb{N}, \mathscr{A}_n) : (x_n)\mathscr{N}_{\mathscr{U}}(\mathscr{A}_n, \omega_n) \subset \mathscr{N}_{\mathscr{U}}(\mathscr{A}_n, \omega_n), \mathscr{N}_{\mathscr{U}}(\mathscr{A}_n, \omega_n)(x_n) \subset \mathscr{N}_{\mathscr{U}}(\mathscr{A}_n, \omega_n)\}.$$

Теперь определим ультрапроизведение вероятностных алгебр:

$$(\mathscr{A}_n, ^*, \omega_n)_{\mathscr{U}} = \mathscr{A}_{\mathscr{U}}(\mathscr{A}_n, \omega_n)/\mathscr{N}_{\mathscr{U}}(\mathscr{A}_n, \omega_n).$$

Зададим состояние на ультрапроизведении $(\mathscr{A}_n, {}^*, \omega_n)_{\mathscr{U}}$ *как*

$$\omega_{\mathscr{U}}((x_n)_{\mathscr{U}}) = \lim_{\mathscr{U}} \omega_n(x_n).$$

Теорема 1. *Ультрапроизведение последовательности вероятностных алгебр есть вероятностная алгебра.*

Теорема 2. *В ультрапроизведении последовательности вероятностных алгебр существует условное ожидание относительно* **-подалгебры.*

Литература

1. Gudder S. and Hudson R. *A noncommutative probability theory* // Trans. Arner. Math. Soc. – 1978. – V. 245. – P. 1-41.

2. Powers R. T. *Self-adjoint algebras of unbounded operators* // Comm. Math. Phys. – 1971. –V. 21. – P. 85-124.

PROBABILITY ALGEBRAS AND ULTRAPRODUCTS

S. G. Haliullin

This paper describes the so-called probability algebras and their representations. Conditional expectation with respect to subalgebras of probability algebra and their properties are also considered. The ultraproduct of probability algebras is introduced, their properties are given.

Keywords: probability algebra, conditional expectation, ultraproduct.

УДК 517.946

О ДИСКРЕТНОМ СПЕКТРЕ ТРЕХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА РЕШЕТКЕ

А. М. Халхужаев[1], Ж. Х. Боймуродов[2]

1 *ahmad_x@mail.ru*; Институт математики им. В.И. Романовского, Самарканд, Узбекистан.
2 *jurabek.boymurodov@mail.ru*; Навоинский государственный педагогический институт, Навои, Узбекистан.

Рассматривается трехчастичный оператор Шредингера $H_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{K}), \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_3) \in \mathbb{R}^2_+, \mathbf{K} \in \mathbb{T}^3$*, ассоциированный с системой трех частиц (две из них – бозоны с массой 1, а третья – произвольная с массой* $m > 0$*), взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов* $\mu_1 > 0$ *и* $\mu_3 > 0$ *на трехмерной решетке* $\mathbb{Z}^3$*. Найдено число собственных значений оператора* $H_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{0})$*,* $\mathbf{0} = (0,0,0)$*, лежащих левее существенного спектра при достаточно больших* $\mu_1 > 0$ *в зависимости от пороговых значений массы третьей частицы* $m > 0$*.*

Ключевые слова: оператор Шредингера, решетка, гамильтониан, контактный потенциал, бозон, собственное значение, квазиимпульс, инвариантное подпространство, оператор Фаддеева.

В моделях физики твердого тела [1],[2], а также в решетчатой теории поля [3] естественным образом появляются дискретные операторы Шредингера.

Существование хотя бы одного собственного значения трехчастичного дискретного оператора Шредингера $H_\mu(\mathbf{K}) = H_0(\mathbf{K}) - \mu V$ ($\mu \in \mathbb{R}$) для размерностей $d = 1, 2$ описано в [4] и [5], доказательства основаны на неограниченности нормы оператора Фаддеева $\mathbf{T}(\mathbf{K}, z)$ в нижней границе существенного спектра $z = \inf \sigma_{ess}(H_{\mu_1}(\mathbf{K}))$. Если $d \geq 3$, то оператор $\mathbf{T}(\mathbf{K}, z)$ ограничен и на краю существенного спектра, т.е. в этом случае методы для $d = 1, 2$ не применимы.

В работе [6] рассматривается система трех частиц (две из них – бозоны, а третья – произвольная), взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения. Доказано существование эффекта Ефимова для $H_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{0})$ в случаях, когда либо две, либо три двухчастичные подсистемы трех частиц имеют виртуальные уровни на левом крае трехчастичного существенного спектра (т.е. когда $\mu_1 = \mu_1^0$ и $\mu_3 \in [0, \mu_3^0)$ или $\mu_\alpha = \mu_\alpha^0, \alpha = 1, 3)$., Рассматриваемый нами оператор совпадает с оператором $H_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{K})$. Одна из «двухчастичных ветвей» $[\tau_{\min}^{(1)}(\mathbf{0}), \tau_{\max}^{(1)}(\mathbf{0})]$ существенного спектра оператора $H_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{0})$ сдвигается к $-\infty$ с порядком $\mu_1 \to +\infty$, в результате бесконечное число собственных значений оператора «поглощаются» существенным спектром. Поэтому возникает естественный вопрос: существуют ли собственные значения оператора $H_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{0})$, лежащие левее существенного спектра при достаточно больших μ_1 и если существуют, то сколько?

Основная теорема этой работы отвечает на эти вопросы.

Пусть $\mathbb{T}^3$–трехмерный тор, $L_2[(\mathbb{T}^3)^d]$, $d = 1, 2$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на $(\mathbb{T}^3)^d$ и $L_2^s[(\mathbb{T}^3)^2] \subset L_2[(\mathbb{T}^3)^2]$ – подпространство симметричных функций относительно перестановки переменных.

Трехчастичный дискретный оператор Шредингера $H_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{K})$, $\mathbf{K} \in \mathbb{T}^3$, ассоциированный с системой трех частиц (две из них – бозоны с массой 1 и третья – произвольная частица с массой $m > 0$), взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов $\mu_1 > 0$ и $\mu_3 > 0$ на трехмерной решетке $\mathbb{Z}^3$, действует в гильбертовом пространстве $L_2^s[(\mathbb{T}^3)^2]$ по формуле (см. напр. [6])

$$H_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{K}) = H_0(\mathbf{K}) - \mu_1(V_1 + V_2) - \mu_3 V_3, \tag{1}$$

где

$$(H_0(\mathbf{K})f)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = E_{\mathbf{K},m}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) f(\mathbf{p}, \mathbf{q}),$$

$$E_{\mathbf{K},m}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \varepsilon(\mathbf{p}) + \varepsilon(\mathbf{q}) + \frac{1}{m}\varepsilon(\mathbf{K} - \mathbf{p} - \mathbf{q}).$$

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = 3 - \xi(\mathbf{p}), \quad \xi(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{3} \cos p_i, \quad \mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{T}^3, \tag{2}$$

$$(V_1 f)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_{\mathbb{T}^3} f(\mathbf{p}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}, \ (V_2 f)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_{\mathbb{T}^3} f(\mathbf{s}, \mathbf{q}) d\mathbf{s}, \ (V_3 f)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_{\mathbb{T}^3} f(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{s}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}.$$

На торе $\mathbb{T}^3$ выбрана единичная мера $d\mathbf{p}$, т.е. $\int_{\mathbb{T}^3} d\mathbf{p} = 1$.

Вводим следующие обозначения

$$W = \int\limits_{\mathbb{T}^3} \frac{d\mathbf{s}}{\varepsilon(\mathbf{s})},\ W_{11} = \int\limits_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 s_1 d\mathbf{s}}{\varepsilon(\mathbf{s})},\ W_{12} = \int\limits_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos s_1 \cos s_2 d\mathbf{s}}{\varepsilon(\mathbf{s})}.$$

Интеграл W называется интегралом Ватсона, а интегралы W_{11} и W_{12}– интегралами типа Ватсона.

Пусть

$$m_1 = \frac{3W-1}{3W} \approx 0.3399, \qquad m_2 = W_{11} - W_{12} \approx 0.1852. \tag{3}$$

Теорема. *Пусть* $\mathbf{K} = \mathbf{0} \equiv (0,0,0)$ *и* $\mu_3 > 0$. *i) Если* $m \in (m_1, +\infty)$, *то существует* $\mu_1(m,\mu_3) > 0$ *такое, что для любого* $\mu_1 > \mu_1(m,\mu_3)$ *оператор* $H_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{0})$ *имеет единственное собственное значение, лежащее левее существенного спектра;*
ii) если $m \in (m_2, m_1)$, *то существует* $\mu_1(m,\mu_3) > 0$ *такое, что для любого* $\mu_1 > \mu_1(m,\mu_3)$ *оператор* $H_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{0})$ *имеет два собственных значения, лежащих левее существенного спектра;*
iii) если $m \in (0, m_2)$, *то существует* $\mu_1(m,\mu_3) > 0$ *такое, что при* $\mu_1 > \mu_1(m,\mu_3)$ *оператор* $H_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{0})$ *имеет четыре собственных значения с учетом кратности, лежащих левее существенного спектра.*

Литература

1. *Mattis D.C.* The few-body problem on lattice // *Rev. Modern Phys.* – 1986. – V. 58. – № 2. – P. 361–379.

2. *Mogilner A.I.* The problem of a quasi-particles in solidstate physics I n; Application of Self-adjoint Extensions in Quantum Physics (P.Exner and P.Seba eds.) // *Lect. Notes Phys.* – 1998. – V. 324.

3. *Malishev V.A., Minlos R.A.* Linear infinite-particle operators. Translations of Mathematical Monographs // *American Mathematical Society, Providence, RI.* – 1995. – V. 143.

4. *Lakaev S.N., Lakaev Sh.S.* The existence of bound states in a system of three particles in an optical lattice // *J. Phys. A: Math. Theor.* – 2017. – V. 50.

5. *Lakaev S.N.,Dell'Antonio G.F., Khalkhuzhaev A.M.* Existence of an isolated band of a system of three particles in an optical lattice // *J. Phys. A: Math. Theor.* – 2016. – V. 49.

6. *Лакаев С. Н., Муминов М. Э.* Существенный и дискретный спектр трехчастичного оператора Шредингера на решетке // *ТМФ.* – 2003. – Т. 135. – С. 478-503.

ON THE DISCRETE SPECTRUM OF THE THREE-PARTICLE SCHRÖDINGER OPERATOR ON A LATTICE

A. M. Khalkhuzhaev, J. Kh. Boymurodov

We consider the three-particle Schrödinger operator $H_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{K}), \mathbf{K} \in \mathbb{T}^3$, *associated with a system of three particles (two of them are bosons with mass* 1 *and one is an arbitrary boson with mass* $m > 0$*), interacting via paired contact* $\mu_1 > 0$ *and* $\mu_3 > 0$ *potentials on the three-dimensional lattice* $\mathbb{Z}^3$. *The number of eigenvalues of the operator* $H_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{0})$, $\mathbf{0} = (0,0,0)$, *lying to the left of the essential spectrum for sufficiently large* $\mu_1 > 0$ *depending on the threshold values of the mass ratio* $m > 0$.

Keywords: Schrödinger operator on a lattice, Hamiltonian, zero-range, fermion, eigenvalue, quasimomentum, invariant subspace, Faddeev operator.

УДК 517.984

ИССЛЕДОВАНИЕ СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА ОДНОЙ 2×2-ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ В ФЕРМИОННОМ ПРОСТРАНСТВЕ ФОКА

А. М. Халхужаев[1], Х. Г. Хайитова[2]

1 *ahmad_x@mail.ru*; Институт математики имени В.И.Романовского, Самарканд, Узбекистан.
2 *x.g.xayitova@buxdu.uz*; Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан.

Рассматривается 2×2-операторная матрица в фермионном пространстве Фока. Выделен соответствующий канальный оператор и найден его спектр. Установлено, что существенный спектр исследуемого оператора совпадает со спектром оператора канала.

Ключевые слова: операторная матрица, фермионное пространство Фока, существенный спектр, канальный оператор.

Пусть $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ – d-мерный тор, $\mathbb{C}$ – одномерное комплексное пространство, $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, $L_2^{\mathrm{as}}((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) антисимметричных функций, определенных на $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2$. Обозначим через $\mathscr{H}$ прямую сумму пространств $\mathscr{H}_1 := L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ и $\mathscr{H}_2 := L_2^{\mathrm{as}}((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$, т.е. $\mathscr{H} := \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$.

В гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ рассмотрим 2×2 операторную матрицу

$$H_{\mu,\lambda}(\gamma) := \begin{pmatrix} H_{11} & \lambda H_{12} \\ \lambda H_{12}^* & H_{22}^0(\gamma) - \mu V \end{pmatrix} \tag{1}$$

со следующими матричными элементами

$$(H_{11}f_1)(x) = u(x)f_1(x), \quad (H_{12}f_2)(x) = \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t)f_2(x,t)\,dt, \quad (H_{22}^0(\gamma)f_2)(x,y) = w_\gamma(x;y)f_2(x,y),$$

$$V := V_1 + V_2, \quad (V_1 f_2)(x,y) = \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} f_2(x,t)\,dt, \quad (V_2 f_2)(x,y) = \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} f_2(t,y)\,dt.$$

Здесь $f_i \in \mathscr{H}_i$, $i,j = 1,2$, $\mu,\lambda > 0$, γ – фиксированные вещественные числа, $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ – вещественно-непрерывные функции на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, $H_{ij}^*, i<j$ – сопряженный оператор к H_{ij}, а функция $w_\gamma(\cdot;\cdot)$ имеет вид:

$$w_\gamma(x;y) := (\varepsilon(x) + \varepsilon(y) + \gamma\varepsilon(x+y)), \quad \varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{\mathrm{d}} (1-\cos x_k).$$

Можно легко проверить, что при этих предположениях операторная матрица $H_{\mu,\lambda}(\gamma)$, является ограниченным и самосопряженным оператором в $\mathscr{H}$.

Рассмотрим так называемый канальный оператор, соответствующий операторной матрице $H_{\mu,\lambda}^{ch}(\gamma)$ и действующий в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}) \oplus L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$ как

$$H_{\mu,\lambda}^{ch}(\gamma) := \begin{pmatrix} H_{11} & \frac{\lambda}{\sqrt{2}} H_{12} \\ \frac{\lambda}{\sqrt{2}} H_{12}^* & H_{22}^0(\gamma) - \mu V_1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

По определению канальный оператор $H^{ch}_{\mu,\lambda}(\gamma)$ является линейным, ограниченным и самосопряжённым оператором в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}) \oplus L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$. С целью описания существенного спектра оператора $H_{\mu,\lambda}(\gamma)$, сначала изучаются некоторые спектральные свойства обобщенной модели Фридрихса $h_{\mu,\lambda}(\gamma,x)$, $x \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, действующей в $\mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_1$ ($\mathscr{H}_0 := \mathbb{C}$) как

$$h_{\mu,\lambda}(\gamma,x) := \begin{pmatrix} h_{00} & \frac{\lambda}{\sqrt{2}} h_{01} \\ \lambda \frac{\lambda}{\sqrt{2}} h^*_{01} & h^0_{11}(\gamma) - \mu v \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где матричные элементы определяются по формулам

$$h_{00}(x) f_0 = u(x) f_0, \quad h_{01} f_1 = \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_1(t)\, dt,$$

$$(h^*_{01} f_0)(y) = v(y) f_0, \quad (h^0_{11}(\gamma,x) f_1)(y) = w_\gamma(x;y) f_1(y), \quad (v f_1)(y) = \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} f_1(t)\, dt.$$

Очевидно, что оператор $h_{\mu,\lambda}(\gamma,x)$ ограничен и самосопряжён в $\mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_1$. Из известной теоремы Г.Вейля о сохранении существенного спектра при компактных возмущениях следует, что $\sigma_{\mathrm{ess}}(h_{\mu,\lambda}(\gamma,x)) = [m_\gamma(x); M_\gamma(x)]$, где $m_\gamma(x) := \min\limits_{y \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w_\gamma(x;y)$, $M_\gamma(x) := \max\limits_{y \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w_\gamma(x;y)$.

При каждом фиксированном $x \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ определим регулярную в $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(h_{\mu,\lambda}(\gamma,x))$ функцию (детерминант Фредгольма, ассоциированный с оператором $h_{\mu,\lambda}(\gamma,x)$)

$$\Delta_{\mu,\lambda}(\gamma,x;z) := \left(u(x) - z - \frac{\lambda^2}{2} \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t)\, dt}{(w_\gamma(x;t) - z)} \right) \left(1 - \mu \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{dt}{(w_\gamma(x;t) - z)} \right) -$$

$$- \frac{\mu\lambda^2}{2} \left(\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v(t)\, dt}{(w_\gamma(x;t) - z)} \right)^2.$$

Если для любого $x \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ верны неравенства $\Delta_{\mu,\lambda}(\gamma,x;m_\gamma) < 0$ и $\Delta_{\mu,\lambda}(\gamma,x;M_\gamma) > 0$, то оператор $h_{\mu,\lambda}(\gamma,x)$ имеет три простых собственных значения $E^{(1)}_{\mu,\lambda}(\gamma,x) < m_\gamma$, $E^{(2)}_{\mu,\lambda}(\gamma,x) > M_\gamma$ и $E^{(3)}_{\mu,\lambda}(\gamma,x) > M_\gamma$. Тогда из непрерывности функции $E^{(i)}_{\mu,\lambda}(\gamma,\cdot)$ на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ следует, что область значений $\mathrm{Im} E^{(i)}_{\mu,\lambda}(\gamma,x), i = 1,2,3$ этой функции есть отрезок, причем

$$\mathrm{Im}\, E^{(1)}_{\mu,\lambda}(\gamma,\cdot) \cap (-\infty; m_\gamma) = \mathrm{Im}\, E^{(1)}_{\mu,\lambda}(\gamma,x), \quad \mathrm{Im}\, E^{(2)}_{\mu,\lambda}(\gamma,\cdot) \cap (M_\gamma; \infty) = \mathrm{Im}\, E^{(2)}_{\mu,\lambda}(\gamma,x),$$

$$\mathrm{Im}\, E^{(3)}_{\mu,\lambda}(\gamma,\cdot) \cap (M_\gamma; \infty) = \mathrm{Im}\, E^{(3)}_{\mu,\lambda}(\gamma,x).$$

Обозначим

$$\Sigma_{\mu,\lambda} = \mathrm{Im}\, E^{(1)}_{\mu,\lambda}(\gamma,\cdot) \cup \mathrm{Im}\, E^{(2)}_{\mu,\lambda}(\gamma,\cdot) \cup \mathrm{Im}\, E^{(3)}_{\mu,\lambda}(\gamma,\cdot), \quad m_\gamma := \min_{x,y \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w_\gamma(x;y), \quad M_\gamma := \max_{x,y \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w_\gamma(x;y).$$

Теорема 1. *Для любого $x \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ имеет место равенство $\sigma(H^{\mathrm{ch}}_{\mu,\lambda}(\gamma)) = \Sigma_{\mu,\lambda} \cup [m_\gamma; M_\gamma]$.*

Теорема 2. *Для существенного спектра оператора $H_{\mu,\lambda}(\gamma, x)$ имеет место равенство $\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}(\gamma)) = \sigma(H^{ch}_{\mu,\lambda}(\gamma))$.*

Множества $\Sigma_{\mu,\lambda}$ и $[m_\gamma; M_\gamma]$ называются двухчастичной и трехчастичной ветвями существенного спектра оператора $H_{\mu,\lambda}(\gamma)$ и обозначаются через $\sigma_{\text{two}}(H_{\mu,\lambda}(\gamma))$.

INVESTIGATION OF THE ESSENTIAL SPECTRUM A 2×2 OPERATOR MATRIX IN FERMIONIC FOCK SPACE

A. M. Khalkhuzhaev, H. G. Khayitova

We consider a 2×2 operator matrix in a fermionic Fock space. The corresponding channel operator is determined and its spectrum is found. It is established that the essential spectrum of the investigated operator coincides with the spectrum of the channel operator.

Keywords: operator matrix, fermionic Fock space, essential spectrum, channel operator.

УДК 517.958

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО

Л. С. Харасова[1]

1 *kharasova.liya@mail.ru*; Набережночелнинский институт КФУ.

В работе изучается разрешимость нелинейной краевой задачи для системы пяти дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, представляющих собой уравнения равновесия для упругих пологих однородных изотропных оболочек с шарнирно опертыми краями в рамках сдвиговой модели С.П. Тимошенко. Метод исследования заключается в сведении исходной задачи к одному нелинейному операторному уравнению. При этом используется теория одномерных сингулярных интегральных уравнений.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения, краевая задача, интегральные представления, сингулярные интегральные уравнения, теорема существования.

В произвольной ограниченной области Ω методом интегральных уравнений изучается краевая задача нахождения решения системы пяти нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными [1]. В основе метода исследования лежат интегральные представления для обобщенных перемещений w_1, w_2, w_3, ψ_1, ψ_2, содержащие произвольные голоморфные функции, которые определяются таким образом, чтобы обобщенные перемещения удовлетворяли заданным граничным условиям $w_1 = w_3 = \psi_1 = 0$. Построение интегральных представлений является одним из существенных моментов исследования. Для нахождения голоморфных функций в [1], [3] используются явные представления решений задачи Римана-Гильберта в единичном круге. В работе [2] голоморфные функции ищутся в виде интегралов типа Коши с действительными плотностями, которые находятся

как решения системы одномерных сингулярных уравнений. В данной работе метод работы [2] развивается на случай произвольной упругой оболочки с шарнирно опертыми краями. Построенные таким образом интегральные представления позволяют свести исходную задачу к одному операторному уравнению $f + G_* f = 0$ с нелинейным ограниченным оператором $G_* f$ в $L_p(\Omega), 2 < p < 2/(1-\beta)$, разрешимость которого устанавливается при помощи принципа сжатых отображений.

Основной результат работы приводится в следующей теореме.

Теорема. *Пусть выполнены условия: 1) Ω - односвязная область с границей $\Gamma \in C^1_{2\beta}$; 2) внешние силы $R^i (i = \overline{1,3}), L^k (k = 1,2) \in L_p(\Omega), P^2,\ N^2 \in C_\beta(\Gamma), 0 < \beta < 1/2$. Тогда для разрешимости задачи необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\int_\Gamma P^2(s)\,ds + \iint_\Omega R^2\,d\alpha^1\,d\alpha^2 = 0.$$

В случае его выполнения задача имеет обобщенное решение $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2)$ в пространстве Соболева $W_p^{(2)}(\Omega)$, определяемые с точностью до постоянного слагаемого.

Литература

1. *Тимергалиев С. Н., Углов А. Н., Харасова Л. С. О разрешимости геометрически нелинейных краевых задач для пологих оболочек типа Тимошенко с шарнирно опертыми краями // Известия вузов. Математика. – 2015. – № 5. – С. 49–61.*

2. *Тимергалиев С. Н. Метод интегральных уравнений в нелинейных краевых задачах для пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями // Известия вузов. Математика. – 2017. – №4. – С. 59–75.*

3. *Kharasova L. S. On the question of the existence of solutions of one nonlinear boundary-value problem for the system of differential equations of the theory of shallow shells of Timoshenko type // IOP Conf. Series: Journal of Physics. – 2019. – № 1158(032011). – P. 1–6.*

THE STUDY OF THE NONLINEAR BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR THE SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE THEORY OF SHALLOW SHELLS OF TIMOSHENKO TYPE BY THE METHOD OF INTEGRAL EQUATIONS

L. S. Kharasova

We study the solvability of a nonlinear boundary-value problem for a system of five differential equations with partial derivatives of the second order. The system represent the equilibrium equation for elastic shallow homogeneous isotropic shells with hinged edges within the framework of the shear model of S.P. Timoshenko. The research method is in reduction of the original problem to a nonlinear operator equation. Then we use the theory of one-dimensional singular integral equations.

Keywords: nonlinear differential equations, boundary value problem, integral representations, singular integral equations, existence theorem.

УДК 517.518.68

О ПРИБЛИЖЕНИИ РАВНОМЕРНЫХ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ю. Х. Хасанов[1]

1 *yukhas60@mail.ru*; Российско–Таджикский (Славянский) университет.

В работе исследуется вопрос о приближении почти–периодических функций целыми функциями конечной степени с произвольным спектром в равномерной метрике. Также устанавливаются необходимые и достаточные условия принадлежности равномерных почти–периодических функций к классу целых функций.

Ключевые слова: почти–периодические функции, ряды Фурье, спектр функции, целые функции конечной степени, тригонометрические полиномы, наилучшее равномерное приближение.

Рассмотрим класс равномерных почти–периодических функций, их обозначим через $f(x) \in \mathbf{B}$, с произвольным спектром $\{\lambda_k\}$, т.е. функций, имеющих ряд Фурье вида

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \exp(i\lambda_k x),$$

где

$$A_k = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) \exp(-i\lambda_k x) dx.$$

Через $\mathbf{G}_\sigma$ $(\sigma > 0)$ обозначим класс ограниченных на всей действительной оси целых функций степени не выше σ. Пусть дана функция $f(x) \in \mathbf{B}$. Каковы необходимые и достаточные условия для принадлежности этой функции к классу $\mathbf{G}_\sigma$. Для решения этого вопроса приведем утверждение, которое ранее использовано автором в работе [1].

Теорема 1. *Для того чтобы равномерная почти–периодическая функция $f(x)$ принадлежала классу $\mathbf{G}_\sigma$, необходимо и достаточно, чтобы ее показатели Фурье $\Lambda\{\lambda_k\}$ удовлетворяли неравенству $|\lambda_k| \le \sigma$.*

С.Н.Бернштейн [2] установил, что среди функций из класса $\mathbf{G}_\sigma$, осуществляющих на всей действительной оси наилучшее равномерное приближение 2π–периодической функции $f(x)$ найдется тригонометрический полином степени не выше σ. Доказательство основывается на том, что если $g_\sigma(f;x) \in G_\sigma$ и

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |f(x) - g_\sigma(f;x)| = A_\sigma(f), \tag{1}$$

где $A_\sigma(f)$ — наилучшее равномерное приближение порядка σ периодической, периода 2π, функции посредством функций из класса $\mathbf{G}_\sigma$, то равномерно по всем $x(-\infty < x < \infty)$ имеют места следующие оценки:

$$|f(x) - \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} g_\sigma(x+2k\pi)| \le A_\sigma(f),$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} \{g_\sigma(x+2k\pi+2\pi) - g_\sigma(x+2k\pi)\} = 0.$$

Теперь с помощью теоремы 1 сформулируем основной результат данной заметки, который является также аналогом теоремы С.Н. Бернштейна для равномерных почти–периодических функций с произвольными показателями Фурье $\{\lambda_k\}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Теорема 2. *Пусть* $f(x) \in \boldsymbol{B}$ *и*

$$A_\sigma(f) = \sup_{-\infty<x<\infty} |f(x) - g_\sigma(f;x)| \ (\sigma > 0).$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *найдется конечная тригонометрическая сумма*

$$P_\sigma(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k exp(i\lambda_k x) \ (|\lambda_k| \le \sigma),$$

для которой равномерно по x *справедлива* $|f(x) - P_\sigma(x)| \le A_\sigma(f) + \varepsilon$.

Для полноты изложения наряду с теоремой 2 приводим следующее утверждение, когда спектр $\Lambda\{\lambda_k\}$ на любом конечном отрезке имеет конечное число предельных точек и, более того, будет приводимым множеством.

Теорема 3. *Если* $f(x) \in \boldsymbol{B}$ *с приводимым спектром* $\Lambda\{\lambda_k\}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, *то среди функций* $g_\sigma(x) \in \boldsymbol{G}_\sigma$, *для которых справедливо равенство (1), найдется функция* $Q_\sigma(f;x) \in \boldsymbol{B}$ *с рядом Фурье*

$$\sum_{|\lambda_k|\le\sigma} A_k \exp(i\lambda_k x).$$

В заключение для равномерных почти–периодических функций попытаемся найти функцию $g(x) \in \mathbf{G}_\sigma$, которая удовлетворяет условию

$$A_\sigma(f) \le C\omega(f; \frac{1}{\sigma}),$$

где C — некоторая абсолютная константа и $\omega(f;\sigma) = \sup_{|x_1-x_2|\le\delta} |f(x_1) - f(x_2)|$.

Теорема 4. *Пусть* $f(x) \in \boldsymbol{B}$ *со спектром* $\Lambda\{\lambda_k\}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ *и*

$$f_\sigma(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\psi_\sigma(u-z)du,$$

где

$$\psi_\sigma(z) = \frac{1}{\pi\sigma^3} \cdot \frac{\sin^4 \frac{\sigma z}{4}}{z^4}.$$

Тогда $f(x) \in \boldsymbol{G}_\sigma$ *и*

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |f(x) - f_\sigma(x)| < C\omega(f;\sigma^{-1}),$$

где C — абсолютная константа.

Литература

1. Тиман М. Ф., Хасанов Ю. Х. *О приближениях почти–периодических функций целыми функциями* // Известия вузов. Математика. –2011. – № 12. – С. 64–70.

2. Бернштейн С. Н. *Собрание сочинений.* – Том 2. – М.: Изд. АН СССР,1954. – 627 с.

ABOUT APPROXIMATION OF UNIFORM ALMOST PERIODIC FUNCTIONS

Yu.Kh. Khasanov

The paper is devoted to investigation of a problem of approximation in the uniform metric of almost periodic functions by entire functions with given spectrum. Also necessary and sufficient conditions for belonging of uniformly almost periodic functions to the class of entire functions are established.

Keywords: almost periodic functions, Fourier series, spectrum to function, entire functions of finite order, trigonometric polynomial, best uniform approximation.

УДК 517.96, 517.984

О ПОЧЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА ФУРЬЕ И ТЕОРЕМЕ ФЕЙЕРА – ЛЕБЕГА

А. П. Хромов[1]

1 *khromovap@sgu.ru*; Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского.

Показывается, что использование аксиомы о перестановке операций интегрирования и сумирования для нахождения суммы тригонометрического ряда Фурье приводит к тому же выводу, что и теорема Фейера – Лебега о сходимости почти всюду средних Фейера.

Ключевые слова: расходящийся ряд, средние Фейера, тригонометрический ряд Фурье.

1. Рассмотрим на отрезке $[-1,1]$ тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ из $L[-1,1]$:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\pi x+b_k\sin k\pi x), \tag{1}$$

где

$$a_k=\int_{-1}^{1}f(t)\cos k\pi t\,dt,\quad k=0,1,\dots,$$

$$b_k=\int_{-1}^{1}f(t)\sin k\pi t\,dt,\quad k=1,2,\dots$$

Рассматриваем ряд (1) как расходящийся. К нахождению его суммы привлечем аксиому:

$$\int_{-1}^{x}\sum=\sum\int_{-1}^{x}. \tag{2}$$

Теорема 1. *Сумма расходящегося ряда* (1) *почти всюду равна* $f(x)$.

Доказательство. Пусть сумма ряда (1), рассматриваемого как расходящийся, есть некоторая функция $g(x) \in L[-1,1]$. Тогда в силу (2) имеем

$$\int_{-1}^{x} g(t)\,dt = \int_{-1}^{x} \frac{a_0}{2}\,dt + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \int_{-1}^{x} \cos k\pi t\,dt + b_k \int_{-1}^{x} \sin k\pi t\,dt\right). \tag{3}$$

По теореме 3 из [1, с. 320] ряд (3) справа сходится в каждой точке $x \in [-1,1]$ и его сумма есть $\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$. Поэтому из (3) получаем

$$\int_{-1}^{x} g(t)\,dt = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt.$$

Отсюда $g(t) = f(t)$ почти всюду. □

Приведем теперь теорему Фейера – Лебега о сходимости средних Фейера ряда (1).

Теорема 2 (Фейер – Лебег, [1, с. 312]). *Если $\sigma_n(x)$ – средние Фейера ряда* (1) *функции $f(x) \in L[-1,1]$, то почти всюду на* $[-1,1]$ *будет справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x).$$

Это соотношение выполняется во всех точках Лебега и, тем более, во всех точках непрерывности функции $f(x)$, лежащих внутри $[-1,1]$.

Таким образом, за исключением последней фразы теоремы 2, теоремы 1 и 2 приводят к одному и тому же результату: сумма ряда (1) рассматриваемого как расходящийся с примененеием аксиомы (2) совпадает почти всюу с пределом частичных сумм Фейера.

Для случая тригонометрических рядов по синусам данный результат содержится в [2].

Литература

1. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной / И.П. Натансон. – М. : ГИТТЛ,1957. – 552 с.

2. *Хромов А.П.* О почленном интегрировании функциональных рядов / А.П. Хромов // Современные методы теории краевых задач: материалы междунар. конф. «Понтрягинские чтения–XXXIV» (3–9 мая 2023 г.). – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2023. – С. 287–288.

ON TERM-BY-TERM INTEGRATION OF TRIGONOMETRIC FOURIER SERIES AND FEJÉR – LEBESQUE THEOREM

A. P. Khromov

It is demonstrated that, in the problem of finding the sum of a trigonometric Fourier series, the use of the axiom of commuting operations of integration and summation leads to the same result as the use of Fejér – Lebesque theorem about the convergence almost everywhere of Fejér's averages.

Keywords: divergent series, Fejér's averages, trigonometric Fourier series.

УДК 517.51

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ

Г. В. Хромова[1]

1 *khromovagv@sgu.ru*; Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского.

Показано, что сглаживание ломаной, построенной на заданных значениях непрерывной функции, с помощью оператора Стеклова с разрывной областью значений приводит к некоторому обобщению интерполяционного параболического сплайна.

Ключевые слова: непрерывная функция, одномерная сетка, равномерные приближения, оператор Стеклова.

Пусть $f(x) \in C[0,1]$ задана набором её значений $\widehat{f} = f(x_i)_{i=0}^n$, $f_i = f(x_i), x_{i+1} = x_i + \frac{1}{n}$. Для нахождения равномерных приближений к $f(x)$ на $[0,1]$ применим следующий метод. Строим ломаную $L_n\widehat{f} : (L_n\widehat{f})(x_i) = f_i$, а затем сглаживаем с помощью разрывного оператора Стеклова [1]:

$$S_\alpha L_n\widehat{f} = \begin{cases} S_{\alpha 2} L_n\widehat{f}, x \in [0, \frac{1}{2}], \\ S_{\alpha 1} L_n\widehat{f}, x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \tag{1}$$

где $S_{\alpha 1}$ – левосторонний, $S_{\alpha 2}$ – правосторонний оператор Стеклова.

(Запись (1) означает: как именно определяется значение $(S_\alpha L_n\widehat{f})(\frac{1}{2})$ - несущественно).

Теорема 1. *Имеет место оценка*

$$\left\| S_\alpha L_n\widehat{f} - f \right\|_{L_\infty[0,1]} \le \omega(\alpha) + \omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $\|\cdot\|_{L_\infty} = \max\left\{\|\cdot\|_{C[0,1/2]}, \|\cdot\|_{C[1/2,1]}\right\}$, $\omega(\cdot)$ *– модуль непрерывности функции* $f(x)$.

Теорема 2. *Функции* $S_\alpha L_n\widehat{f}$ *при* $\alpha = \frac{1}{n}$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$ *имеют вид:*

$$S_\alpha L_n\widehat{f} = A_i x^2 + B_i x + C_i,$$

где для $x \in [0, \frac{1}{2}]$

$$A_i = \frac{n}{2}(a_{i+1} - a_i),\ B_i = n(b_{i+1} - b_i + \frac{1}{n}a_{i+1}),$$

$$C_i = \frac{n}{2}(b_i x_{i+1} - b_{i+1}x_i + \frac{1}{n}a_{i+1}x_i + \frac{1}{n}f_{i+1});$$

для $x \in [\frac{1}{2}, 1]$

$$A_i = \frac{n}{2}(a_i - a_{i-1}),\ B_i = n(b_i - b_{i-1} + \frac{1}{n}a_{i-1}),$$

$$C_i = \frac{n}{2}(b_{i-1}x_{i+1} - b_i x_i - \frac{1}{n}a_{i-1}x_{i+1} + \frac{1}{n}f_i),$$

$$a_i = n(f_{i+1} - f_i),\ b_i = n(f_i x_{i+1} - f_{i+1} x_i).$$

При этом

$$(S_\alpha L_n \widehat{f})(x_i) = \frac{1}{2}(f_i + f_{i+1}),\ (S_\alpha L_n \widehat{f})(x_{i+1}) = \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_{i+2})\ \text{для}\ x \in [0, \frac{1}{2}];$$

$$(S_\alpha L_n \widehat{f})(x_i) = \frac{1}{2}(f_i + f_{i-1}),\ (S_\alpha L_n \widehat{f})(x_{i+1}) = \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_i)\ \text{для}\ x \in [\frac{1}{2}, 1].$$

Функции $S_\alpha L_n \widehat{f},\ \alpha = \frac{1}{n}$, отличаются от традиционных параболических сплайнов [2] тем, что они разрывны при $x = \frac{1}{2}$ и не совпадают с f_i в узлах x_i. Достоинства их: они вычисляются по готовым формулам, справедливым и в случае, когда f_i заданы с погрешностью. И тут мы тоже можем получить равномерные приближения функции $f(x)$ на отрезке. Сглаживающие сплайны из [2] эту задачу не решают.

Литература

1. *Хромова Г.В. Операторы с разрывной областью значений в задачах приближения функций и некорректных задачах// В книге "Новые методы аппрксимации и оптимизации в задачах действительного и комплексного анализа."Раздел IV. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та 2016. – С.267–292.*

2. *Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. – М. Наука, 1976. – 248 с.*

AN ANALOGUE OF INTERPOLATION PARABOLIC SPLINES

G. V. Khromova

It is shown that the smoothing of a polyline, constructed by the given values of a continuous function, using the Steklov operator with a discontinuous range of values leads to some generalization of the interpolation parabolic spline.

Keywords: continuous function, one-dimensional grid, uniform approximations, Steklov operator.

УДК 514.174.3, 519.65

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ, СОХРАНЯЮЩИХ ОРИЕНТАЦИЮ СИМПЛЕКСОВ

Н. А. Чебаненко[1], В. А. Клячин[2]

1 *chebanenko.na@volsu.ru*; Волгоградский государственный университет университет, Институт математики и информационных технологий.

2 *klchnv@mail.ru*; Волгоградский государственный университет университет, Институт математики и информационных технологий.

В статье рассматривается класс непрерывных, открытых отображений $f : D \subset R^m \to R^n$, сохраняющих ориентацию симплексов из заданного подмножества множества симплексов с вершинами в области $D \subset R^m$. В статье доказано, что если непрерывное и открытое отображение сохраняет ориентацию достаточно широкого класса симплексов, то оно является аффинным. Для тетраэдеров в R^3 с заданным

условием на его максимальный угол показано, что прообраз полностью лежит в некотрой плоскости.

Ключевые слова: триангуляция, семейства выпуклых множеств, кусочно-линейная аппроксимация.

Зададимся вопросом определения геометрических свойств непрерывных отображений $f : D \to R^n$, которые сохраняют ориентацию симплексов из некоторого, заранее данного подмножества множества $S(D)$. Более точно, нас будет интересовать структура прообраза плоскости в R^n при действии такого отображения.

Обозначим множество непрерывных отображений $f : D \to R^n$, сохраняющих ориентацию симплексов $S \in B \subset S(D)$ через $C_B(D)$. В работе авторов [1] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если открытое отображение $f \in C_{S(D)}(D)$, то f – аффинное преобразование.*

Мы называем отображение аффинным, если оно всякое аффинное подмножество переводит в аффинное подмножество. Из этого результата следует, что большинство отображений не может сохранять ориентацию всех симплексов. Поэтому мы рассматриваем некоторое их подмножество $B \subset S(D)$. Но даже уменьшив множество симплексов, мы видим, что условие сохранения их ориентации оказывается достаточно сильным.

В [1], [2] был доказан следующий ключевой результат о структуре прообраза гиперплоскости непрерывного отображения $f \in C_B(D)$

Теорема 2. *Если множество $B \subset S(D)$ открыто и отображение $f \in C_B(D)$ не является аффинным, то прообраз любой гиперплоскости не содержит вершин симплекса из B.*

Пусть $f : R^3 \to R^3$ некоторое непрерывное отображение. Зафиксируем величину $\pi < \theta_0 < 2\pi$. Обозначим через Ξ_{θ_0} множество тетраэдров, в которых величина максимального трехгранного угла не больше θ_0. Имеет место

Теорема 3. *Если непрерывное, открытое отображение $f : R^3 \to R^3$ сохраняет ориентацию всякого тетраэдра из множества Ξ_{θ_0}, то прообраз $f^{-1}(L)$ любой плоскости $L \subset R^3$ полностью лежит в некоторой плоскости.*

Литература

1. Клячин В. А., Чебаненко Н. А. *О линейных прообразах непрерывных отображений, сохраняющих ориентацию симплексов* // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1: Математика. Физика. – 2014. – № 3 – С. 56-60.

2. Клячин В. А., Чебаненко Н. А. *О геометрических свойствах непрерывных отображений, сохраняющих ориентацию симплексов* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2017. – 17:3. – С. 294–303.

3. Болучевская А. В. *Сохранение ориентации симплекса при квазиизометричном отображении* // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т. 13. – №. 1-2.

4. Сакс С. *Теория интеграла.* – М.: Изд-во иностранной литературы, 1949. – 495 с.

ABOUT THE GEOMETRIC STRUCTURE OF THE CONTINUOS MAPPINGS PRESERVED THE ORIENTATION OF SIMPLICES

N. A. Chebanenko, V. A. Klyachin

The paper considers a class of continuous, open mappings $f : D \subset R^m \to R^n$ that preserve the orientation of simplices from a given subset of the set of simplices with vertices in the domain $D \subset R^m$. We prove that if a continuous and open mapping preserves the orientation of a sufficiently wide class of simplices, then it is affine. For tetrahedra in R^3 with a given condition on its maximum angle, it is shown that the inverse image lies completely in some plane.

Keywords: triangulation, families of convex sets, piece-linear approximation.

УДК 517.956.6

ЗАДАЧА БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

С. Т. Чориева[1], Г. М. Мирсабурова[2]

1 *sanamchoriyeva3@gmail.com*; Термезский государственный университет.
2 *mirsaburov@mail.ru*; Термезский государственный университет.

В работе исследуется задача с условием Бицадзе-Самарского [1], связывающая значения искомой функции на трёх параллельных характеристиках, одна из которых является границей области исследовании задачи. При исследовании задачи используется комбинированный метод последовательных приближений и метод итераций.

Ключевые слова: задача с условием Бицадзе-Самарского, параллельный характеристика, комбинированный метод.

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} - u_{yy} = 0 \tag{1}$$

в конечной односвязной области D комплексной полуплоскости $z = x + iy$, $\operatorname{Im} z < 0$, ограниченной характеристиками

$$AC : x - (-y) = -1, \quad BC : x + (-y) = 1$$

уравнения (1) и отрезком AB оси $y = 0$, где $A = A(-1,0)$, $B = B(1,0)$. На отрезке AB рассмотрим точки $E_1 = E_1(c_1,0)$ и $E_2 = E_2(c_2,0)$, где $-1 < c_1 < c_2 < 1$. Пусть $I = (-1,1)$ интервал оси $y = 0$, на $\overline{I}$ рассмотрим функции $p_k(x) \in C^2(\overline{I})$, $k = 1,2$ со следующими свойствами:

1^0. $p_k(x)$ – это диффеоморфизмы из множества точек отрезка $I = [-1,1]$ на множество точек отрезка $[c_k,1]$, $k = 1,2$;

2^0. $p_1(x) > p_2(x) > x$, $\forall x \in \overline{I}$, $p_k'(x) > 0$, $p_k(-1) = c_k$, $p_k(1) = 1$.

В качестве примера таких функций приведем линейные функции $p_k(x) = b_k x + a_k$, $k = 1,2$, где $a_k + b_k = 1$, $a_k - b_k = c_k$.

Введем обозначения

$$\theta(x_0) = \frac{x_0 - 1}{2} - i\frac{x_0 - 1}{2}, \quad \theta_k^*(p_k(x_0)) = \frac{p_k(x_0) + c_k}{2} - i\frac{p_k(x_0) - c_k}{2}, \tag{2}$$

где $\theta(x_0)$ и $\theta_k^*(p_k(x_0))$, соответственно, аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1), исходящих из точек $(x_0, 1)$ и $(p_k(x_0), 1)$, с характеристиками AC и

$$E_kB_k : x - (-y) = c_k,\ B_k \in BC,\ k = 1, 2.$$

Задача Г. Найти в области D регулярное решение $u(x, y) \in \tilde{N}(\overline{D})$ уравнения (1) удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad x \in \overline{I}, \tag{3}$$

$$u[\theta_0(x)] = \mu_1 u[\theta_1(p_1(x))] + \mu_2 u[\theta_2(p_2(x))] + \rho(x), \quad x \in \overline{I}, \tag{4}$$

где $\mu_1,\ \mu_2$ – некоторые положительные постоянные. Заданные функции $\tau(x),\ \rho(x)$, таковы, что

$$\rho(-1) = \rho'(-1) = \rho''(-1) = 0,\ \tau(-1) = \tau'(-1) = \tau''(-1) = 0,$$

$$\tau(c_k) = \tau'(c_k) = \tau''(c_k) = 0,\ k = 1, 2. \tag{4}$$

В силу непрерывности решения $u(x, y)$ в замкнутой области $\overline{D}$ из условия (4) при $x = -1$ следует естественное условие согласованности $\tau(-1) = \mu_1\tau(c_1) + \mu_2\tau(c_2) + \rho(-1)$.

Условие (4) является аналогом условия Бицадзе-Самарского связывающего значения искомого решения $u(x, y)$ на характеристиках AC, E_1B_1 и E_2B_2.

Литература

1. Чориева С. Т. *Задача Бицадзе-Самарского с условием Франкля на отрезке линии вырождения для уравнения смещанного типа с сингулярным коэффициентом* //Известия вузов. Математика. 2013. – № 5. – С. 51–60.

THE BITSADZE-SAMARSKY PROBLEM FOR THE HYPERBOLIC EQUATION

S. T. Choriyeva, G. M. Mirsaburova

In the work, we study the problem with the Bisadze-Samarsky condition [1] linking the values of unknown function on three parallel characteristics, one of which is at the boundary of the area of study of the problem. When studying the problem, we use the combined method of successive approximation and iteration method.

Keywords: problem with the condition of Bitsadze-Samarsky, parallel characteristic, combination Flat method.

УДК 517.54

ЗАДАЧА РИМАНА В ПОЛУПЛОСКОСТИ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СО СВЕРХСИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ

П. Л. Шабалин[1]

1 *pavel.shabalin@mail.ru*; Казанский государственный архитектурно-строительный университет.

В работе изучается неоднородная краевая задача Римана с конечным индексом и краевым условием на вещественной оси для одного обобщенного уравнения Коши–Римана

со сверхсингулярной точкой на контуре краевого условия. Получена структурная формула общего решения этого уравнения при ограничениях, приводящих к бесконечному индексу сопутствующей краевой задачи для аналитических функций. Решение и исследование разрешимости последней является основой для решения краевой задачи для обобщенных аналитических функций.

Ключевые слова: краевая задача Римана, обобщенные аналитические функции, сверхсингулярная точка, бесконечный индекс.

Пусть $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $E^+ = \{z : \Im z > 0\}$, $E^- = \{z : \Im z < 0\}$, $\Gamma = \{z : \Im z = 0\}$. В областях E^+ или E^- рассмотрим частный случай обобщенной системы Коши-Римана

$$\partial_{\overline{z}} U - A^{\pm}(z)U = F^{\pm}(z), \quad A^{\pm}(z) = \frac{z a^{\pm}(z)}{|z|^{\alpha+1}}, \quad 1 < \alpha < 2. \tag{1}$$

Здесь $a^{\pm}(z), F^{\pm}(z) \in C(\overline{E^{\pm}} \setminus \{0\})$. Будем считать, что для функции $a^{\pm}(z)$ существует функция $b^{\pm}(z) \in C(\overline{E^{\pm}} \setminus \{0\})$, такая что

$$A_0^{\pm}(z) := \frac{z(a^{\pm}(z) - b^{\pm}(z))}{|z|^{\alpha+1}} \in L^p(E^{\pm}) \cap L^{p'}(E^{\pm}),\ p > 2,\ 1 < p' < 2, \tag{2}$$

$$b^{\pm}(z) = b^{\pm} + O(|z|^{\beta^{\pm}}),\ |z| \to 0,\ y \neq 0,\ \beta^{\pm} > 0, \tag{3}$$

$$b^{\pm}(z) = O(|z|^{\beta_1^{\pm}}),\ |z| \to \infty,\ \beta_1^{\pm} < \alpha - 1, \tag{4}$$

причем граничные значения функций $b^{\pm}(z)$, т.е. функции $b^+(x)$, $b^-(x)$ будем считать непрерывными по Гёльдеру с показателем γ, $\gamma > \alpha - 1$ на интервалах $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$, включая концы, в точке $x = 0$ функции $b^+(x)$, $b^-(x)$ имеют разрыв первого рода. Для ограниченных решений системы (1)-(4) исследуем задачу Римана с краевым условием на Γ и непрерывными коэффициентом и правой частью

$$U^+(t) = G(t)U^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma. \tag{5}$$

Решение краевой задачи (5) проводим с использованием структурной формулы общего решения системы (1)-(4). Формулу общего решения системы получаем следуя методу решения обобщенной системы Коши – Римана со сверхсингулярной линией из работы [1] , который для случая сверхсингулярной точки модифицирован в работе [2]. Мы выводим эту формулу при более слабых, чем в [2], [3] ограничениях, допускающих бесконечный индекс сопутствующей задачи Римана для аналитических функций. Решение и исследование разрешимости последней краевой задачи Римана с бесконечным индексом и одной точкой завихрения степенного порядка составляет вторую часть данной работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда №23-21-00212.

Литература

1. Солдатов А. П., Расулов А. Б. *Краевая задача для обобщённого уравнения Коши-Римана с сингулярными коэффициентами* // Дифференциальные уравнения. – 2016. – Т. 52. – № 5. – С. 637–650.

2. Расулов А. Б., Дорофеева И. Н. *Интегральные представления для обобщенного уравнения Коши-Римана с сверхсингулярной точкой на полуплоскости* // Вестник МЭИ. – 2020. – № 1. – С. 105–108.

3. Дорофеева И. Н., Расулов А. Б. *Задача Дирихле для обобщенного уравнения Коши-Римана со сверхсингулярной точкой на полуплоскости* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2020. – Т. 60. – № 10. – С. 1734–1740.

THE RIEMANN BOUNDARY VALUE PROBLEM IN THE HALF-PLANE FOR GENERALIZED ANALYTIC FUNCTIONS WITH A SUPERSINGULAR POINT

P. L. Shabalin

In this paper, we study an inhomogeneous Riemann boundary value problem, with a finite index and a boundary condition on the real axis, for a generalized Cauchy-Riemann equation with a supersingular point on the boundary. A structural formula for the general solution of this equation is obtained under constraints leading to an infinite index of the accompanying boundary value problem for analytical functions. The solution and investigation of the solvability of the latter is the basis for solving the boundary value problem for generalized analytical functions.

Keywords: Riemann boundary value problem, generalized analytic functions, supersingular point, infinite index.

УДК 591.65

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА ОПЕРАТОРА ФУРЬЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ И ЛОГАРИФМИЧЕСКО-ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

И. А. Шакиров[1]

1 *iskander@tatngpi.ru*; Набережночелнинский государственный педагогический университет.

Константа Лебега L_n классического оператора Фурье равномерно приближается двумя типами агрегатов: логарифмической и логарифмическо-дробно-рациональной функциями. Определены параметры аппроксимирующих функций, затем исследованы соответствующие остаточные члены, имеющие немонотонное поведение. Добавление рационального слагаемого в аппроксимирующую L_n правую часть существенно улучшает порядок приближения константы Лебега.

Ключевые слова: константа Лебега оператора Фурье, дробно-рациональная функция, экстремальная задача, погрешность аппроксимации.

Константа Лебега $L_n = ||S_n||$ классического оператора Фурье

$$S_n : C_{2\pi} \to C_{2\pi} \ \ (S_n(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(s)D_n(t-s)ds, \ \ D_n(u) = \frac{\sin(n+1/2)u}{2\sin(u/2)})$$

равномерно приближается логарифмической

$$L_n \approx \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) + b \stackrel{def}{=} y_n(a,b), \ \ n \in N \ \ ((a,b) \in Y) \tag{1}$$

и логарифмическо-дробно-рациональной функциями

$$L_n \approx \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) + b + \frac{d}{(n+a)^2} \stackrel{def}{=} z_n(a,b,d), \ \ n \in N \ \ ((a,b,d) \in Z), \tag{2}$$

где Y, Z – вполне определенные области. В работе изучаются вопросы: насколько возрастает эффективность равномерной аппроксимации L_n в приближенном равенстве (2), содержащем слагаемое вида $d/(n+a)^2$, по сравнению с (1); как изменится качество аппроксимации, если в (1) и (2) аргумент n принадлежит подмножеству $N_k = \{k, k+1, k+2, ...\}$ множества натуральных чисел N? С целью ответа на эти вопросы введем соответствующие (1) и (2) экстремальные величины

$$E_k \overset{def}{=} \inf_{(a,b)\in Y} \sup_{n\in N_k} |\varepsilon_n(a,b)| \quad (\varepsilon_n(a,b) = L_n - y_n(a,b), \quad n \in N_k), \tag{3}$$

$$E_k^+ \overset{def}{=} \inf_{(a,b,d)\in Z} \sup_{n\in N_k} |\varepsilon_n^+(a,b,d)| \quad (\varepsilon_n^+(a,b,d) = L_n - z_n(a,b,d), \quad n \in N_k). \tag{4}$$

Теорема 1 [1]. *Приближенное равенство* $L_n \approx \frac{4}{\pi^2}\ln(n+0.5+\widetilde{c}_1)+\widetilde{\alpha}_0$, $n \in N_1 = N$ *обеспечивает следующую оценку для наилучшего логарифмического приближения (3):*

$$E_1 < \sup_{n\in N} |L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2}+\widetilde{c}_1) - \widetilde{\alpha}_0| < 0.000317632, \tag{5}$$

где $\widetilde{c}_1 = 0.004852813...$, $\widetilde{\alpha}_0 = 1.270353244....$

Теорема 2. *Приближенное равенство с возмущенной правой частью* $L_n \approx \frac{4}{\pi^2}\ln(n+$ $+0.5) + \widetilde{\alpha}_0 + \frac{d_1^*}{(n+0.5)^2}$, $n \in N_1 = N$ *обеспечивает следующую оценку для наилучшего логарифмическо-дробно-рационального приближения (4) при* $k = 1$:

$$E_1^+ < \sup_{n\in N} \left| L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+0.5) - \widetilde{\alpha}_0 - \frac{d_1^*}{(n+0.5)^2} \right| < 0.000005283 \quad (d_1^* = 0.002945386...). \tag{6}$$

Замечание 1. *Результаты теорем 1 и 2 позволяют утверждать, что использование дробно-рационального слагаемого в правой части приближенной формулы (2) позволяет увеличить порядок равномерной аппроксимации константы Лебега* $L_n (n \in N)$ *более чем на единицу* ($0.000317632/0.000005283 \approx 60.1$; *см. (5), (6)).*

Далее первоначальные значения $L_1 - L_3$ константы Лебега вычислим согласно формуле Фейера [2]: $L_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\operatorname{tg}\frac{\pi k}{2n+1}$. Остальные значения $L_n (n \in N_4)$ приближенно вычислим несколько модифицированными формулами вида (1), (2). Тогда для экстремальных величин (3) и (4) получим более точные, лучшие чем в (5) и (6), верхние оценки.

Теорема 3. *Для наилучших приближений* E_4, E_4^+ *верны оценки:*

$$E_4 < 0.000060593, \quad E_4^+ < 0.000000198 \quad (0.000060593/0.000000198 \approx 307.5).$$

В этом случае наблюдается большее влияние дробно-рационального слагаемого на точность аппроксимации констант L_n ($n \in N_4$) (см. замечание 1); с ростом значения параметра k в (4) величина E_k^+ стремится к нулю с большой скоростью.

Литература

1. Шакиров И. А. *Приближение константы Лебега оператора Фурье логарифмической функцией*// Изв. вузов. Матем. – 2022. – № 5. – С. 86–93.

2. Fejer L. *Sur les singularites de la serie de Fourier des fonctions continues* // Ann. de Ec. Norm. – 1911. – № 28. – P. 63–103.

ABOUT THE EFFICIENCY OF APPROXIMATION OF THE LEBESGUE CONSTANT OF THE FOURIER OPERATOR BY LOGARITHMIC AND LOGARITHMIC-FRACTIONAL-RATIONAL FUNCTIONS

I. A. Shakirov

Two types of aggregates uniformly approximate the Lebesgue constant L_n of the classical Fourier operator. They are logarithmic and logarithmic-fractional-rational functions. The parameters of the approximating functions are determined and then the corresponding residual terms with non-monotonic behavior are investigated. Adding a rational term to the approximating L_n right-hand side substantially improves the approximation order of the Lebesgue constant.

Keywords: Lebesgue constant of Fourier operator, fractional-rational function, extreme problem, approximation error.

УДК 517.925, 531.01

ИНВАРИАНТНЫЕ ФОРМЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ, ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

М. В. Шамолин[1]

1 *shamolin@rambler.ru*; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова.

Изучается задача геодезических, включающая, в частности, геодезические на сфере и других поверхностях вращения конечномерного пространства Лобачевского. Указываются достаточные условия интегрируемости уравнений геодезических. Затем в системы добавляется потенциальное поле сил специального вида, также указываются достаточные условия интегрируемости рассматриваемых уравнений, на классах задач, аналогичных рассмотренным ранее. В заключение строится усложнение задачи, возникающее в результате добавления неконсервативного поля сил со знакопеременной диссипацией. Указываются достаточные условия интегрируемости.

Ключевые слова: динамическая система с диссипацией, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

Нахождение достаточного количества тензорных инвариантов (не только первых интегралов) позволяет точно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений [1]. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных систем этот факт естественен, но для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны, вообще говоря, включать функции, обладающие существенно особыми точками (см. также [2–4]).

Примеры тензорных инвариантов — это, прежде всего, скалярные инварианты — первые интегралы системы. Инвариантные векторные поля — поля симметрий (они коммутируют с векторным полем рассматриваемой системы). Фазовые потоки систем дифференциальных уравнений, порождаемых этими полями, переводят решения рассматриваемой системы в решения той же системы. Инвариантные внешние дифференциальные формы (поиск которых, в основном, и проведен в данной работе) порождают интегральные инварианты системы. При этом, очевидно, само векторное поле рассматриваемой системы является одним из инвариантов (тривиальный инвариант). Знание тензорных инвариантов системы дифференциальных уравнений облегчает и ее интегрирование, и качественное исследование. Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы из m дифференциальных уравнений помимо упомянутого тривиального инварианта надо знать еще $m-1$ независимых тензорных инвариантов.

Задача о движении $(n+1)$-мерного маятника на обобщенном сферическом шарнире в неконсервативном поле сил, который можно образно описать, как "поток набегающей среды, заполняющей объемлющее $(n+1)$-мерное пространство", приводит к динамической системе на касательном расслоении к n-мерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий [5]. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, полный список первых интегралов состоит из функций, имеющих существенно особые точки, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. То же фазовое пространство естественно возникает в задаче о движении точки по n-мерной сфере с индуцированной метрикой объемлющего $(n+1)$-мерного пространства. Отметим также задачи о движении точки по более общим n-мерным поверхностям вращения, в пространстве Лобачевского и т. д.

В работе для рассматриваемого класса динамических систем предъявлены полные наборы инвариантных дифференциальных форм для однородных систем на касательных расслоениях к гладким конечномерным многообразиям (об аналогичных исследованиях для систем меньшей размерности см. [2, 3, 5]). Показана связь наличия данных инвариантов и с полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля вносят в системы диссипацию разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Литература

1. Козлов В. В. *Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений* // Успехи мат. наук. – 2019. – Т. 74, № 1. – С. 117–148.

2. Шамолин М. В. *Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1. Твердое тело в неконсервативном поле*. – М.: ЛЕНАНД, 2019. – 456 с.

3. Шамолин М. В. *Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 2. Закрепленные маятники разной размерности*. – М.: ЛЕНАНД, 2021. – 400 с.

4. Шамолин М. В. *Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия* // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. – 2020. – Т. 495, № 1. – С. 84–90.

5. Шамолин М. В. *Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия* // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. – 2021. – Т. 497, № 1. – С. 23–30.

INVARIANT FORMS OF GEODESIC, POTENTIAL, AND DISSIPATIVE SYSTEMS WITH FINITE NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM

M. V. Shamolin

The problem of geodesics is studied, including, in particular, geodesics on a sphere and other surfaces of rotation, a finite-dimensional Lobachevsky space. Sufficient conditions for the integrability of geodesic equations are specified. Then a potential field of forces of a special form is added to the systems, sufficient conditions for the integrability of the equations under consideration are also specified, on classes of problems similar to those considered earlier. And in conclusion, the complexity of the problem arising from the addition of a non-conservative field of forces with alternating dissipation is constructed. Sufficient conditions of integrability are specified.

Keywords: dynamical systems with dissipation, integrability, transcendental first integral.

УДК 517.955

ОБ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОДНОЙ ВНУТРЕННЕЙ СИНГУЛЯРНОЙ ЛИНИЕЙ

Ф. М. Шамсудинов[1], И. О. Бобоназаров[2]

1 *faizullo100@yahoo.com*; Бох.ГУ им. Н. Хусрава, Таджикистан.
2 *bobonazarovidibek@gmail.ru*; докторант PhD КГУ им. А.Рудаки, Таджикистан.

В работе для одной переопределенной системы дифференциальных уравнений второго порядка получено представление многообразия решений в явном виде, когда коэффициенты первого, второго и третьего уравнения связаны между собой определенным образом. Изучены свойства полученных решений, а также рассмотрена задачи с начальными данными.

Ключевые слова: переопределенная система, многообразия решений, прямоугольник, сингулярный коэффициент, свойства решений.

Через D_1 обозначим область, ограниченную участками $\Gamma_1^+ = \{y = 0,\ 0 < x < \delta_1\}$ полуоси $y = 0, x \geq 0, \Gamma_0^+ = \{y - x = 0,\ 0 < x < \delta_1\}$ полуоси $y = x$, через D_2 обозначим область ограниченную участками участками $\Gamma_2^+ = \{x = 0,\ 0 < y < \delta_2\}$ полуоси $x = 0, y > 0$ и Γ_0^+. Пусть $T = D_1 \cup D_2,\ T_0 = D_1 \cup D_2 \cup \Gamma_0^+,\ \overline{T}_0 = T \cup \Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^+$.

В области T рассмотрим систему уравнений следующего вида

$$\begin{cases} u_{xy} + a_1(x,y)(x-y)^{-\alpha} u_x + b_1(x,y)(x-y)^{-\beta} u_y + \\ + c_1(x,y)(x-y)^{-(\alpha+\beta)} u = f_1(x,y)(x-y)^{-(\alpha+\beta)}, \\ u_x + a_2(x,y)(x-y)^{-\gamma} u = f_2(x,y)(x-y)^{-\gamma}, \\ u_y + b_2(x,y)(x-y)^{-\delta} u = f_3(x,y)(x-y)^{-\delta}, \end{cases} \tag{1}$$

где $a_j(x,y),\ b_j(x,y),\ c_1(x,y),\ f_k(x,y), j = \overline{1,2}, k = \overline{1,3}$ – заданные функции в области $T,\ \alpha > 1, \beta > 1, \gamma = 1, \delta = 1$.

Проблеме исследования дифференциальных уравнений и переопределенных систем с регулярными, сингулярными и суперсингулярными коэффициентами посвящены работы Аппеля П., Михайлова Л.Г., Раджабова Н., Тасмамбетова Ж.Н., Хасанова А. и других авторов.

Используя методику, разработанную Н.Раджабовым для системы уравнений (1), мы получим представление многообразия решений с одной произвольной постоянной.

Теорема 1. *Пусть в системе уравнений (1)* $\alpha > 1, \beta > 1, \gamma = 1, \delta = 1$, *коэффициенты и правые части удовлетворяют следующим условиям*:

1) $a_1(x,y) \in C_x^1(\overline{T}), a_2(x,y) \in C_y^1(\overline{T})$,
$b_1(x,y), b_2(x,y), c_1(x,y) \in C(\overline{T}), f_2(x,y) \in C_y^1(\overline{T}), f_1(x,y), f_3(x,y) \in C(\overline{T})$;
2) $c_1(x,y) = (x-y)^{\alpha+\beta}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{a_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha}}\right) + a_1(x,y)b_1(x,y)$;
3) $|a_1(x,y) - a_1(x,x)| \le H_1|x-y|^{\alpha_1},\ H_1 = \text{const},\ \alpha_1 > \alpha - 1$,
$|b_1(x,y) - b_1(y,y)| \le H_2|x-y|^{\beta_1},\ H_2 = \text{const}, \beta_1 > \beta - 1$,
$|a_2(x,0) - a_2(0,0)| \le H_3|x|^{\lambda_1},\ H_3 = \text{const}, 0 < \lambda < 1$;
4) $a_1(x,x)\omega_{\alpha-1}(x,y) + b_1(y,y)\omega_{\beta-1}(x,y) < 0, a_2(0,0) > 0$;
5) $a_1(x,y)$ и $a_2(x,y)$, $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ $f_1(x,y)$ и $f_3(x,y)$,
удовлетворяют определенным условиям совместности в T;
6) $f_2(x,0) = o(\exp[-a_1(x,x)\omega_{\alpha-1}(x)](x)^{\lambda_2}), \lambda_2 > |a_2(0,0)|$.

Тогда любое решение системы уравнений (1) из класса $C_2\left(T\backslash\Gamma_0^+\right)$ *представимо в виде*

$$u(x,y) \equiv \Omega_1(\varphi_1(x), \psi_1(y), f_1 x, y)), \tag{2}$$

$$\varphi_1(x) \equiv N_1(c_1, f_2(x,0)), \tag{3}$$

$$\psi_1(y) = F_1(y), \tag{4}$$

где $\Omega_1(\varphi_1(x), \psi_1(y), f_1 x, y)), N_1(c_1, f_2(x,0)), F_1(y)$ *– известные интегральные операторы и функции,* c_1 *– произвольная постоянная.*

Изучены свойства полученных решений и рассморена задачи с начальными данными.

ON A OVERDETERMINED SYSTEM OF SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH ONE INTERNAL SINGULAR LINE

F. M. Shamsudinov, I. O. Bobonazarov

In the paper, for a overdetwermined system of second-order differential equations, an explicit representation of the variety of solutions is obtained when the coefficients of the first, second and third equations are related to each other in a certain way. The properties of the obtained solutions are studied, as well as problems with initial data are considered.

Keywords: overdetermined system,manifold of solutions, rectangle, singular coefficient, properties of solutions.

УДК 517.955

ОБ ОДНОЙ ПЕРЕДОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ВНУТРЕННИМИ СИНГУЛЯРНЫМИ ЛИНИЯМИ

Ф. М. Шамсудинов[1], Р. С. Валиев[2]

1 *faizullo100@yahoo.com*; Бох.ГУ им. Н. Хусрава, Таджикистан
2 *ruzoboivaliev@gmail.com*; докторант PhD Бох.ГУ им. Н. Хусрава, Таджикистан.

В работе для одной переопределенной системы дифференциальных уравнений второго порядка получено представление многообразия решений в явном виде, когда коэффициенты первого и второго уравнения связанный между собой определенным образом. Изучены свойства полученных решений, а также рассмотрена задача с начальными данными.

Ключевые слова: переопределенная система, многообразия решений, прямоугольник, сингулярный коэффициент, свойства решений.

Через D обозначим прямоугольник
$D = \{(x, y) : -a < x < a, 0 < y < a\}, \Gamma_1 = \{y = 0, -a < x < a\}, \Gamma_2 = \{x = 0, 0 < y < a\}$.
Далее обозначим $\Gamma_1^0 = \{y = x, 0 \le x \le a\}, \Gamma_2^0 = \{y = -x, -a \le y \le a\}$.
В области D рассмотрим систему

$$\begin{cases} u_{xy} + a_1(x,y)(x^2-y^2)^{-m}u_x + b_1(x,y)(x^2-y^2)^{-n}u_y + \\ +c_1(x,y)(x^2-y^2)^{-(m+n)}u = f_1(x,y)(x^2-y^2)^{-(m+n)}, \\ u_y + b_2(x,y)(x^2-y^2)^{-p}u = f_2(x,y)(x^2-y^2)^{-p}, \end{cases} \tag{1}$$

где $a_1(x,y), b_i(x,y), c_1(x,y), f_i(x,y), i = 1,2$ – заданные функции в области D $m \ge 2$, $n \ge 2, p = 1, u(x,y)$ – искомая функция.

Проблеме исследования дифференциальных уравнений и переопределенных систем с регулярными, сингулярными и суперсингулярными коэффициентами посвящены работы Аппеля П., Михайлова Л.Г., Раджабова Н., Тасмамбетова Ж.Н., Хасанова А. и других авторов.

Используя методику разработанных в работах Н.Раджабова для системы уравнений (1), мы получим представление многообразия решений при помощи одной произвольной постоянной.

Теорема. *Пусть в системе уравнений (1)* $m \ge 2, n \ge 2, p = 1$ *коэффициенты и правые части удовлетворяют следующим условиям:*

1) $b_1(x,y) \in C_y^1(\overline{D}), b_2(x,y) \in C_x^1(\overline{D}), f_2(x,y) \in C_x^1(\overline{D}), a_1(x,y), c_1(x,y),$
$f_1(x,y) \in C(\overline{D}), c_1(x,y), f_1(x,y) \in C(\overline{D})$;
2) $c_1(x,y) = (x^2-y^2)^{m+n}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{b_1(x,y)}{(x^2-y^2)^n}) + a_1(x,y)b_1(x,y)$;
3) $b_1(y,y) > 0, a_1(x,x) > 0, b_2(0,0) < 0$;
4) $| b_1(x,y) - b_1(y,y) | \le H_1|x-y|^{\beta_1}, H_1 = \text{const}, \beta_1 > n-1$ *в окрестности* Γ_1^0,
$| b_1(x,y) - b_1(y,y) | \le H_2|x+y|^{\beta_2}, H_2 = \text{const}, \beta_2 > n-1$ *в окрестности* Γ_2^0,
$| a_1(x,y) - a_1(x,x) | \le H_3|x-y|^{\alpha_1}, H_3 = \text{const}, \alpha_1 > m-1$ *в окрестности* Γ_1^0,
$| a_1(x,y) - a_1(x,x) | \le H_4|x+y|^{\alpha_2}, H_4 = \text{const}, \alpha_2 > m-1$ *в окрестности* Γ_2^0,

$| b_2(x,0) - b_2(0,0) | \leq H_5 y^{\lambda_1}, H_5 = const, \lambda_1 > 1;$

5) *a)* $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{b_1(x,y)}{(x^2-y^2)^n}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{b_2(x,y)}{(x^2-y^2)})$ *в* D ,

b) $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ *удовлетворяет определенным условиям совместности в* D;

6) $f_1(x,y) = o\left(\exp[-a_1(x,x)\omega^{(2)}_{m-1}(x,y)](x-y)^{\lambda_1}\right), \lambda_1 > m+n-1$ *в окрестности* Γ^0_1,

$f_1(x,y) = o\left(\exp[-a_1(x,x)\omega^{(2)}_{m-1}(x,y)](x+y)^{\lambda_2}\right), \lambda_2 > m+n-1$ *в окрестности* Γ^0_2,

$f_2(0,y) = o\left(y^{\lambda_2}\right), \lambda_2 > 1.$

Тогда любое решение системы уравнений (1) из класса $C^2(D\setminus(\Gamma^0_1 \bigcup \Gamma^0_2))$ *представимо в виде*

$$u(x,y) \equiv K_1\left(\psi_1(y), \varphi_1(x), f_1(x,y)\right),$$
$$\psi_1(y) \equiv M_1(c_1, f_2(0,y)),$$
$$\varphi_1(x) = F_1(x),$$

где $K_1\left(\psi_1(y), \varphi_1(x), f_1(x,y)\right), M_1(c_1, f_2(0,y)), F_1(x)$ *– известнстные интегральные операторы и функции,* c_1 *– произвольная постоянная.*

Изучены свойства полученных решений и исследованы задачи с начальными данными.

ON AN OVER DETERMINATED SYSTEM OF SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH TWO INTERNAL SINGULAR LINES

F. M. Shamsudinov, R. S. Valiev

In the paper, for an overdetwermined system of second-order differential equations, an explicit representation of the variety of solutions is obtained when the coefficients of the first and second equations are related to each other in a definite way. The properties of the obtained solutions are studied, as well as problems with initial data are considered.

Keywords: overdetermined system, manifolds of solutions, rectangle, singular coefficient, properties of solutions.

УДК 517.984

ОЦЕНКИ ДЛЯ ГРАНИЦ ОДНОЙ 3 × 3 ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ

М. Ш. Шарипова[1]

1 *m.sh.sharipova@buxdu.uz*; Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан.

В данной работе получены оценки границ одной 3 × 3 *операторной матрицы с помощью кубической числовой области значений, вложения Гершгорина и классической теорией возмущений.*

Ключевые слова: операторная матрица, кубическая числовая область значения, вложение Гершгорина, классическая теория возмущения.

Многие научно-прикладные проблемы сводятся к исследованиям спектральных свойств операторных матриц, элементы которых являются линейными операторами, действующими в банаховых или гильбертовых пространствах. Вопросы, связанные с существенными и дискретными спектрами операторных матриц, в

частности гамильтонианов систем с несохраняющимся ограниченным числом частиц на решетке, являются актуальными проблемами в физике твердого тела, квантовой теории поля, статистической физике, квантовой механике и многих других областей. Поэтому развитие исследования операторных матриц и гамильтонианов систем с несохраняющимся ограниченным числом частиц, является одним из приоретных направлений.

Обозначим через $\mathbb{T}$ одномерный тор. Пусть $\mathscr{H}_0 := \mathbb{C}$ – одномерное пространство комплексных чисел, $\mathscr{H}_1 := L_2(\mathbb{T})$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комлекснозначных) функций, определённых на $\mathbb{T}$ и $\mathscr{H}_2 := L_2(\mathbb{T}^2)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определённых на $\mathbb{T}^2$. Обозначим через $\mathscr{H}$ прямое произведение пространств $\mathscr{H}_0$, $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$, т.е. $\mathscr{H} := \mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$. Обычно пространство $\mathscr{H}$ называют трехчастичным обрезанным подпространством пространства Фока.

Пусть нам дана операторная матрица $\mathscr{A}$, определенная на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$:

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

где матричные элементы $A_{ij} : \mathscr{H}_j \to \mathscr{H}_i$, $i, j = 0, 1, 2$ – линейные и ограниченные операторы, заданные по правилам:

$$A_{00} f_0 = \varepsilon f_0, \;\; (A_{01} f_1)(t) = \int_{\mathbb{T}} \sin(t) f_1(t)\, dt, \;\; A_{02} = 0, \;\; A_{10} = A_{01}^*;$$

$$(A_{11} f_1(x)) = (\varepsilon + 1 - \cos(x)) f_1(x), \quad (A_{12} f_2)(x, t) = \int_{\mathbb{T}} \sin(t) f_2(x, t)\, dt;$$

$$A_{20} = 0, \;\; A_{21} = A_{12}^*, \;\; (A_{22} f_2)(x, y) = (\varepsilon + 2 - \cos(x) - \cos(y)) f_2(x, y).$$

Здесь $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $f_i \in \mathscr{H}_i$, $i = 0, 1, 2$

С помощью простых вычислений имеем:

$$(A_{01}^* f_0)(x) = \sin(x) f_0, \quad f_0 \in \mathscr{H}_0,$$

$$(A_{12}^* f_1)(x, y) = \sin(y) f_1(x), \quad f_1 \in \mathscr{H}_1.$$

Легко видеть, что операторная матрица (1) с вышеуказаннымы элементами линейная, ограниченная и самосопряженная.

Теорема. *Для операторной матрицы (1) имеют место неравенства:*

$$\min \sigma(\mathscr{A}) \geq \varepsilon - \sqrt{2\pi}, \quad \max \sigma(\mathscr{A}) \leq \varepsilon + 2 + \sqrt{\frac{4 + 2\pi}{3}}.$$

Замечание 1. *В силу теоремы Гершгорина* [*1*] *имеют место неравенства:*

$$\min \sigma(\mathscr{A}) \geq \varepsilon - 2\sqrt{\pi}, \quad \max \sigma(\mathscr{A}) \leq \varepsilon + 4 - \sqrt{\pi}.$$

Замечание 2. *Классическая теория возмущений* [*2*] *дает нижнюю границу:*

$$\min \sigma(\mathscr{A}) \geq \varepsilon - \sqrt{2\pi}.$$

Нижняя граница спектра, обеспечиваемая кубической числовой областью значений, является более точной, чем границы, обеспечиваемые вложениями Гершгорина и классической теорией возмущений.

Литература

1. *Rasulov T.H., Tretter C.* Spectral inclusion for diagonally dominant unbounded block operator matrices // Rocky Mountain J. Math. – 2018. – № 1. – P. 279–324.

2. *Kato T.* Perturbation Theory for Linear Operators (Classics in Mathematics, 132). – Springer, 1995.

ESTIMATES FOR BOUNDS OF A 3×3 OPERATOR MATRIX

M. Sh. Sharipova

In this work, we obtain estimates for the bounds of a 3×3 operator matrix using cubic numerical range, Gershgorin enclosures and classical perturbation theory.

Keywords: operator matrix, cubic numerical range, Gershgorin enclosures, classical perturbation theory.

УДК 517.923+517.925.54

ОБ ОЦЕНКЕ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ОПЕРАТОРА, СВЯЗАННОГО С ПЕРИДИНАМИКОЙ

Ш. Н. Шералиев[1]

1 *shuhrat2500@mail.ru*; Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Филиал в городе Ташкенте.

Для гиперсингулярного интегрального оператора типа Кальдерона-Зигмунда, связанного с задачами перидинамики, найдено гильбертово пространство, которое переводится данным оператором в пространство квадратично суммируемых периодических функций.

Ключевые слова: сингулярные операторы, неравенство Кальдерона-Зигмунда, перидинамика.

Рассмотрим в пространстве 2π-периодических вектор-функций сингулярный интегральный оператор

$$Sf(x) = \int_{\mathbb{T}^n} \Omega(y) f(x-y) |y|^{-n} \chi(|y|) dy, \tag{1}$$

где $\Omega(x)$ является $(n \times n)$-матрицей-функцией, гладкой в области $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и для любого $\lambda > 0$ удовлетворяющей условию однородности: $\Omega(\lambda x) = \Omega(x)$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Неотрицательная функция $\chi(r)$ предполагается принадлежащей $C^\infty(\mathbb{R})$, равной 1 в некоторой окрестности нуля и равной 0 при $r \geq \pi$.

Определим матрицу Ω^*, представляющую собой среднее значение ядра Ω по единичной сфере:

$$\Omega^* = \omega_n^{-1} \int_\theta \Omega(\theta)\, d\theta.$$

В случае, когда $\Omega^* = 0$, т. е. все элементы Ω^*_{ij} $(i, j = 1, 2, ..., n)$ этой матрицы равны нулю, интегральный оператор (1) является оператором типа Кальдерона-Зигмунда. В этом случае оператор (1) естественным образом определяется в классе гладких функций и продолжается до оператора, непрерывного из $L_p(\mathbb{T}^n)$ в $L_p(\mathbb{T}^n)$ (см. [1]). Отметим, что условие $\Omega^* = 0$ является необходимым для справедливости данного утверждения.

В настоящей работе рассматривается случай, когда $\Omega^* \neq 0$. В этом случае оператор (1) становится гиперсингулярным и для его корректного определения вводится оператор

$$Af(x) = \int_{\mathbb{T}^n} \Omega(y)[f(x-y) - f(x)]\,|y|^{-n}\chi(|y|)\,dy,$$

играющий главную роль в основном уравнении перидинамики, предложенном в работе [2].

Отметим, что в случае $\Omega^* = 0$ данный оператор совпадает с сингулярным оператором типа Кальдерона-Зигмунда [1].

Введем в рассмотрение самосопряжённый оператор $\Lambda = \sqrt{1-\Delta}$, где Δ – самосопряжённое расширение в $L_2(\mathbb{T}^n)$ оператора Лапласа, отвечающее периодическим граничным условиям.

Для любого $s \geq 0$ рассмотрим положительный самосопряжённый в $L_2(\mathbb{T}^n)$ оператор $\log^s(1+\Lambda)$. Область определения этого оператора обозначим символом $H^s_{\log}(\mathbb{T}^n) = D(\log^s(1+\Lambda))$.

Каждое пространство $H^s_{\log}$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением $(f, g)_s = (\log^s(1+\Lambda)f, \log^s(1+\Lambda)g)_{L_2(\mathbb{T}^n)}$ и соответствующей нормой $\|f\|_s$.

Символом $\|\Omega^*\|$ обозначим норму матрицы Ω^*.

Теорема. *Для любого $s \geq 1$ оператор A действует из $H^s_{\log}(\mathbb{T}^n)$ в $H^{s-1}_{\log}(\mathbb{T}^n)$ и удовлетворяет оценке*

$$\|Af\|_{s-1} \leq C\|\Omega^*\| \cdot \|f\|_s + C\|f\|_{s-1}.$$

Литература

1. Calderon A. P., Zygmund A. On the existence of certain singular integrals // Acta Math. – 1952. – V. 88. – P. 85–139.

2. Silling S. A. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces // J. Mech. Phys. Solids. – 2000. – V. 48. – № 1. – P. 175-–209.

3. Alimov Sh., Sheraliev Sh. (2019) On the solvability of the singular equation of peridynamics // Complex Variables and Elliptic Equations. – V. 64. – № 5. – P. 873–887.

ON HYPERSINGULAR OPERATORS RELATED TO PERIDYNAMICS

Sh. N. Sheraliev

For a hypersingular integral operator of the Calderon-Zygmund type associated with the problems of peridynamics, a Hilbert space is found that the operator maps into the space of quadratically summable periodic functions.

Keywords: singular operators, Calderon-Zygmund inequality, peridynamics.

UDC 517.956.223

ON CAUCHY PROBLEM SOLUTION FOR A HARMONIC FUNCTION IN A SIMPLY CONNECTED DOMAIN WITH MULTILY-CONNECTED BOUNDARY

E. A. Shirokova[1], P. N. Ivanshin[2]

1 *elena.shirokova@kpfu.ru*; Kazan Federal University.
2 *pivanshi@yandex.ru*; Kazan Federal University.

We consider solvability of the Cauchy problem for the Laplace equation in a simply connected plane domain with a multy-connected boundary. We reduce the solution of the problem to two singular integral equations. In the case of a resolvable problem, we restore its solution via the integral Cauchy formula. The examples of the solvable and unsolvable problems are presented.

Keywords: Cauchy problem, integral equation, block matrix, approximate solution.

Let D be a simply connected domain in the XY plane, $\Gamma = \{(x(s), y(s)), s \in S'\}$ being a parametrisation of the boundary of D with the natural parameter s. There are given two real-valued functions $\phi(s)$ and $\psi(s)$, $0 \le s \le l$. The harmonic in D function $h(x, y)$ with the properties

$$h(x(s), y(s)) = \phi(s), \quad \frac{\partial h(x, y)}{\partial \mathbf{n}}|_{x=x(s), y=y(s)} = \psi(s), \tag{1}$$

where $\mathbf{n}$ is the exterior normal to Γ, is to be found.

Theorem. *Let D be a simply connected domain with the smooth boundary $\Gamma \cup \Gamma'$, where $\Gamma = \{z(s) = x(s) + \mathrm{i}y(s), s \in S\}$ is a multy-connected set of curves, s being the natural parameter of Γ, $\Gamma' = \{z(s) = x(s) + \mathrm{i}y(s), s \in S'$. Let the data defined by formula (1) of the Cauchy problem be given at the points of Γ. Let $\phi'(s)$, $s \in S$, be of the Hölder class and $\psi(s)$, $s \in S$, be continuous. Then this Cauchy problem is solvable if and only if the known function $\phi(s) + \mathrm{i}\int\limits_0^s \psi(t)dt$, $s \in S$, satisfies the relation*

$$\phi(s) + \mathrm{i}\psi(s) = \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\Gamma} \frac{(\phi(t) + \mathrm{i}\psi(t)d\tau)z'(t)}{z(t) - z(s)} dt + \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\Gamma'}^{T} \frac{(\tilde{\phi}(t) + \mathrm{i}\tilde{\chi}(t))z'(t)}{z(t) - z(s)} dt, \ s \in S,$$

where $\tilde{\phi}(s) + \mathrm{i}\tilde{\chi}(s)$, $s \in [l, T]$, is the solution of the singular integral equation

$$\tilde{\phi}(s) + \mathrm{i}\tilde{\chi}(s) = \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\Gamma'} \frac{(\tilde{\phi}(t) + \mathrm{i}\tilde{\chi}(t))z'(t)}{z(t) - z(s)} dt + \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\Gamma} \frac{(\phi(t) + \mathrm{i}\psi(t))z'(t)}{z(t) - z(s)} dt, \ s \in S'.$$

The solution of the solvable Cauchy problem has the form

$$h(x, y) = \mathrm{Re} \int \left\{ \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\Gamma} \frac{(\phi(t) + \mathrm{i}\psi(t))z'(t)}{z(t) - x - \mathrm{i}y} dt + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\Gamma'} \frac{(\tilde{\phi}(t) + \mathrm{i}\tilde{\chi}(t))z'(t)}{z(t) - x - \mathrm{i}y} dt \right\} dz.$$

References

1. Tarkhanov N. The Cauchy Problem for Solutions of Elliptic Equations. – Akademie-Verlag, Berlin, 1995.

2. Ivanshin P.N., Shirokova E.A. On approximate conformal mapping of a disk and an annulus with radial and circular slits onto multiply connected domains // J. of Appl. Math. and Comp. Mech. – 2020. – V. 19. – № 2. – P. 73–84.

3. Muskhelishvili N. I. Singular Integral Equations. – Springer, 1958

4. Schur I. Bemerkungen zur Theorie der Beschraenkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veraenderlichen // J. Reine Angew. Math. – 1911. – V. 140. – P. 1–28.

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ И ОБЛАСТИ С МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Е. А. Широкова, П. Н. Иваньшин

Рассмотрим разрешимость задачи Коши для уравнения Лапласа в односвязной плоской области с многосвязной границей. Мы сводим решение задачи к двум сингулярным интегральным уравнениям. В случае разрешимой задачи мы восстанавливаем ее решение по интегральной формуле Коши. Приведены примеры разрешимых и неразрешимых задач.

Ключевые слова: Задача Коши, интегральное уравнение, блочные матрицы, приближенное решение.

УДК 517.548

УСТРАНИМЫЕ МНОЖЕСТВА ДЛЯ НЬЮТОНОВСКОГО ПРОСТРАНСТВА $N^{1,p}$ НА МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ С p-ОГРАНИЧЕННОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

В. А. Шлык[1]

1 *shlykva@yandex.ru*; Институт прикладной математики ДВО РАН, Дальневосточный центр исследований и образования в математике.

Вводится аналог NC_p-множеств в области Ω метрического пространства с p-ограниченной геометрией и доказывается критерий равенства $N^{1,p}(\Omega \setminus E) = N^{1,p}(\Omega)$ в терминах E как NC_p-множества в Ω, $1 < p < \infty$.

Ключевые слова: пространства Соболева, емкость конденсатора, метрические пространства с мерой, устранимые множества.

Ниже мы используем терминологию из [1], [2]. Метрическое пространство (X, d, μ) назовем пространством с p-ограниченной геометрией, если: 1) X является собственным, φ-выпуклым и оснащенным регулярной борелевской мерой μ, удовлетворяющей условию удвоения; 2) X поддерживает $(1, p)$-неравенство Пуанкаре; 3) Для каждого шара $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$, выполняется $0 < \mu(B(x, r)) < \infty$, где $x \in X$, $r \in (0, +\infty)$, 4) $\mu(\{x\}) = 0$ для всех $x \in X$.

Фиксируем область $\Omega \subset X$ и выберем шар $B(x, r_x)$ такой, что $S(x, r_x) = \{y \in X : d(x, y) = r_x\} \neq \emptyset$ и $Cl\ B(x, r_x) = \{y \in X : d(x, y) \leq r_x\} \subset \Omega$. Кроме того, пусть $O(x)$ будет открытой связной окрестностью точки x такой, что замыкание $\overline{O(x)} \subset B(x, r_x)$. Семейство всех таких окрестностей $O(x)$ обозначим через $\mathscr{F}(x, \Omega, B(x, r_x))$. Ниже E является замкнутым подмножеством области Ω. E назовем устранимым множеством для ньютоновского пространства $N^{1,p}(\Omega)$, если для каждой функции $u \in N^{1,p}(\Omega \setminus e)$, где e — произвольное замкнутое подмножество в E, существует

функция $\tilde{u} \in N^{1,p}(\Omega)$ такая, что

$$\|u - \tilde{u}\|_{N^{1,p}(\Omega \setminus e)} = 0, \qquad \|u\|_{N^{1,p}(\Omega \setminus e)} = \|\tilde{u}\|_{N^{1,p}(\Omega)}.$$

E назовем NC_p-множеством в Ω, если

$$\mathrm{Cap}_p(F_0, F_1, O(x)) = \mathrm{Cap}_p(F_0, F_1, O(x) \setminus E) \tag{1}$$

выполняется для всех непересекающихся непустых компактов F_0, F_1 в $O(x) \setminus E$. Кроме того, равенство (1) не зависит от выбора $x \in \Omega$ и $O(x) \in \mathscr{F}(x, \Omega, B(x, r_x))$.

Основной результат нашего сообщения формулируется следующим образом.

Теорема. *E будет устранимым множеством для $N^{1,p}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\mu(E) = 0$ и E является NC_p-множеством в Ω.*

Исследование поддержано Министерством науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2023-946).

Литература

1. *Heinonen J., P. Koskela P.* Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry // Acta Mathematica. – 2000. – V. 181. – No. 1. – P. 1–61.

2. *Shanmugalingam N.* Newtonian spaces: An extension of Sobolev spaces to metric measure spaces // Rev. Mat. Iberoamericana. — 2000. – V. 16. – No.2. – P. 243–279.

REMOVABLE SETS FOR NEWTONIAN SPACE $N^{1,p}$ IN A METRIC MEASURE SPACE WITH A p-BOUNDED GEOMETRY

V. A. Shlyk

We introduce the analogue of NC_p-sets in the domain Ω of a metric space with a p-bounded geometry and prove the criterion of equality $N^{1,p}(\Omega \setminus E) = N^{1,p}(\Omega)$ in terms of E as NC_p-set in Ω, $1 < p < \infty$.

Keywords: Sobolev space, condenser capacity, metric measure space, removable sets.

УДК 517.52

РАСХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО ОБОБЩЁННЫМ СИСТЕМАМ ХААРА И УОЛША В ТОЧКАХ НЕУСТРАНИМОГО РАЗРЫВА ПЕРВОГО РОДА

В. И. Щербаков[1]

1 *kafmathan@mail.ru*; Московский технический университет связи и информатики.

В работе устанавливается, что на модифицированном отрезке $[0,1]$ ряды Фурье по обобщённым системам Хаара и Уолша всегда расходятся в точках неустранимого разрыва первого рода.

Ключевые слова: модифицированный отрезок $[0,1]$, упорядочивание и непрерывность на нём, обобщённые системы Хаара и Уолша (системы Прайса).

Пусть $p_0 = 1, \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ – целочисленная последовательность с $p_n \geq 2$; $m_n = \prod\limits_{k=0}^{n} p_k$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Всякое натуральное число n единственным образом представимо в

виде

$$n = \sum_{k=0}^{s} a_k m_k = a_s m_s + n', \tag{1}$$

где a_k, s и n'– целые с $0 \le a_k < p_{k+1}; 1 \le a_s < p_{s+1}; 0 \le n' < m_s$, а любое действительное число $x \in [0,1]$ можно разложить по формуле

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{m_n}, \quad \text{где } x_n - \text{ целые числа, } 0 \le x_n < p_n. \tag{2}$$

Если x — p_n-иррационально, а также $x = 0$ или $x = 1$, то его представление в виде (2) единственно; для $x = \frac{l}{m_n}$ имеется два его разложения по формуле (2), одно из которых — конечно ($x_k = 0$ при $k > n$), мы обозначим его через $\frac{l}{m_n}$, а другое — бесконечно ($x_k = p_k - 1$ для $k > n$); его будем записывать как $\frac{l}{m_n} -$. Таким образом, отрезок $[0,1]$ переходит в абелеву группу последовательностей $G = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} | x_n = 0, 1, \ldots p_n - 1\}$ с операцией $\dot{+}$ покоординатного сложения по модулю p_n и обратной операцией $\dot{-}$ (эту группу последовательностей G ещё называют модифицированным отрезком $[0,1]$ и обозначают как $[0,1]^*$).

Положим $\frac{l}{m_n} - < \frac{l}{m_n}$. Тогда упорядочивание точек переносится с $[0,1]$ на G, и, следовательно, на G определён отрезок $[a,b] = \{x \in G \mid a \le x \le b\}$. А так как группа G и отрезок $[0,1]$ различаются лишь на счётное множество точек, то с $[0,1]$ на G переносятся понятия меры и интеграла Лебега, а также ортогональные и ортонормированные системы функций (под функцией будем понимать отображение группы последовательностей G во множество комплексных чисел $\mathbb{C}$). Рассмотрим следующие ортонормированные системы функций:

1. $\Gamma = \{\gamma_n(x)\}_{n=0}^{\infty} : \gamma_0(x) \equiv 1; \gamma_{m_k}(x) = \begin{cases} \sqrt{m_k} \exp(\frac{2i\pi x_{k+1}}{p_{k+1}}) & \text{, если } x \in G_k \\ 0 & \text{для } x \in G \setminus G_k \end{cases}$

$(k = 0, 1, 2, \ldots)$ и $\gamma_n(x) = \gamma_{a_s m_s + n'}(x) = (\gamma_{m_s}(x \dot{-} (\frac{n'}{m_s})))^{a_s}$, а также

2.$\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty} : \psi_0(x) \equiv 1; \psi_{m_k}(x) = \exp \frac{2i\pi x_{k+1}}{p_{k+1}}$ и $\psi_n(x) = \prod_{k=0}^{s} (\psi_{m_k}(x))^{a_k}$,

где числа s, a_s и n'– определены равенством (1) , и $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in G$.

Систему $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называют системой Прайса [1] (для простых p_n на нульмерной компактной абелевой группе она переходит в системы Виленкина [2]). Для $p_n \equiv p$ она становится системой Крестенсона (или Крестенсона-Леви) [3], а при $p_n \equiv 2$ — системой Уолша [4] в нумерации Пэли [5].

Систему же $\{\gamma_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, как правило, называют обобщённой системой Хаара (или системой типа Хаара). При $p_n \equiv 2$ она (на отрезке $[0,1]$) переходит в систему Хаара [6]; для $\sup_n p_n < \infty$ эта система рассматривалась (также на отрезке $[0,1]$) Н. Я. Виленкиным [7], Б.И.Голубовым и А.И.Рубинштейном [8]; для любых p_n (тоже на отрезке $[0,1]$) — Б.И.Голубовым [9].

Топология в G задаётся системой подгрупп $G_n = \{\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in G | x_1 = x_2 = \ldots x_n = 0\} = [0, \frac{1}{m_n} -]$, которые являются системой окрестностей нуля. Таким образом в G определяется непрерывность функции, а также непрерывность справа и слева. По сравнению с отрезком $[0,1]$ непрерывность в G эквивалентна

— обычной непрерывности в $\{p_n\}$-иррациональных точках;

— непрерывности справа в точках $\frac{l}{m_n}$;
— непрерывности слева в точках $\frac{l}{m_n} -$.

Следует также иметь в виду, что в точках $\frac{l}{m_n} \in G$ не определяются непрерывность слева, а в точках $\frac{l}{m_n} - \in G$ — непрерывность справа.

Имеет место следующие утверждения.

Теорема 1. *Ряд Фурье по обобщённым системам Уолша (системам Прайса) от любой интегрируемой на G функции расходится во всякой её точке неустранимого разрыва первого рода.*

Теорема 2. *Ряд Фурье по обобщённым системам Хаара от любой функции с интегрируемым квадратом на G расходится во всякой её точке неустранимого разрыва первого рода.*

Для систем Хаара (при $p_n \equiv 2$ и на отрезке $[0,1]$) аналог теоремы 2 получен Г.Фабером [10] и П.Л.Ульяновым [11]. Для систем Уолша (в случае $p_n \equiv 2$ и на отрезке $[0,1]$) аналог теоремы 1 был известен самому Уолшу [4] (см., например, [12]).

Литература

1. *Price J. J.* Certain groups of orthonormal step functions // Canad. J. Math. – 1957. – V. 9. – № 36. – P. 413 – 425.

2. *Виленкин Н. Я.* Об одном классе полных ортонормальных систем // Изв. АН СССР. сер. матем. – 1947. – Т. 11. – № 4. – С. 363–400.

3. *Chrestenson H. E.* A class of generalized Walsh functions // Pac. J. Math. – 1955. – V. 5. – № 1.– P. 17–31.

4. *Walsh J. L.* A constructive of normal orthonormal functions // Amer. J. Math. – 1923. – V. 49. – № 1. – P. 5–24.

5. *Paley R. E. A. C.* A remarkable series of orthonormal functions // Proc. of London Math. Soc. – 1932. – V. 36. – P. 241–264.

6. *Haar A.* Zur Theorie des Orthogonalischen Functionsysteme // Mathem. An. – 1910. – V. 69. – P. 331–371.

7. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортгональных рядов // – М. , Физматгиз, 1958. – дополнения Н.Я.Виленкина. – §1, — п. 6, — С. 475 — 479.

8. *Голубов Б. И. Рубинштейн А. И.* Об одном классе систем сходимости // Матем. сб., Нов. сер. – 1966. – Т. 71, – вып. 1. – С. 96–115.

9. *Голубов Б. И.* Об одном классе полных ортонормальных систем // Сиб. матем. журн. – 1968. – Т. IX. – № 2. – С. 297–314.

10. *Faber G.* Über der Orthogonalfunctionen des Herr Haar // Jahresber. Desch. Math. Ver. – 1910. – P. 104–112.

11. *Ульянов П. Л.* О рядах по системе Хаара // Математический сборник. – 1964. – Т. 63. – № 3. – С. 356–391.

12. *Алексич Г.* Проблеммы сходимости ортогональных рядов // Москва, Издательство иностранной литературы, 1963. – 360 с.

A DEVERGENCE OF FOURIER SERIES WITH RESPECT TO GENERALIZED HAAR'S AND WALSH'S SYSTEMS ON UNREMOVAL POINTS OF DISCONTINUITY OF THE FIRST KIND

V. I. Shcherbakov

We prove that, on the modified segment $[0,1]$*, the Fourier series with respect to generalized Haar's and Walsh's systems always deverges at the points of irremovalble discontinuity of the first kind.*

Keywords: modified segment $[0,1]$, ordering and continious on it, generalized Haar's and Walsh's systems (Pryce's systems).

УДК 517.92, 519.217

ДИНАМИКА ПОВЕДЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ ОТОБРАЖЕНИЙ ЛОТКИ – ВОЛЬТЕРРЫ В СЛУЧАЕ ОДНОРОДНЫХ ТУРНИРОВ

Д. Б. Эшмаматова[1], М. А. Таджиева[2], Р. Н. Ганиходжаев[3]

1 *24dil@mail.ru*; Ташкентский государственный транспортный университет.
2 *mohbonut@mail.ru*; Ташкентский государственный транспортный университет.
3 *rasulganikhodzhaev@gmail.com*; Национальный университет Узбекистана.

Известно, что существует тесная связь между дискретными динамическими системами Лотки-Вольтерра и элементами теории графов. В работе для отображений Лотки – Вольтерры, в случае однородных турниров получены новые результаты о расположении неподвижных точек на симплексе. С их помощью можно исследовать асимптотическое поведение траекторий этих отображений.

Ключевые слова: квадратичное отображение Лотки-Вольтерра, симплекс, турнир, однородный турнир, гамильтонов цикл, неподвижная точка.

В биологии, в популяционной генетике, эпидемиологии, экономике, а также в экологии возникают уравнения типа Лотки-Вольтерра.

Пусть $A = (a_{ij})$ произвольная кососимметрическая матрица с условием $a_{ij} \neq 0$ при $i \neq j$. Рассмотрим отображение $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, заданное равенствами ([1], [2])

$$V : x_k^{'} = x_k(1 + \sum_{i=1}^{m} a_{ki} x_i), \quad k = \overline{1, m},$$

где $Vx = (x_1^{'}, ..., x_m^{'})$. Это отображение при условии $|a_{ki}| \leq 1$ называется отображением Лотки-Вольтерра. В работе рассмотрено отображение $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$, где

$$S^{m-1} = \{x = (x_1, ..., x_m) : \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, x_i \geq 0\}.$$

Известно, [1] что если отображение V является в общем положении, то можно для него ввести понятие турнира, в случае когда V вырожденное, тогда можно ввести понятие частично-ориентированного графа ([2]). В работе рассмотрим динамику отображения Лотки – Вольтерры действующего в S^4 с однородным турниром. Этот случай интересен, так как его можно рассматривать в качестве модели круговорота азота в экосистеме.

Определение 1. [2] *Турнир называется однородным, если его любой подтурнир является либо сильным, либо транзитивным.*

Рассмотрим отображение $V_1 : S^4 \to S^4$ имеющее вид:

$$V_1 : \begin{cases} x_1' = x_1(1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - a_{14}x_4 + a_{15}x_5), \\ x_2' = x_2(1 + a_{12}x_1 - a_{23}x_3 - a_{24}x_4 + a_{25}x_5), \\ x_3' = x_3(1 + a_{13}x_1 + a_{23}x_2 - a_{34}x_4 - a_{35}x_5), \\ x_4' = x_4(1 + a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 - a_{45}x_5), \\ x_5' = x_5(1 - a_{15}x_1 - a_{25}x_2 + a_{35}x_3 + a_{45}x_4), \end{cases}$$

где коэффициенты $0 < a_{ki} \leq 1$.

Здесь симплекс S^4 имеет четыре сильных грани – $\overline{135}, \overline{145}, \overline{235}$ и $\overline{245}$. Известно [2], что двумерные грани имеют по одной внутренней неподвижной точке.

Неподвижные точки образуют (P, Q) пару [1], если они принадлежат сильным и смежным двумерным граням, причем направления определяются знаками миноров четвёртого порядка.

Теорема 1. *Если в G_V существует один источник, тогда отображение V_3 не имеет внутри S^4 неподвижных точек.*

Теорема 2. *Если в G_V образуется гамильтонов цикл, тогда кроме вершин карты существует внутренняя неподвижная точка.*

Литература

1. Ганиходжаев Р. Н., Эшмаматова Д. Б.*Квадратичные автоморфизмы симплекса и асимптотическое поведение их траекторий* // Владикавк. матем. журн. – 2006. – Т. 8. – № 2. – С. 12–28.

2. Эшмаматова Д. Б., Таджиева М. А., Ганиходжаев Р. Н. *Критерии существования внутренних неподвижных точек с однородными турнирами дискретных динамических систем Лотки – Вольтерры* // Известия вузов. ПНД. – 2023. – Т. 30. – № 6. – С. 702–716.

DYNAMICS OF BEHAVIOR OF TRAJECTORIES OF LOTKA - VOLTERRA MAPPINGS IN THE CASE OF HOMOGENEOUS TOURNAMENTS

D. B. Eshmamatova, M. A. Tadzhieva, R. N. Ganikhodzhaev

It is known that there is a close connection between discrete Lotka-Volterra dynamical systems and elements of graph theory. In the work, for the Lotka-Volterra mappings, in the case of homogeneous tournaments, new results on the location of fixed points on the simplex are obtained. They can be used to investigate the asymptotic behavior of the trajectories of these mappings.

Keywords: quadratic Lotka-Volterra mapping, simplex, tournament, homogeneous tournament, Hamiltonian cycle, fixed point.

УДК 517.92, 519.217

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ КОМПОЗИЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Ф. А. Юсупов[1], Д. Б. Эшмаматова[2]

1 *farrukhyusupovchambil@mail.ru*; Ташкентский государственный транспортный университет.
2 *24dil@mail.ru*; Ташкентский государственный транспортный университет.

Известно, что довольно много научных исследований с практическими приложениями сводятся к изучению динамических свойств квадратичных отображений. При этом важная роль принадлежит исследованию квадратичных отображений симплекса Лотки–Вольтерры и их композиций. В работе рассмотрена динамика траекторий внутренних точек композиции квадратичных отображений Лотки–Вольтерры, действующих в трехмерном симплексе. Построены карты неподвижных точек и исследованы их характеры.

Ключевые слова: отображение Лотки – Вольтерры, композиция, турнир, аттрактор, репеллер, карта неподвижных точек.

Известно [1], что квадратичное отображение Лотки – Вольтерры, действующее в $(m-1)$-мерном симплексе $S^{m-1} = \left\{x = (x_1, ..., x_m) : x_i \geq 0, \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1\right\} \subset \mathbb{R}^m$, можно представить в виде

$$V : x'_k = x_k\left(1 + \sum_{i=1}^{m} a_{ki}x_i\right), \quad k = \overline{1, m},$$

где $a_{ki} = -a_{ik}, |a_{ki}| \leq 1$, $k, i = \overline{1, m}$. Ясно, что S^{m-1} – компактное и выпуклое подмножество $\mathbb{R}^m$.

Известно [1], [2], что отображение Лотки – Вольтерры есть автоморфизм симплекса S^{m-1}, тогда очевидно, что композиция этих отображений также является автоморфизмом. Композиция двух отображений Лотки–Вольтерры также отображает симплекс в себя, но динамика траекторий внутренних точек, характеры неподвижных точек, при этом меняются. Как оказалось, обобщить композицию для общего случая невозможно, так как для каждого отдельного случая динамика в корне отличается друг от друга. Поэтому нам приходится рассматривать отдельные случаи и изучать их динамику.

Пусть отображения Лотки – Волтерры, действующие в S^3, имеют вид:

$$V_1 : \begin{cases} x'_1 = x_1[1 + ax_2 - x_3 + x_4], \\ x'_2 = x_2[1 - ax_1 + x_3 - x_4], \\ x'_3 = x_3[1 + x_1 - x_2 - x_4], \\ x'_4 = x_4[1 - x_1 + x_2 + x_3], \end{cases}, \quad V_2 : \begin{cases} x'_1 = x_1[1 - ax_2 + x_3 + x_4], \\ x'_2 = x_2[1 + ax_1 - x_3 - x_4], \\ x'_3 = x_3[1 - x_1 + x_2 - x_4], \\ x'_4 = x_4[1 - x_1 + x_2 + x_3]. \end{cases}$$

Композиция $W = V_1 \circ V_2$ данных отображений имеет вид:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1[1 - ax_2 + x_3 + x_4][1 + ax_2[1 + ax_1 - x_3 - x_4] - x_3[1 - x_1 + x_2 - x_4] + x_4[1 - x_1 + x_2 + x_3]] \\ x'_2 = x_2[1 + ax_1 - x_3 - x_4][1 - ax_1[1 - ax_2 + x_3 + x_4] + x_3[1 - x_1 + x_2 - x_4] - x_4[1 - x_1 + x_2 + x_3]] \\ x'_3 = x_3[1 - x_1 + x_2 - x_4][1 + x_1[1 - ax_2 + x_3 + x_4] - x_2[1 + ax_1 - x_3 - x_4] - x_4[1 - x_1 + x_2 + x_3]] \\ x'_4 = x_4[1 - x_1 + x_2 + x_3][1 - x_1[1 - ax_2 + x_3 + x_4] + x_2[1 + ax_1 - x_3 - x_4] + x_3[1 - x_1 + x_2 - x_4]] \end{cases}$$

Будем обозначать через Fix$W$ неподвижную точкку W.

Теорема. *Для W справедливы следующие утверждения:*

i) Отображение W имеет на рёбрах $\Gamma_{12} \in S^3$, $\Gamma_{13} \in S^3$, $\Gamma_{23} \in S^3$, а также на грани $\Gamma_{123} \in S^3$ неподвижные точки;

ii) если Fix$W \in \Gamma_{12}$, Fix$W \in \Gamma_{13}$ *или* Fix$W \in \Gamma_{23}$*, то это седловая точка;*

iii) если Fix$W \in \Gamma_{123}$*, при $a = 1$ – репеллер, при $a \neq 1$ – это седловая точка;*

iv) вершины e_2, e_3 и e_4 – седловые точки.

v) вершина e_1 – аттрактор.

При этом,

$$O_1\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}, 0\right) \in \Gamma_{13}, \quad O_2\left(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, 0\right) \in \Gamma_{23},$$

$$O_3\left(\frac{\sqrt{a^2+4}+a-2}{2a}, \frac{-\sqrt{a^2+4}+a+2}{2a}, 0, 0\right) \in \Gamma_{12}, \quad O_4\left(\frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{a}{a+2}, 0\right) \in \Gamma_{123}.$$

Литература

1. Ганиходжаев Р. Н., Эшмаматова Д. Б.*Квадратичные автоморфизмы симплекса и асимптотическое поведение их траекторий* // Владикавк. матем. журн. – 2006. – Т. 8. – № 2. – С. 12–28.

2. Эшмаматова Д. Б., Таджиева М. А., Ганиходжаев Р. Н. *Критерии существования внутренних неподвижных точек с однородными турнирами дискретных динамических систем Лотки – Вольтерры* // Известия вузов. ПНД. – 2023. – Т. 30. – № 6. – С. 702–716.

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THE COMPOSITION OF NONLINEAR MAPPINGS

F. A. Yusupov, D. B. Eshmamatova

It is known that a lot of scientific research with practical applications is reduced to the study of the dynamic properties of quadratic mappings. In this vein, an important and integral part can be given to the study of quadratic mappings of the Lotka–Volterra simplex and their compositions. The paper considers the dynamics of the trajectories of internal points of compositions of quadratic Lotka–Volterra mappings acting in a three-dimensional simplex. Cards of fixed points are constructed and their characters are investigated.

Keywords: Lotka – Volterra mapping, composition, tournament, attractor, repeller, card of fixed points.

УДК 517.984

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ФРИДРИХСА С ПОМОЩЬЮ РЕДАКТОРА MATHCAD

Ф. Ю. Яшиева[1]

1 *f.y.yashiyeva@buxdu.uz*; Бухарский государственный педагогический институт, Бухара, Узбекистан.

Данная работа посвящена к изучению собственных значений оператора, так называемая обобщенная модель Фридрихса. Исследованы собственные значение обобщенной модели Фридрихса с помощью математического редактора MathCAD, когда параметр

функции имеют специальный вид.

Ключевые слова: одномерный тор, прямая сумма, обобщенная модель Фридрихса, операторная матрица, собственное значение, редактор MATHCAD.

Пусть $\mathbb{T}$ – одномерный тор, $\mathbb{C}$ – одномерное комплексное пространство, $L_2(\mathbb{T})$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}$ и $\mathscr{H}$ – прямая сумма пространств $\mathscr{H}_0 := \mathbb{C}$ и $\mathscr{H}_1 := L_2(\mathbb{T})$, т.е. $\mathscr{H} := \mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_1$.

В гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ рассмотрим обобщенную модель Фридрихса

$$\mathscr{A} := \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{01}^* & A_{11} \end{pmatrix} \tag{1}$$

с матричными элементами $A_{ij} : \mathscr{H}_j \to \mathscr{H}_i,\ i, j = 0, 1$:

$$A_{00} f_0 = a f_0,\ A_{01} f_1 = \int_{\mathbb{T}} v(t) f_1(t) dt,$$

$$(A_{11} f_1)(x) = (a + u(x)) f_1(x),\ f_\alpha \in \mathscr{H}_\alpha,\ \alpha = 0, 1.$$

Здесь a – вещественное число, $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ – вещественно-значные непрерывные функции на $\mathbb{T}$. В этих предположениях обобщенная модель Фридрихса $\mathscr{A}$ является ограниченным и самосопряженным в $\mathscr{H}$ оператором.

Из известной теоремы Г. Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр оператора $\mathscr{A}$ совпадает с отрезком $[a + m, a + M]$, т.е. $\sigma_{\text{ess}}(\mathscr{A}) = [a + m, a + M]$, где числа m и M определяются равенствами:

$$m := \min_{x \in \mathbb{T}} u(x), \quad M := \max_{x \in \mathbb{T}} u(x).$$

Определим регулярную в $\mathbb{C} \setminus [a + m; a + M]$ функцию (детерминант Фредгольма, ассоциированный с оператором $\mathscr{A}$)

$$\Delta(z) := a - z - \int_{\mathbb{T}} \frac{v^2(t) dt}{a + u(t) - z}.$$

Отметим, что число $z \in \mathbb{C} \setminus [a + m; a + M]$ является собственным значением оператора $\mathscr{A}$ тогда и только тогда, когда $\Delta(z) = 0$. Из этого факта следует, что

$$\sigma_{\text{disc}}(\mathscr{A}) = \{z \in \mathbb{C} \setminus [a + m; a + M] : \Delta(z) = 0\}. \tag{2}$$

Рассмотрим задачу нахождения собственных значений E_1 и E_2 в частном случае с помощью математического пакета MathCAD. Предположим, что

$$a := 1, \quad u(t) := 1 - \cos(t), \quad v(t) := \sin(t).$$

В этом случае

$$\Delta(z) := 1 - z - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(t) dt}{2 - \cos(t) - z}.$$

Из графика функции $\Delta(\cdot)$ (рис. 1) видно, что эта функция имеет два нуля E_1 и E_2, причем в силу равенства (2) они являются простыми собственными значениями

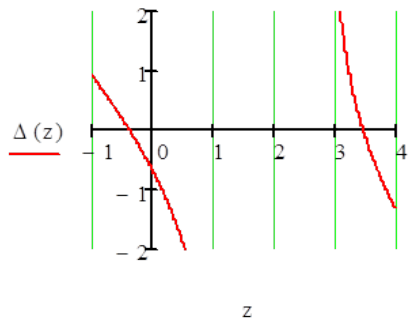

Рис. 1. График функции $\Delta(\cdot)$.

обобщенной модели Фридрихса $\mathscr{A}$. С использованием редактора MathCAD можно убедится, что $E_1 \in (-3;-2)$ и $E_2 \in (6;7)$.

INVESTIGATION OF THE LOCATION OF EIGENVALUES OF THE GENERALIZED FRIEDRICHS MODEL USING THE MATHCAD PACKEGE

F. Yu. Yashieva

This paper is devoted to the problem of the investigation of eigenvalues of the operator, so-called the generalized Friedrichs model. The eigenvalues of the generalized Friedrichs model are investigated using MathCAD, when the parameter function has a special form.

Keywords: one-dimensional torus, direct sum, generalized Friedrichs model, operator matrix, eigenvalue, MathCAD redactor.

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЦЕНТРА

ИМЕНИ Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Т. 66

XVI МЕЖДУНАРОДНАЯ КАЗАНСКАЯ ШКОЛА-КОНФЕРЕНЦИЯ ”ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ”

Материалы конференции

(Казань, 22 – 27 августа 2023 г.)

Разработка авторского LaTeX-стиля оформления: С. Р. Насыров.
Техническая редакция, набор и верстка: С. Р. Насыров.