УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 148, кн. 4 Физико-математические науки *2006*

УДК 519.6

СХЕМЫ МКЭ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

Ш.И. Таюпов, М.Р. Тимербаев

Аннотация

Для неоднородной двухточечной задачи Дирихле с вырождающимися на границе коэффициентами построены схемы метода конечных элементов высокого порядка аппроксимации, основанные на мультипликативном выделении особенности решения задачи. Получены оценки погрешности метода, доказывающие его оптимальность на классе правых частей заданной гладкости.

Введение

Известно (см., например, [1–4]), что решение задачи Дирихле для эллиптического уравнения с вырождающимися коэффициентами имеет неограниченные производные в окрестности точек вырождения. Поэтому применение стандартных проекционно-сеточных схем для дискретизации таких задач приводит к потере сходимости приближенных решений к точному в окрестности точек вырождения коэффициентов дифференциального оператора задачи. Для численного решения рассматриваемого класса задач предлагались различные подходы. Так, в работе [5] построение приближения основано на специальной замене переменных, при которой в новых координатах используется обычная разностная схема. В работах [6–10] анализировался метод конечных элементов (МКЭ) со сгущающейся к особым точкам сеткой. Отметим, что построение сгущающейся сетки в областях со сложной геометрией является нетривиальной задачей. Кроме того, для многомерных областей размер результирующей системы МКЭ с уменьшением характерного шага сетки растет существенно быстрее по сравнению с квазиравномерными сетками. Следствием этого является медленная сходимость метода.

Принципиально иной подход предложен в работе [11]. В этой статье аппроксимация основывается на мультипликативном выделении особенности, а именно, решение задачи представляется в виде произведения двух функций, одна из которых имеет весьма простой вид и отражает характерное поведение решения в окрестности точек вырождения коэффициентов дифференциального уравнения, а другая объявляется новой искомой функцией. Причем, как следует из априорных оценок [4], эта функция – гладкая, и для ее аппроксимации можно использовать обычные конечные элементы на квазиравномерной сетке. Таким образом, данный метод фактически приводит к стандартному МКЭ с оптимальной сходимостью.

Во всех указанных выше работах рассматривались *однородные* граничные условия Дирихле. Целью настоящей работы было построение схем МКЭ высокого порядка точности для *неоднородной* двухточечной задачи Дирихле с вырождением коэффициентов на границе. Для того чтобы можно было использовать преимущества метода с мультипликативным выделением особенности, неоднородная граничная задача сводится к однородной с помощью так называемой *функции продолжения* (граничных значений в область), построение которой описано в п. 2.2.. В работе доказано (теорема 9), что предложенный метод имеет оптимальный порядок сходимости на правых частях заданного класса гладкости. Приведены результаты численных экспериментов, подтверждающие теоретические оценки точности рассматриваемого метода.

1. Обозначения и вспомогательные результаты

Введем весовые классы функций. Для вещественного γ через $L_{2,\gamma}(\Omega)$ обозначим пространство измеримых функций $u : \Omega \to R$ с нормой

$$\|u\|_{L_{2,\gamma}} = \|x^{-\gamma}u\|_{L_2} = \left(\int\limits_{\Omega} |x^{-\gamma}u|^2\, dx\right)^{1/2}.$$

Через $H^s_\gamma(\Omega)$ будем обозначать пространство функций, для которых конечна полунорма $\|D^s u\|_{L_{2,\gamma}}$ (здесь и всюду далее s – целое неотрицательное число, D^s – обобщенная производная порядка s). В качестве нормы этого пространства можно взять

$$\|u\|_{H^s_\gamma} = \left(\|D^s u\|^2_{L_{2,\gamma}} + \|u\|^2_{L_2(\delta,1)}\right)^{1/2},$$

где $\delta \in (0,1)$ фиксировано. Иногда удобнее использовать другую, эквивалентную норму [12]

$$\|u\|_{H^s_\gamma} = \left(\|D^s u\|^2_{L_{2,\gamma}} + \sum_{j=0}^{s-1} |D^j u(1)|^2\right)^{1/2}.$$

Обозначим через $\overset{\circ}{H}{}^s_\gamma(\Omega)$ замыкание по норме пространства $H^s_\gamma(\Omega)$ множества $C_0^\infty(\Omega)$ финитных в Ω, бесконечное число раз дифференцируемых функций и положим $\dot{H}^s_\gamma(\Omega) = \{u \in H^s_\gamma(\Omega) :\ D^j u(1) = 0,\ j = 0,1,\ldots,s-1\}$. Можно показать [12], [14, с. 346], что для $s = 1$ при $\gamma \le -1/2$ эти подпространства совпадают: $\overset{\circ}{H}{}^1_\gamma(\Omega) = \dot{H}^1_\gamma(\Omega)$, а при $\gamma > -1/2$ имеет место следующая характеризация «зануленного» класса: $\overset{\circ}{H}{}^1_\gamma(\Omega) = \{u \in H^1_\gamma(\Omega) :\ u(0) = u(1) = 0\}$. Следует отметить также вложение (которое имеет место и в многомерном случае) $\overset{\circ}{H}{}^s_\gamma(\Omega) \subset L_{2,\gamma+s}(\Omega)$ и эквивалентность полунормы $\|D^s\cdot\|_{L_{2,\gamma}}$ норме пространства $H^s_\gamma(\Omega)$ на подпространствах $\overset{\circ}{H}{}^s_\gamma(\Omega)$ и $\dot{H}^s_\gamma(\Omega)$.

Хорошо известны следующие теоремы вложения (см., например, [12], [13, с. 378], [14, с. 319]).

Теорема 1. (i) *Пусть $k < m$. Для того чтобы пространство $H^m_\alpha(\Omega)$ было непрерывно вложено в $H^k_\beta(\Omega)$, необходимо и достаточно выполнения двух неравенств: $\beta < 1/2$ и $m + \alpha - k - \beta \ge 0$; если последнее неравенство – строгое, то указанное вложение компактно.*

(ii) *Пространство $\overset{\circ}{H}{}^s_\gamma(\Omega)$ непрерывно вложено в $\overset{\circ}{H}{}^{s-k}_{\gamma+k}(\Omega)$ для $k = 1,\ldots,s$.*

(iii) *Для натурального s пространство $H^s_\gamma(\Omega)$ непрерывно (и компактно) вложено в $C(\overline{\Omega})$ тогда и только тогда, когда $s + \gamma - 1/2 > 0$.*

(Утверждение (iii) приводится в теореме с учетом одномерности области Ω).

Для произвольного вещественного μ определим интегральный оператор Харди

$$K_\mu u(x) = x^{\mu-1}\int\limits_0^x y^{-\mu}u(y)dy.$$

Естественной областью определения $\operatorname{dom} K_\mu$ оператора K_μ является множество всех измеримых на Ω функций $u(y)$ таких, что функция $y^{-\mu}u(y)$ интегрируема по Лебегу на интервале $(0,x)$ для каждого $x \in (0,1)$.

Теорема 2 (Формулы дифференцирования оператора Харди). *Пусть* $u \in \operatorname{dom} K_\mu$. *Тогда*

$$xDK_\mu u(x) = u(x) + (\mu-1)K_\mu u(x).$$

Если, кроме того, $Du \in \operatorname{dom} K_{\mu-1}$, *то*

$$DK_\mu u = K_{\mu-1}Du.$$

Доказательство формул имеется в [4].

Теорема 3. (i) *Для того чтобы выполнялось включение* $L_{2,\gamma}(\Omega) \subset \operatorname{dom} K_\mu$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\delta = 1/2 + \gamma - \mu > 0$. *При этом оператор* K_μ *непрерывен в* $L_{2,\gamma}(\Omega)$ *и*

$$\|K_\mu\|_{L_{2,\gamma}\to L_{2,\gamma}} = \frac{1}{\delta}.$$

(ii) *Если* $\mu < \min(1, \gamma + s + 1/2)$, *то* K_μ *непрерывен как оператор из* $H^s_\gamma(\Omega)$ *в* $H^{s+k}_{\gamma-k}(\Omega)$ *для любого целого неотрицательного* k.

Доказательство. Утверждение (i) доказано в [4]. Докажем (ii). Для каждого $j = 0, 1, \ldots, s$ выберем $\gamma_j \in (\mu - j - 1/2, 1/2) \cap (\mu - j - 1/2, s + \gamma - j]$ (такой выбор осуществим в силу условия теоремы). По теореме 1 пространство $H^s_\gamma(\Omega)$ непрерывно вложено в $H^j_{\gamma_j}(\Omega)$, поскольку $\gamma_j < 1/2$ и $\gamma_j \le s + \gamma - j$. Так как $\mu < \gamma_0 + 1/2$, то $H^s_\gamma(\Omega) \subset L_{2,\gamma_0}(\Omega) \subset \operatorname{dom} K_\mu$. Из включения $H^s_\gamma(\Omega) \subset H^1_{\gamma_1}(\Omega)$ и из неравенства $\mu - 1 < \gamma_1 + 1/2$ следует, что для любой функции $u \in H^s_\gamma(\Omega)$ производная Du принадлежит $\operatorname{dom} K_{\mu-1}$, следовательно, справедлива вторая формула дифференцирования: $DK_\mu u = K_{\mu-1}Du$. Рассуждая последовательно, убеждаемся в корректности формул $D^j K_\mu u = K_{\mu-j}D^j u$ $(j = 0, 1, \ldots, s)$ для функций из пространства $H^s_\gamma(\Omega)$ и в непрерывности оператора K_μ в этом пространстве. $\square$

2. Постановка задачи и разрешимость

В интервале $\Omega = (0,1)$ рассматривается неоднородная граничная задача с вырождением в точке $x = 0$:

$$Au \equiv -D(x^\alpha a(x)Du(x)) + x^\alpha b(x)u(x) = f(x) \text{ в } \Omega, \quad u(0) = g, \quad u(1) = 0. \qquad (1)$$

Предполагается, что $a(x) \ge a_0 > 0$, $b(x) \ge 0$ – достаточно гладкие функции, $\alpha \in (-1,1)$ – степень вырождения коэффициентов дифференциального уравнения (регулярной задаче соответствует значение $\alpha = 0$). Мы рассмотрим сначала задачу с $g = 0$. Затем с помощью так называемой *функции продолжения* общий случай $g \ne 0$ сведем к уже рассмотренному с однородными граничными условиями.

2.1. Однородное граничное условие $g = 0$. На пространстве $V = \overset{\circ}{H}{}^1_{-\alpha/2}(\Omega)$ определим, соответственно, билинейную форму и линейный функционал

$$\mathfrak{a}(u,v) = \int\limits_\Omega x^\alpha a(x)\, Du(x)\, Dv(x) + x^\alpha b(x)u(x)v(x)\, dx, \qquad \mathfrak{f}(v) = \int\limits_\Omega f(x)v(x)\, dx.$$

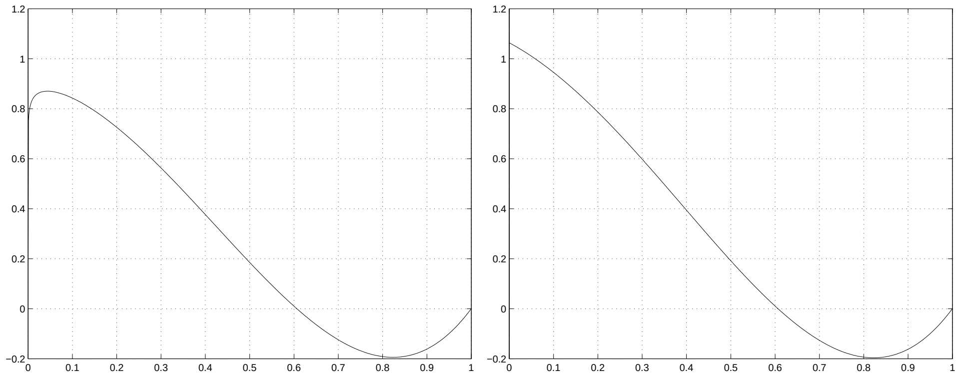

Рис. 1. Характерное поведение решений $u(x)$ задачи (1) (слева) и $\hat{u}(x)$ задачи (4) (справа)

Обобщенная постановка задачи (1) при $g = 0$ состоит в отыскании функции $u \in V$, удовлетворяющей вариационному уравнению

$$\mathfrak{a}(u, v) = \mathfrak{f}(v) \quad \forall v \in V. \tag{2}$$

Из условий на коэффициенты $a(x)$, $b(x)$ и из эквивалентности полунормы $\|D \cdot \|_{L_{2,-\alpha/2}}$ норме пространства $H^1_{-\alpha/2}(\Omega)$ на подпространстве V следует, что энергетическая норма $\|u\|_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}(u, u)^{1/2}$ эквивалентна норме пространства $H^1_{-\alpha/2}(\Omega)$ на V. В силу теоремы Рисса–Фишера вариационное уравнение (2) разрешимо единственным образом для любого линейного непрерывного на V функционала $\mathfrak{f}$. Далее, из вложения $V \subset L_{2,1-\alpha/2}(\Omega)$ (теорема 1) вытекает вложение пространства $L_{2,\alpha/2-1}(\Omega)$ в сопряженное V^*. По теореме 1 при $\gamma + s \geq \alpha/2 - 1$ имеет место включение $H^s_\gamma(\Omega) \subset L_{2,\alpha/2-1}(\Omega)$. Таким образом, нами установлена

Теорема 4. *Если $\gamma \geq \alpha/2 - s - 1$, то решение $u(x)$ задачи (2) из пространства V существует и единственно для любой правой части $f \in H^s_\gamma(\Omega)$.*

Обозначим $\sigma(x) = x^{1-\alpha}$. Символом σ будем обозначать также оператор умножения на функцию σ : $(\sigma\varphi)(x) = \sigma(x)\varphi(x)$.

Лемма 1 [11]. *Оператор умножения на σ является изоморфизмом пространства $\dot{H}^1_{\alpha/2-1}(\Omega)$ на V.*

Из леммы следует, что задача (2) эквивалентна вариационной задаче на $\hat{V} = \dot{H}_{\alpha/2-1}(\Omega)$ об отыскании функции $\hat{u} \in \hat{V}$ такой, что

$$\hat{\mathfrak{a}}(\hat{u}, \hat{v}) = \hat{\mathfrak{f}}(\hat{v}) \quad \forall \hat{v} \in \hat{V}, \tag{3}$$

где $\hat{\mathfrak{a}}(\hat{u}, \hat{v}) = \mathfrak{a}(\sigma\hat{u}, \sigma\hat{v})$, $\hat{\mathfrak{f}}(\hat{v}) = \mathfrak{f}(\sigma\hat{v})$. При этом решения задач (2) и (3) связаны между собой простым соотношением $u(x) = \sigma(x)\hat{u}(x)$.

Смысл перехода от решения исходной задачи (1) (с $g = 0$) к решению задачи

$$\hat{A}\hat{u}(x) \equiv A(\sigma\hat{u})(x) = f(x) \ \text{ в } \Omega, \quad \sigma(x)\hat{u}(x) = 0 \ \text{ при } \ x = 0, 1 \tag{4}$$

состоит в том, что решение исходной задачи при $\alpha > 0$ имеет бесконечную производную в окрестности точки вырождения $x = 0$, в то время как $\hat{u}(x)$ (это будет доказано ниже) является гладкой функцией (рис. 1 наглядно демонстрирует это), и ее гладкость зависит только от гладкости правой части $f(x)$ и коэффициентов $a(x)$, $b(x)$ независимо от степени вырождения α.

Лемма 2. (i) *Для того чтобы ограниченное в* $H^s_\gamma(\Omega)$ *множество* K *было относительно компактным в этом пространстве, необходимо и достаточно, чтобы множество производных порядка* s $\{D^s v : v \in K\}$ *было относительно компактным в* $L_{2,\gamma}(\Omega)$.

(ii) *Для того чтобы линейный непрерывный оператор* L, *действующий из некоторого нормированного пространства* U *в* $H^s_\gamma(\Omega)$ *был компактен, необходимо и достаточно, чтобы был компактным оператор* $D^s L : U \to L_{2,\gamma}(\Omega)$.

Доказательство. Ясно, что эти два утверждения эквивалентны, поэтому достаточно доказать одно из них, например (i).

Необходимость. Поскольку оператор s-кратного дифференцирования D^s является непрерывным оператором из $H^s_\gamma(\Omega)$ в $L_{2,\gamma}(\Omega)$, то он переводит относительно компактное подмножество $K \subset H^s_\gamma(\Omega)$ в относительно компактное $D^s(K) \subset \subset L_{2,\gamma}(\Omega)$.

Достаточность. Из ограниченности K в $H^s_\gamma(\Omega)$ следует ограниченность в $H^s(\delta,1)$ множества K_δ сужений на $(\delta,1)$ функций из K. Так как $H^s(\delta,1)$ компактно вложено в $L_2(\delta,1)$ (здесь мы предполагаем, что $s \geq 1$, поскольку при $s = 0$ ничего доказывать не нужно), то из любой последовательности $u_n \in K$ можно выделить сходящуюся в $L_2(\delta,1)$ подпоследовательность (u_{n_k}) такую, что в $L_{2,\gamma}(\Omega)$ сходится последовательность производных $(D^s u_{n_k})$. Это означает, что подпоследовательность (u_{n_k}) сходится в $H^s_\gamma(\Omega)$. □

Представим оператор $\hat{A}$ в виде $\hat{A} = \hat{A}_0 + B$, где

$$\hat{A}_0 v(x) = -D(x^\alpha a(x) D(\sigma(x) v(x))), \quad Bv(x) = xb(x)v(x).$$

Лемма 3. *Если* $\gamma < 1/2$ *и* $xb \in W^s_\infty(\Omega)$ *(то есть* $|D^s(xb(x))| \leq c = \mathrm{const}$ *почти всюду на* Ω*), то оператор* B *компактен как оператор из пространства* $H^{s+1}_\gamma(\Omega)$ *в* $H^s_\gamma(\Omega)$.

Доказательство. Имеем

$$D^s Bv(x) = \sum_{j=0}^{s} C^j_s D^{s-j}(xb(x)) D^j v(x).$$

Так как пространство $H^{s+1-j}_\gamma(\Omega)$ компактно вложено в $L_{2,\gamma}(\Omega)$ (теорема 1), то для каждого $j = 0, 1, \ldots, s$ оператор $D^j : H^{s+1}(\Omega) \to L_{2,\gamma}(\Omega)$ компактен. Поскольку все производные $D^k(xb(x))$, $k = 0, 1, \ldots, s$, ограничены, то из равенства, приведенного выше, следует компактность оператора $D^s B : H^{s+1}_\gamma(\Omega) \to L_{2,\gamma}(\Omega)$, откуда согласно лемме 2 вытекает компактность оператора B из пространства $H^{s+1}_\gamma(\Omega)$ в $H^s_\gamma(\Omega)$. □

Замечание. Очевидно, что условие $xb \in W^s_\infty(\Omega)$ леммы будет выполнено, если $|D^s b(x)| \leq c_1/x$ и $|D^{s-1} b(x)| \leq c_2$.

Следующая теорема является основной в этом пункте и для $s = 0$ доказана в [4] в случае многомерной области Ω.

Теорема 5. *Пусть* $\alpha - s - 3/2 < \gamma < 1/2$, $a \in W^{s+1}_\infty(\Omega)$, $xb \in W^s_\infty(\Omega)$. *Тогда оператор* $\hat{A}$ *в левой части дифференциального уравнения* (4) *является изоморфизмом пространства* $H^{s+2}_{\gamma-1}(\Omega) \cap \dot{H}^1_\gamma(\Omega)$ *на* $H^s_\gamma(\Omega)$. *При этом для решения* $\hat{u}$ *задачи* (4) *выполняется граничное условие* $x^{2-\alpha} D\hat{u}(x)|_{x=0} = 0$.

Доказательство. Непосредственным дифференцированием легко проверяется, что операторы $\hat{A}_0$, B и $\hat{A}=\hat{A}_0+B$ при сделанных предположениях относительно коэффициентов $a(x)$ и $b(x)$ непрерывны из $H^{s+2}_{\gamma-1}(\Omega)$ в $H^s_\gamma(\Omega)$. Мы покажем, что оператор $\hat{A}_0$ является изоморфизмом пространства $H^{s+2}_{\gamma-1}(\Omega)\cap\dot{H}^1_\gamma(\Omega)$ на $H^s_\gamma(\Omega)$. Тогда, в силу компактности оператора $B: H^{s+2}_{\gamma-1}(\Omega)\subset H^{s+1}_\gamma(\Omega)\to H^s_\gamma(\Omega)$ (лемма 3), отсюда будет следовать, что оператор $\hat{A}=\hat{A}_0+B$ *фредгольмов*, то есть размерность его ядра и коразмерность области значений конечны и равны между собой. Но поскольку по теореме 4 решение задачи (4) с нулевой правой частью только тривиальное, то отсюда будет следовать, что и оператор $\hat{A}$ также является изоморфизмом пространства $H^{s+2}_{\gamma-1}(\Omega)\cap\dot{H}^1_\gamma(\Omega)$ на $H^s_\gamma(\Omega)$. Итак, нужно показать только, что оператор $\hat{A}_0$ является изоморфизмом пространства $H^{s+2}_{\gamma-1}(\Omega)\cap\dot{H}^1_\gamma(\Omega)$ на $H^s_\gamma(\Omega)$.

Пусть $f\in H^s_\gamma(\Omega)$. Интегрируя уравнение (1) с $b(x)\equiv 0$ по интервалу $(x,1)$, получим

$$x^\alpha Du(x)=f_1(x),$$

где

$$f_1(x)=\left(c_0+\int\limits_x^1 f(y)\,dy\right)a(x),\quad c_0=x^\alpha a(x)Du(x)|_{x=1}=a(1)Du(1).$$

Из условия $a\in W^{s+1}_\infty(\Omega)$ и $a(x)\ge a_0>0$ следует, что $f_1\in H^{s+1}_\gamma(\Omega)$. Поделив на x^α и интегрируя по интервалу $(0,x)$ с учетом условия $u(0)=0$, будем иметь

$$u(x)=\int\limits_0^x x^{-\alpha}f_1(x)\,dx\quad\text{или}\quad \hat{u}(x)=x^{\alpha-1}u(x)=K_\alpha f_1(x).$$

Поскольку $\alpha<\min(1,\gamma+s+1+1/2)$, то согласно теореме 3 оператор Харди $K_\alpha: H^{s+2}_{\gamma-1}(\Omega)\to H^s_\gamma(\Omega)$ непрерывен, следовательно, $\|\hat{u}\|_{H^{s+2}_{\gamma-1}}\le c_1\|f_1\|_{H^{s+1}_\gamma}\le$ $\le c_2(|c_0|+\|f\|_{H^s_\gamma})$. Постоянная c_0 в $f_1(x)$ вычисляется из условия $u(1)=0$:

$$c_0=c_0(f)=-\left(\int\limits_0^1\frac{1}{x^\alpha a(x)}\,dx\right)^{-1}\int\limits_0^1\frac{1}{x^\alpha a(x)}\int\limits_x^1 f(y)\,dydx,$$

откуда вытекает, что $|c_0(f)|\le c_3\|f\|_{H^s_\gamma}$. Окончательно имеем $\|\hat{u}\|_{H^{s+2}_{\gamma-1}}\le c_4\|f\|_{H^s_\gamma}$. Из этой оценки и из единственности решения (теорема 4) следует, что оператор $\hat{A}_0$ есть изоморфизм пространства $H^{s+2}_{\gamma-1}(\Omega)\cap\dot{H}^1_\gamma(\Omega)$ на $H^s_\gamma(\Omega)$.

Наконец, из второй формулы дифференцирования оператора Харди получим

$$x^{2-\alpha}D\hat{u}(x)=x^{2-\alpha}K_{\alpha-1}Df_1(x)=\int\limits_0^x Df_1(y)\,dy\to 0\quad\text{при } x\to 0,$$

так как $Df_1\in H^s_\gamma(\Omega)\subset \mathrm{dom}\,K_{\alpha-1}$ в силу теоремы 3. □

Следствие. *Если коэффициенты $a(x)$, $b(x)$ и правая часть $f(x)$ – функции класса $C^\infty(\overline{\Omega})$, то и решение задачи (4) $\hat{u}(x)$ является функцией из $C^\infty(\overline{\Omega})$.*

2.2. Общий случай $g \neq 0$. Функция продолжения.

Определение. Функция $\varphi(x)$ называется функцией продолжения для класса правых частей $H^s_\gamma(\Omega)$ задачи (1), если $A\varphi(x)$ принадлежит пространству $H^s_\gamma(\Omega)$ и выполнены граничные условия $\varphi(0)=1$, $\varphi(1)=0$.

Приведем один из способов построения функции продолжения в предположении, что производные порядка $s+1$ коэффициентов $a(x)$ и $b(x)$ ограничены. Фиксируем $\delta \in (0,1)$. На отрезке $[0,\delta]$ будем искать $\varphi(x)$ как решение задачи Коши

$$\tilde{A}\varphi \equiv -D(x^\alpha T_a(x) D\varphi(x)) + x^\alpha T_b(x)\varphi(x) = \sum_{i=s+1}^{2s+2} c_i x^{i+\alpha}, \quad x \in (0,\delta), \tag{5}$$

$$\varphi(0)=1, \quad x^\alpha D\varphi(x)|_{x=0}=0, \tag{6}$$

где $T_a(x)=\sum\limits_{i=0}^{s} a_i x^i$, $T_b(x)=\sum\limits_{i=0}^{s} b_i x^i$ – многочлены Тейлора степени s функций $a(x)$ и $b(x)$. Коэффициенты c_j подберем таким образом, чтобы решение задачи (5), (6) было представимо в виде суммы $\sum\limits_{k=0}^{s+2}\varphi_k x^k$. Подставим это представление в уравнение (5) и соберем слагаемые при одинаковых степенях x:

$$-\sum_{j=1}^{2s+1}(j+\alpha)x^{j+\alpha-1}\sum_{i+k=j}(k+1)a_i\varphi_{k+1} + \sum_{j=0}^{2s+2}x^{j+\alpha}\sum_{i+k=j}b_i\varphi_k = \sum_{i=s+1}^{2s+2}c_i x^{i+\alpha}.$$

Заменив в первой сумме j на $j+1$, перепишем последнее равенство в виде

$$-\sum_{j=0}^{2s}(j+1+\alpha)x^{j+\alpha}\sum_{i+k=j+1}(k+1)a_i\varphi_{k+1} + \sum_{j=0}^{2s+2}x^{j+\alpha}\sum_{i+k=j}b_i\varphi_k = \sum_{i=s+1}^{2s+2}c_i x^{i+\alpha}.$$

Из последнего равенства, учитывая начальные условия (6), получим рекуррентные соотношения, которым удовлетворяют φ_k и c_j:

$$\varphi_0 = 1, \quad \varphi_1 = 0,$$

$$\varphi_{j+2} = \frac{\sum\limits_{i+k=j} b_i\varphi_k - (j+1+\alpha)\times \sum\limits_{i+k=j+1,\, i>0}(k+1)a_i\varphi_{k+1}}{a_0(j+1)(j+1+\alpha)}, \quad j=0,1,\ldots,s.$$

$$c_j = -(j+1+\alpha)\sum_{i+k=j+1}(k+1)a_i\varphi_{k+1} + \sum_{i+k=j}b_i\varphi_k, \quad j=s+1,s+2,\ldots,2s,$$

$$c_j = \sum_{i+k=j}b_i\varphi_k, \quad j=2s+1,2s+2.$$

Итак, на отрезке $[0,\delta]$ функция $\varphi(x)$ есть полином степени $s+2$, удовлетворяющий дифференциальному уравнению (5). На отрезок $[\delta,1]$ для заданного наперед натурального $k \geq s+2$ функцию $\varphi(x)$ можно продолжить произвольной функцией из $C^k[\delta,1]$ с соблюдением следующих условий: $\varphi(1)=0$, $D^j\varphi(\delta-0)=D^j\varphi(\delta+0)$ для $j=0,1,\ldots,k$. Например, в качестве $\varphi(x)$ на $[\delta,1]$ можно взять полином Эрмита степени $k+1$, удовлетворяющий указанным условиям. Тогда кусочно-полиномиальная функция $\varphi(x)$ будет принадлежать пространству $C^k[0,1]$.

Покажем, что $\varphi(x)$ является функцией продолжения для класса H^s_γ. Установим предварительно справедливость следующей простой леммы.

Лемма 4. *Пусть некоторая функция $p(x)$ имеет ограниченную производную порядка $s+1$ и $D^j p(0)=0$, $j=0,1,\dots,s$. Тогда справедливы оценки*

$$|D^j p(x)| \le \frac{c}{(s+1-j)!} x^{s+1-j}, \quad j=0,1,\dots,s.$$

Доказательство. По условию $|D^{s+1}p(x)| \le c$. Проинтегрируем функцию $D^{s+1}p(x)$ по отрезку $[0,x]$. Так как $D^s p(0)=0$, то

$$|D^s p(x)| \le \int\limits_0^x |D^{s+1}p(x)|\,dx \le cx.$$

Повторяя эти рассуждения для $D^s p(x)$, получим $|D^{s-1}p(x)| \le \dfrac{c}{2}x^2$ и т. д. □

Теорема 6. *Пусть $a(x)$ и $b(x)$ имеют ограниченные производные порядка $s+1$, $\gamma < 1/2$. Тогда построенная выше функция $\varphi(x)$ является функцией продолжения для класса правых частей $H^s_\gamma(\Omega)$ задачи (1).*

Доказательство. Так как на отрезке $[\delta,1]$ коэффициенты оператора A являются регулярными (не имеют особенностей), а $\varphi \in C^{s+2}[\delta,1]$, то достаточно убедиться, что $A\varphi \in H^s_\gamma(0,\delta)$. Запишем $a(x)$ и $b(x)$ в виде

$$a(x) = T_a(x) + \bar a(x), \quad b(x) = T_b(x) + \bar b(x),$$

где $T_a(x)$, $T_b(x)$ – полиномы Тейлора степени s, $\bar a(x)$ и $\bar b(x)$ – остаточные члены. Оба они принадлежат $C^s(\bar\Omega)$, производные этих функций порядка $s+1$ ограничены и $D^j\bar a(0) = D^j\bar b(0) = 0$ для $j=0,1,\dots,s$. Тогда по лемме 4 для производных порядка $j=0,1,\dots,s$ справедливы оценки $|D^j\bar a(x)| \le cx^{s+1-j}$, $|D^j\bar b(x)| \le cx^{s+1-j}$, откуда (с другими константами c)

$$|D^j(x^\alpha \bar a(x))| \le cx^{s+\alpha+1-j}, \quad |D^j(x^\alpha \bar b(x))| \le cx^{s+\alpha+1-j}, \quad j=0,1,\dots,s. \qquad (7)$$

Имеем $A\varphi(x) = \tilde A\varphi(x) + \bar A\varphi(x)$, где

$$\bar A\varphi(x) = -D(x^\alpha \bar a(x) D\varphi(x)) + x^\alpha \bar b(x)\varphi(x).$$

$\tilde A\varphi \in H^s_\gamma(0,\delta)$ по построению, так как $D^s\tilde A\varphi \sim x^{1+\alpha} \in L_{2,\gamma}(0,\delta)$ при $\gamma < 1/2$ (напомним, что $\alpha \in (-1,1)$). Из оценок (7) следует, что $D^s(x^\alpha\bar b(x)\varphi(x)) \sim x^{1+\alpha} \in$ $\in L_{2,\gamma}(0,\delta)$. Наконец, учитывая, что $\varphi_1 = 0$ и $\psi(x) \equiv D\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{s+1}(k+1)\varphi_{k+1}x^k$, опять из (7) получим $D^{s+1}(x^\alpha\bar a(x)\psi(x)) \sim x^{1+\alpha} \in L_{2,\gamma}(0,\delta)$. Таким образом, функция $\bar A\varphi(x)$ принадлежит пространству $H^s_\gamma(0,\delta)$. Теорема доказана. □

Теорема 7. *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы, $\varphi(x)$ – функция продолжения для класса правых частей $H^s_\gamma(\Omega)$ задачи (1). Тогда если $\alpha - s - 3/2 < \gamma < 1/2$, то для любой правой части $f \in H^s_\gamma(\Omega)$ решение задачи (1) существует, единственно и представимо в виде*

$$u(x) = g\varphi(x) + x^{1-\alpha}\hat u(x),$$

где $\hat u \in H^{s+2}_{\gamma-1}(\Omega) \cap \dot H^1_\gamma(\Omega)$, $\|\hat u\|_{H^{s+2}_{\gamma-1}} \le c(\|f\|_{H^s_\gamma} + |g|)$.

Доказательство. Положим $\tilde{f}(x) = f(x) - gA\varphi(x)$ и обозначим через $\tilde{u}(x)$ решение краевой задачи

$$A\tilde{u}(x) = \tilde{f}(x) \text{ в } \Omega, \quad \tilde{u}(0) = 0,\ \tilde{u}(1) = 0.$$

Так как $\tilde{f} \in H^s_\gamma(\Omega)$, то по теореме 5 решение этой задачи существует, единственно и представимо в виде $\tilde{u}(x) = \sigma(x)\hat{u}(x)$, где $\hat{u} \in H^{s+2}_{\gamma-1}(\Omega) \cap \dot{H}^1_\gamma(\Omega)$. При этом для $\hat{u}(x)$ имеет место априорная оценка

$$\|\hat{u}\|_{H^{s+2}_{\gamma-1}} \le c_1\|\tilde{f}\|_{H^s_\gamma} \le c_1(\|\tilde{f}\|_{H^s_\gamma} + |g|\ \|A\varphi\|_{H^s_\gamma}).$$

Осталось заметить, что $u(x) = g\varphi(x) + \tilde{u}(x)$ – решение граничной задачи (1) по построению. □

3. Аппроксимация задачи конечными элементами

Пусть на $[0,1]$ задан набор точек $x_0 = 0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$, образующих разбиение $\mathcal{T}_h = \{e_k\}_{k=1}^n$ отрезка $[0,1]$ на конечные элементы $e_k = [x_{k-1}, x_k]$. Здесь $h = \max\limits_k h_k,\ h_k = x_k - x_{k-1},\ k = 1,\ldots,n$. Предполагается, существование постоянной $\mu > 0$, не зависящей от h, что

$$h_{k+1} \le \mu h_k \quad \forall k = 1,\ldots,n-1; \tag{8}$$

в частности, это выполнено для квазиравномерного разбиения. Из этого условия вытекает, что $x_k = x_{k-1} + h_k \le x_{k-1} + \mu h_{k-1} \le (1+\mu)x_{k-1}$ для $k = 2,\ldots,n$. Положим $c(\gamma) = \max(1,(1+\mu)^{-\gamma})$ для вещественного γ. Тогда

$$x_k^\gamma \le c(-\gamma)\min_{x\in e_k} x^\gamma, \quad \max_{x\in e_k} x^\gamma \le c(\gamma)x_k^\gamma \quad \forall k = 2,\ldots,n. \tag{9}$$

Для натурального m обозначим через $S^m(\mathcal{T}_h) \equiv S^m_h$ *пространство конечных элементов*, состоящее из функций $v \in C[0,1]$ таких, что сужение $v(x)$ на любой конечный элемент $e_k \in \mathcal{T}_h$ является полиномом степени m.

3.1. Оценки погрешности интерполяции в весовых нормах Соболева. На базисном конечном элементе $\hat{e} = [0,1]$ зафиксируем два набора узлов, занумерованных по возрастанию: $\hat{\omega}_1 = \{t_{1i} : i = 0,1,\ldots,m\} \subset (0,1]$ и $\hat{\omega}_2 = \{t_{2i} : i = 0,1,\ldots,m\} \subset [0,1]$, причем $t_{20} = 0,\ t_{1m} = t_{2m} = 1$. Пусть $\{\hat{\varphi}_{pi} : i = 0,1,\ldots,m\}$ – базисные функции Лагранжа для узлов $\hat{\omega}_p,\ p = 1,2$, то есть это полиномы степени m, удовлетворяющие условиям $\hat{\varphi}_{pi}(t_{pj}) = \delta_{ij}$ для всех $i,j = 0,1,\ldots,m$. Для функций, непрерывных в окрестности точек $\hat{\omega}_p$, определим оператор интерполяции в пространство полиномов $P_m(\hat{e})$ формулой

$$\hat{\pi}_p\hat{u}(t) = \sum_{i=0}^m \hat{u}(t_{pi})\varphi_{pi}(t).$$

Хорошо известны оценки погрешности полиномиальной интерполяции в нормах пространств Соболева для функций $\hat{u} \in H^{m+1}(\hat{e})$:

$$\|D^s(\hat{u} - \hat{\pi}_p\hat{u})\|_{L_2(\hat{e})} \le \hat{c}\|D^{m+1}\hat{u}\|_{L_2(\hat{e})}, \quad s = 0,1,\ldots,m+1. \tag{10}$$

Постоянная $\hat{c}$ зависит здесь только от m, s и от выбора сетки $\hat{\omega}_p$. Этот результат обобщается на весовые нормы.

Лемма 5. *Пусть выполнены следующие условия:* 1) $s \le m+1$, 2) $m+1+\beta-$ $-s-\alpha \ge 0$, 3) $\alpha < 1/2$. *Тогда существует такая постоянная* $\hat{c} > 0$, *что для любой функции* $\hat{u} \in H_\beta^{m+1}(\hat{e})$ *справедлива оценка*

$$\|D^s(\hat{u} - \hat{\pi}_1 \hat{u})\|_{L_{2,\alpha}(\hat{e})} \le \hat{c} \|D^{m+1}\hat{u}\|_{L_{2,\beta}(\hat{e})}. \tag{11}$$

Доказательство. Поскольку $H_\beta^{m+1}(\hat{e}) \subset C(0,1]$ и $t_{10} > 0$, то оператор интерполирования $\hat{\pi}_1 : H_\beta^{m+1}(\hat{e}) \to P_m(\hat{e})$ непрерывен. Условия леммы согласно теореме 1 обеспечивают непрерывность вложения $H_\beta^{m+1}(\hat{e}) \subset H_\alpha^s(\hat{e})$, то есть непрерывность тождественного оператора $\hat{I} : H_\beta^{m+1}(\hat{e}) \to H_\alpha^s(\hat{e})$. Наконец, из последнего условия леммы следует включение $P_m(\hat{e}) \subset H_\alpha^s(\hat{e})$. Таким образом, линейный оператор $L = \hat{I} - \hat{\pi}_1 : H_\beta^{m+1}(\hat{e}) \to H_\alpha^s(\hat{e})$ непрерывен. Учитывая, что $L\psi = 0$ для любого полинома $\psi \in P_m(\hat{e})$, получим

$$\|D^s(\hat{u} - \hat{\pi}_1 \hat{u})\|_{L_{2,\alpha}(\hat{e})} = \|D^s L(\hat{u} - \psi)\|_{L_{2,\alpha}(\hat{e})} \le c_1 \|\hat{u} - \psi\|_{H_\beta^{m+1}(\hat{e})} \le$$
$$\le c_2 (\|D^{m+1}\hat{u}\|_{L_{2,\beta}(\hat{e})} + \sum_{j=0}^{m} |D^j \hat{u}(1) - D^j \psi(1)|) \quad \forall \psi \in P_m(\hat{e}).$$

Выбрав здесь $\psi \in P_m(\hat{e})$ из условий $D^j\psi(1) = D^j\hat{u}(1)$ для $j = 0, 1, \ldots, m$, получим требуемую оценку. □

Замечание. Если $H_\beta^{m+1}(\hat{e}) \subset C[0,1]$ (что равносильно условию $m + 1/2 + \beta >$ > 0), то лемма останется справедливой, если вместо $\hat{\pi}_1$ взять $\hat{\pi}_2$.

Для каждого конечного элемента e_k функция $\Phi_k(t) = h_k t + x_{k-1}$ отображает базисный конечный элемент $\hat{e}$ на e_k. Положим $\omega_1 = \Phi_1(\hat{\omega}_1) = \{x_{1i} : i =$ $= 0, 1, \ldots, m\} \subset (0, h_1]$ и $\omega_k = \Phi_k(\hat{\omega}_2) = \{x_{ki} : i = 0, 1, \ldots, m\} \subset e_k$ для $k \ge 2$. Тогда функции $\varphi_{1i}(x) = \hat{\varphi}_{1i}(\Phi_1^{-1}(x))$, $i = 0, 1, \ldots, m$, образуют базис Лагранжа на элементе e_1 так же, как и функции $\varphi_{ki}(x) = \hat{\varphi}_{2i}(\Phi_k^{-1}(x))$, $i = 0, 1, \ldots, m$, образуют базис Лагранжа на элементе e_k для $k \ge 2$.

Для функций, непрерывных на полуинтервале $(0,1]$, можем определить локальные операторы интерполяции $\pi_k : C(0,1] \to P_m(e_k)$, полагая

$$\pi_k u(x) = \sum_{i=0}^{m} u(x_{ki}) \varphi_{ki}(x).$$

При этом для $\hat{u}(t) = u(\Phi_k(t))$ справедливы тождества $\hat{\pi}_1 \hat{u}(t) = (\pi_1 u)(\Phi_1(t))$ и $\hat{\pi}_2 \hat{u}(t) = (\pi_k u)(\Phi_k(t))$ $(k \ge 2)$. Так как на стыках конечных элементов x_k, $k =$ $= 1, \ldots, n-1$, имеет место равенство $\varphi_{km}(x_k) = \varphi_{k+1,0}(x_k) = 1$, то $\pi_k u(x_k - 0) =$ $= \pi_{k+1} u(x_k + 0) = u(x_k)$. Поэтому формулой

$$\Pi_h u|_{e_k} = \pi_k u \quad \forall k = 1, \ldots, n$$

корректно определяется оператор кусочно-полиномиальной интерполяции Π_h : $C(0,1] \to S_h^m$ во всех точках отрезка $[0,1]$.

Теорема 8. *Если* $\alpha < 1/2$ *и* $m + \beta - \alpha > 0$, *то для для любой функции* $u \in H_\beta^{m+1}(\Omega)$ *справедливы оценки*

$$\|D^s(u - \pi_k u)\|_{L_{2,\alpha}(e_k)} \le \; c_1 h_k^{m+1-s} x_k^{\beta-\alpha} \|D^{m+1}u\|_{L_{2,\beta}(e_k)}, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{12}$$

$$\|D^s(u - \Pi_h u)\|_{L_{2,\alpha}(\Omega)} \le \; c_2 h^\theta \|D^{m+1}u\|_{L_{2,\beta}(\Omega)}, \tag{13}$$

где $s = 0, 1$ *и* $\theta = \min(m+1-s, m+1+\beta-\alpha-s)$.

Доказательство. Используя замену переменных $x = \Phi_1(t)$, лемму 5 и затем обратную замену, получим локальную оценку погрешности интерполяции на конечном элементе e_1:

$$\|D^s(u-\pi_1 u)\|^2_{L_{2,\alpha}(e_1)} = h_1^{1-2(s+\alpha)}\|D^s(\hat{u}-\hat{\pi}_1\hat{u})\|^2_{L_{2,\alpha}(\hat{e})} \leq$$
$$\leq c_1 h_1^{1-2(s+\alpha)}\|D^{m+1}\hat{u}\|^2_{L_{2,\beta}(\hat{e})} = c_1 h_1^{2(m+1-s)} x_1^{2(\beta-\alpha)}\|D^{m+1}u\|^2_{L_{2,\beta}(e_1)}.$$

Для $k \geq 2$ также используем замену переменных $x = \Phi_k(t)$ и оценки (9), (10). Тогда

$$\|D^s(u-\pi_k u)\|^2_{L_{2,\alpha}(e_k)} \leq c(-2\alpha)x_k^{-2\alpha}\|D^s(u-\pi_k u)\|^2_{L_2(e_k)} \leq$$
$$\leq c_2 h_k^{2(m+1-s)} x_k^{-2\alpha}\|D^{m+1}u\|^2_{L_2(e_k)} \leq c_2 h_k^{2(m+1-s)} x_k^{2\beta-2\alpha} c(2\beta)\|D^{m+1}u\|^2_{L_{2,\beta}(e_k)}.$$

Пусть $\theta = \min(m+1-s, m+1+\beta-\alpha-s)$. Поскольку $h_k \leq x_k \leq 1$, то $h_k^{m+1-s}x_k^{\beta-\alpha} \leq \leq h_k^\theta \leq h^\theta$. Из полученных выше оценок следует, что

$$\|D^s(u-\Pi_h u)\|^2_{L_{2,\alpha}(e_k)} = \|D^s(u-\pi_k u)\|^2_{L_{2,\alpha}(e_k)} \leq\ c_2 h^{2\theta}\|D^{m+1}u\|^2_{L_{2,\beta}(e_k)}.$$

Суммируя эти неравенства по $k = 1,\dots,n$, получим глобальную оценку погрешности (13). □

3.2. Схемы метода конечных элементов с мультипликативным выделением особенности. Пусть $\alpha/2 - m < \gamma < 1/2$, $f \in H^{m-1}_\gamma(\Omega)$, $a, b \in W^m_\infty(\Omega)$. Поскольку $1/2 > \gamma > \alpha/2 - m > \alpha - (m-1) - 3/2$, то в силу теоремы 7 решение краевой задачи (1) можно записать в виде $u(x) = g\varphi(x) + \sigma(x)\hat{u}(x)$, где $\varphi(x)$ – функция продолжения для класса $H^{m-1}_\gamma(\Omega)$, а функция $\hat{u}(x)$ является решением вариационной задачи

$$\mathfrak{a}(\sigma\hat{u},\sigma\hat{v}) = \int\limits_\Omega \sigma(x)f(x)\hat{v}(x)\,dx - g\mathfrak{a}(\varphi,\sigma\hat{v}) \quad \forall \hat{v} \in \hat{V}$$

и имеет место оценка $\|\hat{u}\|_{H^{m+1}_{\gamma-1}} \leq c(\|f\|_{H^{m-1}_\gamma} + |g|)$. В качестве приближенного решения задачи (1) возьмем функцию $u_h(x) = g\varphi(x) + \sigma(x)\hat{u}_h(x)$, где $\hat{u}_h \in \hat{V}_h = \{S^m_h : \hat{v}(1) = 0\}$ есть решение задачи

$$\mathfrak{a}(\sigma\hat{u}_h,\sigma\hat{v}) = \int\limits_\Omega \sigma(x)f(x)\hat{v}(x)dx - g\mathfrak{a}(\varphi,\sigma\hat{v}) \quad \forall \hat{v} \in \hat{V}_h. \tag{14}$$

Теорема 9. *Пусть* $\alpha/2 - m < \gamma < 1/2$, $a, b \in W^m_\infty(\Omega)$. *Тогда для* $f \in H^{m-1}_\gamma(\Omega)$ *справедливы оценки погрешности*

$$\|u-u_h\|_{H^1_{-\alpha/2}} \sim \|u-u_h\|_\mathfrak{a} = \|\hat{u}-\hat{u}_h\|_{\hat{\mathfrak{a}}} \sim \|\hat{u}-\hat{u}_h\|_{H^1_{\alpha/2}} \leq ch^\theta(\|f\|_{H^{m-1}_\gamma} + |g|),$$

где $\theta = \min(m, m+\gamma-\alpha/2)$.

Доказательство. Доказательства требует только последнее неравенство. Из леммы Сеа [16, с. 109] и из оценки (13) получим

$$\|\hat{u}-\hat{u}_h\|_{H^1_{\alpha/2}} \leq c_1\|\hat{u}-\Pi_h\hat{u}\|_{H^1_{\alpha/2}} \leq c_2 h^\theta\|D^{m+1}\hat{u}\|_{L_{2,\gamma-1}} \leq c_3 h^\theta\|f\|_{H^{m-1}_\gamma}.$$

□

Следствие 1. *Если* $a, b \in W_\infty^m(\Omega)$ *и* $f \in W_\infty^{m-1}(\Omega)$, *то для схем* (14) *имеют место оценки погрешности*

$$\|u - u_h\|_{H^1_{-\alpha/2}} \sim \|u - u_h\|_{\mathfrak{a}} = \|\hat{u} - \hat{u}_h\|_{\hat{\mathfrak{a}}} \sim \|\hat{u} - \hat{u}_h\|_{H^1_{\alpha/2}} \le ch^m(\|f\|_{W_\infty^{m-1}} + |g|).$$

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы, поскольку при $\alpha < 1$ справедливо вложение $W_\infty^{m-1}(\Omega) \subset H_{\alpha/2}^{m-1}(\Omega)$.

4. Численные эксперименты

Через u обозначим точное решение задачи, через u_n – приближенное конечноэлементное решение на сетке с n элементами. Если p – порядок сходимости метода относительно некоторой нормы $\|\cdot\|$, то есть $\|u_n - u\| \le Cn^{-p}$, то из неравенства треугольника получается оценка $n^p\|u_n - u_{2n}\| \le C(1+2^{-p}) \equiv \text{const}$. Можно доказать и обратное: если для некоторого p величины $n^p\|u_n - u_{2n}\|$ ограничены при $n \to \infty$, то в рассматриваемой норме метод сходится с порядком p, то есть существует такая постоянная C, что $\|u_n - u\| \le Cn^{-p}$. Это позволяет численно подтверждать установленный теоретически порядок сходимости метода.

Табл. 1

$m \setminus \alpha$	-0.9	-0.5	-0.1	0	0.1	0.5	0.9
1	0.63	0.29	0.26	0.26	0.26	0.26	0.27
2	0.18	0.09	0.09	0.09	0.10	0.12	0.14
3	0.86	0.86	0.98	1.02	1.07	1.34	1.66

Для задачи (1) был проведен ряд численных экспериментов, результаты которых подтверждают теоретические оценки в теореме 9 и в следствии 1. В частности, для степени полиномов на конечном элементе $m = 1, 2, 3$ вычислялись величины $n^m\|u_n - u_{2n}\|_a$, которые практически не менялись с ростом n. В табл. 1 приводятся результаты вычислений для $a(x) = 1 + 2x + 3x^2$, $b(x) = 1 + 4x^2 + 5x^3$, $f(x) = \cos x$, $g = 2$ на сетках с числом элементов $n = 16, 32, 64, 128, 256, 512$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 06-01-0063).

Summary

S.I. Tayupov, M.R. Timerbaev. Finite element schemes of a high accuracy order for two-pointed heterogeneous boundary-value problem with degeneration.

The purpose of the paper is construction of a finite element schemes with a high approximation order for two-pointed heterogeneous boundary-value problem with degenerated coefficients, based on a multiplicative allocation of singularities. It is proved, that this method has optimal order of convergence rate.

Литература

1. *Смирнов М.М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. – М.: Наука, 1966. – 292 с.

2. *Лизоркин П.И., Никольский С.М.* Эллиптические уравнения с вырождением. Дифференциальные свойства // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 257, № 2. – С. 278–282.

3. *Кыдыралиев С.К.* О повышении гладкости решений вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25, № 3. – С. 529–531.

4. *Тимербаев М.Р.* Весовые оценки решения задачи Дирихле с анизотропным вырождением на части границы // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 1. – С. 60–73.

5. *Гусман Ю.А., Оганесян Л.А.* Оценки сходимости конечно-разностных схем для вырожденных эллиптических уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1965. – Т. 5, № 2. – С. 351–357.

6. *Рукавишникова Е.И.* О порядке сходимости метода конечных элементов для эллиптической краевой задачи с вырождением. – Владивосток: ДВО АН СССР, 1987. – С. 26–52.

7. *Ляшко А.Д., Тимербаев М.Р.* Оценки точности схем МКЭ для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, № 7. – С. 1210–1215.

8. *Тимербаев М.Р., Ляшко А.Д.* Об оценках погрешности схем МКЭ для квазилинейных вырождающихся уравнений 2-го порядка // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 7. – С. 1239–1243.

9. *Тимербаев М.Р.* Конечноэлементная аппроксимация вырождающегося эллиптического уравнения 2-го порядка в области с криволинейной границей // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 9. – С. 78–86.

10. *Карчевский М.М., Ляшко А.Д., Тимербаев М.Р.* Метод конечных элементов для квазилинейных вырождающихся уравнений 4-го порядка // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 2. – С. 232–237.

11. *Тимербаев М.Р.* Мультипликативное выделение особенности в схемах МКЭ для эллиптических вырождающихся уравнений // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 7. – С. 1086–1093.

12. *Кудрявцев Л.Д.* Об эквивалентных нормах в весовых пространствах // Тр. МИАН им. Стеклова. – 1984. – Т. 170, Ч. 10. – С. 161–190.

13. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.

14. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980. – 664 с.

15. *Тимербаев М.Р.* О непрерывности интегральных операторов в пространствах вектор-функций // Исследования по прикладной математике и информатике. – Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва, 2001. – Вып. 23. – С. 118–121.

16. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980. – 512 с.

Поступила в редакцию
12.10.06

Тимербаев Марат Равилевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета.

E-mail: *marat.timerbaev@ksu.ru*

Таюпов Шамиль Ильдусович – аспирант кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета.