УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2020, Т. 162, кн. 3 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 359–366 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 519.718.7 doi: 10.26907/2541-7746.2020.3.359-366

О ЕДИНИЧНЫХ ПРОВЕРЯЮЩИХ ТЕСТАХ ОТНОСИТЕЛЬНО ЗАМЕН ЭЛЕМЕНТОВ НА ИНВЕРТОРЫ

Г.Г. Темербекова, Д.С. Романов

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва, 119991, Россия

Аннотация

В статье рассмотрены вопросы проверяющего тестирования булевых функций, реализуемых схемами из функциональных элементов (СФЭ), на которые действует источник одиночных неисправностей, вызывающий замены функциональных элементов на инверторы. Актуальность исследования определена тем, что замены функциональных элементов на инверторы представляют собой тип неисправности, встречающийся при разработке и производстве СБИС. Исследование проведено с целью доказать возможность построения легкотестируемых схем относительно замен элементов на инверторы. Для достижения поставленной цели разработаны специальные методы синтеза легкотестируемых схем. На основе результатов исследования сделаны следующие выводы. Для произвольной булевой функции, реализуемой с помощью СФЭ над базисом Жегалкина, найдется схема, допускающая единичный проверяющий тест из одного набора. Для произвольной булевой функции, реализуемой с помощью СФЭ над стандартным базисом, найдется схема, допускающая единичный проверяющий тест из двух наборов.

Ключевые слова: схема из функциональных элементов, проверяющий тест, функция Шеннона, замены элементов

1. Введение и основные определения

В настоящей статье изучается специальная задача тестирования схем из функциональных элементов (СФЭ) с одним выходом, реализующих произвольные булевы функции. Пусть имеется СФЭ S, реализующая булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Пусть на S мог воздействовать источник неисправностей U так, что один или несколько элементов схемы S перешли в неисправные состояния. Тогда неисправная схема вместо исходной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ реализует некоторую, возможно, отличную от f, булеву функцию $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Полученная функция $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется функцией неисправности схемы S.

Все определения, не упомянутые в этой работе, можно найти в книге [1]. Введём следующие определения. *Проверяющим* тестом для схемы S называется всякое такое множество T наборов значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что для любой неравной $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функции неисправности схемы S в множестве T найдётся набор α, на котором $f(\alpha) \neq g(\alpha)$. Тест называется *единичным*, если неисправным может быть только один элемент схемы. *Нетривиальной* будем называть неисправность СФЭ, при которой хотя бы на одном входном наборе меняется (по сравнению со случаем отсутствия неисправностей) значение на выходе хотя бы одного элемента в схеме. Схема называется *неизбыточной*, если всякая нетривиальная неисправность любого одного элемента приводит к функции неисправности, не равной исходной функции.

Рассматриваемый в настоящей работе тип неисправности – «закорачивание входа элемента на его выход с инвертированием» – представляет собой замену функционального элемента на инвертор с теми же, что и у исходного элемента, входами, лишь один из которых остается существенным для инвертора. Через $\widehat{U}$ обозначим источник одиночных неисправностей данного типа (в схеме неисправным может оказаться не более чем один элемент). При этом функциональные элементы без входов, реализующие константы, не могут подвергаться подобным неисправностям и потому считаются абсолютно надежными. Любая неисправность инвертора под действием $\widehat{U}$ (а также закорачивание такого входа элемента на выход с инвертированием, что элемент по данному входу в схеме в отсутствие неисправностей функционировал как инвертор), оказывается тривиальной и в расчет в дальнейшем не берется. Пусть $B_0 = \{x\&y,\ x\vee y,\ \bar{x}\}$ – стандартный базис, $B_1 = \{x\&y,\ x\oplus y,\ 1\}$ – базис Жегалкина, $B \in \{B_0,\ B_1\}$. Если T – единичный проверяющий тест относительно источника неисправностей $\widehat{U}$ для схемы S в базисе B, то через $L(T)$ обозначим длину теста T (то есть число наборов в нем). Введем следующие обозначения: $L(S) = \min L(T)$, где минимум берётся по всем единичным проверяющим тестам T для схемы S; $L_B(f) = \min L(S)$, где минимум берётся по всем неизбыточным схемам S в базисе B, реализующим функцию $f(x)$; $L_B(n) = \max L_B(f)$, где максимум берётся по всем булевым функциям f от n переменных, для которых определено значение $L_B(f)$. Функция $L_B(n)$ называется функцией Шеннона длины единичного проверяющего теста при неисправностях вида «закорачивание входа элемента на его выход с инвертированием» для СФЭ в базисе B.

В настоящей работе найдены оценки функции Шеннона длины единичного проверяющего теста при неисправностях вида «закорачивание входа элемента на его выход с инвертированием» для СФЭ в базисе Жегалкина и в стандартном базисе. Все обозначения для элементов и подсхем будут сохраняться лишь внутри одного доказательства теоремы.

2. Случай базиса Жегалкина

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любого натурального n любую булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно реализовать неизбыточной схемой из функциональных элементов в базисе Жегалкина B_1, допускающей в случае неисправностей вида «закорачивание входа элемента на его выход с инвертированием», единичный проверяющий тест длины* 1 *(при этом $L_{B_1}(\widehat{U}, n) = 1$).*

Доказательство. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – произвольная булева функция. Рассмотрим несколько случаев.

1. $n = 1$, $f(x_1) \in \{1,\ x_1\}$. Функция константа 1 (соответственно функция x_1) реализуется не допускающей нетривиальных неисправностей СФЭ, моделирующей формулу 1 (соответственно формулу x_1), так что в этих случаях $L_{B_1}(\widehat{U}, f) = 0$. Отметим, что с точностью до конгруэнтности только приведенные здесь функции допускают относительно источника $\widehat{U}$ абсолютно надежную реализацию в базисе Жегалкина.

2. $n = 1$, $f(x_1) \in \{0,\ \bar{x}_1\}$. Функция константа 0 (соответственно функция $\bar{x}_1$) реализуется СФЭ, моделирующей формулу $x_1 \oplus x_1$ (соответственно формулу $x_1 \oplus 1$) и допускающей тест $\{(0)\}$, так что в этих случаях $L_{B_1}(\widehat{U}, f) = 1$. Поясним, что у СФЭ, моделирующей формулу $x_1 \oplus 1$, элемент «константа 1» является абсолютно надежным, а неисправность закорачивания на выход с инверсией того входа элемента сложения по модулю 2, на который подается переменная x_1, является тривиальной.

3. $n = 2$, $f(x_1, x_2) = x_1x_2$. В этом случае функция f реализуется СФЭ, моделирующей формулу x_1x_2, допускающей тест $\{(0,0)\}$, так что $L_{B_1}(\widehat{U}, f) = 1$.

4 (основной случай). Пусть теперь $n > 1$ и функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ существенно зависит от всех n переменных и не конгруэнтна конъюнкции двух переменных (это предположение не умаляет общности рассуждений). Представим функцию f на основе полинома Жегалкина следующим образом: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = K_1 \oplus K_2 \oplus \cdots \oplus K_t \oplus \delta$, где K_1, K_2, ..., K_t, – попарно неэквивалентные монотонные конъюнкции, $\delta \in \mathbb{B} = \{0, 1\}$. Будем считать, что $K_i = x_1^{(i)} x_2^{(i)} \cdots x_{r_i}^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, t$.

Построим схему S с входами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, реализующую функцию f. Цепочка $C^{(i)}$ конъюнкторов $E_{1,1}^{(i)}$, $E_{1,2}^{(i)}$, ..., $E_{1,r_i-1}^{(i)}$, «естественным образом» реализует конъюнкцию K_i при $r_i > 1$ ($i = 1, 2, \ldots, t$): к входам конъюнктора $E_{1,1}^{(i)}$ проводятся дуги от входов схемы $x_1^{(i)}$, $x_2^{(i)}$, к левому входу конъюнктора $E_{1,j}^{(i)}$ проводится дуга от конъюнктора $E_{1,j-1}^{(i)}$, а к правому входу конъюнктора $E_{1,j}^{(i)}$ – дуга от входа схемы $x_{j+1}^{(i)}$, $j = 2, 3, \ldots, r_i - 1$. В случае, если $r_i > 2$, для каждого конъюнктора $E_{1,1}^{(i)}$, $E_{1,2}^{(i)}$, ..., $E_{1,r_i-2}^{(i)}$ строится дублирующий конъюнктор $E_{2,1}^{(i)}$, $E_{2,2}^{(i)}$, ..., $E_{2,r_i-2}^{(i)}$ соответственно: к входам конъюнктора $E_{2,1}^{(i)}$ проводятся дуги от входов схемы $x_1^{(i)}$, $x_2^{(i)}$, к левому входу конъюнктора $E_{2,j}^{(i)}$ проводится дуга от конъюнктора $E_{1,j-1}^{(i)}$, а к правому входу конъюнктора $E_{2,j}^{(i)}$ – дуга от входа схемы $x_{j+1}^{(i)}$, $j = 2, 3, \ldots, r_i - 2$. Для каждой пары дублирующих конъюнкторов $E_{1,j}^{(i)}$ и $E_{2,j}^{(i)}$ строится контролирующий элемент $E_{3,j}^{(i)}$ сложения по модулю 2 (далее элементы сложения по модулю 2 будем для краткости именовать сумматорами). Выходным элементом цепочки $C^{(i)}$ считается элемент $E_{1,r_i-1}^{(i)}$. При $r_i = 1$ к цепочке $C^{(i)}$ относится только вход схемы $x_1^{(i)}$, считающийся заодно и выходом этой цепочки. Пусть $\nu = \sum\limits_{\substack{i=1,2,\ldots,t:\\ r_i>2}} (r_i - 2)$. Заметим, что для всякой рассматриваемой здесь функции f имеет место неравенство $t + \nu + \delta > 1$. Цепочка C сумматоров E_1, E_2, ..., $E_{t+\nu+\delta-1}$ устроена следующим образом. К левому входу сумматора E_k проводится дуга от сумматора E_{k-1}, $k = 2, 3, \ldots, t + \nu + \delta - 1$. К каждому входу сумматора E_1 и к каждому правому входу сумматора E_k, $k = 2, 3, \ldots, t + \nu - 1$, проводится по одной дуге. Эти дуги (в любом порядке) проводятся от различных вершин и исходят из выходов цепочек $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, ..., $C^{(t)}$ и из выходов всех элементов вида $E_{3,j}^{(i)}$, $j = 2, 3, \ldots, r_i - 2$ при $r_i > 2$. Если $\delta = 1$, то к правому входу сумматора $E_{t+\nu}$ проводится дуга от добавленного элемента E_0, реализующего константу 1. Элемент $E_{t+\nu+\delta-1}$ считается выходным элементом схемы S. Схема S построена полностью.

В отсутствие неисправностей на выходах всех элементов вида $E_{3,j}^{(i)}$ на любом входном наборе оказываются нули, поэтому исходная схема S реализует функцию f (элементами цепочки C складываются по модулю 2 лишь нули и все слагаемые полинома Жегалкина функции f).

Покажем, что набор $\alpha = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{B}^n$ образует единичный проверяющий тест для схемы S относительно источника неисправностей $\widehat{U}$.

Заметим, что в отсутствие неисправностей на наборе α на входах и выходах всех элементов схемы S, кроме E_0 и $E_{t+\nu}$ (наличествующих лишь при $\delta = 1$), оказываются нули. При $\delta = 1$ на левом входе $E_{t+\nu}$ оказывается 0, на правом – 1. Элемент E_0 оказывается при этом абсолютно надежным, как отмечалось выше, а элемент $E_{t+\nu}$ по левому входу работает как инвертор, так что закорачивание этого входа на выход $E_{t+\nu}$ с инвертированием представляет собой тривиальную (и потому не рассматриваемую здесь) неисправность. Вторая возможная неисправность $E_{t+\nu}$ (а именно, закорачивание правого входа $E_{t+\nu}$ на выход $E_{t+\nu}$ с инвертированием), очевидно, обнаруживается на наборе α. Всякая возможная неисправность любого элемента вида E_k, $k = 1, 2, \ldots, t + \nu - 1$, также обнаруживается на наборе α, ибо в результате этой неисправности на выходе E_k возникнет неверное значение 1, что приведет в возникновению неверного значения на выходе всей схемы в результате «передачи» неверных значений далее вдоль цепочки C. Аналогично, при любых возможных неисправностях выходных элементов цепочек $C^{(i)}$ и элементов вида $E^{(i)}_{3,j}$ $(i = 1, 2, \ldots, t,\ j = 2, 3, \ldots, r_i - 2$ при $r_i > 2)$ на наборе α на выходе неисправного элемента окажется неверное значение, что приведет к возникновению неверного значения на выходе всей схемы в результате «передачи» неверных значений далее вдоль цепочки C. При любой возможной неисправности любого элемента вида $E^{(i)}_{1,j}$ или $E^{(i)}_{2,j}$ на наборе α на выходе соответствующего контролирующего элемента $E^{(i)}_{3,j}$ возникнет 1, а не 0, тогда как значения на выходах остальных элементов цепочки $C^{(i)}$ останутся равными нулям. Следовательно, как и ранее, это приведет в возникновению неверного значения на выходе всей схемы в результате «передачи» неверных значений далее вдоль цепочки C. Теорема доказана. □

3. Случай стандартного базиса

Имеет место следующий результат.

Теорема 2. *Для любого натурального n любую булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно реализовать неизбыточной схемой из функциональных элементов в стандартном базисе $B_0 = \{x \,\&\, y,\ x \vee y,\ \bar{x}\}$, допускающей в случае неисправностей вида «закорачивание входа элемента на его выход с инвертированием», единичный проверяющий тест длины 2 (то есть $L_{B_0}(\widehat{U}, n) \le 2$).*

Доказательство. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – произвольная булева функция. Положим $\widehat{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f \oplus (x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n)$. Рассмотрим несколько случаев.

1. $n = 1$, $f(x_1) \in \{x_1,\ \bar{x}_1\}$. Функция x_1 (соответственно $\bar{x}_1$) реализуется абсолютно надежной СФЭ, моделирующей формулу x_1 (соответственно формулу $\bar{x}_1$), так что в этих случаях $L_{B_0}(\widehat{U}, f) = 0$. Отметим, что с точностью до конгруэнтности только приведенные здесь функции допускают относительно источника $\widehat{U}$ абсолютно надежную реализацию в базисе Жегалкина.

2. $n = 1$, $f(x_1) \in \{0,\ 1\}$. Константа 0 (соответственно 1) реализуется СФЭ, моделирующей формулу $\bar{x}_1 \,\&\, x_1$ (соответственно формулу $\bar{x}_1 \vee x_1$) и допускающей тест $\{(0), (1)\}$, так что в этих случаях $L_{B_0}(\widehat{U}, f) \le 2$.

3. $n \ge 2$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n) \oplus \widehat{\delta}$, $\widehat{\delta} \in \{0, 1\}$. Тогда $\widehat{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \widehat{\delta}$. (Здесь и далее будем, не умаляя общности, считать, что функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ существенно зависит от всех своих переменных). В этом случае функция f реализуется СФЭ, моделирующей формулу $(\cdots(x_1 \vee x_2) \vee \cdots) \vee x_n$ при $\widehat{\delta} = 0$, или СФЭ, моделирующей формулу $\overline{(\cdots(x_1 \vee x_2) \vee \cdots) \vee x_n}$ при $\widehat{\delta} = 1$, допускающей тест $\{(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n})\}$, так что в этих случаях $L_{B_0}(\widehat{U}, f) = 1$.

4 (основной случай). Пусть теперь $n \ge 2$ и функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ существенно зависит от всех своих переменных и не конгруэнтна функциям $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n) \oplus \widehat{\delta}$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n) \oplus x_{\mu_1} x_{\mu_2} \cdots x_{\mu_s} \oplus \widehat{\delta}$, $s \in \{1, 2\}$, $1 \le \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_s \le n$, $\widehat{\delta} \in \{0, 1\}$.

Представим функцию $\widehat{f}$ на основе полинома Жегалкина следующим образом: $\widehat{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = K_1 \oplus K_2 \oplus \cdots \oplus K_t \oplus \delta$, где $t \geq 2$, K_1, K_2, ..., K_t, – попарно неэквивалентные монотонные конъюнкции, $\delta \in \{0, 1\}$. Будем, не ограничивая общности, считать, что $K_i = x_1^{(i)} x_2^{(i)} \cdots x_{r_i}^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, t$, и при этом $K_1 = x_1 x_2 \cdots x_{r_1}$ – конъюнкция минимального ранга среди всех конъюнкций K_1, K_2, ..., K_t.

Построим схему S с входами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, реализующую функцию f.

Цепочка $C^{(i)}$ конъюнкторов $E_1^{(i)}$, $E_2^{(i)}$, ..., $E_{r_i-1}^{(i)}$, «естественным образом» реализует конъюнкцию K_i при $r_i > 1$ ($i = 1, 2, \ldots, t$): к входам конъюнктора $E_1^{(i)}$ проводятся дуги от входов схемы $x_1^{(i)}$, $x_2^{(i)}$, к левому входу конъюнктора $E_j^{(i)}$ проводится дуга от конъюнктора $E_{j-1}^{(i)}$, а к правому входу конъюнктора $E_j^{(i)}$ проводится дуга от входа схемы $x_{j+1}^{(i)}$, $j = 2, 3, \ldots, r_i - 1$. Выходным элементом цепочки $C^{(i)}$ считается элемент $E_{1,r_i-1}^{(i)}$. При $r_i = 1$ к цепочке $C^{(i)}$ относится только вход схемы $x_1^{(i)}$, считающийся заодно и выходом этой цепочки.

В случае, если $r_i > 2$, для каждого конъюнктора $E_j^{(i)}$, $j = 1, 2, \ldots, r_i - 2$, строится контролирующая цепочка $C_j^{(i)}$ дизъюнкторов $E_{j,1}^{(i)}$, $E_{j,2}^{(i)}$, ..., $E_{j,n}^{(i)}$ следующим образом. К левому входу дизъюнктора $E_{j,1}^{(i)}$ проводится дуга от элемента $E_j^{(i)}$, к левому входу каждого дизъюнктора $E_{j,l}^{(i)}$ ($l = 2, 3, \ldots, n$) проводится дуга от элемента $E_{j,l-1}^{(i)}$; к правому входу каждого дизъюнктора $E_{j,l}^{(i)}$ ($l = 1, 2, \ldots, n$) проводится дуга от входа x_l схемы. Элемент $E_{j,n}^{(i)}$ считается выходным элементов цепочки $C_j^{(i)}$. Идея построения таких цепочек близка к идее контролирующих цепочек из работы [2].

Пусть $\nu = \sum\limits_{\substack{i=1,2,\ldots,t: \\ r_i > 2}} (r_i - 2)$.

Обозначим через Σ СФЭ с двумя входами и одним выходом, моделирующую формулу $\overline{(x \,\&\, y)} \,\&\, (x \vee y)$ и реализующую функцию $x \oplus y$.

Цепочка C двухвходовых подсхем Σ_1, Σ_2, ..., Σ_t (где каждая из подсхем имеет вид Σ) устроена следующим образом. К левому входу подсхемы Σ_k проводится дуга от выхода подсхемы Σ_{k-1}, $k = 2, 3, \ldots, t$. К левому входу подсхемы Σ_1 проводится дуга от выхода цепочки $C^{(1)}$. К правым входам подсхем Σ_k, $k = 1, 2, \ldots, t-1$, проводится по одной дуге. Эти дуги исходят из попарно различных вершин, именно, из выходов всех цепочек $C^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, t$.

Обозначим элементы подсхемы Σ_k, $k = 1, 2, \ldots, t$. Инцидентный входам подсхемы Σ_k конъюнктор обозначим через $E_{k,1}$, дизъюнктор – через $E_{k,2}$, инвертор – через $E_{k,3}$, выходной конъюнктор подсхемы Σ_k – через $E_{k,4}$.

Для каждого конъюнктора $E_{k,1}$, $k = 1, 2, \ldots, t-1$, строится контролирующая цепочка C'_k дизъюнкторов $E'_{k,1}$, $E'_{k,2}$, ..., $E'_{k,n}$ следующим образом. К левому входу дизъюнктора $E'_{k,1}$ проводится дуга от элемента $E_{k,1}$, к левому входу каждого дизъюнктора $E'_{k,l}$ ($l = 2, 3, \ldots, n$) проводится дуга от элемента $E'_{k,l-1}$; к правому входу каждого дизъюнктора $E'_{k,l}$ ($l = 1, 2, \ldots, n$) проводится дуга от входа x_l схемы. Элемент $E'_{k,n}$ считается выходным элементов цепочки C'_k.

Далее строится цепочка D из $\nu + t - 2$ дизъюнкторов D_1, ..., $D_{\nu+t-2}$. К левому входу каждого дизъюнктора $D_{k'}$ ($k' = 2, 3, \ldots, \nu + t - 2$) проводится дуга от элемента $D_{k'-1}$. Ко входам дизъюнктора D_1 и к правым входам дизъюнкторов $D_{k'}$ проводится по одной дуге. Эти дуги исходят из попарно различных вершин, именно из выходов всех цепочек $C_j^{(i)}$ ($i = 1, 2, \ldots, t$, $j = 1, 2, \ldots, r_i - 2$ при $r_i > 2$) и из выходов всех цепочек C'_k ($k = 1, 2, \ldots, t-1$). Элемент $D_{\nu+t-2}$ считается выходным элементов цепочки D. От выходного элемента $D_{\nu+t-2}$ цепочки D строится дуга к правому входу подсхемы Σ_t.

При $\delta = 0$ схема S построена, ее выходом считается выход подсхемы Σ_t. При $\delta = 1$ от выхода подсхемы Σ_t проводится дуга ко входу нового инвертора E_0, теперь схема S построена, ее выходом считается выход инвертора E_0.

В отсутствие неисправностей на выходах всех контролирующих цепочек $C_j^{(i)}$ и C'_k $(i = 1,2,\ldots,t,\ j = 1,2,\ldots,r_i-2$ при $r_i > 2,\ k = 1,2,\ldots,t-1)$ реализуются функции, равные $x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n$ (поскольку это дизъюнкции функции $x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n$ с монотонными конъюнкциями тех же переменных либо дизъюнкции функции $x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n$ с монотонными конъюнкциями тех же переменных, домноженными на сохраняющие нуль полиномы Жегалкина тех же переменных). Значит, в отсутствие неисправностей на выходе цепочки D также реализуется функция $x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n$. А так как по построению схемы S на выходе подсхемы Σ_{t-1} на основе полинома Жегалкина реализуется функции $\widehat{f} \oplus \delta = f \oplus (x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n) \oplus \delta$, то на выходе схемы S реализуется функция f.

Покажем, что наборы $\alpha = (\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n})$ и $\beta = (\underbrace{1,1,\ldots,1}_{r_1},\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n-r_1})$ образуют единичный проверяющий тест для схемы S относительно источника неисправностей $\widehat{U}$.

Заметим, что в отсутствие неисправностей на наборе α на входах и выходах всех элементов схемы S, кроме элемента E_0 (наличествующего лишь при $\delta = 1$) и элементов $E_{k,3}$ и $E_{k,4}$ $(k = 1,2,\ldots,t)$, оказываются нули. Поэтому при неисправности любого одного элемента из цепочек $C_j^{(i)}$, C'_k и D $(i = 1,2,\ldots,t,$ $j = 1,2,\ldots,r_i-2$ при $r_i > 2,\ k = 1,2,\ldots,t-1)$ на наборе α на выходе цепочки D окажется неверное значение 1, так что на выходе схемы S возникнет неверное значение.

Аналогично, при неисправности любого одного конъюнктора $E_j^{(i)}$ $(i = 1,2,\ldots,t,\ j = 1,2,\ldots,r_i-2$ при $r_i > 2)$ на наборе α на выходе цепочки D окажется неверное значение 1, на выходе цепочки $C^{(i)}$ окажется верное значение 0, так что на выходе схемы S возникнет неверное значение.

При неисправности любого одного конъюнктора $E_{r_i-1}^{(i)}$ $(i = 1,2,\ldots,t)$ на наборе α на выходах подсхем Σ_k $(k = \overline{\max(1,i-1),t})$ окажется неверное значение 1, так что на выходе схемы S возникнет неверное значение.

При неисправности любого одного конъюнктора $E_{k,1}$ $(k = 1,2,\ldots,t-1)$ на наборе α на выходе подсхемы Σ_k окажется верное значение 0, но на выходах цепочек C'_k и D окажется неверное значение 1, так что на выходе схемы S возникнет неверное значение.

При неисправности любого одного дизъюнктора $E_{k,2}$ $(k = 1,2,\ldots,t)$ на наборе α на выходе подсхемы Σ_k окажется неверное значение 1, так что на выходе схемы S тоже возникнет неверное значение.

При неисправности любого одного конъюнктора $E_{k,4}$ «закорачивание второго входа на выход с инвертированием» $(k = 1,2,\ldots,t)$ на наборе α на выходе подсхемы Σ_k окажется неверное значение 1, так что на выходе схемы S тоже возникнет неверное значение.

Заметим, что в отсутствие неисправностей на наборе β на первом и втором входах каждой подсхемы Σ_k $(k = 1,2,\ldots,t-1)$ оказываются 1 и 0 соответственно, а на первом и втором входах подсхемы Σ_t – 1 и 1 соответственно. Поэтому при неисправности конъюнктора $E_{t,1}$ на наборе β на выходе подсхемы Σ_k окажется неверное значение 1, так что на выходе схемы S тоже возникнет неверное значение.

При неисправности любого одного конъюнктора $E_{k,4}$ «закорачивание первого входа на выход с инвертированием» $(k = 1,2,\ldots,t-1)$ на наборе β на выходе подсхемы Σ_k окажется неверное значение 0, так что на выходе схемы S тоже возникнет неверное значение.

Аналогично, при неисправности конъюнктора $E_{t,4}$ «закорачивание первого входа на выход с инвертированием» на наборе β на выходе подсхемы Σ_t окажется неверное значение 1, так что на выходе схемы S тоже возникнет неверное значение.

Неисправности инверторов тривиальны и потому не рассматриваются.

Значит, наборы α и β образуют единичный проверяющий тест для схемы S относительно источника неисправностей $\widehat{U}$.

5. $n \geq 2$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n) \oplus x_{\mu_1} x_{\mu_2} \cdots x_{\mu_s} \oplus \delta$, $s \in \{1, 2\}$, $1 \leq \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_s \leq n$, $\delta \in \{0, 1\}$. Тогда $\widehat{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_{\mu_1} x_{\mu_2} \cdots x_{\mu_s} \oplus \delta$. Построение схемы существенно упрощается по сравнению с п. 4. Цепочка $C^{(1)}$ из п. 4 представляет собой либо вход схемы x_{μ_1}, либо конъюнктор $E_1^{(1)}$, ко входам которого проведены дуги от входов схемы x_{μ_1} и x_{μ_2}. Имеется цепочка дизъюнкторов D', моделирующая формулу $(\ldots(x_1 \vee x_2) \vee \ldots) \vee x_n$. Строится подсхема вида Σ из п. 4, ко входам которой проводятся дуги от выходов подсхем $C^{(1)}$ и D'. При $\delta = 0$ схема S построена, ее выходом считается выход подсхемы Σ. При $\delta = 1$ от выхода подсхемы Σ проводится дуга ко входу нового инвертора E_0, теперь схема S построена, ее выходом считается выход инвертора E_0. В полной аналогии с п. 4 показывается, что наборы $\alpha = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n})$ и $\beta = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{s}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-s})$ образуют единичный проверяющий тест для схемы S относительно источника неисправностей $\widehat{U}$. Теорема доказана. $\square$

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики (проект «Оценки сложностных характеристик булевых функций и графов»), РФФИ (проект № 18-01-00800-а) и госбюджетной темы НИР № 5.4.19 факультета ВМК МГУ.

Литература

1. *Ложкин С.А.* Лекции по основам кибернетики. – М.: Изд. отд. фак. ВМиК МГУ, 2004. – 253 с.

2. *Бородина Ю.В.* О синтезе легкотестируемых схем в случае однотипных константных неисправностей на выходах элементов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика. – 2008. – № 1. – С. 40–44.

Поступила в редакцию
20.07.2020

Темербекова Гульгайша Габдуловна, аспирант факультета вычислительной математики и кибернетики

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Ленинские горы, д. 1, г. Москва, 119991, Россия
E-mail: *gulgaisha93@mail.ru*

Романов Дмитрий Сергеевич, доктор физико-математических наук, доцент факультета вычислительной математики и кибернетики

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Ленинские горы, д. 1, г. Москва, 119991, Россия
E-mail: *romanov@cs.msu.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

**UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)**

2020, vol. 162, no. 3, pp. 359–366

doi: 10.26907/2541-7746.2020.3.359-366

On Single Detection Test Sets under Replacements of Gates with Inverters

*G.G. Temerbekova**, *D.S. Romanov***

Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia
E-mail: **gulgaisha93@mail.ru*, ***romanov@cs.msu.ru*

Received July 20, 2020

Abstract

Detection testing of Boolean functions implemented by Boolean circuits, which are affected by single replacements of gates with inverters, was discussed. The relevance of the study is determined by the fact that replacements of gates with inverters is a type of malfunction that occurs in the development and production of VLSI. The study was carried out in order to prove the possibility of constructing easily testable circuits under replacing elements with inverters. To achieve this goal, special methods for the synthesis of easily testable circuits were developed. Based on the results of the study, the following conclusions were drawn: for an arbitrary Boolean function implemented over a Zhegalkin basis $B_1 = \{x \,\&\, y,\, x \oplus y,\, 1\}$, there is an irredundant circuit that allows a single detection test set consisting of one vector; for an arbitrary Boolean function implemented over a standard basis $B_0 = \{x \,\&\, y,\, x \vee y,\, \bar{x}\}$, there is an irredundant circuit that allows a single detection test set consisting of two vectors.

Keywords: Boolean circuit, detection test set, Shannon function, replacements of gates

Acknowledgments. The study was supported by the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics (project “Complexity characteristics of Boolean functions and graphs”), Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00800-a), and state-financed research work no. 5.4.19 at the Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics of Lomonosov Moscow State University.

References

1. Lozhkin S.A. *Lektsii po osnovam kibernetiki* [Lectures on Basic Cybernetics]. Moscow, Izd. Otd. Fak. VMiK MGU, 2004. 253 p. (In Russian)
2. Borodina Yu.V. Synthesis of easily-tested circuits in the case of single-type constant malfunctions at the element outputs. *Moscow Univ. Comput. Math. Cybern.*, 2008, vol. 32, no. 1, pp. 42–46. doi: 10.3103/s11968-008-1006-5.

***Для цитирования*:** *Темербекова Г.Г., Романов Д.С.* О единичных проверяющих тестах относительно замен элементов на инверторы // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2020. – Т. 162, кн. 3. – С. 359–366. – doi: 10.26907/2541-7746.2020.3.359-366.

***For citation*:** Temerbekova G.G., Romanov D.S. On single detection test sets under replacements of gates with inverters. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 162, no. 3, pp. 359–366. doi: 10.26907/2541-7746.2020.3.359-366. (In Russian)