Республиканская олимпиада школьников «Путь к Олимпу» по математике
Заключительный этап, 21 января 2020 г.

8 класс

1. Карлсон, Малыш и Фрёкен Бок едят конфеты. Пока Фрёкен Бок съедает 3 конфеты, Малыш успевает съесть 5 конфет. Пока Малыш съедает 3 конфеты, Карлсон уплетает 5 конфет. Малыш и Фрёкен Бок посчитали, что вместе они съели 120 конфет. Сколько конфет съел Карлсон?

2. Найдите *наибольшее* трёхзначное число, которое без остатка делится на 4, 5, 6 и не делится на 7, 8 и 9.

3. На доске 2×15 расставлены фишки так, что если в какой-то клетке фишки нет, то фишка есть хотя бы в одной соседней с ней по стороне клетке. Какое *наименьшее* количество фишек может быть на доске?

4. Дан набор попарно различных целых чисел. Каждое из чисел набора является суммой каких-то двух других чисел, входящих в этот набор. *а*) Может ли такой набор состоять из 5 чисел? *б*) Каково наименьшее возможное количество чисел в таком наборе?

5. В треугольнике ABC на стороне AB выбраны точки K и L так, что $AK = BL$, а на стороне BC — точки M и N так, что $BM = CN$. Докажите, что $KN + LM \geqslant AC$. В каком случае $KN + LM = AC$?

Республиканская олимпиада школьников «Путь к Олимпу» по математике
Заключительный этап, 21 января 2020 г.

8 класс

1. Карлсон, Малыш и Фрёкен Бок едят конфеты. Пока Фрёкен Бок съедает 3 конфеты, Малыш успевает съесть 5 конфет. Пока Малыш съедает 3 конфеты, Карлсон уплетает 5 конфет. Малыш и Фрёкен Бок посчитали, что вместе они съели 120 конфет. Сколько конфет съел Карлсон?

2. Найдите *наибольшее* трёхзначное число, которое без остатка делится на 4, 5, 6 и не делится на 7, 8 и 9.

3. На доске 2×15 расставлены фишки так, что если в какой-то клетке фишки нет, то фишка есть хотя бы в одной соседней с ней по стороне клетке. Какое *наименьшее* количество фишек может быть на доске?

4. Дан набор попарно различных целых чисел. Каждое из чисел набора является суммой каких-то двух других чисел, входящих в этот набор. *а*) Может ли такой набор состоять из 5 чисел? *б*) Каково наименьшее возможное количество чисел в таком наборе?

5. В треугольнике ABC на стороне AB выбраны точки K и L так, что $AK = BL$, а на стороне BC — точки M и N так, что $BM = CN$. Докажите, что $KN + LM \geqslant AC$. В каком случае $KN + LM = AC$?

9 класс

1. Найдите *наибольшее* четырёхзначное число, которое без остатка делится на 4, 5, 6 и не делится на 7, 8 и 9.

2. Один раджа имел n сыновей и оставил им в наследство 100 бриллиантов. Завещание гласило, что первый сын получит $\frac{1}{n}$ часть всего наследства, второй — $\frac{1}{n}$ часть оставшегося наследства и ещё один бриллиант, третий — $\frac{1}{n}$ часть оставшегося после этого наследства и ещё два бриллианта, четвертый — $\frac{1}{n}$ часть оставшегося и ещё три бриллианта и так далее. Сколько было сыновей у раджи, если в результате все сыновья получили поровну?

3. Два игрока вставляют в запись $\ldots x + \ldots = \ldots x + \ldots$ вместо пропусков по одному из *данных* различных чисел a, b, c, d (в любом порядке, но без повторений). Когда все пропуски заполнятся, решают полученное уравнение. Если его корень — положительное число, выигрывает первый, иначе — второй. Кто выигрывает при правильной игре?

4. Пусть x и y — различные положительные числа. Какая из дробей больше:

$$\frac{2}{x+y} \quad \text{или} \quad \frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\,?$$

5. В треугольнике ABC на стороне AB выбраны точки K и L так, что $AK = BL$, а на стороне BC — точки M и N так, что $BM = CN$. Докажите, что $KM + LN \geqslant AC$. В каком случае $KM + LN = AC$?

Республиканская олимпиада школьников «Путь к Олимпу» по математике
Заключительный этап, 21 января 2020 г.

9 класс

1. Найдите *наибольшее* четырёхзначное число, которое без остатка делится на 4, 5, 6 и не делится на 7, 8 и 9.

2. Один раджа имел n сыновей и оставил им в наследство 100 бриллиантов. Завещание гласило, что первый сын получит $\frac{1}{n}$ часть всего наследства, второй — $\frac{1}{n}$ часть оставшегося наследства и ещё один бриллиант, третий — $\frac{1}{n}$ часть оставшегося после этого наследства и ещё два бриллианта, четвертый — $\frac{1}{n}$ часть оставшегося и ещё три бриллианта и так далее. Сколько было сыновей у раджи, если в результате все сыновья получили поровну?

3. Два игрока вставляют в запись $\ldots x + \ldots = \ldots x + \ldots$ вместо пропусков по одному из *данных* различных чисел a, b, c, d (в любом порядке, но без повторений). Когда все пропуски заполнятся, решают полученное уравнение. Если его корень — положительное число, выигрывает первый, иначе — второй. Кто выигрывает при правильной игре?

4. Пусть x и y — различные положительные числа. Какая из дробей больше:

$$\frac{2}{x+y} \quad \text{или} \quad \frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\,?$$

5. В треугольнике ABC на стороне AB выбраны точки K и L так, что $AK = BL$, а на стороне BC — точки M и N так, что $BM = CN$. Докажите, что $KM + LN \geqslant AC$. В каком случае $KM + LN = AC$?

Республиканская олимпиада школьников «Путь к Олимпу» по математике
Заключительный этап, 21 января 2020 г.

10 класс

1. *а*) Существует ли натуральное число n такое, что у n и $n+2019$ одинаковая сумма цифр? *б*) Тот же вопрос про числа n и $n+2025$?

2. Пусть x и y — различные положительные числа. Какая из дробей больше:

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} \quad \text{или} \quad \frac{x^3+y^3}{x^4+y^4}\,?$$

3. На доске записаны натуральные числа от 1 до n. Паша выбирает два числа и находит их произведение, а Саша вычисляет сумму оставшихся $(n-2)$ чисел. Могут ли результаты мальчиков совпасть, если *а*) $n=10$? *б*) $n=15$?

4. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность. Высота BH вторично пересекает эту окружность в точке F. Из точки F провели перпендикуляр к прямой BC до пересечения с прямой AC в точке D. Найдите отношение $AH : HD$.

5. Сумма неотрицательных чисел a, b, c, d равна 1. Найдите наибольшее возможное значение выражения $s = ab + bc + cd + da$.

Республиканская олимпиада школьников «Путь к Олимпу» по математике
Заключительный этап, 21 января 2020 г.

10 класс

1. *а*) Существует ли натуральное число n такое, что у n и $n+2019$ одинаковая сумма цифр? *б*) Тот же вопрос про числа n и $n+2025$?

2. Пусть x и y — различные положительные числа. Какая из дробей больше:

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} \quad \text{или} \quad \frac{x^3+y^3}{x^4+y^4}\,?$$

3. На доске записаны натуральные числа от 1 до n. Паша выбирает два числа и находит их произведение, а Саша вычисляет сумму оставшихся $(n-2)$ чисел. Могут ли результаты мальчиков совпасть, если *а*) $n=10$? *б*) $n=15$?

4. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность. Высота BH вторично пересекает эту окружность в точке F. Из точки F провели перпендикуляр к прямой BC до пересечения с прямой AC в точке D. Найдите отношение $AH : HD$.

5. Сумма неотрицательных чисел a, b, c, d равна 1. Найдите наибольшее возможное значение выражения $s = ab + bc + cd + da$.

11 класс

1. *а*) Существует ли натуральное число n такое, что у n и $n+2020$ одинаковая сумма цифр? *б*) Тот же вопрос про числа n и $n+2025$?

2. Один из корней уравнения $x^2+px+q=0$ равен $1+\sqrt{2020}$. Найдите числа p и q, если известно, что они рациональны.

3. Пусть x и y — положительные числа. Какая из дробей больше:

$$\frac{x^3+y^3}{x^4+y^4} \quad \text{или} \quad \frac{x^5+y^5}{x^6+y^6}\,?$$

4. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность. Высота BH вторично пересекает эту окружность в точке F. Из точки F провели перпендикуляр к прямой BC до пересечения с прямой AC в точке D. Найдите отношение $AB:BD$.

5. Произведение положительных чисел a, b и c равно 1. Известно, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant a+b+c$. Докажите, что

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geqslant a^2+b^2+c^2.$$

Республиканская олимпиада школьников «Путь к Олимпу» по математике
Заключительный этап, 21 января 2020 г.

11 класс

1. *а*) Существует ли натуральное число n такое, что у n и $n+2020$ одинаковая сумма цифр? *б*) Тот же вопрос про числа n и $n+2025$?

2. Один из корней уравнения $x^2+px+q=0$ равен $1+\sqrt{2020}$. Найдите числа p и q, если известно, что они рациональны.

3. Пусть x и y — положительные числа. Какая из дробей больше:

$$\frac{x^3+y^3}{x^4+y^4} \quad \text{или} \quad \frac{x^5+y^5}{x^6+y^6}\,?$$

4. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность. Высота BH вторично пересекает эту окружность в точке F. Из точки F провели перпендикуляр к прямой BC до пересечения с прямой AC в точке D. Найдите отношение $AB:BD$.

5. Произведение положительных чисел a, b и c равно 1. Известно, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant a+b+c$. Докажите, что

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geqslant a^2+b^2+c^2.$$