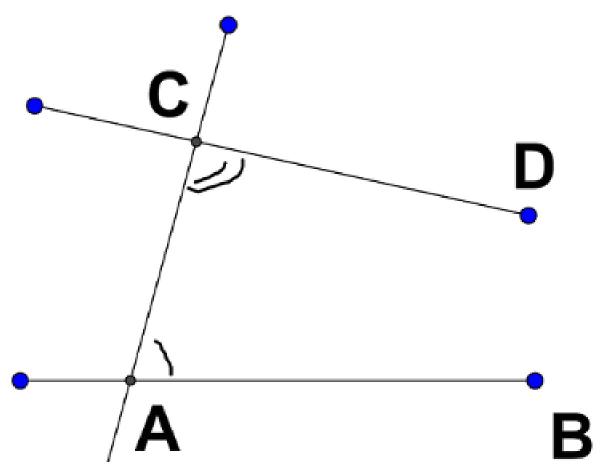
Е.Н. СОСОВ

Планиметрия Лобачевского в модели Бельтрами–Клейна

1. Пятый постулат и краткая история создания неевклидовой геометрии

В "Началах" Евклида (ок. 300 до н. э.) пятый постулат гласит: "И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, [в сумме] меньшие двух прямых, то продолженные эти прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых". Около 2000 лет математики пытались доказать пятый постулат, используя остальные постулаты и аксиомы Евклида.



Например, у Фаркаша Бойяи (1775–1856) (друга К. Гаусса и отца Яноша Бойяи) последнее доказательство пятого постулата было опубликовано в 1851 году.

К. Ф. Гаусс (1777–1855) начал искать доказательство пятого постулата в 1792 году. В 1816 году его ученик Фридрих Людвиг Вахтер (1792–1818) сообщил ему в письме, что при невыполнении пятого постулата на орисфере (современный термин) имеет место евклидова геометрия.

Однако, в 1817 году вышла брошюра Ф. Вахтера с попыткой доказательства пятого постулата.

К 1817 году К. Гаусс понял, что евклидова геометрия не является единственно возможной, это следует из его переписки.

До этого он разделял точку зрения И. Канта, который считал понятия евклидовой геометрии априорными.

В 1831 году в письме к Г.К. Шумахеру он называет новую геометрию неевклидовой. До этого ему нравилось название Фердинанда Карла Швейкарта (1780-1859) — астральная геометрия.

Заметку с некоторыми утверждениями из астральной геометрии Гаусс получил в январе 1819 года. В ответном письме он хвалит Ф. Швейкарта, но там же пишет: "Почти все это списано с моей души".

В 1824 году К. Гаусс сообщает несколько утверждений из астральной геометрии в письме Францу Адольфу Тауринусу (1794–1874), который под влиянием своего дяди Ф. Швейкарта заинтересовался проблемой пятого постулата.

В письме он настоятельно требовал, чтобы результаты никаким образом не сделались общим достоянием. И сам не публиковал своих результатов по неевклидовой геометрии.

Ф. Тауринус публикует две брошюры в 1825 и 1826 гг. Во второй он в своей "логарифмо-сферической" геометрии нашел формулы тригонометрии, длину окружности, площадь круга и объем шара.

В предисловии к первой брошюре он просит К. Гаусса опубликовать свои воззрения по этому вопросу.

После этого К. Гаусс прекратил с ним переписку, а Ф. Тауринус в глубоком отчаянии сжег все сохранившиеся у него экземпляры своей брошюры и к этой тематике не возвращался. В Европе сохранились лишь несколько экземпляров, один из которых был опубликован в 1895 году Ф. Энгелем.

Ф. Тауринус сам не понял значения своих достижений и считал истинной именно евклидову геометрию. Его, например, испугало бесконечное множество неевклидовых геометрий, зависящих от одного параметра.

Евклидова геометрия соответствовала бесконечно большому значению этого параметра.

Н.И. Лобачевский начал исследовать неевклидову геометрию примерно в 1823 году. 7.02.1826 по старому стилю он представил в Отделение физико-математических наук Казанского университета в письменном виде сочинение: "Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных" (на французком языке) для публикации в "Ученых записках" этого Отделения.

11.02.1826 по старому стилю доклад был передан для предоставления отзыва двум профессорам и одному адъюнкту. Но издание не осуществилось.

Отзывы и рукопись не сохранились. Сочинение было включено Н. И. Лобачевским в статью: "О началах геометрии", напечатанной в журнале "Казанский вестник" в 1829-1830 гг.

В ней впервые появилась неевклидова геометрия, которую точнее называть — геометрия Лобачевского. Сам Лобачевский называл эту геометрию сначала воображаемой, а в 1855 году пангеометрией.

В 1831 году Фаркаш Бойяи послал на отзыв К. Гауссу сочинение Яноша Бойяи "Приложение, содержащее науку о пространстве, абсолютно истинную, не зависящую от истинности или ложности XI аксиомы Евклида (что a priori никогда решено быть не может)" (на латинском языке).

Первый экземпляр был утерян при пересылке, второй К. Гаусс получил в начале февраля 1832 года и 6 марта дал отзыв в ответном письме.

В отзыве он сообщил, что эти результаты ему уже известны, и он не может похвалить эту работу, но в письме К. Герлингу назвал Я. Бойяи гением первой величины.

Полностью "Appendix" Я. Бойяи к курсу математики Ф. Бойяи был опубликован в 1832 г.

2. Модель Бельтрами–Клейна планиметрии Лобачевского

В настоящее время геометрию Лобачевского проще всего изучать, используя четыре основные ее модели и связи между ними.

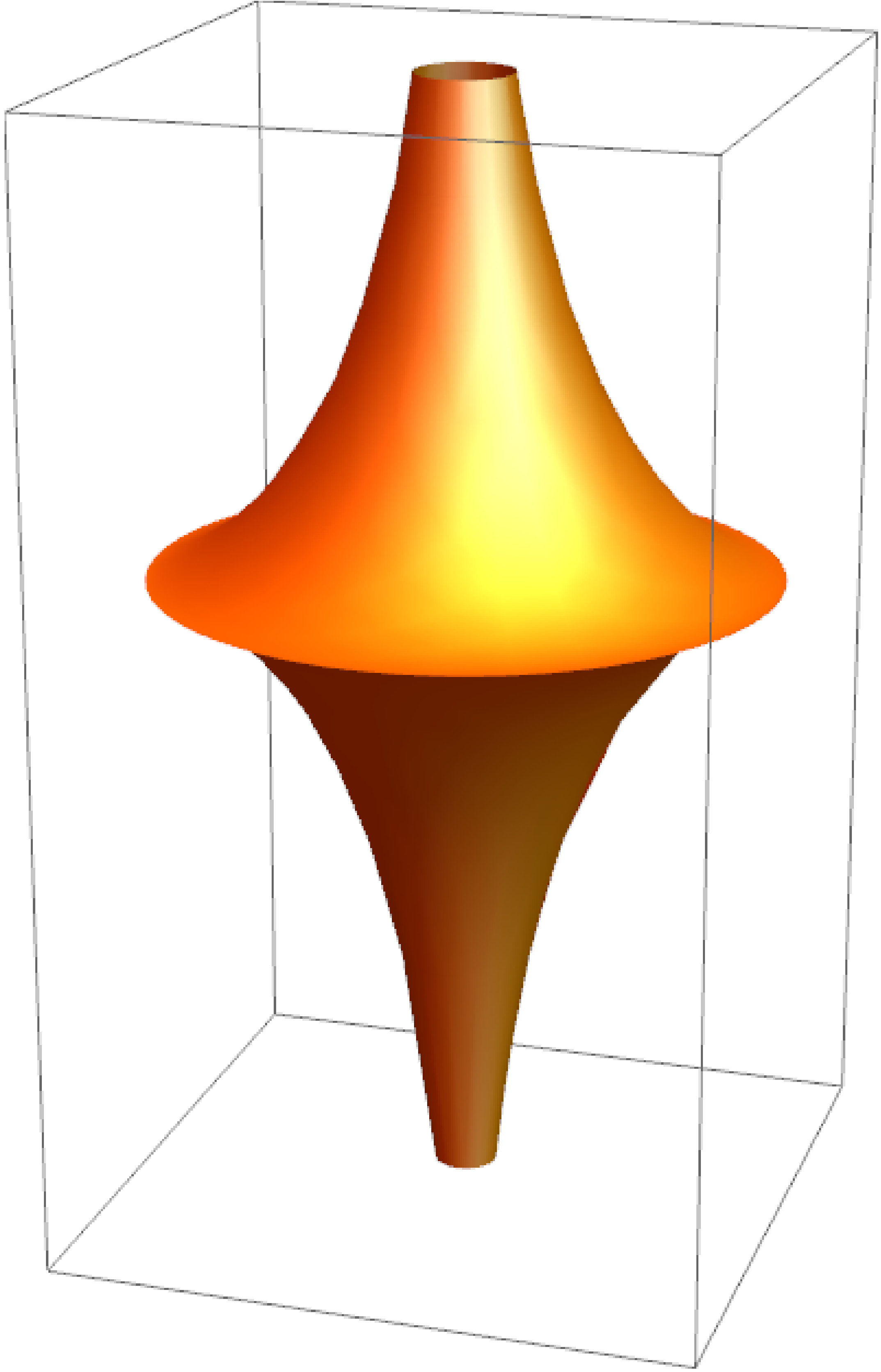
Первая была создана Э. Бельтрами в 1868 г., а три из них были созданы А. Пуанкаре в 1882, 1887, 1891 и 1906 гг.

В настоящее время модель Бельтрами правильнее называть (по предложению Б. А. Розенфельда) моделью Бельтрами–Клейна планиметрии Лобачевского, поскольку Ф. Клейн в 1871 году установил проективную природу этой модели и представление движений плоскости Лобачевского коллинеациями, переводящими в себя круг.

Мы рассмотрим модель Бельтрами–Клейна, так как она имеет важное значение и для установления связей между геометрией Лобачевского и специальной теорией относительности.

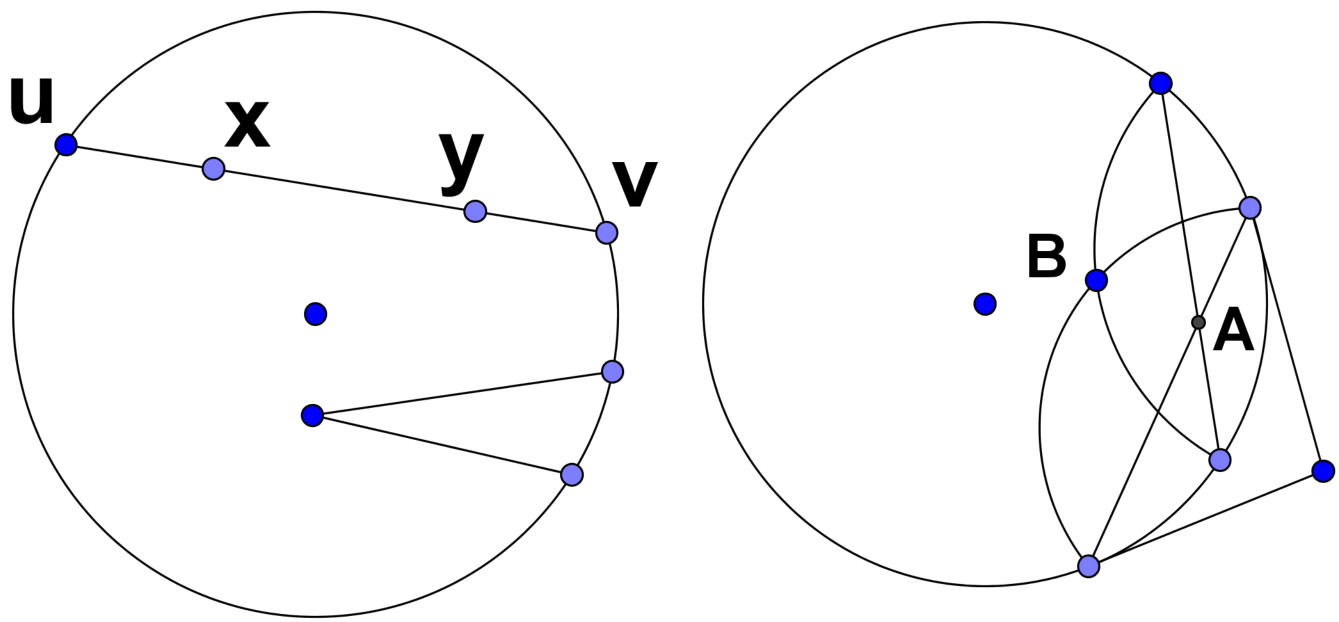
С помощью нее, в частности, доказана относительная непротиворечивость геометрии Лобачевского по отношению к геометрии Евклида, а затем и по отношению к теории вещественных чисел, т.е. геометрия Лобачевского непротиворечива, если непротиворечива теория вещественных чисел.

Э. Бельтрами показал, что область из этой модели можно взаимно-однозначно и с сохранением длин соответствующих дуг отобразить на область поверхности, которая называется псевдосферой. См. изображение псевдосферы.



Пусть $\Lambda = B(O, r)$ $(\mathbb{S}(O, r))$ — открытый круг (окружность) радиуса r с центром в фиксированной точке O евклидовой плоскости $\mathbb{E}$.

Точка в **модели Бельтрами–Клейна** плоскости Лобачевского есть точка в круге Λ, прямая (или л-прямая, если ее нужно отличить от евклидовой прямой) — хорда этого круга (очевидно, без концов), л-отрезок — отрезок на некоторой хорде.



Обозначим через $|xy|$ расстояние между точками $x, y \in \mathbb{E}$ и через $L[x, u) \subset \mathbb{E}$ — луч с началом в точке x, содержащий точку $u \neq x$.

Поставим в соответствие любой паре точек x, $y \in \Lambda$ неотрицательное вещественное число $\rho(x, y)$ такое, что

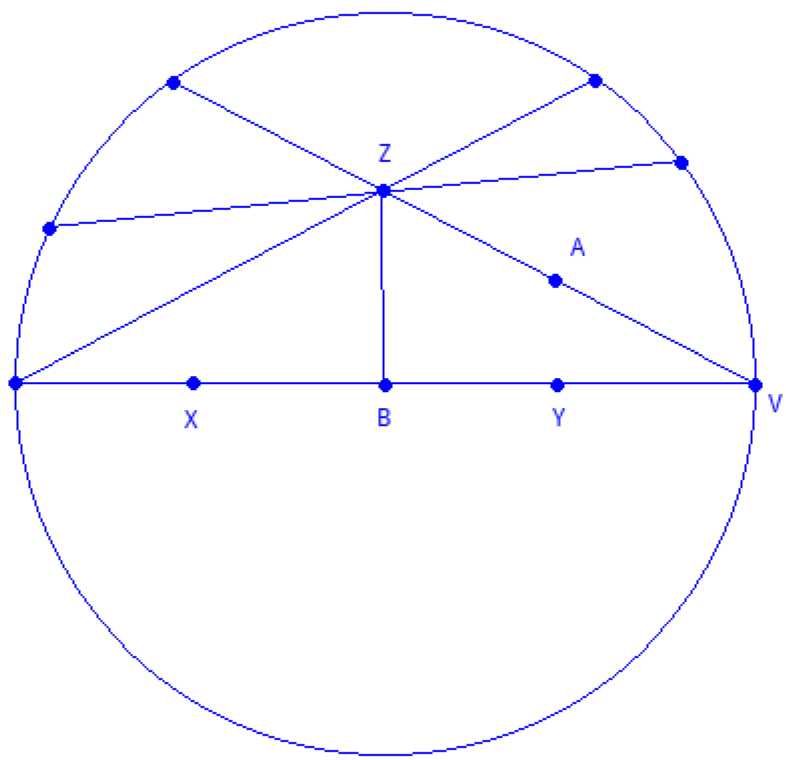
$$\rho(x, x) = 0 \qquad \text{и при } x \neq y \quad \rho(x, y) = \frac{k}{2} \ln \frac{|xv||yu|}{|xu||yv|},$$

где v (u) — точка пересечения луча $L[x, y)$ $(L[y, x))$ с окружностью $\mathbb{S}(O, r)$, k — некоторая положительная вещественная константа. Отметим, что под знаком натурального логарифма находится так называемое сложное отношение четырех точек x, y, v, u на прямой.

Если л-прямые пересекаются в центре круга, то за **величину л-угла**, образованного ими, принимается величина евклидова угла между ними.

Если л-прямые пересекаются не в центре, то величина л-угла есть величина е-угла между дугами окружностей, перпендикулярными окружности $\mathbb{S}(O,r)$, одна из которых проходит через концы одной, а другая — через концы второй хорды.

Для данной хорды центр окружности, проходящей через ее концы перпендикулярно окружности $\mathbb{S}(O,r)$, находится в точке пересечения касательных к окружности $\mathbb{S}(O,r)$, проведенных в концах хорды.



Пусть точка Z не принадлежит л-прямой $P[X,Y]$. Л-луч $L[Z,A)$ называется **л-параллельным** л-лучу $L[X,Y)$, если точки пересечения этих лучей с окружностью $\mathbb{S}(0,r)$ совпадают.

Прямые $P[Z,A]$ и $P[X,Y]$ называются в этом случае **параллельными** (в направлении этих лучей).

Проведем из точки Z л-перпендикуляр $P[Z,B]$ к л-прямой $P[X,Y]$.

Л-угол (и его величина) между л-лучами $L[Z,A)$ и $L[Z,B)$ называется **углом параллельности** (в данной точке относительно данной ориентированной прямой).

Две л-прямые в плоскости Лобачевского называются **расходящимися** или сверхпараллельными, если они не пересекаются и не являются л-параллельными.

Таким образом, **через точку вне данной л-прямой в плоскости Лобачевского проходят точно две прямые, л-параллельные данной л-прямой, и бесконечно много л-прямых, сверхпараллельных данной л-прямой**.

В модели Бельтрами–Клейна мы будем задавать точки их радиус-векторами относительно точки O и обозначать эти радиус-векторы жирным шрифтом.

Напомним формулы для гиперболических косинуса, синуса, тангенса и ветви ареа-косинуса:

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}\,, \qquad \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}\,, \qquad \operatorname{th} t = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}\,,$$

$$\operatorname{Arch} u = \ln\left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right), \quad u \geq 1.$$

Получим еще две формулы для расстояния ρ (первая получена в 1871 году Ф. Клейном, вторая — в 1868 году Э. Бельтрами), избавившись от точек u, v, принадлежащих так называемому **абсолюту** $\mathbb{S}(0,r)$ модели Бельтрами–Клейна плоскости Лобачевского Λ:

$$\rho(x,y)=\frac{k}{2}\ln\,\frac{A+\sqrt{\Delta}}{A-\sqrt{\Delta}}\,,\qquad \operatorname{ch}\frac{\rho(x,y)}{k}=\frac{r^2-(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\sqrt{r^2-\mathbf{x}^2}\sqrt{r^2-\mathbf{y}^2}}\,,$$

где $\Delta=A^2-B$, $A=r^2-(\mathbf{x},\mathbf{y})$, $B=(r^2-\mathbf{x}^2)(r^2-\mathbf{y}^2)$, $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ — скалярное произведение радиус-векторов точек x, $y\in\Lambda$, $\mathbf{x}^2$ — скалярный квадрат радиус-вектора точки x. В частности,

$$\rho(0,y)=\frac{k}{2}\ln\,\frac{r+|\mathbf{y}|}{r-|\mathbf{y}|}=k\operatorname{Arch}\frac{r}{\sqrt{r^2-\mathbf{y}^2}}\,,$$

$$|\mathbf{y}|=r\operatorname{th}\frac{\rho(0,y)}{k},$$

где $|\mathbf{y}|=\sqrt{\mathbf{y}^2}$ — евклидова длина вектора $\mathbf{y}$.

3. Движения плоскости Лобачевского

Движением плоскости Лобачевского называется взаимно-однозначное отображение $f:\Lambda\to\Lambda$ этой плоскости на себя, сохраняющее расстояния, т.е. обладающее свойством: $\rho(f(x),f(y))=\rho(x,y)$ для любых x, $y\in\Lambda$.

Очевидно, что тождественное отображение является движением, композиция движений есть движение и обратное отображение для произвольного движения является движением.

Выясним, какой вид имеет произвольное движение в модели Бельтрами–Клейна.

Если ввести прямоугольную декартову систему координат с началом в центре O, то поворот против часовой стрелки на угол φ относительно начала с возможным отражением относительно оси абсцисс примет вид

$$\hat{x} = x\cos\varphi \mp y\sin\varphi,$$

$$\hat{y} = x\sin\varphi \pm y\cos\varphi,$$

где верхние знаки соответствуют только повороту.

Очевидно, что это преобразование является движением в модели Бельтрами–Клейна.

Пусть $\mathbf{e}$ — фиксированный единичный вектор.
Радиус-вектор произвольной точки $x \in B(0,1)$ можно представить в форме $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e} + \mathbf{x}_2$, где $x_1 = (\mathbf{x}, \mathbf{e})$ и $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x} - x_1\mathbf{e}$.

Параллельным переносом на вектор (вдоль направленного отрезка) $\mathbf{a} = p\mathbf{e}$, где $p = |\mathbf{a}| < 1$, в модели Бельтрами–Клейна называется отображение $g_{\mathbf{a}} : B(0,1) \to B(0,1)$, имеющее вид

$$\hat{x}_1 = \frac{x_1 + p}{1 + px_1}, \qquad \hat{\mathbf{x}}_2 = \frac{\mathbf{x}_2\sqrt{1-p^2}}{1 + px_1}.$$

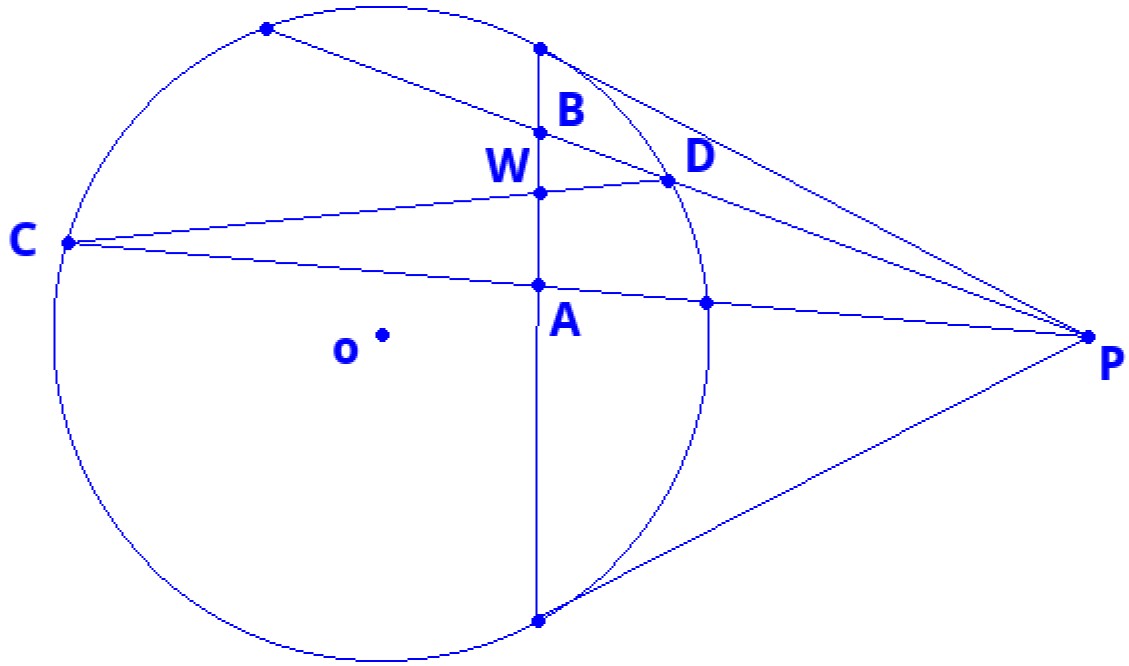
Параллельный перенос в векторной форме

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{(x_1 + p)\mathbf{e}}{1 + px_1} + \frac{\mathbf{x}_2\sqrt{1-p^2}}{1 + px_1} = \frac{((\mathbf{a},\mathbf{x}) + \mathbf{a}^2)\mathbf{a} + (\mathbf{a}^2\mathbf{x} - (\mathbf{a},\mathbf{x})\mathbf{a})\sqrt{1-\mathbf{a}^2}}{\mathbf{a}^2(1 + (\mathbf{a},\mathbf{x}))}.$$

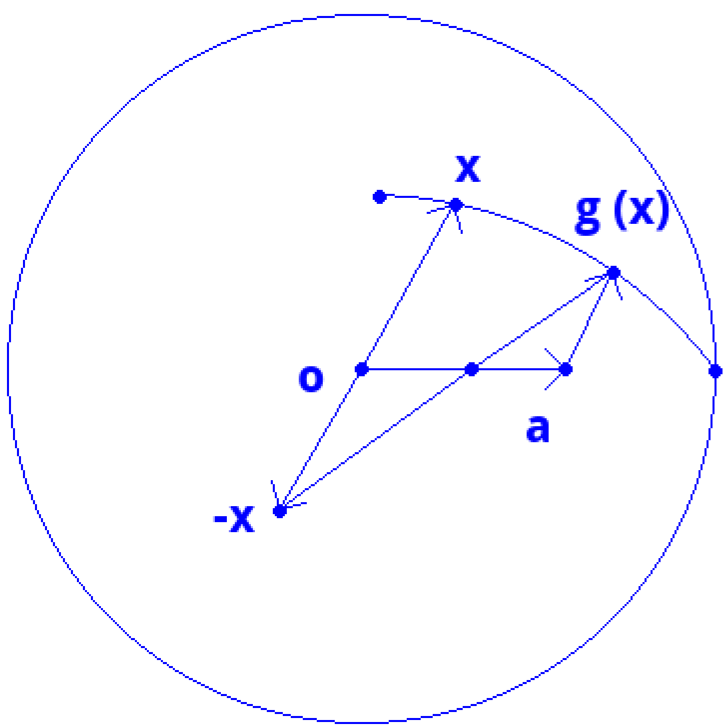
Легко установить, что это взаимно-однозначное отображение, обратное для которого есть параллельный перенос на вектор $(-\mathbf{a})$, т.е. имеет вид

$$g_{\mathbf{a}}^{-1} = g_{-\mathbf{a}} : \; x_1 = \frac{\hat{x}_1 - p}{1 - p\hat{x}_1}, \qquad \mathbf{x}_2 = \frac{\hat{\mathbf{x}}_2\sqrt{1-p^2}}{1 - p\hat{x}_1}.$$

Представим параллельный перенос геометрически.



B
W
D
C
A
o
P



x
g (x)
o
a
-x

Параллельный перенос является движением в модели Бельтрами–Клейна.

С помощью параллельного переноса можно дать еще одно определение величины л-угла: **величина л-угла** есть величина евклидова угла, полученного л-параллельным переносом исходного л-угла так, чтобы его вершина перешла в центр круга O.

В модели Бельтрами–Клейна любое движение f имеет вид композиции $f = g_{f(0)} \circ U$ поворота U на некоторый угол относительно центра O с возможным отражением относительно фиксированного диаметра и параллельного переноса на вектор $f(0)$.

Отметим, что в модели Бельтрами–Клейна композиция двух параллельных переносов может не оказаться параллельным переносом (возможно добавление поворота на некоторый угол).

Если не выделять составляющие в движении в модели Бельтрами–Клейна плоскости Лобачевского, то его можно записать в декартовых координатах следующим образом

$$\hat{x} = \frac{ax + by + c}{px + qy + r}, \qquad \hat{y} = \frac{lx + my + n}{px + qy + r},$$

где вещественные коэффициенты удовлетворяют условиям:

$$a^2 + l^2 - p^2 = b^2 + m^2 - q^2 = -c^2 - n^2 + r^2 = 1,$$

$$ab + lm - pq = ac + ln - pr = bc + mn - qr = 0.$$

В модели Бельтрами–Клейна можно проверить, что за исключением пятого постулата все аксиомы планиметрии Евклида верны.

4. Теорема Пифагора. Теоремы синусов, косинусов и двойственная теорема косинусов. Длины средней линии и медианы, точка пересечения медиан в треугольнике

Начнем с аналога теоремы Пифагора.

Для прямоугольного л-треугольника с гипотенузой c_l и катетами a_l, b_l имеет место формула

$$\operatorname{ch}\frac{c_l}{k} = \operatorname{ch}\frac{a_l}{k}\operatorname{ch}\frac{b_l}{k}.$$

Отметим, что при достаточно малых

$$\frac{a_l}{k}, \qquad \frac{b_l}{k}, \qquad \frac{c_l}{k}$$

из аналога теоремы Пифагора следуют приближенные равенства

$$1+\frac{c_l^2}{k^2} \approx \left(1+\frac{a_l^2}{k^2}\right)\left(1+\frac{b_l^2}{k^2}\right), \qquad c_l^2 \approx a_l^2 + b_l^2,$$

т.е. в пределе при $k \to \infty$ аналог перейдет в теорему Пифагора, поэтому слово "аналог" часто опускается.

Следующие формулы, полученные Н. И. Лобачевским, выражают угол параллельности в виде функции длины перпендикуляра $x_l = \rho(z, b)$

$$\alpha_l = 2\operatorname{arctg} e^{-\frac{x_l}{k}} \qquad \cos\,\alpha_l = \operatorname{th}\frac{x_l}{k}.$$

Первая функция называется функцией Лобачевского.

Для упрощения обозначений всюду в остальных формулах этого раздела положим $k = 1$.

Пусть дан л-треугольник с длинами сторон a_l, b_l, c_l и противолежащими этим сторонам углами с величинами α_l, β_l, γ_l соответственно. Рассмотрим несколько теорем планиметрии Лобачевского.

1. Теорема синусов.

$$\frac{\mathrm{sh}\ a_l}{\sin\ \alpha_l} = \frac{\mathrm{sh}\ b_l}{\sin\ \beta_l} = \frac{\mathrm{sh}\ c_l}{\sin\ \gamma_l}.$$

2. Теорема косинусов.

$$\mathrm{ch}\ c_l = \mathrm{ch}\ a_l\, \mathrm{ch}\ b_l - \mathrm{sh}\ a_l\, \mathrm{sh}\ b_l \cos\ \gamma_l.$$

3. Двойственная теорема косинусов.

$$\cos\ \gamma_l = -\cos\ \alpha_l \cos\ \beta_l + \sin\ \alpha_l \sin\ \beta_l\, \mathrm{ch}\ c_l.$$

В евклидовой геометрии у этой теоремы нет аналога. Из нее следует, что в геометрии Лобачевского нет собственных подобий. В частности, любые подобные фигуры конгруэнтны.

4. Теорема о длине медианы m_l, проведенной к стороне c_l.

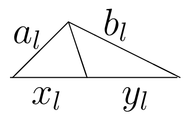
$$\mathrm{ch}\ m_l = \frac{\mathrm{ch}\ a_l + \mathrm{ch}\ b_l}{2\,\mathrm{ch}\ \dfrac{c_l}{2}}\,.$$

5. Теорема о длине средней линии d_l, проведенной к сторонам a_l и b_l.

$$\mathrm{ch}\ d_l = \frac{\mathrm{ch}\ a_l + \mathrm{ch}\ b_l + \mathrm{ch}\ c_l + 1}{4\,\mathrm{ch}\ \dfrac{a_l}{2}\,\mathrm{ch}\ \dfrac{b_l}{2}}\,.$$

6. Теорема о биссектрисе, основание которой делит сторону c_l на отрезок x_l, имеющий общую вершину со стороной a_l, и отрезок y_l, имеющий общую вершину со стороной b_l.

$$\frac{\mathrm{sh}\ a_l}{\mathrm{sh}\ b_l} = \frac{\mathrm{sh}\ x_l}{\mathrm{sh}\ y_l}\,.$$



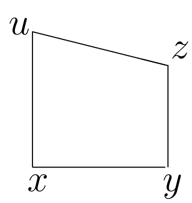
7. Сумма величин внутренних углов л-треугольника меньше двух прямых. Поэтому для л-треугольника T вводят положительное число

$$\sigma(T) = \pi - (\alpha_l + \beta_l + \gamma_l),$$

которое называется **(угловым) дефектом л-треугольника** T.

Для **четырехугольника Ибн ал-Хайсама–Ламберта** $xyzu$ с прямыми углами при вершинах x, y, z и, следовательно, острым углом α_l при вершине u имеет место формула

$$\mathrm{sh}\ \rho(x,u) = \mathrm{ch}\ \rho(z,u)\,\mathrm{sh}\ \rho(y,z).$$



8. Не через всякую точку внутри л-угла можно провести л-прямую, пересекающую обе его стороны.

9. Существуют л-треугольники, через вершины которых невозможно провести окружность.

10. Не у всякого л-треугольника высоты пересекаются в одной л-точке.

Отметим еще представление радиус-вектора $\mathbf{w}$ середины отрезка в модели Бельтрами–Клейна через радиус-векторы его концов x и y

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{x}\,\mathrm{ch}\ \rho(0,x) + \mathbf{y}\,\mathrm{ch}\ \rho(0,y)}{\mathrm{ch}\ \rho(0,x) + \mathrm{ch}\ \rho(0,y)} = \frac{\mathbf{x}\sqrt{1-\mathbf{y}^2} + \mathbf{y}\sqrt{1-\mathbf{x}^2}}{\sqrt{1-\mathbf{y}^2} + \sqrt{1-\mathbf{x}^2}}$$

и представление радиус-вектора $\mathbf{r}$ точки пересечения трех медиан треугольника через радиус-векторы вершин треугольника x, y и z.

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{x}\,\mathrm{ch}\ \rho(0,x) + \mathbf{y}\,\mathrm{ch}\ \rho(0,y) + \mathbf{z}\,\mathrm{ch}\ \rho(0,z)}{\mathrm{ch}\ \rho(0,x) + \mathrm{ch}\ \rho(0,y) + \mathrm{ch}\ \rho(0,z)}.$$

5. Расстояние от точки до прямой. Величина угла между прямыми

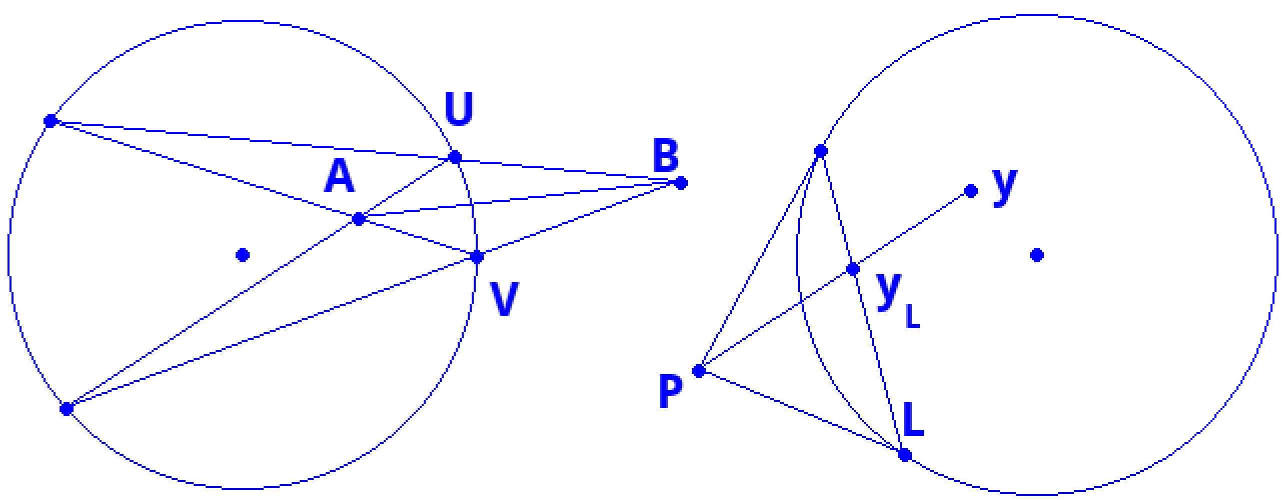
Пусть л-прямая L в модели Бельтрами–Клейна в круге $B(0,1)$ имеет уравнение

$$(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = p,$$

где $|\mathbf{n}| = 1$, $|\mathbf{x}| < 1$, $0 \leq p < 1$. Радиус-вектор $\mathbf{y}_L$ л-ортогональной проекции точки y на эту прямую нетрудно найти в виде

$$\mathbf{y}_L = \frac{(1-p^2)\mathbf{y} + (p - (\mathbf{n}, \mathbf{y}))\mathbf{n}}{1 - p(\mathbf{n}, \mathbf{y})} \,.$$

.



Величину л-угла между прямой L и прямой L_1 с уравнениями

$$(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = p, \qquad (\mathbf{n}_1, \mathbf{x}) = p_1,$$

где $|\mathbf{n}| = |\mathbf{n}_1| = 1$ и $0 \leq p\,, p_1 < 1$, можно найти из формулы

$$\cos\varphi_l = \frac{|(\mathbf{n}, \mathbf{n}_1) - pp_1|}{\sqrt{1-p^2}\sqrt{1-p_1^2}}\,.$$

Данные прямые пересекаются, расходятся, перпендикулярны, если правая часть этого равенства меньше 1, больше 1, равна 0 соответственно.

В частности, условие перпендикулярности прямых имеет вид

$$(\mathbf{n}, \mathbf{n}_1) = pp_1.$$

Нетрудно построить единственный общий перпендикуляр для двух данных расходящихся л-прямых и доказать, что л-параллельные прямые не имеют общего перпендикуляра.

6. Риманова метрика плоскости Лобачевского в модели Бельтрами–Клейна. Длина окружности. Элемент площади. Площадь круга и треугольника

Риманова метрика в модели Бельтрами–Клейна в круге $B(0, k)$ имеет вид

$$dl^2 = \frac{k^2((k^2 - \mathbf{x}^2)d\mathbf{x}^2 + (\mathbf{x}, d\mathbf{x})^2)}{(k^2 - \mathbf{x}^2)^2} =$$

$$= \frac{k^2((k^2 - y^2)dx^2 + 2xydxdy + (k^2 - x^2)dy^2)}{(k^2 - x^2 - y^2)^2}.$$

В полярных координатах

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi$$

эта риманова метрика примет вид

$$dl^2 = \frac{k^2((k^2 - \rho^2)(d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2) + \rho^2 d\rho^2)}{(k^2 - \rho^2)^2}.$$

Пусть в евклидовой плоскости дана окружность радиуса $r < k$ с центром в O.

Ее уравнение в полярных координатах имеет вид $\rho = r$. Тогда в модели Бельтрами–Клейна ей соответствует л-окружность радиуса r_l с уравнением

$$\rho = k \operatorname{th} \frac{r_l}{k}.$$

Используя это уравнение и риманову метрику, можно найти длину l этой окружности

$$l = 2\pi k \operatorname{sh} \frac{r_l}{k}.$$

С помощью римановой метрики можно вычислить также площадь S_r круга радиуса $r = k \operatorname{th} \frac{r_l}{k}$.

$$S_r = 2\pi k^2 (\operatorname{ch} \frac{r_l}{k} - 1) = 4\pi k^2 \operatorname{sh}^2 \frac{r_l}{2k}$$

и площадь л-треугольника T с величинами внутренних углов α_l, β_l, γ_l

$$S = k^2(\pi - \alpha_l - \beta_l - \gamma_l) = k^2 \sigma(T).$$

Таким образом, **площадь треугольника в плоскости Лобачевского пропорциональна его дефекту**.

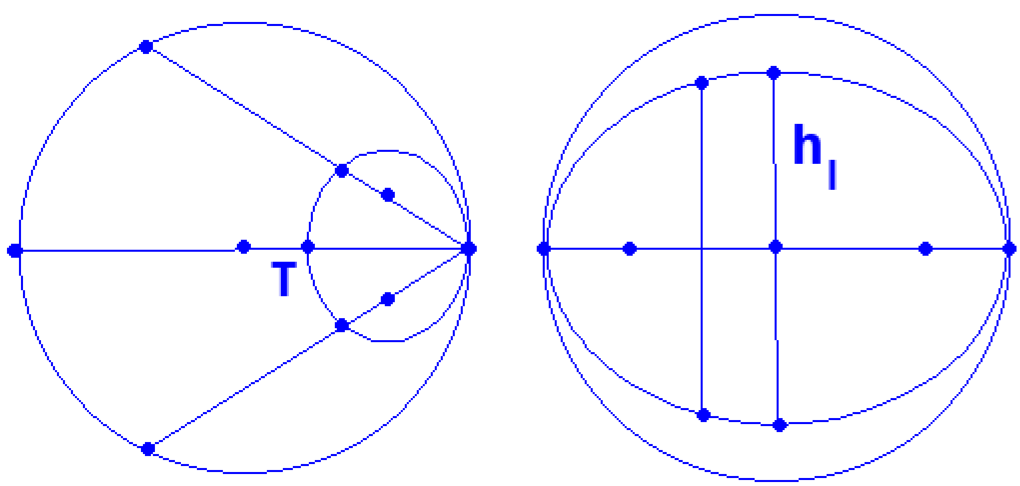
Отметим, что, если все вершины треугольника лежат на абсолюте, то его л-площадь равна $k^2\pi$. Такая фигура называется **трижды вырожденным треугольником** в плоскости Лобачевского.

7. Орицикл и эквидистанта

Орициклом называется предельное положение окружности плоскости Лобачевского при условии, что ее центр неограниченно удаляется от фиксированной точки этой окружности по диаметру, проходящему через эту точку.

Пусть фиксированная точка $T(t;0)$ и диаметр лежат на оси абсцисс. Тогда уравнение орицикла можно привести к виду

$$\frac{\left(x-\dfrac{1+t}{2}\right)^2}{\dfrac{(1-t)^2}{4}}+\frac{y^2}{\dfrac{1-t}{2}}=1.$$



Таким образом, орицикл плоскости Лобачевского в модели Бельтрами–Клейна изображается эллипсом без одной вершины с евклидовым центром $\left(\dfrac{1+t}{2};0\right)$, касающимся в одной точке абсолюта $\mathbb{S}(0,1)$.

Орицикл ортогонально пересекает все л-прямые, л-параллельные оси абсцисс.

Если в трехмерном пространстве повращать круг $\mathbf{B}(0,1)$ вокруг оси абсцисс, то в полученной трехмерной модели Бельтрами–Клейна пространства Лобачевского орицикл образует при вращении так называемую **орисферу**, моделируемую эллипсоидом вращения. Можно доказать, что **на орисфере индуцируется евклидова геометрия.**

Эквидистантой называется множество всех точек плоскости Лобачевского, равноудаленных от фиксированной прямой (**базы эквидистанты**). В евклидовом случае эквидистанта есть пара прямых, параллельных базе.

Пусть положительное постоянное расстояние от точки эквидистанты до ее базы (**высота эквидистанты**) есть h_l и $y=0$ — уравнение базы. Тогда уравнение эквидистанты имеет вид

$$x^2+\frac{y^2}{\mathrm{th}^2\ h_l}=1.$$

Таким образом, эквидистанта изображается эллипсом без двух вершин (расположенных на абсолюте).

Если в трехмерном пространстве повращать круг $\mathbf{B}(0,1)$ вокруг оси ординат, то в полученной трехмерной модели Бельтрами–Клейна пространства Лобачевского эквидистанта образует при вращении так называемую **эквидистантную поверхность**, моделируемую эллипсоидом вращения без экваториального сечения.

Можно доказать, что **на эквидистантной поверхности индуцируется геометрия Лобачевского.**