УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2018, Т. 160, кн. 4 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 750–761 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 517.54

ГАХОВСКИЕ БАРЬЕРЫ И ЭКСТРЕМАЛИ ДЛЯ ЛИНИЙ УРОВНЯ

А.В. Казанцев

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Регулярный класс Гахова $\mathcal{G}_1$ состоит из всех голоморфных и локально однолистных функций f в единичном круге с единственным корнем уравнения Гахова, который является максимумом гиперболической производной (конформного радиуса) функции f. Для классов $\mathcal{H}$, определяемых условиями типа Нехари, Беккера и некоторыми другими, решена задача вычисления гаховского барьера – величины $\rho(\mathcal{H}) = \sup\{r \geq 0 : \mathcal{H}_r \subset \mathcal{G}_1\}$, где $\mathcal{H}_r = \{f_r : f \in \mathcal{H}\}$, $0 \leq r \leq 1$, и эффективного описания гаховской экстремали – множества функций $f \in \mathcal{H}$, для которых линии уровня f_r покидают $\mathcal{G}_1$ при переходе r через $\rho(\mathcal{H})$. Представлены оба возможных варианта бифуркации, обеспечивающие выход из $\mathcal{G}_1$ по линиям уровня.

Ключевые слова: уравнение Гахова, класс Гахова, гиперболическая производная, конформный радиус, гаховский поперечник, гаховский барьер, гаховская экстремаль

Введение

В настоящей работе развивается постановка из работы [1], связанная с выходом из множества Гахова по линиям уровня. Напомним указанную постановку и опишем основные результаты.

Пусть H – класс функций f, голоморфных в $\mathbb{D} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$, A – подкласс H функций f с нормировками $f(0) = f'(0) - 1 = 0$, H_0 – класс функций $f \in A$, удовлетворяющих условию локальной однолистности в $\mathbb{D}$: неравенство $f'(\zeta) \neq 0$ выполняется при всех $\zeta \in \mathbb{D}$. Для локально однолистной в $\mathbb{D}$ функции $f \in H$ корректно определено уравнение Гахова

$$f''(\zeta)/f'(\zeta) = 2\bar{\zeta}/(1 - |\zeta|^2), \tag{1}$$

множество решений которого обозначается через M_f; k_f – число элементов M_f. Известно [2, 3], что элементы M_f суть критические точки гиперболической производной (конформного радиуса)

$$h_f(\zeta) = (1 - |\zeta|^2)|f'(\zeta)| \tag{2}$$

функции f; каждая из таких точек может быть только локальным максимумом, седлом или полуседлом поверхности $h = h_f(\zeta)$.

Рассмотрим регулярный класс Гахова $\mathcal{G}_1$, состоящий из функций $f \in H_0$, для которых уравнение (1) имеет единственный корень в $\mathbb{D}$, являющийся максимумом функции (2) (см. [4]). С использованием линий уровня

$$f_r(\zeta) = f(r\zeta)/r, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad f_0(\zeta) \equiv \zeta, \tag{3}$$

функции f вводим слоение

$$\mathfrak{R}_f[0,1] = \bigcup_{r\in[0,1]} M_{f_r} \times \{r\}$$

и функционал

$$\bar{r}_f = \sup\{r \in [0,1] : \xi \in [0,r] \Rightarrow f_\xi \in \mathcal{G}_1\},$$

который будем называть *гаховским барьером для семейства* (3) (ср. с [5]).

Для произвольного выбора числа $r \in [0,1]$, функции $f \in H_0$ и подкласса $X \subset H_0$ введем обозначения

$$L_r(f) = \{f_\xi : 0 \le \xi \le r\} \quad \text{и} \quad L_r(X) = \bigcup_{f\in X} L_r(f).$$

Гаховский поперечник $\rho(X)$ класса $X \subset H_0$, определяемый соотношением $\rho(X) = \inf\{\bar{r}_f : f \in X\}$, будем называть *гаховским барьером для серии классов* $\{L_r(X)\}_{r\in[0,1]}$, множество $E(X) = \{f \in X : \bar{r}_f = \rho(X)\}$ – *гаховской экстремалью* для той же серии. Легко убедиться, что величины $\bar{r}_f$ и $\rho(X)$ можно определить в терминах L_r: справедливы равенства

$$\bar{r}_f = \sup\{r \in [0,1] : L_r(f) \subset \mathcal{G}_1\} \quad \text{и} \quad \rho(X) = \sup\{r \in [0,1] : L_r(X) \subset \mathcal{G}_1\},$$

выражающие параметры выхода из множества $\mathcal{G}_1$ вдоль отдельной траектории вида (3) и вдоль серии классов $\{L_r(X)\}_{r\in[0,1]}$. Задача состоит в отыскании гаховских барьеров и экстремалей для различных подклассов $X \subset H_0$. При этом выход из $\mathcal{G}_1$ вдоль отдельных траекторий допускает следующие варианты.

Свойство А. *Выход из $\mathcal{G}_1$ по голоморфным и локально однолистным траекториям может происходить за счет только двух типов бифуркаций слоения $\mathfrak{R}_f[0,1]$. Это* 1) *тип Ψ: максимум переходит в два максимума и седло*; 2) *тип $\cup$: при имеющемся максимуме возникает* (*ненулевое*) *полуседло, распадающееся затем в седло и максимум* (*таких полуседел может быть сразу несколько*).

В случае, когда указанными траекториями являются линии уровня (3), выполнение свойства А установлено в работе [1]; для лучей Хорнича данное свойство доказано в статье [6], в общем случае квазилевнеровской динамики – в статье [7].

Ясно, что если $X \subset \mathcal{G}_1$, то $\rho(X) = 1$ и $E(X) = X$.

Поставленная выше задача будет решаться, в частности, для подклассов функций $f \in H_0$ с дополнительным условием $f''(0) = 0$, означающим, что $0 \in M_f$; для любого подкласса $X \subset H$ используем обозначение $\widetilde{X} = X \bigcap \{f \in H : f''(0) = 0\}$, а для произвольного семейства $\mathcal{J} = \{J(\alpha)\}_{\alpha\ge 0}$ подклассов $J(\alpha) \subset H_0$ обозначим $\widetilde{\mathcal{J}} = \{\widetilde{J}(\alpha)\}_{\alpha\ge 0}$, где $\widetilde{J}(\alpha) = J(\alpha) \bigcap \widetilde{H}$ при $\alpha \ge 0$.

Введем ряд определений. Пусть $\mathcal{J} = \{J(\alpha)\}_{\alpha\ge 0}$ – семейство подклассов H_0 такое, что 1) $J(\alpha_1) \subset J(\alpha_2)$ при $\alpha_1 < \alpha_2$ и 2) $\widetilde{J}(0) = \{f_0(\zeta) \equiv \zeta\}$. Пусть, далее, $\bar{\alpha}(\mathcal{J}) = \inf\{\alpha \ge 0 : J(\alpha) \not\subset \mathcal{G}_1\}$. Семейство $\mathcal{J}$ будем называть *допустимым по Гахову*, если $\bar{\alpha}(\mathcal{J}) > 0$ (ср. [5]).

Предположим, что семейство $\mathcal{J}$ допустимо по Гахову, и фиксируем произвольное значение $\alpha > \bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\mathcal{J})$ такое, что $E(J(\alpha)) \ne \varnothing$, а величина $\rho = \rho(J(\alpha))$ лежит в интервале $(0,1)$. Значение α называется *параметром* Ψ- или $\cup$-*выхода из класса $\mathcal{G}_1$ по линиям уровня для семейства* $\mathcal{J}$ соответственно тому, будет ли выполняться соотношение $f_\rho \in \mathcal{G}_1$ или $f_\rho \notin \mathcal{G}_1$ для любой функции $f \in E(J(\alpha))$. Согласно лемме 1 из [1] указанным вариантам соответствуют сценарии 1) и 2) свойства А.

Условие $\alpha \le \bar{\alpha} \Rightarrow J(\alpha) \subset \mathcal{G}_1$ (с возможными уточнениями при $\alpha = \bar{\alpha}$) будем называть Ψ- или $\cup$-*условием единственности корня уравнения Гахова на линиях уровня*, если все значения α из некоторой правой окрестности точки $\bar{\alpha}$ являются параметрами соответственно Ψ- или $\cup$-выхода из класса $\mathcal{G}_1$ по линиям уровня для семейства $\mathcal{J}$.

В разд. 1 будет построено $\cup$-условие единственности, являющееся аналогом теоремы 1 из [1] (см. также [8]). Оставшаяся часть статьи посвящена отысканию гаховских барьеров $\rho(X)$ и экстремалей $E(X)$, когда X пробегает следующие семейства подклассов A, лежащих в H_0 благодаря своим определяющим условиям.

Речь идет о семействах $\mathcal{N} = \{N(a)\}_{a\ge 0}$, $\mathcal{B} = \{B(b)\}_{b\ge 0}$, $\widetilde{\mathcal{N}}$, $\widetilde{\mathcal{B}}$, а также о семействах $\widetilde{\mathcal{B}}_1$ и $\widetilde{\mathcal{B}}_2$ для $\mathcal{B}_1 = \{B_1(c)\}_{c\ge 0}$ и $\mathcal{B}_2 = \{B_2(d)\}_{d\ge 0}$. Здесь $N(a)$ – класс функций $f \in A$, удовлетворяющих условию типа Нехари

$$(1-|\zeta|^2)^2|\{f,\zeta\}| \le a, \quad \zeta \in \mathbb{D}, \tag{4}$$

причем $\{f,\zeta\} = (f''/f')'(\zeta) - (f''/f')^2(\zeta)/2$ – шварциан, $B(b)$ – класс функций $f \in A$, для которых выполняется неравенство

$$(1-|\zeta|^2)|(f''/f')'(\zeta)| \le b, \quad \zeta \in \mathbb{D}, \tag{5}$$

$B_1(c)$ и $B_2(d)$ – классы функций $f \in A$ с определяющими условиями типа Беккера

$$(1-|\zeta|^2)|\zeta f''(\zeta)/f'(\zeta)| \le c, \quad \zeta \in \mathbb{D} \tag{6}$$

и

$$(1-|\zeta|^2)|f''(\zeta)/f'(\zeta)| \le d, \quad \zeta \in \mathbb{D}. \tag{7}$$

Как известно (см. [6, 9]), $\bar{a}(\mathcal{N}) = \bar{b}(\mathcal{B}) = 2$ (условие $f''(0)=0$ не накладывается) и $\bar{c}(\widetilde{\mathcal{B}}_1) = 1/2$, $\bar{d}(\widetilde{\mathcal{B}}_2) = 4/(3\sqrt{3})$. Соответствующие условия (4)–(7) оказываются Ψ-условиями единственности корня уравнения Гахова на линиях уровня. Семейства $\mathcal{N}$ и $\mathcal{B}$ изучаются в разд. 2, семейства $\widetilde{\mathcal{B}}_1$ и $\widetilde{\mathcal{B}}_2$ – в разд. 3.

1. Ветвление полуседла

Теорема 1. *Пусть $a \ge 0$ – постоянная и пусть $\mathcal{F}$ – любой подкласс функций $f \in A$, удовлетворяющих условию*

$$|f''(\zeta)/f'(\zeta)| \le a|\zeta|/(1-|\zeta|), \quad \zeta \in \mathbb{D}. \tag{8}$$

Если $a \le 1$, то $\mathcal{F} \subset \widetilde{\mathcal{G}}_1$. Пусть $a > 1$. Обозначим $E = \bigcup\limits_{|\varepsilon|=1} E_\varepsilon$, где $E_\varepsilon = \{f \in \mathcal{F} : \varepsilon(f''/f')(\varepsilon/a) = a/(a-1)\}$. Тогда если семейство E непусто, то $\rho(\mathcal{F}) = \sqrt{2a-1}/a$ и $E(\mathcal{F}) = E$.

Доказательство. В силу (8) имеем $\mathcal{F} \subset H_0$. При $a \le 1$ и $0 \le r \le 1$ оценка (8) влечет за собой цепочку неравенств

$$\left|\frac{f_r''}{f_r'}(\zeta)\right| \le \frac{ar^2|\zeta|}{1-r|\zeta|} \le \frac{|\zeta|}{1-|\zeta|} < \frac{2|\zeta|}{1-|\zeta|^2}, \quad \zeta \in \mathbb{D}\setminus\{0\}. \tag{9}$$

Отсюда следует, что $\mathcal{F} \subset \widetilde{\mathcal{G}}_1$ и $E(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

Пусть $a > 1$. В этом случае (9) заменяется на цепочку

$$(1-|\zeta|^2)\left|\frac{1}{\zeta}\frac{f_r''}{f_r'}(\zeta)\right| \le ah_r(|\zeta|) \le ah_r(\rho_r) = 2a(1-\sqrt{1-r^2}) \le 2, \quad \zeta \in \mathbb{D}, \tag{10}$$

справедливую при $0 \le r \le r_a := \sqrt{2a-1}/a$, где $\rho_r = r/(1+\sqrt{1-r^2})$ – точка максимума функции $h_r(\rho) = r^2(1-\rho^2)/(1-r\rho)$ на $[0,1]$, лежащая в $(0,1)$ при $r \in (0,1)$. Поэтому если $f \in \mathcal{F}$ и $b \in M_{f_r} \setminus \{0\}$, $r \in [0, r_a]$, то с помощью (10) получаем, что $r = r_a$, $|b| = \rho_{r_a} = 1/\sqrt{2a-1}$ и

$$\bar{r}_f \ge r_a. \tag{11}$$

Обозначая $\zeta_{a,\varepsilon} = \varepsilon/\sqrt{2a-1}$, легко убедиться, что включение $\zeta_{a,\varepsilon} \in M_{f_{r_a}}$ эквивалентно равенству $\varepsilon(f''/f')(\varepsilon/a) = a/(a-1)$.

Если теперь $g \in E$, то $g \in E_\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon \in \partial\mathbb{D}$ и в силу только что доказанного имеем $\zeta_{a,\varepsilon} \in M_{g_{r_a}} \setminus \{0\}$, откуда $\bar{r}_g \le r_a$ по определению $\bar{r}_g$; с другой стороны, для функции g выполняется (11). Таким образом, равенство в оценке (11) при $f \in \mathcal{F}$ достигается на функции $f = g$. Значит, $\rho(\mathcal{F}) = \inf\{\bar{r}_f : f \in \mathcal{F}\} = r_a = \bar{r}_g$, откуда получается, что $g \in E(\mathcal{F})$. Итак, мы установили, что $\rho(\mathcal{F}) = r_a$ и $E \subset E(\mathcal{F})$. Осталось проверить справедливость включения $E(\mathcal{F}) \subset E$.

Пусть $f \in E(\mathcal{F})$, то есть $\bar{r}_f = r_a$. Это означает, что для любого $r > r_a$ вблизи r_a будет $k_{f_r} > 1$. Отсюда следует наличие последовательностей $r_n \downarrow r_a$ и $\zeta_n \to \zeta_0 \in \overline{\mathbb{D}}$ таких, что $\zeta_n \in M_{f_{r_n}} \setminus \{0\}$, $n \ge 1$. Выясним принадлежность точки ζ_0.

Возможность $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$ отклоняется леммой 2 из [8]; это позволяет заключить, что $\zeta_0 \in M_{f_{r_a}}$. Предположение $\zeta_0 = 0$ опровергается с помощью леммы 3 из [8], утверждающей справедливость равенства $|\{f_{r_a}, 0\}| = 2$, которое в рассматриваемом случае заведомо не выполняется. Действительно, в силу $f''(0) = 0$ имеют место соотношения $|\{f_{r_a}, 0\}| = \lim\limits_{\zeta\to 0} |(f''_{r_a}/f'_{r_a})(\zeta)/\zeta| \le a r_a^2 < 2$, основанные на первом неравенстве (9), следующем из (8) при любом $r \in [0,1]$ и любом $a \ge 0$, в частности при $a > 1$. Согласно доказанному выше принадлежность $\zeta_0 \in M_{f_{r_a}} \setminus \{0\}$ влечет за собой представление $\zeta_0 = \zeta_{a,\varepsilon}$ для некоторого $\varepsilon \in \partial\mathbb{D}$, что, в свою очередь, приводит к включению $f \in E_\varepsilon$, то есть $f \in E$, что и требовалось.

Теорема 1 доказана. □

Пусть $\mathcal{J}_1 = \{J_1(a)\}_{a\ge 0}$, где $J_1(a)$ – класс всех функций $f \in A$, удовлетворяющих условию (8).

Следствие 1. *Семейство $\mathcal{J}_1$ допустимо по Гахову, причем $\bar{a}(\mathcal{J}_1) = 1$. Условие $a \le 1 \Rightarrow J_1(a) \subset \mathcal{G}_1$ является $\cup$-условием единственности корня уравнения Гахова на линиях уровня.*

Как и в [1], через $\mathcal{V}_n$, $n \ge 1$, обозначим класс функций $\varphi \in H$, имеющих в $\mathbb{D}$ тейлоровские разложения вида $\varphi(\zeta) = \alpha\zeta^n + \cdots$ и удовлетворяющих условию $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

Замечание 1. Если в формулировке теоремы 1 в качестве $\mathcal{F}$ взять подкласс $J_1(a)$, то при $a > 1$ множество E заведомо не пусто: оно содержит все вращения функции

$$f_a(\zeta) = \int_0^\zeta e^{-au}(1-u)^{-a}\,du, \tag{12}$$

для которой $k_{f_{a,r}} > 1$ тогда и только тогда, когда $a > 1$ и $r \ge r_a$ с единственным исключением $a = 2$, $r = 1$, исследованным вместе со своими линиями уровня в примере 1 из [1].

В приводимой ниже ситуации множество E сводится к указанным вращениям.

Следствие 2. *Пусть $a > 0$ и $\varepsilon \in \partial\mathbb{D}$ – постоянные и пусть $\mathcal{F}$ совпадает с подклассом $\mathcal{F}_\varepsilon \subset \widetilde{A}$ всех функций, удовлетворяющих условию подчиненности*

$$\varepsilon\frac{f''}{f'}(\zeta) \prec \frac{a\zeta}{1-\zeta}, \quad \zeta \in \mathbb{D}. \tag{13}$$

Тогда если $a \le 1$, то $\mathcal{F} \subset \widetilde{\mathcal{G}}_1$, а если $a > 1$, то $\rho(\mathcal{F}) = \sqrt{2a-1}/a$, и множество $E(\mathcal{F})$ состоит из единственного вращения

$$f_{\bar\varepsilon}(\zeta) = \varepsilon f_a(\bar\varepsilon\zeta) \tag{14}$$

функции (12).

Доказательство. С учетом результатов, установленных в теореме 1, в обосновании нуждается только последнее утверждение следствия. Пусть $f \in E(\mathcal{F})$. В силу доказанного в теореме 1 существует $\xi \in \partial\mathbb{D}$ такое, что $f \in E_\xi$. Записывая для функции f условие (13) в форме соотношения

$$\varepsilon\frac{f''}{f'}(\zeta) = \frac{a\varphi(\zeta)}{1-\varphi(\zeta)}, \quad \zeta \in \mathbb{D}, \tag{15}$$

с участием функции $\varphi \in \mathcal{V}_1$ и пользуясь определением E_ξ из теоремы 1, получим представление

$$\frac{a\varepsilon\bar\xi}{a-1} = \varepsilon\frac{f''}{f'}(\xi/a) = \frac{a\varphi(\xi/a)}{1-\varphi(\xi/a)}, \tag{16}$$

исключающее строгую оценку $|\varphi(\xi/a)| < |\xi/a|$. Равенство $|\varphi(\xi/a)| = |\xi/a|$ по лемме Шварца приводит к функции $\varphi(\zeta) = \eta\zeta$ для некоторого $\eta \in \partial\mathbb{D}$. В этом случае из равенств (16) следует соотношение

$$(a-\eta\xi)/(\eta\xi) = (a-1)/(\varepsilon\bar\xi). \tag{17}$$

Переход к модулям в (17) дает равенство $\eta = \bar\xi$. Интегрируя соотношение (15) для $\varphi(\zeta) = \bar\xi\zeta$, приходим к (14), что и требовалось.

Таким образом, $E(\mathcal{F}_\varepsilon) = E_\varepsilon = \{f_{\bar\varepsilon}\}$, и следствие 2 доказано. □

Следующее утверждение, которое понадобится ниже, является незначительным усилением теоремы 1 из [1], уточненной в [8].

Теорема 2. *Пусть $a > 0$ – постоянная и пусть $\mathcal{F} \subset A$ – любой подкласс, для которого выполняется одно из следующих условий:*

i) *для каждой функции $f \in \mathcal{F}$ справедливо неравенство*

$$(1-|\zeta|^2)\left|\frac{1}{\zeta}\frac{f''}{f'}(\zeta)\right| \le a, \quad \zeta \in \mathbb{D}, \tag{18}$$

причем равенство в (18) *при $\zeta = 0$ (то есть $|\{f,0\}| = a$) достигается хотя бы на одной функции из $\mathcal{F}$;*

ii) *$\mathcal{F}$ компактно и каждая функция $f \in \mathcal{F}$ удовлетворяет неравенству*

$$\left|\frac{f''}{f'}(\zeta)\right| \le \frac{a|\zeta|}{1-|\zeta|^2}, \quad \zeta \in \mathbb{D}, \tag{19}$$

где $a = \sup\limits_{f\in\mathcal{F}} |\{f,0\}|$.

Тогда если $a \leq 2$, то $\rho(\mathcal{F}) = 1$ и $E(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$, а если $a > 2$, то $\rho(\mathcal{F}) = \sqrt{2/a}$ и $E(\mathcal{F}) = \{f \in \mathcal{F} : |\{f, 0\}| = a\}$.

Если, кроме того, $n \geq 1$ и $\iota : \mathcal{V}_n \to \mathcal{F} : \varphi \mapsto f$ – взаимно однозначное отображение, задаваемое подчиненностью вида $\Phi(\zeta; f(\zeta)) \prec F(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{D}$, так, что $f''(\zeta)/f'(\zeta) = a\gamma\zeta + \cdots$ при $\varphi(\zeta) = \gamma\zeta^n + \cdots$, то в случае $a > 2$ имеет место соотношение $E(\mathcal{F}) = \{\iota(\varepsilon\zeta^n) : |\varepsilon| = 1\}$.

Замечание 2. Неравенство (18) при $\zeta = 0$ понимается как $|\{f, 0\}| \leq a$. Таким образом, неравенства (18) и (19) эквивалентны и обеспечивают включение $\mathcal{F} \subset H_0$.

Замечание 3. Если $a < 2$, то $\mathcal{F} \subset \widetilde{\mathcal{G}}_1$ при выполнении любого из условий i) или ii). Если же $a = 2$, то, в отличие от соответствующего места теоремы 1, этого утверждать уже нельзя без наложения дополнительных условий, исключающих наличие полуседел в $\mathbb{D} \backslash \{0\}$. Пример ситуации, когда гиперболическая производная h_f имеет изолированные полуседла в $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ при выполнении условия (18) (или (19)) для $a = 2$, содержится в работе [1]. Другим источником нарушения условия $\mathcal{F} \subset \widetilde{\mathcal{G}}_1$ при $a = 2$ может служить наличие в классе $\mathcal{F}$ вращений функции

$$s(\zeta) = (1/2)\ln((1+\zeta)/(1-\zeta)), \tag{20}$$

для которой $M_s = \mathbb{D} \bigcap \mathbb{R}$.

Замечание 4. Частный случай слабой версии теоремы 2 был выделен в [10], но без ссылки на ее источник в [1].

Замечание 5. Усиление теоремы 2 по сравнению с [1, 8] связано со снятием ограничения $n = 2$ в ее заключительном утверждении. Иллюстрацией может служить класс $\mathcal{F} = \mathcal{F}_n$, $a \geq 0$, $n \geq 1$, функций $f \in A$, удовлетворяющих условию подчиненности $\zeta^{n-1}(f''/f')(\zeta) \prec aF(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{D}$, где F принадлежит классу $\widetilde{S}^*$ нормированных звездообразных функций в $\mathbb{D}$ таких, что $F''(0) = 0$ (см. также [11]).

Пусть $\mathcal{J}_2 = \{J_2(a)\}_{a \geq 0}$, где $J_2(a)$ – класс всех функций $f \in A$, удовлетворяющих условию i) теоремы 2.

Следствие 3. *Семейство $\mathcal{J}_2$ допустимо по Гахову, причем $\bar{a}(\mathcal{J}_2) = 2$. Условие $a \leq 2 \Rightarrow J_2(a) \subset \mathcal{G}_1$ (с возможными исключениями при $a = 2$) является Ψ-условием единственности корня уравнения Гахова на линиях уровня.*

Следствие 3 сохраняет свою силу, если семейство $\mathcal{J}_2$ строится по условию ii) теоремы 2.

2. Ψ-условия на шварциан и производную предшварциана

Обозначим $\rho_a = \sqrt{2/a}$ $(a > 0)$. Следующее утверждение очевидно.

Предложение 1. *Если $f \in N(a)$, $a > 0$, то для любого $r \in [0, 1]$ имеет место включение $f \in N(ar^2)$. В частности, если $a > 2$ и $r \in [0, \rho_a]$, то $f_r \in N(2)$ и $f \in \mathcal{G}_1$.*

Таким образом, если $f \in N(a)$ и $a > 2$, то функция f_{ρ_a} имеет единственный корень уравнения Гахова в $\mathbb{D}$ (напомним, что $M_{f_{\rho_a}} \neq \varnothing$ благодаря выполнению неравенства $\rho_a < 1$). Будем говорить, что функция $f \in N(a)$ принадлежит классу $E_{N(a)}$, если для единственного корня $\omega \in \mathbb{D}$ уравнения Гахова ее линии уровня f_{ρ_a} имеет место соотношение

$$(1 - |\omega|^2)^2 \{f_{\rho_a}, \omega\} = -2\bar{\omega}/\omega. \tag{21}$$

При $\omega = 0$ равенство (21) понимается как

$$\{f_{\rho_a}, 0\} = -2\bar{\varepsilon}^2 \tag{22}$$

для некоторого $\varepsilon \in \partial\mathbb{D}$. Класс функций $f \in \widetilde{N}(a)$, каждая из которых удовлетворяет условию (22) со своим ε, обозначим как $E_{\widetilde{N}(a)}$; очевидно, $E_{\widetilde{N}(a)} = \{f \in \widetilde{N}(a) : |\{f, 0\}| = a\}$ и $E_{\widetilde{N}(a)} \subset E_{N(a)}$.

Для любого $a > 2$ класс $E_{\widetilde{N}(a)}$ непуст: он содержит функцию

$$f_a(\zeta) = (w(\zeta) - 1)/(w(\zeta) + 1), \quad w(\zeta) = ((1 + \zeta)/(1 - \zeta))^q, \quad q = \sqrt{1 + a/2},$$

для которой $\{f_a, \zeta\} = -a/(1 - \zeta^2)^2$. Можно показать, что

$$\bar{r}_{f_a} = \rho_a. \tag{23}$$

Теорема 3. *Пусть* $a > 2$. *Тогда* 1) $\rho(N(a)) = \rho(\widetilde{N}(a)) = \rho_a$; 2) $E(\widetilde{N}(a)) = E_{\widetilde{N}(a)}$; 3) $E(N(a)) = E_{N(a)}$; 4) *значение* a *является параметром* Ψ*-выхода из класса* $\mathcal{G}_1$ *по линиям уровня для каждого из семейств* $\mathcal{N}$ *и* $\widetilde{\mathcal{N}}$.

Доказательство.

1) По определению ρ выполняется оценка $\rho(\widetilde{N}(a)) \geq \rho(N(a))$, а по предложению 1 – неравенство $\rho(N(a)) \geq \rho_a$. Равенство постоянной ρ_a гаховским барьерам для серий классов $\{L_r(X)\}_{r\in[0,1]}$, где $X = \widetilde{N}(a)$ и $X = N(a)$, следует теперь из соотношения (23).

2) Требуемое равенство устанавливается посредством цепочки эквивалентностей

$$f \in E(\widetilde{N}(a)) \Leftrightarrow \bar{r}_f = \rho_a \Leftrightarrow |\{f_{\rho_a}, 0)\}| = 2 \Leftrightarrow f \in E_{\widetilde{N}(a)}, \tag{24}$$

основанной на применении леммы 1 из [1] и предложения 1.

3) С учетом соотношений (24) достаточно доказать, что $E(N(a)) \setminus E(\widetilde{N}(a)) = E_{N(a)} \setminus E_{\widetilde{N}(a)}$. Таким образом, мы рассматриваем только те функции $f \in N(a)$, для каждой из которых единственный элемент ω множества M_{f_ρ} отличен от нуля. В данном случае цепочка (24) заменяется набором следующих эквивалентностей.

По определению и с использованием выводов 1) и неравенства $\omega \neq 0$ принадлежность $f \in E(N(a)) \setminus E(\widetilde{N}(a))$ имеет место тогда и только тогда, когда $\bar{r}_f = \rho_a$; по теореме 2 из [12] равенство $\bar{r}_f = \rho_a$ эквивалентно тому, что $\zeta = \omega$ – нуль второго порядка функции $g_{\rho_a} = \zeta f''_{\rho_a}/f'_{\rho_a}$, а условие $g'_{\rho_a}(\omega) = 0$ по лемме 1 из [12] равносильно соотношению (21), которое эквивалентно включению $f \in E_{N(a)} \setminus E_{\widetilde{N}(a)}$. Обратный переход от $g'_{\rho_a}(\omega) = 0$ к точному значению (равному 2) порядка нуля $\zeta = \omega$ обеспечивается предложением 1, благодаря которому $f_r \in \mathcal{G}_1$ при $r \in [0, \rho_a]$, и теоремой 2 из [12].

4) Требуемый вывод следует из предложения 1, согласно которому справедливо включение $f_{\rho_a} \in \mathcal{G}_1$ для любой функции $f \in N(a)$, в частности для всех $f \in E(N(a))$, а значит, и для всех $f \in E(\widetilde{N}(a))$.

Теорема 3 доказана. □

Замечание 6. В терминологии [13] каждое из эквивалентных условий, отмеченных в п. 3) доказательства теоремы 3, означает, что семейство (3) осуществляет пирсинг сферы Нехари $\mathbb{S} = \{h \in A : \|S_h\| = 2\}$ в область $H_0 \setminus \mathcal{G}_1$ в момент $r = \rho_a$ сквозь точку ω; здесь $\|S_h\| = \sup\limits_{\zeta\in\mathbb{D}}(1 - |\zeta|^2)^2|S_h(\zeta)|$ и $S_h(\zeta) = \{h, \zeta\}$.

Пусть $\mathcal{G}_0 = \{f \in H_0 : k_f = 0\}$ (см. [1]) и $\mathcal{S}$ – семейство вращений функции (20).

Следствие 4. *Импликация* $a \le 2 \Rightarrow N(a)\backslash(\mathcal{G}_0 \bigcup \mathcal{S}) \subset \mathcal{G}_1$ *является* Ψ*-условием единственности корня уравнения Гахова на линиях уровня.*

Ситуация с семействами $\mathcal{B}$ и $\widetilde{\mathcal{B}}$ аналогична исследованной выше. Поэтому представим только итоговый результат с необходимыми пояснениями.

Пусть $\rho_b = \sqrt{2/b}$. Легко показать, что утверждение предложения 1 остается справедливым при замене a на b и N на B. Класс $E_{B(b)}$ содержит в точности те функции $f \in B(b)$, каждая из которых удовлетворяет условию

$$(1-|\omega|^2)(f''_{\rho_b}/f'_{\rho_b})'(\omega) = -2\bar{\omega}/\omega \tag{25}$$

со своим $\omega \in \mathbb{D}$ – единственным элементом $M_{f_{\rho_b}}$. При $\omega = 0$ равенство (25) переходит в (22) с заменой a на b и с некоторым $\varepsilon \in \partial\mathbb{D}$. Такой переход определяет класс $E_{\widetilde{B}(a)}$; очевидно, $E_{\widetilde{B}(a)} = \{f \in \widetilde{B}(a) : |\{f,0\}| = b\}$ и $E_{\widetilde{B}(a)} \subset E_{B(a)}$. Для любого $b > 2$ класс $\widetilde{B}(b)$ содержит функцию f_b, для которой $f''_b(\zeta)/f'_b(\zeta) = (b/2)s(\zeta)$, где s – функция (20); имеет место равенство $\bar{r}_{f_b} = \rho_b$.

Теорема 4. *Пусть* $b > 2$. *Тогда справедливы равенства* $\rho(B(b)) = \rho(\widetilde{B}(b)) = \rho_b$ *и представления* $E(\widetilde{B}(b)) = E_{\widetilde{B}(b)}$ *и* $E(B(b)) = E_{B(b)}$. *Значение* b *есть параметр* Ψ*-выхода из класса* $\mathcal{G}_1$ *по линиям уровня для каждого из семейств* $\mathcal{B}$ *и* $\widetilde{\mathcal{B}}$.

Замечание 7. Часть теоремы 4, связанная с $\widetilde{B}(b)$, может быть доказана с помощью теоремы 2, так как принадлежность $f \in \widetilde{B}(b)$ влечет за собой оценку (19), где $a = b$, при любом $b \ge 0$ (в то время как импликация $f \in \widetilde{N}(a) \Rightarrow$(19) может использоваться только при $a \le 2$, см., например, [14, с. 50]).

Следствие 5. *Условие* $b \le 2 \Rightarrow B(b) \subset \mathcal{G}_1$ *является* Ψ*-условием единственности корня уравнения Гахова на линиях уровня.*

3. Условия типа Беккера

Гаховские барьеры и экстремали для серий классов $\{L_r(X)\}_{r\in[0,1]}$, где $X = \widetilde{B}_1(c)$ и $X = \widetilde{B}_2(d)$, вычисляются с помощью теоремы 2. Проведем указанные вычисления для семейства $\widetilde{\mathcal{B}}_1$; результаты для $\widetilde{\mathcal{B}}_2$ получаются аналогично. При $c \ge 0$ введем функцию

$$f_c(\zeta) = \int_0^\zeta e^{2ct^2}\,dt. \tag{26}$$

Лемма 1. *Если* $c > 0$*, то для каждой функции* $f \in \widetilde{B}_1(c)$ *выполняется строгое неравенство*

$$|f''(\zeta)/f'(\zeta)| < 4c|\zeta|/(1-|\zeta|^2), \quad \zeta \in \mathbb{D}\setminus\{0\}, \tag{27}$$

причем $\sup\limits_{f\in\widetilde{B}_1(c)} |\{f,0\}| = |\{f_c,0\}| = 4c$.

Доказательство. Применение леммы Шварца к условию (6) для $f \in \widetilde{B}_1(c)$ при любом $\rho \in (0,1)$ дает оценку

$$|f''(\zeta)/f'(\zeta)| < c|\zeta|/(\rho^2(1-\rho^2)), \quad |\zeta| < \rho, \tag{28}$$

причем равенство в (28) выполняется только в случае, когда

$$f''(\zeta)/f'(\zeta) = c\varepsilon^2\zeta/(\rho^2(1-\rho^2)), \quad |\varepsilon| = 1. \tag{29}$$

Однако функция $f \in A$, удовлетворяющая (29), принадлежит классу $\widetilde{B}_1(c)$ только при $\rho = 1/\sqrt{2}$, в этом случае $f(\zeta) = \bar{\varepsilon} f_c(\varepsilon\zeta)$.

Итак, согласно (28) при $\rho = 1/\sqrt{2}$, если $|\zeta| < 1/\sqrt{2}$, то $|f''(\zeta)/f'(\zeta)| < 4c|\zeta|$. Если же $|\zeta| \ge 1/\sqrt{2}$, то $c \le \sqrt{2}c|\zeta|$, что вместе с неравенством (6) приводит к оценке $|f''(\zeta)/f'(\zeta)| \le 2c|\zeta|/(1-|\zeta|^2)$. В обоих случаях получается строгое неравенство (27), справедливое тем самым для всех $\zeta \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$.

При $\zeta = 0$ из (27) имеем $|\{f, 0\}| \le 4c$; равенство $|\{f_c, 0\}| = 4c$ проверяется непосредственно. □

Теорема 5. *Если $c > 1/2$, то $\rho(\widetilde{B}_1(c)) = 1/\sqrt{2c}$, а $E(\widetilde{B}_1(c))$ представляет собой множество всех вращений функции* (26); *значение c является параметром Ψ-выхода из класса $\mathcal{G}_1$ по линиям уровня для семейства $\widetilde{\mathcal{B}}_1$.*

Доказательство. Пусть $c > 1/2$. По лемме 1 подкласс $\mathcal{F} = \widetilde{B}_1(c)$ удовлетворяет условию i) теоремы 2 с $a = 4c$. Поэтому $\rho(\mathcal{F}) = 1/\sqrt{2c}$ и $E(\mathcal{F}) = \{f \in \mathcal{F} : |\{f, 0\}| = 4c\}$.

Пусть $g(\zeta) = \zeta f''(\zeta)/f'(\zeta)$. Тогда из условия (28) при $\rho = 1/\sqrt{2}$ следует, что в круге $|\zeta| < 1/\sqrt{2}$ имеет место оценка $|g(\zeta)| \le 2c$. Вводя функцию

$$\varphi(z) = g(z/\sqrt{2})/(2c), \tag{30}$$

получим, что $\varphi \in \mathcal{V}_2$. Записывая $\varphi(z) = \gamma z^2 + \cdots$, из равенства тейлоровских разложений в (30) будем иметь $\gamma = \{f, 0\}/(4c)$, откуда $f''(\zeta)/f'(\zeta) = 4c\gamma + \cdots$.

Пусть теперь $f \in E(\widetilde{B}_1(c))$. Тогда $|\gamma| = 1$, и функцию φ можно представить в виде $\varphi(z) = (\varepsilon z)^2$ при некотором $\varepsilon \in \partial\mathbb{D}$. Полагая $\zeta = z/\sqrt{2}$ в (30), устанавливаем выполнение равенства $g(\zeta) = 4c(\varepsilon\zeta)^2$ в круге $|\zeta| < 1/\sqrt{2}$, а значит, и в $\mathbb{D}$ по теореме единственности для аналитических функций. В результате оказывается справедливым равенство (29) при $\rho = 1/\sqrt{2}$, из которого следует, что $f(\zeta) = \bar{\varepsilon} f_c(\varepsilon\zeta)$.

Легко показать, что для любой функции $f \in E(\widetilde{B}_1(c))$ имеет место включение $f_\rho \in \mathcal{G}_1$, где $\rho = 1/\sqrt{2c}$. Это означает, что c есть параметр Ψ-выхода из класса $\mathcal{G}_1$ по линиям уровня для семейства $\widetilde{\mathcal{B}}_1$.

Теорема 5 доказана. □

Переходя к семейству $\widetilde{\mathcal{B}}_2$, отметим, что утверждение леммы 1 сохраняется при замене c на d, класса $\widetilde{B}_1(c)$ на класс $\widetilde{B}_2(d)$, постоянной $4c$ на $3\sqrt{3}d/2$ и функции f_c на функцию

$$f_d(\zeta) = \int\limits_0^\zeta e^{3\sqrt{3}dt^2/4} dt. \tag{31}$$

Теорема 6. *Если $d > 4/(3\sqrt{3})$, то $\rho(\widetilde{B}_2(d)) = 2/\sqrt{3d\sqrt{3}}$ и $E(\widetilde{B}_2(d)) = \{\bar{\varepsilon} f_d(\varepsilon\zeta) : |\varepsilon| = 1\}$, где f_d – функция* (31), *а значение d есть параметр Ψ-выхода из класса $\mathcal{G}_1$ по линиям уровня для семейства $\widetilde{\mathcal{B}}_2$.*

Следствие 6. *Каждое из условий*

1) $c \le 1/2 \Rightarrow \widetilde{B}_1(c) \subset \mathcal{G}_1$;

2) $d \le 4/(3\sqrt{3}) \Rightarrow \widetilde{B}_2(d) \subset \mathcal{G}_1$

является Ψ-условием единственности корня уравнения Гахова на линиях уровня.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 18-41-160017.

Литература

1. *Казанцев А.В.* О выходе из множества Гахова, контролируемом условиями подчиненности // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2014. – Т. 156, кн. 1. – С. 31–43.
2. *Аксентьев Л.А., Киндер М.И., Сагитова С.Б.* Разрешимость внешней обратной краевой задачи в случае многосвязной области // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1983. – Вып. 20. – С. 22–34.
3. *Киндер М.И.* Исследование уравнения Ф.Д. Гахова в случае многосвязных областей // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1985. – Вып. 22. – С. 104–116.
4. *Казанцев А.В.* О линейной связности регулярной части множества Гахова // Вестн. ВолГУ. Сер. 1. Математика. Физика. – 2016. – № 6. – С. 55–60.
5. *Казанцев А.В.* О выходе из множества Гахова по семейству классов Авхадиева // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2017. – Т. 159, кн. 3. – С. 318–326.
6. *Казанцев А.В.* Гиперболические производные с предшварцианами из пространства Блоха // Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Казан. матем. о-во, 2002. – Т. 14. – С. 135–144.
7. *Казанцев А.В.* О семействах гиперболических производных с квазилевнеровской динамикой предшварцианов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 1. – С. 66–80.
8. *Казанцев А.В.* Об уравнении Гахова для оператора Бернацкого // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2015. – Т. 157, кн. 2. – С. 79-92.
9. *Аксентьев Л.А., Казанцев А.В.* Новое свойство класса Нехари и его применение // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1990. – Вып. 25. – С. 33–51.
10. *Aksent'ev L.A., Akhmetova A.N.* On Gakhov's radius for some classes of functions // Lobachevskii J. Math. – 2015. – V. 36, No 2. – P. 103–108. – doi: 10.1134/S1995080215020043.
11. *Казанцев А.В.* Об одной задаче, связанной с экстремумом внутреннего радиуса // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1992. – Вып. 27. – С. 47–62.
12. *Казанцев А.В.* Бифуркации корней уравнения Гахова с левнеровской левой частью // Изв. вузов. Матем. – 1993. – № 6. – С. 69–73.
13. *Kazantsev A.V.* Conformal radius: at the interface of traditions // Lobachevskii J. Math. – 2017. – V. 38, No 3. – P. 469–475. – doi: 10.1134/S1995080217030167.
14. *Казанцев А.В.* Четыре этюда на тему Ф.Д. Гахова. – Йошкар-Ола: Мар. гос. ун-т, 2012. – 64 с.

Поступила в редакцию
22.03.18

Казанцев Андрей Витальевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: *avkazantsev63@gmail.com*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA. SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2018, vol. 160, no. 4, pp. 750–761

The Gakhov Barriers and Extremals for the Level Lines

A.V. Kazantsev

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia
E-mail: *avkazantsev63@gmail.com*

Received March 22, 2018

Abstract

The regular Gakhov class $\mathcal{G}_1$ consists of all holomorphic and locally univalent functions f in the unit disk with only one root of the Gakhov equation, which is the maximum of the hyperbolic derivative (conformal radius) of the function f. For the classes $\mathcal{H}$ defined by the conditions of Nehari and Becker's type, as well as by some other inequalities, we have solved the problem of calculation of the Gakhov barrier, i.e., the value $\rho(\mathcal{H}) = \sup\{r \geq 0 : \mathcal{H}_r \subset \mathcal{G}_1\}$, where $\mathcal{H}_r = \{f_r : f \in \mathcal{H}\}$, $0 \leq r \leq 1$, and of an effective description of the Gakhov extremal, i.e., the set of f's in $\mathcal{H}$ with the level sets f_r leaving $\mathcal{G}_1$ when r passes through $\rho(\mathcal{H})$. Both possible variants of bifurcation, which provide an exit out of $\mathcal{G}_1$ along the level lines, are represented.

Keywords: Gakhov equation, Gakhov set, hyperbolic derivative, inner mapping (conformal) radius, Gakhov width, Gakhov barrier, Gakhov extremal

Acknowledgments. The study was supported by the Russian Foundation for Basic Research and the Government of the Republic of Tatarstan (project no. 18-41-160017).

References

1. Kazantsev A.V. On the exit out of the Gakhov set controlled by the subordination conditions. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2014, vol. 156, no. 1, pp. 31–43. (In Russian)
2. Aksent'ev L.A., Kinder M.I., Sagitova S.B. Solvability of the exterior inverse boundary value problem in the case of multiply connected domain. *Tr. Semin. Kraev. Zadacham.* Kazan, Kazan. Gos. Univ., 1983, no. 20, pp. 22–34. (In Russian)
3. Kinder M.I. Investigation of F.D. Gakhov's equation in the case of multiply connected domains. *Tr. Semin. Kraev. Zadacham.* Kazan, Kazan. Gos. Univ., 1985, no. 22, pp. 104–116. (In Russian)
4. Kazantsev A.V. On the linear connectivity of the regular part of Gakhov set. *Vestn. Volgogr. Gos. Univ., Ser. 1: Mat., Fiz.*, 2016, no. 6, pp. 55–60. (In Russian)
5. Kazantsev A.V. On the exit of the Gakhov set along the family of Avkhadiev's classes. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 3, pp. 318–326. (In Russian)
6. Kazantsev A.V. Hyperbolic derivatives with pre-Schwarzians from the Bloch space. *Tr. Mat. Tsentra im. N.I. Lobachevskogo.* Kazan, Kazan Mat. O-vo., 2002, vol. 14, pp. 135–144. (In Russian)

7. Kazantsev A.V. On the families of hyperbolic derivatives with the quasi-Löwner dynamics of pre-Schwarzians. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 1, pp. 66–80. (In Russian)

8. Kazantsev A.V. On the Gakhov equation for the Biernacki operator. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2015, vol. 157, no. 2, pp. 79–92. (In Russian)

9. Aksent'ev L.A., Kazantsev A.V. A new property of the Nehari class and its application. *Tr. Semin. Kraev. Zadacham.* Kazan, Kazan. Gos. Univ., 1990, no. 25, pp. 33–51. (In Russian)

10. Aksent'ev L.A., Akhmetova A.N. On Gakhov's radius for some classes of functions. *Lobachevskii J. Math.*, 2015, vol. 36, no. 2, pp. 103–108. doi: 10.1134/S1995080215020043.

11. Kazantsev A.V. On a problem related to the extremum of the inner radius. *Tr. Semin. Kraev. Zadacham.* Kazan, Kazan. Gos. Univ., 1992, no. 27, pp. 47–62. (In Russian)

12. Kazantsev A.V. Bifurcations of roots of the Gakhov equation with a Loewner left-hand side. *Izv. VUZov, Mat.*, 1993, no. 6, pp. 69–73. (In Russian)

13. Kazantsev A.V. Conformal radius: At the interface of traditions. *Lobachevskii J. Math.*, 2017, vol. 38, no. 3, pp. 469–475. doi: 10.1134/S1995080217030167.

14. Kazantsev A.V. *Chetyre etyuda na temu F.D. Gakhova* [Four Etudes on F.D. Gakhov's Theme]. Yoshkar-Ola, Marii. Gos. Univ., 2012. 64 p. (In Russian)

Для цитирования: *Казанцев А.В.* Гаховские барьеры и экстремали для линий уровня // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2018. – Т. 160, кн. 4. – С. 750–761.

For citation: Kazantsev A.V. The Gakhov barriers and extremals for the level lines. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2018, vol. 160, no. 4, pp. 750–761. (In Russian)