

УДК 517.958

ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ
ПРОИЗВОДНЫМИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ
В ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ ВОЛН

И.Е. Плещинская, Н.Б. Плещинский

Аннотация

Дан обзор результатов исследования граничных задач для уравнений с частными производными с избыточными граничными условиями. Методом интегрального преобразования Фурье в классах распределений получены необходимые и достаточные условия разрешимости переопределенных задач для уравнений с постоянными коэффициентами, в том числе для уравнения Гельмгольца, системы уравнений Максвелла и системы уравнений динамической теории упругости. Эти условия разрешимости использованы при сведении к интегральным и сумматорным уравнениям ряда задач теории распространения и дифракции электромагнитных и упругих волн.

1. Введение

1.1. В теории дифференциальных уравнений с частными производными большое внимание уделяется постановке краевых задач. Решение корректно поставленной задачи должно существовать, быть единственным и непрерывно зависеть от исходных данных. Долгое время было принято считать, что только корректно поставленные задачи имеют физический смысл. Следовательно, только эти задачи и нужно изучать (см., например, [1, с. 229]). Такая ошибочная точка зрения сформировалась, в частности, под влиянием исследований Адамара [2]. Он показал, что задача Коши для линейных гиперболических уравнений 2-го порядка корректна, а задача Коши для уравнения Лапласа – нет. В современной теории некорректно поставленных задач, достаточно часто возникающих при изучении физических процессов, при постановке краевых задач для дифференциальных уравнений используется другое понятие корректности (см., например, [3]).

Первое требование в классическом определении корректности сводится к тому, что среди условий задачи не должно быть таких, которые противоречили бы друг другу. В данной работе будут исследованы случаи, когда в постановке краевой задачи условий задается больше, чем нужно для выделения единственного решения. Очевидно, что при этом исходные данные не могут быть заданы произвольно. Чтобы решение переопределенной задачи существовало, эти данные должны удовлетворять некоторым соотношениям. Оказалось, что такие соотношения (условия разрешимости переопределенных задач) могут быть эффективно использованы при решении ряда других задач, в первую очередь задач сопряжения решений уравнений с частными производными. К задачам сопряжения, как будет показано ниже, сводятся многие задачи теории распространения и дифракции электромагнитных и упругих волн.

Некоторые свойства переопределенных задач Коши для эллиптических уравнений были исследованы нами ранее в работе [4]. В обзорной статье [5] были

рассмотрены методы решения ряда задач сопряжения для уравнений с частными производными, при этом существенно использовались условия разрешимости вспомогательных переопределенных задач. В последнее время удалось распространить метод переопределенной граничной задачи на новые классы уравнений. В работе будет дан обзор некоторых новых результатов в этом направлении, полученных в основном сотрудниками кафедры прикладной математики и отдела прикладной математической физики НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

1.2. Задача Коши относится к классическим задачам для дифференциальных уравнений с частными производными. Одна из первых ее постановок принадлежит Эйлеру, который предложил задавать начальное положение и начальную скорость струны для того, чтобы выделить единственное решение уравнения колебаний струны. Утверждения Коши о разрешимости задач с начальными данными не получили широкой известности и были переоткрыты С.В. Ковалевской. В работах И.Г. Петровского рассмотрен вопрос о том, для каких систем уравнений с частными производными задача Коши корректна в смысле Адамара. В рамках теории распределений (обобщенных функций) Шварца стало возможным уточнить и обобщить результаты И.Г. Петровского. Классы единственности и классы корректности задачи Коши для систем уравнений с постоянными коэффициентами построены в книге И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилова [6]. Задача Коши для эллиптических уравнений с частными производными является переопределенной, но доказано [7], что при некоторых условиях она может иметь только одно решение. Современное изложение общей теории задачи Коши для уравнений с частными производными в терминах распределений и псевдодифференциальных операторов дано в книге Л.Р. Волевича, С.Г. Гиндикина [8] (см. также обзор [9]).

Для линейного дифференциального уравнения с частными производными 2-го порядка

$$\sum_{j,k=1}^m a_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^m b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u = f(x), \quad x \in R^m \quad (1)$$

задача Коши состоит в следующем. Пусть S – гладкая поверхность в R^m , $n = n(y)$ – некасательное к S направление, определенное в каждой точке y поверхности. Нужно найти хотя бы в окрестности S решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u|_S = u_0(y), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = u_1(y), \quad y \in S. \quad (2)$$

Чтобы рассматривать условия (2) как начальные, можно считать, что направление n соответствует координате, которую можно интерпретировать как время. Для двусторонней поверхности S можно задавать условия вида (2) на каждой ее стороне, причем направления n могут быть разными. В дальнейшем знаками \pm будем отмечать предельные значения (следы) функций на разных сторонах двусторонних поверхностей и прямых.

1.3. Рассмотрим два простых примера. Для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$, как известно, нужно задавать на границе рассматриваемой области или значения исходной функции, или значения ее нормальной производной, но не значения обеих этих функций одновременно. С другой стороны, если гармоническая в области D^\pm функция $u^\pm \in C(\overline{D^\pm})$ имеет правильные нормальные производные на S , то ее

можно представить в виде

$$u^\pm(x) = \pm \int_S \left[u^\pm(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} E(x, \xi) - E(x, \xi) \frac{\partial u^\pm}{\partial n_\xi} \right] ds_\xi, \quad x \in D^\pm, \quad (3)$$

где $E(x, \xi)$ – фундаментальное решение. Формула Грина (3) дает решение задачи Коши в областях D^\pm для уравнения $\Delta u = 0$, но при этом значения $u^\pm(\xi)$ и $\partial u^\pm / \partial n(\xi)$, разумеется, не могут быть заданы произвольно. Зависимость между ними можно получить из формулы (3).

Пусть гладкий замкнутый контур L разбивает плоскость на две области D^+ и D^- . Рассмотрим пару задач Коши для эллиптической системы уравнений Коши–Римана (в комплексной форме)

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0, \quad z \in D^\pm, \quad f|_L = f_0(\xi), \quad f_0(\xi) = u_0(\xi) + iv_0(\xi), \quad \xi \in L. \quad (4)$$

Заданная на L функция $f_0(\xi)$ является предельным значением функции, аналитической в D^\pm и обращающейся в нуль в бесконечно удаленной точке, тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f_0(\tau) d\tau}{\tau - z} = 0 \quad \forall z \in D^\mp.$$

Если дополнительно функция $f_0(\tau)$ удовлетворяет условию Гельдера на L , то это условие принимает вид [10, с. 108]

$$\mp \frac{1}{2} f_0(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f_0(\tau) d\tau}{\tau - t} = 0 \quad \forall t \in L. \quad (5)$$

Условие (5) показывает, что в задаче Коши (4) начальные значения не могут быть заданы произвольно, они необходимо должны быть согласованы друг с другом.

2. Задача Коши в полупространстве

2.1. Граничные задачи в полупространстве для дифференциальных уравнений с частными производными хорошо изучены, особенно в случае постоянных коэффициентов (см., например, [11, гл. III, §1] и [12, гл. 5]). В общем случае такие задачи могут быть некорректными. Как известно, корректность их постановки обеспечивают условия Лопатинского. Рассмотрим схематично задачу Коши для линейного уравнения с частными производными с постоянными коэффициентами в полупространстве

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D_x^\alpha u(x) = f(x), \quad x \in R_+^n, \quad (6)$$

$$D_x^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

$$R_+^n = \{x \in R^n \mid x_n > 0\},$$

и найдем условия, которым должны удовлетворять граничные функции в условиях на гиперплоскости $x_n = 0$

$$\left. \frac{\partial^j u}{\partial x_n^j} \right|_{x_n=0} = u_j(x_1, \dots, x_{n-1}), \quad j = 0, \dots, m-1, \quad (7)$$

в том случае, если эта задача оказывается переопределенной. Зависимости между граничными функциями будут использованы в дальнейшем при исследовании задач линейного сопряжения для конкретных уравнений с частными производными на гиперплоскости. Будем считать, что поверхность $x_n = 0$ не является характеристикой.

Один из сложных вопросов – выбор класса искомых решений задачи Коши. Будем предполагать в самом общем случае, что эти решения принадлежат тому пространству распределений, что для исследования уравнения (6) можно использовать метод интегрального преобразования Фурье. Кроме того, должны быть корректно определены следы на гиперплоскости $x_n = 0$ искомого решения задачи Коши и его производных, т. е. должны иметь смысл граничные условия (7). После того, как будет получено уравнение для образа Фурье искомого распределения, можно будет уточнить, в каком пространстве распределений следует искать решение задачи Коши. В некоторых случаях можно искать решение задачи Коши в пространствах Соболева $H_s(R_+^n)$ распределений медленного роста на бесконечности.

2.2. Обозначим $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ и $z = x_n$. Тогда уравнение (6) примет вид

$$\sum_{\beta=0}^m \sum_{|\alpha'| \leq m-\beta} a_{\alpha', \beta} D_{x'}^{\alpha'} \frac{\partial^\beta u}{\partial z^\beta}(x', z) = f(x', z), \quad x' \in R^{n-1}, \quad z > 0,$$

где $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ и $\alpha = (\alpha', \beta)$. Обычно при исследовании краевых задач в полупространстве используется преобразование Фурье по касательным переменным x' (см., например, [12]). Следуя работе [4], мы применим преобразование Фурье сразу по всем переменным.

После приведения подобных членов получим алгебраическое уравнение

$$P(\xi', \zeta) u(\xi', \zeta) = f(\xi', \zeta) + \sum_{k=0}^{m-1} b_k(\xi') (-i\zeta)^k, \quad (8)$$

где

$$P(\xi', \zeta) = \sum_{\beta=0}^m (-i\zeta)^\beta \sum_{|\alpha'| \leq m-\beta} a_{\alpha', \beta} (-i\xi')^{\alpha'},$$

$$b_k(\xi') = \sum_{j=0}^{m-1-k} \left(\sum_{|\alpha'| \leq m-1-k-j} a_{\alpha', \beta} (-i\xi')^{\alpha'} \right) u_j(\xi'), \quad k = 0, \dots, m-1$$

(здесь и далее будем придерживаться правила: при переходе к образам Фурье переменные x, y, z, t заменяются на ξ, η, ζ, τ , а «идентификатор» распределения или функции сохраняется).

С помощью символа $P(\xi', \zeta)$ дифференциального оператора можно сформулировать условия разрешимости задачи Коши.

Теорема 1. *Распределение $u(x)$ является решением задачи Коши (6), (7) тогда и только тогда, когда его образ Фурье удовлетворяет уравнению (8), причем*

$$f(\xi', \zeta) + \sum_{j=0}^{m-1} u_j(\xi') \left(\sum_{k=j}^{m-1} \sum_{|\alpha'| \leq m-1-k-j} a_{\alpha', \beta} (-i\xi')^{\alpha'} (-i\zeta)^k \right) = 0 \quad \forall (\xi', \zeta) \in M, \quad (9)$$

где

$$M = \{(\xi', \zeta) \mid \xi' \in R^{n-1}, \quad P(\xi', \zeta) = 0, \quad \operatorname{Im} \zeta > 0\}. \quad (10)$$

Доказательство. Продолжим полином $P(\xi', \zeta)$ по переменной ζ с вещественной оси в верхнюю полуплоскость комплексной плоскости, а переменные ξ' будем рассматривать как параметр. Так как распределение $u(\xi', \zeta)$ по ζ аналитически продолжимо в верхнюю полуплоскость (теорема Винера – Пэли), то правая часть уравнения (8) должна обращаться в нуль при всех расположенных в верхней полуплоскости значениях ζ , являющихся корнями уравнения $P(\xi', \zeta) = 0$. \square

2.3. Если множество M (10) пар (ξ', ζ) не пусто, то условия (9) устанавливают связи между граничными функциями $u_j(x_1, \dots, x_{n-1})$ в переопределенной задаче Коши.

В зависимости от того, как на комплексной плоскости расположены корни ζ полинома $P(\xi', \zeta)$, можно провести классификацию уравнений вида (6). Легко показать, что задача Коши для строго гиперболического уравнения имеет единственное решение при любых начальных данных, так как в этом случае M – пустое множество. Для строго эллиптических уравнений из системы уравнений (9) следует, что достаточно задавать на гиперплоскости $x_n = 0$ не m условий вида (7), а меньше. При четном m таких условий должно быть ровно $m/2$. Для уравнений эллиптических, но не строго, возможна следующая ситуация. При некоторых значениях параметра ξ' корни $\zeta_k(\xi')$ расположены на вещественной оси (например, в случае уравнения Гельмгольца). Тогда при четном m и при $m/2$ начальных условиях решение уравнения (8) однозначно не определится. В этом случае нужно задать еще и дополнительные условия, обеспечивающие единственность решения.

Классификация уравнений с частными производными по корням полинома $P(\xi', \zeta)$ более подробно рассмотрена в диссертации Ахмеда Махера [13].

3. Переопределенные задачи для уравнения Гельмгольца

3.1. Будем искать в верхней полуплоскости $R_+^2 = \{(x, z) \in R^2 \mid z > 0\}$ решения двумерного уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u(x, z) = 0, \quad (x, z) \in R_+^2, \quad (11)$$

удовлетворяющие граничным условиям на прямой $z = 0$

$$u(x, 0+0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0+0) = u_1(x), \quad x \in R^1. \quad (12)$$

Метод исследования задачи Коши (11), (12) изложим подробно.

В общем случае число k – комплексное, но пока будем считать, что k – вещественное положительное число. Чтобы обеспечить единственность решения задачи (11), (12), нужно будет задать еще и условие на бесконечности (условие излучения).

Будем предполагать, что искомое решение дважды непрерывно дифференцируемо в R_+^2 , и предельные значения (следы) $u(x, 0+0)$, $\partial u / \partial z(x, 0+0)$ на прямой $z = 0$ существуют всюду, за исключением, может быть, конечного числа точек, и локально суммируемы по Лебегу. Чтобы использовать метод интегрального преобразования Фурье, предположим дополнительно, что функции $u_0(x)$, $u_1(x) \in L_1^{\text{loc}}(R^1)$ имеют медленный рост на бесконечности. Будем рассматривать эти функции как распределения медленного роста (регулярные) – элементы пространства $S'(R^1)$.

Искомое решение уравнения (11) – локально суммируемая в R_+^2 комплексно-значная функция двух вещественных аргументов – представляет собой отображение $(x, z) \in R_+^2 \mapsto u \in C$. Будем интерпретировать это отображение следующим

образом: каждому значению $z \in R_+^1$ поставлена в соответствие комплекснозначная функция вещественного аргумента x , т. е. $x \in R^1 \mapsto u(x, z) \in C$.

Предположим дополнительно, что искомое решение задачи Коши имеет медленный рост на бесконечности, и, следовательно, его значения при любом z – локально интегрируемые функции медленного роста. Эти функции также будем рассматривать как распределения. Тогда предельный переход на границу полу平面 можно понимать в смысле сходимости в $S'(R^1)$ при $z \rightarrow 0 + 0$. В дальнейшем условимся использовать одни и те же обозначения для функций и для распределений.

Преобразование Фурье по касательной переменной x в задаче Коши (11), (12) дает уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\xi, z) + (k^2 - \xi^2)u(\xi, z) = 0, \quad z > 0 \quad (13)$$

(здесь $u(\xi, z)$ – распределение при любом фиксированном z) и граничные условия

$$u(\xi, 0 + 0) = u_0(\xi), \quad \frac{\partial u}{\partial z}(\xi, 0 + 0) = u_1(\xi) \quad (14)$$

(здесь также записаны равенства распределений).

Функцию $z \mapsto u(\xi, z)$, $z > 0$ будем также рассматривать как распределение на $(0, +\infty)$ со значениями в $S'(R^1)$ (см. [14], [15, п. 1.3]). Продолжим ее на полуось $z < 0$, доопределив нулевым распределением. Как следует из теоремы Винера – Пэли (см., например, [16]), в этом и только в этом случае образ Фурье $u(\xi, \zeta)$ может быть аналитически продолжен по переменной ζ в верхнюю полуплоскость комплексной плоскости ζ .

Перейдем в (13) от классической производной к обобщенной (при этом будут учтены граничные условия (14)) и выполним преобразование Фурье по переменной z . Получим

$$(k^2 - \xi^2 - \zeta^2) u(\xi, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [u_1(\xi) - i\zeta u_0(\xi)]. \quad (15)$$

3.2. Пусть k – вещественное число. Обозначим

$$\gamma^+(\xi) = \{(-\infty, -k) : i\sqrt{\xi^2 - k^2}; \quad (-k, k) : \sqrt{k^2 - \xi^2}; \quad (k, +\infty) : -i\sqrt{\xi^2 - k^2}\}.$$

Эта функция – предельное значение из верхней полуплоскости на вещественной оси ветви многозначной функции $\gamma(\dot{\zeta}) = \sqrt{k^2 - \dot{\zeta}^2}$ комплексного аргумента $\dot{\zeta}$. Ветвь выделена в плоскости с разрезом по отрезку вещественной оси $[-k, k]$. Легко видеть, что

$$k^2 - \xi^2 - \zeta^2 = [\gamma^+(\xi) - \zeta] [\gamma^+(\xi) + \zeta].$$

Лемма 1. Распределение $u(x, z)$ является решением задачи (11), (12) при вещественном k тогда и только тогда, когда

$$u_1(\xi) - i\gamma^+(\xi)u_0(\xi) = 0, \quad \xi < -k, \quad u_1(\xi) + i\gamma^+(\xi)u_0(\xi) = 0, \quad \xi > k, \quad (16)$$

и его образ Фурье $u(\xi, \zeta)$ удовлетворяет уравнению (15).

Доказательство. Пусть $u(x, z)$ – решение задачи Коши. Как уже было показано, его образ Фурье $u(\xi, \zeta)$ удовлетворяет уравнению (15).

При $\xi < -k$ и $\xi > k$ полином $k^2 - \xi^2 - \zeta^2$ как функция переменной ζ имеет комплексные корни $\pm\gamma^+(\xi)$. Поэтому

$$u(\xi, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{v_1(\xi)}{\zeta - \gamma^+(\xi)} + \frac{v_2(\xi)}{\zeta + \gamma^+(\xi)} \right],$$

где

$$v_1(\xi) = \frac{-u_1(\xi) + i\gamma^+(\xi) u_0(\xi)}{2\gamma^+(\xi)}, \quad v_2(\xi) = \frac{u_1(\xi) + i\gamma^+(\xi) u_0(\xi)}{2\gamma^+(\xi)}.$$

Распределение $u(\xi, \zeta)$ по переменной ζ должно быть аналитически продолжимо в верхнюю полуплоскость комплексной плоскости ζ . Условия (16) нейтрализуют возможные полюсы в верхней полуплоскости.

При $-k < \xi < k$ корни полинома – вещественные. Методом выхода в комплексную плоскость (точнее, в ее верхнюю полуплоскость) получим

$$u(\xi, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{v_1(\xi)}{\zeta + i0 - \gamma^+(\xi)} + \frac{v_2(\xi)}{\zeta + i0 + \gamma^+(\xi)} \right].$$

Здесь оба слагаемых аналитически продолжимы по ζ в верхнюю полуплоскость.

Значит, если $u(\xi, \zeta)$ – решение уравнения (15) и выполнены условия (16), то решение задачи Коши может быть получено обратным преобразованием Фурье. \square

3.3. После обратного преобразования Фурье получим при $z > 0$

$$\begin{aligned} u(x, z) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} & \left[\int_{-\infty}^{-k} v_2(\xi) e^{i\gamma^+(\xi)z} e^{-i\xi x} d\xi + \int_k^{+\infty} v_1(\xi) e^{-i\gamma^+(\xi)z} e^{-i\xi x} d\xi + \right. \\ & \left. + \int_{-k}^k v_1(\xi) e^{-i\gamma^+(\xi)z} e^{-i\xi x} d\xi + \int_{-k}^k v_2(\xi) e^{i\gamma^+(\xi)z} e^{-i\xi x} d\xi \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Первые два слагаемых в правой части содержат затухающие в направлении оси z волны, причем $v_1(\xi) = iu_0(\xi) = -u_1(\xi)/\gamma^+(\xi)$ при $\xi > k$ и $v_2(\xi) = iu_0(\xi) = u_1(\xi)/\gamma^+(\xi)$ при $\xi < -k$. В третьем слагаемом содержатся уходящие на бесконечность волны, а в четвертом – приходящие с бесконечности. Чтобы определить направление, в котором распространяется волна, нужно учесть, что к уравнению Гельмгольца сводится волновое уравнение в случае гармонической зависимости его решения от времени. Элементарная плоская волна $e^{-i\zeta z}$ переносит энергию вдоль оси z при зависимости от времени вида $e^{i\omega t}$ или в противоположном направлении при зависимости от времени вида $e^{-i\omega t}$. Мы условимся, что был выбран первый вариант зависимости. Тогда

Лемма 2. Решение задачи (11), (12) при вещественном k принадлежит классу уходящих на бесконечность решений тогда и только тогда, когда $u_1(\xi) + i\gamma^+(\xi)u_0(\xi) = 0$ при $-k < \xi < k$ и классу приходящих с бесконечности решений тогда и только тогда, когда $u_1(\xi) - i\gamma^+(\xi)u_0(\xi) = 0$ при $-k < \xi < k$.

Будем говорить, что решение задачи (11), (12) удовлетворяет условию излучения, если в представлении (17) не содержится волн, приходящих с бесконечности.

Обозначим

$$\gamma(\xi) = \left\{ |\xi| > k : i\sqrt{\xi^2 - k^2}; \quad |\xi| < k : -\sqrt{k^2 - \xi^2} \right\},$$

эта функция уже не является предельным значением какой-либо функции, аналитической в верхней полуплоскости. Из леммы 1 и 2 следует

Теорема 2. Распределение $u(x, z)$ является решением задачи (11), (12) и удовлетворяет условию излучения при вещественном k тогда и только тогда, когда

$$u_1(\xi) - i\gamma(\xi) u_0(\xi) = 0. \quad (18)$$

При этом

$$u(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\xi) e^{i\gamma(\xi)z - i\xi x} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-iu_1(\xi)}{\gamma(\xi)} e^{i\gamma(\xi)z - i\xi x} d\xi. \quad (19)$$

Из этого утверждения сразу следует, что задача Дирихле и задача Неймана для уравнения Гельмгольца в полуплоскости имеют единственное решение, удовлетворяющее условию излучения.

3.4. Из условия (18) легко получить, что следы на прямой $z = 0$ любого решения уравнения Гельмгольца в полуплоскости $z > 0$, удовлетворяющего условию излучения, связаны равенствами

$$u_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} i\gamma(\xi) u_0(\xi) e^{-i\xi x} d\xi, \quad u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-i}{\gamma(\xi)} u_1(\xi) e^{-i\xi x} d\xi. \quad (20)$$

Правые части этих формул определяют взаимно обратные псевдодифференциальные операторы с символами $i\gamma(\xi)$ и $-i/\gamma(\xi)$ соответственно. Формулы (20) можно также переписать в виде

$$u_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\tau) K_0(\tau, x) d\tau, \quad u_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(\tau) K_1(\tau, x) d\tau, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} K_0(\tau, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\gamma_0(\xi) e^{i\xi(\tau-x)} d\xi = \frac{-i}{2\sqrt{\pi}} \Gamma(1/2) \frac{k}{|\tau-x|} H_1^{(2)}(k|\tau-x|), \\ K_1(\tau, x) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{\gamma(\xi)} e^{i\xi(\tau-x)} d\xi = \frac{i}{2\sqrt{\pi}} \Gamma(1/2) H_0^{(2)}(k|\tau-x|). \end{aligned}$$

Ядра интегральных операторов $K_j(\tau, x)$ представляют собой следы функций Грина для уравнения Гельмгольца в полуплоскости.

3.5. Если рассматривать приходящие с бесконечности волны, то все полученные формулы останутся верными, если переопределить функцию $\gamma(\xi)$ так, чтобы ее значения были положительными при $|\xi| < k$.

Для нижней полуплоскости $z < 0$ легко получить аналогичные утверждения. Достаточно изменить в формулах знак у функции $\gamma(\xi)$.

Теорема 3. Распределение $u(x, z)$ является решением задачи Коши для уравнения Гельмгольца в нижней полуплоскости и удовлетворяет условию излучения при вещественном k тогда и только тогда, когда

$$u_1(\xi) + i\gamma(\xi) u_0(\xi) = 0. \quad (22)$$

При этом

$$u(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\xi) e^{-i\gamma(\xi)z - i\xi x} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i u_1(\xi)}{\gamma(\xi)} e^{-i\gamma(\xi)z - i\xi x} d\xi. \quad (23)$$

Формулы, аналогичные (20), имеют вид

$$u_1(x) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} i\gamma(\xi) u_0(\xi) e^{-i\xi x} d\xi, \quad u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{\gamma(\xi)} u_1(\xi) e^{-i\xi x} d\xi, \quad (24)$$

их также легко представить в виде (21) (с соответствующей корректировкой знаков).

3.6. В работах [17, 18] использовалось эквивалентное определение уходящего на бесконечность решения уравнения (11): $u(x, z)$ – уходящее от прямой $z = 0$ в полуплоскость $z > 0$ решение, если $u(x, z)$ – распределение медленного роста, $\text{supp } u(x, z) \subset \{z > 0\}$ и

$$\text{sing supp } u(\xi, \zeta) \cap \{\zeta < 0\} = \emptyset.$$

Как показано в работе [19], если k – комплексное число, то условия (16) принимают вид

$$u_1(\xi) - i\gamma^+(\xi)u_0(\xi) = 0, \quad \xi < 0, \quad u_1(\xi) + i\gamma^+(\xi)u_0(\xi) = 0, \quad \xi > 0.$$

При этом задача Коши имеет единственное решение, затухающее на бесконечности, и условие излучения добавлять не нужно.

Условие (18) и его следствие (20) подробно обсуждались в работе автора и Д.Н. Тумакова [20]. Проблема выбора возможных классов решения задачи Коши для уравнения Гельмгольца в полуплоскости рассматривалась в работе [21]. Методом интегрального преобразования Фурье была исследована задача Коши для уравнения Гельмгольца в полосе [22–25] (см. также [13]). Существенно более сложная задача Коши для уравнения Гельмгольца в квадранте (четверти плоскости) изучена в работах [18, 26], см. также [27, гл. 3] и [19]. Задача Коши для области с криволинейной границей рассматривалась в работе [47].

3.7. В периодическом случае образы Фурье рассматриваемых распределений можно заменить на их коэффициенты Фурье. Если распределение $u(x, z)$ в полу-плоскости $z > 0$ является l -периодическим по переменной x , то его след $u_0(x)$ и след $u_1(x)$ его производной по z на прямой $z = 0$ будут периодическими распределениями с тем же периодом. Обратное утверждение также имеет место. Обозначим $\Lambda = 2\pi/l$.

Теорема 4. *Периодическое решение задачи Коши (11), (12) существует тогда и только тогда, когда коэффициенты Фурье распределений $u_0(x)$ и $u_1(x)$ связаны равенствами*

$$u_{1n} - i\gamma_n u_{0n} = 0, \quad \gamma_n = \gamma(\Lambda n), \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (25)$$

При этом при $z > 0$

$$u(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_{0n} e^{i\gamma_n z} e^{i\Lambda n x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_{1n} \frac{-i}{\gamma_n} e^{i\gamma_n z} e^{i\Lambda n x}. \quad (26)$$

Это утверждение следует непосредственно из равенств (21), которые можно преобразовать следующим образом: интегралы по оси заменить на интегралы по отрезку $[0, l]$, а ядра – на

$$K_0(\tau, y) = \frac{1}{l} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \gamma_m e^{i\Lambda m(y-\tau)}, \quad K_1(\tau, y) = \frac{1}{l} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} e^{i\Lambda m(y-\tau)}.$$

Тогда получим сумматорные тождества

$$\int_0^l \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \gamma_n e^{i\Lambda n \tau} \right) K_1(\tau, y) d\tau = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\Lambda n y}, \quad y \in (0, l), \quad (27)$$

$$\int_0^l \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\Lambda n \tau} \right) K_0(\tau, y) d\tau = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \gamma_n e^{i\Lambda n y}, \quad y \in (0, l). \quad (28)$$

В работах [4, 20] из (26) выведены представления для потенциальной функции полубесконечного плоского волновода (решения уравнения Гельмгольца в полуполосе) в виде разложения по собственным волнам.

4. Задачи сопряжения и задачи о скачке для уравнения Гельмгольца

4.1. Пусть S – двусторонняя поверхность. В соответствии с принятым в разд. 1 соглашением обозначим

$$u_0^\pm(y) = u^\pm|_S, \quad u_1^\pm(y) = \left. \frac{\partial u^\pm}{\partial n^\pm} \right|_S, \quad y \in S.$$

Задачей линейного сопряжения для дифференциального уравнения (1) будем называть следующую задачу. Нужно найти решение уравнения (1) по обе стороны от S (в левой и правой полуокрестностях D^\pm или в левом и правом полупространствах), удовлетворяющее при $y \in S$ условиям вида

$$p_0(y)u^+(y) + q_0(y)u^-(y) + r_0(y) = 0, \quad p_1(y)\frac{\partial u^+}{\partial n}(y) + q_1(y)\frac{\partial u^-}{\partial n}(y) + r_1(y) = 0. \quad (29)$$

Важным частным случаем задачи (29) является задача о скачке с условиями сопряжения

$$u^+(y) - u^-(y) = p(y), \quad \frac{\partial u^+}{\partial n}(y) - \frac{\partial u^-}{\partial n}(y) = q(y), \quad y \in S. \quad (30)$$

Решения задачи о скачке можно называть потенциалами.

Потенциалы простого и двойного слоя, которые часто используются при исследовании граничных задач для эллиптических уравнений с частными производными, являются решениями задачи о скачке (1), (30), но для одного из них $p \equiv 0$, а для другого $q \equiv 0$. Интеграл типа Коши

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau)d\tau}{\tau - z}$$

также является потенциалом. С его помощью в теории краевых задач для аналитических функций и сингулярных интегральных уравнений [10, 28] установлена

эквивалентность задачи линейного сопряжения для аналитических функций и характеристического интегрального уравнения с ядром Коши.

В самом общем случае решение задачи о скачке можно искать в форме решений двух задач Коши, условия которых заданы на разных сторонах S . Таким же способом можно получить и решение задачи сопряжения, но это легко сделать только в том случае, когда к условиям (29) можно применить интегральное преобразование Фурье, например, когда коэффициенты в условиях сопряжения постоянные. Задача о скачке на гиперплоскости для уравнения с постоянными коэффициентами вида (6) рассматривалась в диссертации [13] (см. также [5]).

Особый интерес для приложений представляют задачи сопряжения с кусочно непрерывными коэффициентами. К таким задачам, как будет показано ниже, сводятся задачи дифракции электромагнитных и упругих волн на дефектах различной природы. С помощью потенциалов в ряде случаев удается перейти от задачи дифракции к интегральному уравнению.

4.2. Рассмотрим задачу о скачке на прямой для уравнения Гельмгольца с разрывным коэффициентом: нужно найти решение уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2(z)u(x, z) = 0, \quad k(z) = \{k_+, z > 0; \quad k_-, z < 0\}, \quad (31)$$

при $z > 0$ и при $z < 0$ в классе уходящих на бесконечность от прямой $z = 0$ решений, удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0+0) - u(x, 0-0) = a(x), \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0+0) - \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0-0) = b(x), \quad x \in R^1. \quad (32)$$

Теорема 5. Единственное решение задачи о скачке (31), (32) имеет вид

$$u_{\pm}(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pm A(\xi)\gamma_{\mp}(\xi) - B(\xi)}{\gamma_-(\xi) + \gamma_+(\xi)} \exp[\mp\gamma_{\pm}(\xi)z - i\xi x] d\xi, \quad (33)$$

где

$$\gamma_{\pm}(\xi) = \sqrt{k_{\pm}^2 - \xi^2} = \{|\xi| \geq k_{\pm} : i\sqrt{\xi^2 - k_{\pm}^2}; \quad |\xi| \leq k_{\pm} : -\sqrt{k_{\pm}^2 - \xi^2}\}.$$

Доказательство. Формулы (33) легко получить, если рассмотреть систему из четырех алгебраических уравнений для образов Фурье следов на $z = 0$ искомых решений и их нормальных производных: два условия разрешимости переопределенных задач Коши и уравнения

$$U_0^+(\xi) - U_0^-(\xi) = A(\xi), \quad U_1^+(\xi) - U_1^-(\xi) = B(\xi) \quad \forall \xi \in R^1,$$

которые следуют из (32). После того, как найдено ее решение, нужно записать образы Фурье искомых функций и применить обратное преобразование Фурье. \square

К задаче о скачке сводится скалярная задача о падении на плоскую границу раздела сред параллельно поляризованных электромагнитных волн, причем их источники могут быть расположены и в верхней полуплоскости, и в нижней. В функции $a(x)$ и $b(x)$ из условий сопряжения войдут разности следов потенциальных функций приходящих волн.

4.3. Второй задачей о скачке назовем задачу сопряжения решений уравнения Гельмгольца на прямой $z = 0$, к которой приводит задача о падении на плоскую

границу раздела сред перпендикулярно поляризованных волн. Условия (32) при этом нужно заменить на условия

$$u(x, 0 + 0) - u(x, 0 - 0) = a(x), \quad \frac{1}{\varepsilon_+} \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0 + 0) - \frac{1}{\varepsilon_-} \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0 - 0) = b(x). \quad (34)$$

Теорема 6. Единственное решение задачи о скачке (31), (34) имеет вид

$$u^\pm(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pm \frac{\gamma_\mp(\xi)}{\varepsilon_\mp} a(\xi) - ib(\xi)}{\frac{\gamma^+(\xi)}{\varepsilon_+} + \frac{\gamma^-(\xi)}{\varepsilon_-}} e^{\pm i\gamma^\pm(\xi)z - i\xi x} d\xi. \quad (35)$$

Эта формула получена тем же способом, что и формула (33).

Формулы (33) и (35) можно использовать при доказательстве такого очевидного с физической точки зрения факта, что при падении плоской волны на плоскую границу раздела сред отраженная и преломленная волны также являются плоскими волнами.

Задача о скачке для уравнения Гельмгольца в плоскослоистой среде аналогичным методом исследована в работах [22, 23]. В [4, 20] получено явное решение задачи о скачке на отрезке $x = 0$ для уравнения Гельмгольца в полосе $0 < z < h$ при однородных граничных условиях Дирихле или Неймана на прямых $z = 0$, $z = h$.

Задачи сопряжения решений уравнений двумерного электромагнитного поля на границе раздела линейной и нелинейной сред были рассмотрены в работах [29, 30].

5. Скалярные задачи дифракции электромагнитных волн

Пусть плоскость $z = 0$ разделяет два полупространства $z > 0$ и $z < 0$, заполненные диэлектриком с диэлектрическими проницаемостями ε_+ и ε_- . Сверху на границу раздела сред падает ТЕ-поляризованная электромагнитная волна, компоненты которой не зависят от координаты y . Нужно найти отраженную и преломленную волны (скалярное поле) в классе решений, уходящих от прямой $z = 0$ на бесконечность.

Как следует из условий сопряжения полей, эта задача сводится к задаче о скачке (31), (32), где $a(x)$ и $b(x)$ – значения потенциальной функции падающего поля и ее нормальной производной при $z = 0$. Тогда потенциальные функции отраженного и преломленного полей дают формулы (33).

Рассмотрим теперь задачу дифракции электромагнитной ТЕ-волны, падающей из области $z > 0$ на металлическую ленту $\{z = 0, \alpha < x < \beta\}$, расположенную в плоскости $z = 0$. Если считать, что падающее поле задано и в верхнем, и в нижнем полупространстве, то задача дифракции сводится к задаче сопряжения со смешанными условиями

$$u(x, 0 + 0) + u_0(x, 0 + 0) = 0, \quad u(x, 0 - 0) + u_0(x, 0 - 0) = 0, \quad x \in (\alpha, \beta), \quad (36)$$

$$u(x, 0 + 0) - u(x, 0 - 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0 + 0) - \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0 - 0) = 0, \quad x \notin (\alpha, \beta). \quad (37)$$

Если искать решение задачи дифракции в форме решения задачи о скачке, то из этих условий следует, что $a(x) = 0$ всюду и $b(x) = 0$ вне (α, β) . Тогда

$$u_\pm(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{b(\xi)}{\gamma_-(\xi) + \gamma_+(\xi)} \exp(-i\xi x) d\xi = -u_0(x, 0), \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Перейдя от образа Фурье $b(\xi)$ к его прообразу $b(x)$, получим следующее утверждение.

Теорема 7. *Скалярная задача дифракции TE-волны на металлической ленте эквивалентна интегральному уравнению*

$$\int_{\alpha}^{\beta} b(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_-(\xi) + \gamma_+(\xi)} \exp[i(t-x)\xi] d\xi \right] dt = -u_0(x, 0), \quad x \in (\alpha, \beta). \quad (38)$$

В частном случае, если $\varepsilon_+ = \varepsilon_-$, то $\gamma_{\pm}(\xi) = \gamma(\xi)$. Если вычислим внутренний интеграл в (38), то получим интегральное уравнение с функцией Ханкеля в ядре.

5.2. Интегральные уравнения в задаче дифракции на металлической ленте можно получить также с помощью формул (20) и (24), т. е. методом интегральных тождеств.

Будем искать решения уравнения Гельмгольца при $z > 0$ и при $z < 0$ в классе решений, уходящих от прямой $z = 0$ на бесконечность, в форме решений задачи Коши для верхней и нижней полуплоскостей с граничными распределениями $u_0^{\pm}(x)$ и $u_1^{\pm}(x)$.

Обозначим $\mathcal{M} = (\alpha, \beta)$ и $\mathcal{N} = (-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty)$. На границе раздела сред $z = 0$ должны быть выполнены условия

$$u_0^+(x) + u_0^0(x) = 0, \quad u_0^-(x) = 0, \quad x \in \mathcal{M}, \quad (39)$$

$$u_0^+(x) + u_0^0(x) = u_0^-(x), \quad u_1^+(x) + u_1^0(x) = u_1^-(x), \quad x \in \mathcal{N}. \quad (40)$$

Пусть для простоты рассуждений $\varepsilon_{\pm} = \varepsilon$. Из (20) и (24) следует, что

$$\begin{aligned} u_0^+(t) &= \int_{\mathcal{M}} u_1^+(\tau) K_1(\tau, t) d\tau, \\ u_1^+(x) &= - \int_{\mathcal{M}} u_0^0(t) K_0(t, x) dt + \int_{\mathcal{N}} u_0^+(t) K_0(t, x) dt. \end{aligned} \quad (41)$$

Теорема 8. *Задача дифракции на полосе эквивалентна интегральным уравнениям*

$$\int_{\mathcal{M}} u_1^+(\tau) K_1(\tau, t) d\tau = -u_0^0(t), \quad t \in \mathcal{M}, \quad (42)$$

$$u_1^+(x) = \int_{\mathcal{M}} u_1^+(\tau) \left[\int_{\mathcal{N}} K_1(\tau, t) K_0(t, x) dt \right] d\tau - \int_{\mathcal{M}} u_0^0(t) K_0(t, x) dt, \quad x \in \mathcal{M}. \quad (43)$$

Доказательство. Интегральное уравнение (42) следует непосредственно из первого из граничных условий (39). Уравнение (43) можно получить, исключая из уравнений системы (41) граничное распределение $u_0^+(x)$. Аналогичные уравнения легко получить и для $u_0^-(t)$ на \mathcal{N} . \square

5.3. Интегральные уравнения (42), (43) и другие аналогичные им уравнения были получены в работе [20] (см. также [19, 27, 31, 32]). Ссылки на некоторые другие публикации, посвященные математическим моделям задач сопряжения электромагнитных полей в сложных средах, можно найти в обзоре [33].

Сумматорные представления решений уравнения Гельмгольца вида (26), как и интегральные представления, были использованы при сведении различных задач дифракции к парным функциональным (сумматорным) уравнениям. Эти уравнения записываются в разных формах на дефекте и вне его. Приравняв коэффициенты Фурье относительно некоторой системы функций левой и правой частей парного уравнения, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) для этих коэффициентов. При этом сумматорные тождества могут быть использованы как при выводе БСЛАУ, так и при регуляризации систем, имеющих свойства некорректно поставленной задачи.

Были получены и исследованы БСЛАУ задач дифракции электромагнитных волн на бесконечной периодической решетке [20, 31], на перегородке в плоском волноводе, на стыке плоских волноводов разной толщины (на ступенчатой неоднородности) [27, 31] и на разветвлениях плоского волновода [34–37]. Проведено обоснование метода усечения БСЛАУ. Методы численного решения интегральных уравнений, эквивалентных задачам дифракции на проводящих экранах, обсуждались в работах [38, 39].

В [40, 41] методом разностных схем решена задача дифракции волны на наклонной перегородке в плоском волноводе, здесь при сведении исходной задачи к граничной задаче в ограниченной прямоугольной области использованы тождества вида (27), (28). Метод интегральных тождеств для решения этой задачи применялся в работах [42, 43], в том числе в случае криволинейной границы раздела сред [44].

В [45] метод интегральных тождеств использован при регуляризации парного уравнения, к которому сводится задача дифракции электромагнитной волны на стыке цилиндрических волноводов. Задача дифракции на криволинейном экране рассматривалась в работах [46, 47].

6. Граничные задачи для системы уравнений Maxwella

6.1. Рассмотрим несколько координатных задач для системы уравнений Maxwella в трехмерном пространстве: задачу Коши, задачу о скачке и задачу сопряжения со смешанными граничными условиями (векторную задачу дифракции на плоском металлическом экране).

Обозначим через R_+^3 и R_-^3 верхнее и нижнее полупространства трехмерного пространства с декартовой системой координат (x, y, z) . Комплексные амплитуды E и H электрического и магнитного векторов гармонически зависящего от времени электромагнитного поля (выбрана зависимость $e^{i\omega t}$) удовлетворяют системе уравнений Maxwella

$$\operatorname{rot} H = i\omega \varepsilon_0 \varepsilon(z) E, \quad \operatorname{rot} E = -i\omega \mu_0 \mu H, \quad z \neq 0, \quad (44)$$

здесь $\varepsilon(z) = \{z > 0 : \varepsilon_+; z < 0 : \varepsilon_-\}$. Условия Коши зададим в виде

$$[z_0, E](x, y, 0) = e(x, y), \quad [z_0, H](x, y, 0) = h(x, y) \quad (45)$$

(на плоскости $z = 0$ заданы следы касательных составляющих векторов E и H).

Пусть k – волновое число, $k^2 = \omega^2 \mu_0 \mu \varepsilon_0$. Обозначим

$$\gamma(\xi, \eta) = \sqrt{k^2 - \xi^2 - \eta^2} = \begin{cases} \xi^2 + \eta^2 \geq k^2 : i\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - k^2}; \\ \xi^2 + \eta^2 \leq k^2 : -\sqrt{k^2 - \xi^2 - \eta^2}. \end{cases}$$

Теорема 9. *Пара вектор-функций (E, H) является решением задачи Коши (44), (45) в классе уходящих в полупространство решений тогда и только тогда, когда для образов Фурье следов компонент на плоскости $z = 0$ выполняется*

равенство

$$\omega \varepsilon_0 \varepsilon \gamma(\xi, \eta) e(\xi, \eta) + P(\xi, \eta) h(\xi, \eta) = 0 \quad (46)$$

или

$$P(\xi, \eta) e(\xi, \eta) - \omega \mu_0 \mu \gamma(\xi, \eta) h(\xi, \eta) = 0, \quad (47)$$

где

$$P(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \xi \eta & k^2 - \xi^2 \\ \eta^2 - k^2 & -\xi \eta \end{pmatrix}.$$

При этом

$$E(\xi, \eta, \zeta) = \frac{i}{\zeta + \gamma(\xi, \eta)} \left[A e(\xi, \eta) + \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon} B(\xi, \eta) h(\xi, \eta) \right],$$

$$H(\xi, \eta, \zeta) = \frac{i}{\zeta + \gamma(\xi, \eta)} \left[-\frac{1}{\omega \mu_0 \mu} B(\xi, \eta) e(\xi, \eta) + A h(\xi, \eta) \right],$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \eta & -\xi \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Переходим от искомых вектор-функций к их образам Фурье. Из преобразованных уравнений Максвелла, записанных в виде системы скалярных уравнений, исключим компоненты E_z и H_z . Четыре оставшиеся компоненты (касательные составляющие поля) будут аналитически продолжимы по ζ в верхнюю полуплоскость тогда и только тогда, когда равенства (46) и (47) выполняются при $\xi^2 + \eta^2 > k^2$. Эти же равенства при $\xi^2 + \eta^2 < k^2$ равносильны условию излучения. \square

В аналогичном утверждении для уходящих в нижнее полупространство решений задачи Коши в R^3_- нужно изменить знак у функции $\gamma(\xi, \eta)$.

Равенства (46) и (47) следуют друг из друга. Эти равенства устанавливают зависимость между заданными на границе области следами касательных компонент поля на языке их образов Фурье. Если вернуться к прообразам, получим

$$e(x, y) = -\frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon} \iint K(x_1, y_1; x, y) h(x_1, y_1) dx_1 dy_1, \quad (48)$$

$$h(x, y) = \frac{1}{\omega \mu_0 \mu} \iint K(x_1, y_1; x, y) e(x_1, y_1) dx_1 dy_1, \quad (49)$$

где

$$K(x_1, y_1; x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \frac{1}{\gamma(\xi, \eta)} P(\xi, \eta) e^{i(x_1 - x)\xi + i(y_1 - y)\eta} d\xi d\eta.$$

6.2. Задача о скачке на плоскости $z = 0$ для системы уравнений Максвелла ставится так: найти решения (E_+, H_+) при $z > 0$ и (E_-, H_-) при $z < 0$ системы (44), принадлежащие классам решений, уходящих от плоскости $z = 0$ в полупространства, и удовлетворяющие на $z = 0$ условиям

$$[z_0, E_+ - E_-](x, y, 0) = a(x, y), \quad [z_0, H_+ - H_-](x, y, 0) = b(x, y), \quad (50)$$

где $a(x, y)$, $b(x, y)$ – заданные вектор-функции.

Теорема 10. Решение задачи о скачке существует, единственно и имеет вид

$$E_{\pm}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{i}{\zeta \pm \gamma_{\pm}(\xi, \eta)} \left[A e_{\pm}(\xi, \eta) + \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{\pm}} B(\xi, \eta) h_{\pm}(\xi, \eta) \right],$$

$$H_{\pm}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{i}{\zeta \pm \gamma_{\pm}(\xi, \eta)} \left[-\frac{1}{\omega \mu_0 \mu} B(\xi, \eta) e_{\pm}(\xi, \eta) + A h_{\pm}(\xi, \eta) \right],$$

где

$$e_{\pm}(\xi, \eta) = \frac{\pm \varepsilon_{\mp} \gamma_{\mp} a(\xi, \eta) - \frac{1}{\omega \varepsilon_0} P(\xi, \eta) b(\xi, \eta)}{\varepsilon_{+} \gamma_{+}(\xi, \eta) + \varepsilon_{-} \gamma_{-}(\xi, \eta)},$$

$$h_{\pm}(\xi, \eta) = \frac{\frac{1}{\omega \mu_0 \mu} P(\xi, \eta) a(\xi, \eta) \pm \gamma_{\mp} b(\xi, \eta)}{\gamma_{+}(\xi, \eta) + \gamma_{-}(\xi, \eta)}.$$

Доказательство. Действительно, если искать решение задачи о скачке в форме решений задачи Коши для верхнего и нижнего полупространств, то образы Фурье следов касательных составляющих $e_{\pm}(\xi, \eta)$, $h_{\pm}(\xi, \eta)$ должны удовлетворять системе из четырех векторных уравнений: двум уравнениям вида (46) и преобразованным условиям задачи о скачке (50). Эту систему легко решить. \square

Отметим, что решение задачи о скачке представляет собой решение задачи о падении электромагнитной волны на плоскую границу раздела сред.

6.3. Пусть \mathcal{M} – металлический экран (т. е. бесконечно тонкая идеально проводящая пластина), расположенный в плоскости $z = 0$, и \mathcal{N} – его дополнение до всей плоскости. Пусть $\varepsilon_{\pm} = \varepsilon$, $\mu_{\pm} = \mu$ и $E_0(x, y, z)$ – напряженность электрического поля волны, падающей на экран (удобно считать, что внешнее поле задано и сверху, и снизу). В задаче дифракции волны на экране нужно найти уходящие от плоскости $z = 0$ в полупространства решения системы Максвелла, удовлетворяющие граничным условиям

$$[z_0, E_{\pm} + E_0](x, y) = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{M}, \quad (51)$$

$$[z_0, E_{+} - E_{-}](x, y) = 0, \quad [z_0, H_{+} - H_{-}](x, y) = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{N}. \quad (52)$$

Запишем для следов на плоскости $z = 0$ касательных составляющих векторов E_{\pm}, H_{\pm} равенства вида (48) и (49). Из (51), (52) следует, что $e_{+} = e_{-} = -e_0$ на \mathcal{M} и $e_{+} = e_{-}$ на \mathcal{N} . Обозначим $e = e_{+} = e_{-}$. Тогда $h_{+} + h_{-} = 0$ всюду на плоскости $z = 0$, при этом $h_{+} = h_{-} = 0$ на \mathcal{N} . Следовательно,

$$e(x, y) = \mp \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon} \iint_{\mathcal{M}} K(x_1, y_1; x, y) h_{\pm}(x_1, y_1) dx_1 dy_1, \quad (53)$$

$$h_{\pm}(x, y) = \mp \frac{1}{\omega \mu_0 \mu} \iint_{\mathcal{M}} K(x_1, y_1; x, y) e_0(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \pm \mp \frac{1}{\omega \mu_0 \mu} \iint_{\mathcal{N}} K(x_1, y_1; x, y) e(x_1, y_1) dx_1 dy_1. \quad (54)$$

Теорема 11. Задача дифракции на плоском экране эквивалентна векторным интегральным уравнениям

$$\mp \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon} \iint_{\mathcal{M}} K(x_1, y_1; x, y) h_{\pm}(x_1, y_1) dx_1 dy_1 = -e_0(x, y); \quad (55)$$

$$\begin{aligned} h_{\pm}(x, y) + \iint_{\mathcal{M}} h_{\pm}(x_1, y_1) L_N(x_1, y_1; x, y) dx_1 dy_1 &= \\ &= \mp \frac{1}{\omega \mu_0 \mu} \iint_{\mathcal{M}} K(x_1, y_1; x, y) e_0(x_1, y_1) dx_1 dy_1, \end{aligned} \quad (56)$$

$$L_N(x_1, y_1; x, y) = \frac{1}{k^2} \iint_{\mathcal{N}} K(x_1, y_1; x_2, y_2) K(x_2, y_2; x, y) dx_2 dy_2.$$

Доказательство. Уравнение (55) следует из (51) и (53). Уравнение (56) нетрудно получить, если исключить из (53) и (54) одну из искомых функций. Аналогичные уравнения можно вывести и для следов $e^{\pm}(x, y)$. \square

Интегральное уравнение (55) записано как уравнение 1-го рода. Чтобы это уравнение было корректно поставленной задачей, нужно соответствующий его левой части оператор рассматривать в специально подобранных пространствах (достаточно по выбранной в соответствии с постановкой задачи дифракции области определения оператора точно описать его область значений). Другое интегральное уравнение 1-го рода, эквивалентное задаче дифракции, можно получить с помощью формул, дающих решение задачи о скачке. Действительно, из сказанного выше следует, что $a(x, y) = e_+(x, y) - e_-(x, y) = 0$ всюду на плоскости $z = 0$, а $b(x, y) = h_+(x, y) - h_-(x, y) = 0$ на \mathcal{N} , но остается неизвестной функцией на \mathcal{M} . Уравнение для этой функции представляет собой фактически граничное условие (51). Интегральное уравнение (56) является уравнением 2-го рода, его можно рассматривать как регуляризованное уравнение (53).

6.4. Этот раздел написан по докладам на Всероссийской школе-конференции, посвященной 130-летию со дня рождения Д.Ф. Егорова в 1999 г. и на Международной конференции AMADE'99 [48–51]. Некоторые из перечисленных результатов были использованы в работах [19, 32].

Если перейти к двоякопериодическим распределениям, то легко получить представления решений системы Максвелла в полубесконечном цилиндре прямоугольного сечения. Эти представления использованы в работе [52] при исследовании задачи дифракции в прямоугольном волноводе на наклонной перегородке.

6.5. В работе [53] получено необходимое и достаточное условие разрешимости переопределенной граничной задачи в полубесконечной цилиндрической области с условиями Коши на торце. С помощью условий такого вида задача дифракции электромагнитной волны на разветвлении волновода произвольного сечения с металлическими стенками сведена к регулярной бесконечной системе линейных уравнений.

Пусть D – полубесконечная ($z > 0$) цилиндрическая область, ограниченная сбоку частью цилиндрической поверхности R и с торца – поперечным сечением S

(частью плоскости $z = 0$). Будем искать в D решения системы уравнений Максвелла (44) для комплексных амплитуд в классе уходящих в направлении оси z решений, удовлетворяющих граничным условиям (45) на S и

$$[n, E] \Big|_R = 0. \quad (57)$$

Как известно [54, с. 183–186], любое решение системы Максвелла в бесконечной цилиндрической области с граничным условием вида (57) можно разложить в ряд по собственным ТЕ- и ТМ-волнам. Отсюда следует

Теорема 12. *Вектор-функции E и H – решение граничной задачи (44), (45), (57) тогда и только тогда, когда следы на S их касательных составляющих $e(x, y)$ и $h(x, y)$ удовлетворяют условию вида*

$$e(x, y) = \int_S h(\xi, \eta) \mathbf{K}(\xi, \eta, x, y) d\xi d\eta,$$

при этом компоненты функциональной матрицы \mathbf{K} удовлетворяют некоторой системе линейных интегральных уравнений.

7. Задача Коши для системы уравнений теории упругости

7.1. Состояние упругого напряженно-деформируемого тела определяют тензор напряжений σ и вектор перемещений u . При гармонической зависимости от времени вида $e^{i\omega t}$, где ω – круговая частота колебаний, они связаны уравнениями (в декартовой системе координат)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_x &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_y &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_z &= 0. \end{aligned} \quad (58)$$

Здесь ρ – плотность среды. Упругие свойства среды зададим в форме закона Гука для однородной изотропной среды. Тогда дополнительно

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \sigma_{xy} &= \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} + \mu \frac{\partial u_y}{\partial x}, \\ \sigma_{yy} &= \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \sigma_{yz} &= \mu \frac{\partial u_y}{\partial z} + \mu \frac{\partial u_z}{\partial y}, \\ \sigma_{zz} &= \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \sigma_{xz} &= \mu \frac{\partial u_x}{\partial z} + \mu \frac{\partial u_z}{\partial x}, \end{aligned} \quad (59)$$

где λ и μ – постоянные Ламе.

Как известно, правые части формул (59) можно подставить в уравнения (58) и получить для перемещений систему дифференциальных уравнений

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u + \mu \Delta u + \rho \omega^2 u = 0.$$

Ее решения представимы в виде

$$u = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \psi,$$

где продольный (скалярный) потенциал φ и поперечный (векторный) потенциал ψ удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$\Delta\varphi + k_1^2\varphi = 0, \quad \Delta\psi + k_2^2\psi = 0. \quad (60)$$

Здесь

$$k_1^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}, \quad k_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu}.$$

При вещественных λ и μ , очевидно, $k_1 < k_2$. Компоненты поперечного потенциала должны также удовлетворять условию $\operatorname{div}\psi = 0$, так что независимых компонент у этого потенциала всего две.

Двум потенциалам соответствуют два вида частных решений системы уравнений теории упругости, которые интерпретируются как упругие волны, распространяющиеся с различными скоростями. При этом поперечные волны, в свою очередь, тоже могут быть двух типов. По элементарным решениям уравнений (60) легко построить частные решения системы уравнений (58), (59) – продольные или поперечные волны. Но исследовать граничные задачи для этой системы, сводя их к граничным задачам для уравнений (60), затруднительно (за исключением ряда простых случаев). Поэтому будем в дальнейшем иметь дело непосредственно с уравнениями (58), (59).

7.2. Рассмотрим переопределенную задачу Коши для системы уравнений (58), (59) в верхнем полупространстве $z > 0$ в следующей постановке: найти напряжения и перемещения, удовлетворяющие этой системе и граничным условиям

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}(x, y, 0+0) &= \sigma_{xz0}(x, y), & \sigma_{yz}(x, y, 0+0) &= \sigma_{yz0}(x, y), \\ \sigma_{zz}(x, y, 0+0) &= \sigma_{zz0}(x, y), & u_x(x, y, 0+0) &= u_{x0}(x, y), \\ u_y(x, y, 0+0) &= u_{y0}(x, y), & u_z(x, y, 0+0) &= u_{z0}(x, y). \end{aligned} \quad (61)$$

Будем предполагать, что все искомые функции непрерывно дифференцируемы в полупространстве $z > 0$, имеют медленный рост на бесконечности и их следы на плоскости $z = 0$ корректно определены. Достаточно считать, что предельные значения этих функций при $z \rightarrow 0+0$ существуют всюду, кроме множества меры нуль, имеют медленный рост на бесконечности и локально интегрируемы по Лебегу. Искомые функции в задаче Коши будем интерпретировать как отображения, которые каждому значению z ставят в соответствие комплекснозначные функции двух аргументов x и y – локально интегрируемые функции медленного роста. Все функции в дальнейшем будем рассматривать как распределения. Следы функций в условиях (61) будем понимать как пределы в смысле сходимости в пространстве S' при $z \rightarrow 0+0$.

Как показано в работе [55, с. 8], образы Фурье граничных значений перемещений должны удовлетворять системе уравнений

$$A_1 A_2 u_s = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} R_s(\xi, \eta, \zeta), \quad s = x, y, z, \quad (62)$$

где

$$A_1 = \rho\omega^2 - (\lambda + 2\mu)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2), \quad A_2 = \rho\omega^2 - \mu(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2),$$

$$\begin{aligned} R_x(\xi, \eta, \zeta) &= (A_1 + \nu\xi^2)\sigma_{xz0} + \nu\xi\eta\sigma_{yz0} + \nu\xi\zeta\sigma_{zz0} - \\ &\quad - i\mu\zeta(A_1 + 2\nu\xi^2)u_{x0} - i2\mu\nu\xi\eta\zeta u_{y0} - i\xi(\lambda A_2 + 2\mu\nu\zeta^2)u_{z0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_y(\xi, \eta, \zeta) = & \nu \xi \eta \sigma_{xz0} + (A_1 + \nu \eta^2) \sigma_{yz0} + \nu \eta \zeta \sigma_{zz0} - \\ & - i 2 \mu \nu \xi \eta \zeta u_{x0} - i \mu \zeta (A_1 + 2 \nu \eta^2) u_{y0} - i \eta (\lambda A_2 + 2 \mu \nu \zeta^2) u_{z0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_z(\xi, \eta, \zeta) = & \nu \xi \zeta \sigma_{xz0} + \nu \eta \zeta \sigma_{yz0} + (A_1 + \nu \zeta^2) \sigma_{zz0} - \\ & - i \mu (A_1 + 2 \nu \zeta^2) (\xi u_{x0} + \eta u_{y0}) - i \zeta [(\lambda + 2 \mu) A_2 - 2 \mu \nu (\xi^2 + \eta^2)] u_{z0}. \end{aligned}$$

Пусть

$$\gamma_j = \gamma_j(\xi, \eta) = \sqrt{k_j^2 - \xi^2 - \eta^2} = \begin{cases} \xi^2 + \eta^2 \leq k_j^2 : -\sqrt{k_j^2 - \xi^2 - \eta^2}; \\ \xi^2 + \eta^2 \geq k_j^2 : i \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - k_j^2}. \end{cases}$$

Обозначим через $P_1(\xi, \eta)$, $Q_1(\xi, \eta)$ выражения

$$\xi \sigma_{xz0} + \eta \sigma_{yz0} \pm \gamma_1 \sigma_{zz0} \mp 2i\mu\xi\gamma_1 u_{x0} \mp 2i\mu\eta\gamma_1 u_{y0} - i(\rho\omega^2 - 2\mu\xi^2 - 2\mu\eta^2) u_{z0}.$$

Здесь и в следующих формулах верхний знак соответствует функциям P , а нижний – функциям Q . Аналогично

$$P_{2x}, Q_{2x}(\xi, \eta) = \mp \left(\gamma_2 + \frac{\eta^2}{\gamma_2} \right) \sigma_{xz0} \pm \frac{\xi\eta}{\gamma_2} \sigma_{yz0} + \xi \sigma_{zz0} + i\rho\omega^2 u_{x0} - \xi S,$$

$$P_{2y}, Q_{2y}(\xi, \eta) = \pm \frac{\xi\eta}{\gamma_2} \sigma_{xz0} \mp \left(\gamma_2 + \frac{\xi^2}{\gamma_2} \right) \sigma_{yz0} + \eta \sigma_{zz0} + i\rho\omega^2 u_{y0} - \eta S,$$

$$S = 2i\mu(\xi u_{x0} + \eta u_{y0} \pm \gamma_2 u_{z0}).$$

Лемма 3. Имеют место тождества

$$R_x(\xi, \eta, \gamma_1) = \nu \xi P_1, \quad R_y(\xi, \eta, \gamma_1) = \nu \eta P_1, \quad R_z(\xi, \eta, \gamma_1) = \nu \gamma_1 P_1,$$

$$R_x(\xi, \eta, -\gamma_1) = \nu \xi Q_1, \quad R_y(\xi, \eta, -\gamma_1) = \nu \eta Q_1, \quad R_z(\xi, \eta, -\gamma_1) = -\nu \gamma_1 Q_1,$$

$$R_x(\xi, \eta, \gamma_2) = \nu \gamma_2 P_{2x}, \quad R_y(\xi, \eta, \gamma_2) = \nu \gamma_2 P_{2y},$$

$$R_x(\xi, \eta, -\gamma_2) = -\nu \gamma_2 Q_{2x}, \quad R_y(\xi, \eta, -\gamma_2) = -\nu \gamma_2 Q_{2y},$$

$$R_z(\xi, \eta, \gamma_2) = -\nu [\xi P_{2x} + \eta P_{2y}], \quad R_z(\xi, \eta, -\gamma_2) = -\nu [\xi Q_{2x} + \eta Q_{2y}].$$

Теорема 13. Задача Коши (58), (59), (61) имеет решение в классе уходящих на бесконечность решений тогда и только тогда, когда

$$P_1 = 0, \quad P_{2x} = 0, \quad P_{2y} = 0. \quad (63)$$

При этом

$$\begin{aligned} u_x(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\rho\omega^2} \left[\frac{\xi}{\gamma_1} Q_1(\xi, \eta) \frac{1}{\zeta + \gamma_1} + Q_{2x}(\xi, \eta) \frac{1}{\zeta + \gamma_2} \right], \\ u_y(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\rho\omega^2} \left[\frac{\eta}{\gamma_1} Q_1(\xi, \eta) \frac{1}{\zeta + \gamma_1} + Q_{2y}(\xi, \eta) \frac{1}{\zeta + \gamma_2} \right], \\ u_z(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\rho\omega^2} \left[-Q_1(\xi) \frac{1}{\zeta + \gamma_1} + \frac{\xi Q_{2x} + \eta Q_{2y}}{\gamma_2} \frac{1}{\zeta + \gamma_2} \right]. \end{aligned} \quad (64)$$

Доказательство. Поделим обе части уравнений (62) на

$$A_1 = (\lambda + 2\mu)[\gamma_1 - \zeta][\gamma_1 + \zeta], \quad A_2 = \mu[\gamma_2 - \zeta][\gamma_2 + \zeta]$$

и разложим получившиеся выражения на простые дроби. Получим при $s = x, y, z$

$$u_s = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{A_s(\xi, \eta)}{\zeta - \gamma_1} + \frac{B_s(\xi, \eta)}{\zeta + \gamma_1} + \frac{C_s(\xi, \eta)}{\zeta - \gamma_2} + \frac{D_s(\xi, \eta)}{\zeta + \gamma_2} \right],$$

где

$$A_s = \frac{R_s(\xi, \eta, \gamma_1)}{-2\nu\rho\omega^2\gamma_1}, \quad B_s = \frac{R_s(\xi, \eta, -\gamma_1)}{2\nu\rho\omega^2\gamma_1}, \quad C_s = \frac{R_s(\xi, \eta, \gamma_2)}{2\nu\rho\omega^2\gamma_2}, \quad D_s = \frac{R_s(\xi, \eta, -\gamma_2)}{-2\nu\rho\omega^2\gamma_2}.$$

По теореме Винера–Пэли должны выполняться равенства $A_s = 0, C_s = 0$ при тех ξ, η , при которых значения γ_j чисто мнимые. Чтобы в решении задачи Коши не содержалось приходящих с бесконечности волн, эти же равенства должны выполняться и при тех ξ, η , при которых значения γ_j вещественные. \square

В [55] приведены другие формы условий разрешимости переопределенной задачи Коши.

7.3. В двумерном (плоском случае) при $\partial/\partial z = 0$ все формулы немного упрощаются (см. [56]), искомых функций остается пять. В переопределенной задаче Коши нужно найти решение системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau}{\partial y} + \rho\omega^2 u_x &= 0, & \frac{\partial\tau}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \rho\omega^2 u_y &= 0, \\ \sigma_x = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda\frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \sigma_y = \lambda\frac{\partial u_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \tau &= \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right), \end{aligned} \tag{65}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\sigma_y(x, 0) = \sigma_{y0}(x), \quad \tau(x, 0) = \tau_0(x), \quad u_x(x, 0) = u_{x0}(x), \quad u_y(x, 0) = u_{y0}(x). \tag{66}$$

Обозначим

$$\gamma_j(\xi) = \sqrt{k_j^2 - \xi^2} = \left\{ |\xi| \leq k_j : -\sqrt{k_j^2 - \xi^2}; \quad |\xi| \geq k_j : i\sqrt{\xi^2 - k_j^2} \right\},$$

$$P_1(\xi) = \xi\tau_0(\xi) + \gamma_1(\xi)\sigma_{y0}(\xi) - 2i\mu\xi\gamma_1(\xi)u_{x0}(\xi) - i(\rho\omega^2 - 2\mu\xi^2)u_{y0}(\xi),$$

$$Q_1(\xi) = \xi\tau_0(\xi) - \gamma_1(\xi)\sigma_{y0}(\xi) + 2i\mu\xi\gamma_1(\xi)u_{x0}(\xi) - i(\rho\omega^2 - 2\mu\xi^2)u_{y0}(\xi),$$

$$P_2(\xi) = -\gamma_2(\xi)\tau_0(\xi) + \xi\sigma_{y0}(\xi) + i(\rho\omega^2 - 2\mu\xi^2)u_{x0}(\xi) - 2i\mu\xi\gamma_2(\xi)u_{y0}(\xi),$$

$$Q_2(\xi) = \gamma_2(\xi)\tau_0(\xi) + \xi\sigma_{y0}(\xi) + i(\rho\omega^2 - 2\mu\xi^2)u_{x0}(\xi) + 2i\mu\xi\gamma_2(\xi)u_{y0}(\xi).$$

Теорема 14. Задача Коши (65), (66) имеет решение в классе уходящих на бесконечность решений тогда и только тогда, когда

$$P_1(\xi) = 0, \quad P_2(\xi) = 0. \tag{67}$$

При этом

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \frac{-i}{2\rho\omega^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\xi}{\gamma_1(\xi)} Q_1(\xi) e^{i\gamma_1(\xi)y} + Q_2(\xi) e^{i\gamma_2(\xi)y} \right] e^{-i\xi x} d\xi, \\ u_y(x, y) &= \frac{-i}{2\rho\omega^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-Q_1(\xi) e^{i\gamma_1(\xi)y} + \frac{\xi}{\gamma_2(\xi)} Q_2(\xi) e^{i\gamma_2(\xi)y} \right] e^{-i\xi x} d\xi. \end{aligned} \quad (68)$$

Полное доказательство дано в работе [56].

Решения основных граничных задач для упругой полуплоскости и для упругого пространства получены в [55, 56] с помощью условий разрешимости переопределенных задач Коши.

В работе [57] рассмотрена задача об отражении и преломлении упругой волны в трехслойной среде. Задача Коши для упругой полосы рассматривалась в [56]. Собственные колебания упругой полосы исследованы в работах [58, 59].

8. Дифракция упругих волн на дефектах

8.1. Задачи дифракции упругих волн на дефектах различной природы (трещинах, тонких включениях и т. д.) могут быть сведены, как и задачи дифракции электромагнитных волн, к интегральным уравнениям методом интегральных тождеств или методом задачи о скачке. Ограничимся двумерным случаем. Предварительно рассмотрим задачу о скачке.

Пусть прямая $y = 0$ разделяет две полуплоскости с различными свойствами, которые описываются наборами постоянных ρ_+, λ_+, μ_+ и ρ_-, λ_-, μ_- соответственно. Нужно найти решения систем уравнений вида (65) при $z > 0$ и при $z < 0$ в классе уходящих на бесконечность упругих волн по заданным на границе раздела сред разностям предельных значений

$$\begin{aligned} \sigma_{y0}^+(x) - \sigma_{y0}^-(x) &= a(x), \quad \tau_0^+(x) - \tau_0^-(x) = b(x), \\ u_{x0}^+(x) - u_{x0}^-(x) &= c(x), \quad u_{y0}^+(x) - u_{y0}^-(x) = d(x). \end{aligned} \quad (69)$$

Будем искать решение задачи о скачке в форме решений задач Коши в отдельных полуплоскостях. К условиям (69) добавим необходимые и достаточные условия разрешимости задач Коши вида (67) (для нижней полуплоскости выражения функций P_j и Q_j нужно заменить друг на друга). Таким образом, чтобы получить решение задачи о скачке, нужно решить систему из восьми линейных алгебраических уравнений относительно образов Фурье вспомогательных граничных функций. Эта система может быть преобразована к более простому виду в два этапа (см. [56, п. 6]): сначала нужно исключить напряжения, а затем ввести новые искомые функции $c(\xi)$, $d(\xi)$ так, что

$$u_{x0}^\pm(\xi) = \frac{1}{2} (\pm c(\xi) + u_x(\xi)), \quad u_{y0}^\pm(\xi) = \frac{1}{2} (\pm d(\xi) + u_y(\xi)).$$

После ряда преобразований получим следующее утверждение.

Теорема 15. *Существует единственное решение задачи о скачке с граничным условием (69) для системы уравнений двумерной теории упругости в классе*

уходящих на бесконечность решений. При $z > 0$ и при $z < 0$ это решение имеет вид (68), где

$$\begin{aligned} Q_1^\pm(\xi) &= 2i \frac{\omega^2 \rho_\pm \gamma_1^\pm(\xi)}{G^\pm(\xi)} \left[\pm \xi u_{x0}^\pm(\xi) - \gamma_2^\pm(\xi) u_{y0}^\pm(\xi) \right], \\ Q_2^\pm(\xi) &= 2i \frac{\omega^2 \rho_\pm \gamma_2^\pm(\xi)}{G^\pm(\xi)} \left[\gamma_1^\pm(\xi) u_{x0}^\pm(\xi) - \pm \xi u_{y0}^\pm(\xi) \right], \\ G^\pm(\xi) &= \xi^2 + \gamma_1^\pm(\xi) \gamma_2^\pm(\xi). \end{aligned} \quad (70)$$

8.2. Рассмотрим задачу дифракции упругой волны на трещине M в однородной изотропной среде, т. е. в случае, когда $\rho_\pm = \rho$, $\lambda_\pm = \lambda$, $\mu_\pm = \mu$ и, следовательно, $\gamma_1^\pm(\xi) = \gamma_1(\xi)$, $\gamma_2^\pm(\xi) = \gamma_2(\xi)$ и $G^\pm(\xi) = G(\xi)$. Удобно считать, что исходная волна задана и в верхней, и в нижней полуплоскости. Тогда вне M скачки всех граничных распределений равны нулю, а на M равны нулю скачки напряжений, и с каждой стороны трещины

$$\sigma_{y0}^\pm(x) + \sigma_{y0}^0(x) = 0, \quad \tau_0^\pm(x) + \tau_0^0(x) = 0, \quad x \in M. \quad (71)$$

Таким образом, $a(\xi) = 0$, $b(\xi) = 0$, а распределения $c(x)$, $d(x)$ на M должны быть определены из условий (69).

Выразим $\sigma_{y0}^\pm(\xi)$ и $\tau_0^\pm(\xi)$ через $c(x)$ и $d(x)$. При сделанных предположениях система уравнений для функций $c(\xi)$, $d(\xi)$ вырождается в независимые уравнения

$$\frac{\rho\omega^2\gamma_2(\xi)}{G(\xi)} u_{y0}(\xi) = \xi \left[\frac{\rho\omega^2}{G(\xi)} - 2\mu \right] c(\xi), \quad \frac{\rho\omega^2\gamma_1(\xi)}{G(\xi)} u_{x0}(\xi) = \xi \left[2\mu - \frac{\rho\omega^2}{G(\xi)} \right] d(\xi).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sigma_{y0}^\pm(\xi) &= i \frac{(\rho\omega^2 - 2\mu\xi^2)^2 + 4\mu^2\xi^2\gamma_1(\xi)\gamma_2(\xi)}{2\rho\omega^2\gamma_1(\xi)} d(\xi), \\ \tau_0^\pm(\xi) &= i \frac{(\rho\omega^2 - 2\mu\xi^2)^2 + 4\mu^2\xi^2\gamma_1(\xi)\gamma_2(\xi)}{2\rho\omega^2\gamma_2(\xi)} c(\xi), \end{aligned}$$

и условия (69) сводятся к паре независимых интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} i \frac{(\rho\omega^2 - 2\mu\xi^2)^2 + 4\mu^2\xi^2\gamma_1(\xi)\gamma_2(\xi)}{2\rho\omega^2\gamma_2(\xi)} c(\xi) e^{-i\xi x} d\xi &= -\tau_0^0(x), \quad x \in M, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} i \frac{(\rho\omega^2 - 2\mu\xi^2)^2 + 4\mu^2\xi^2\gamma_1(\xi)\gamma_2(\xi)}{2\rho\omega^2\gamma_1(\xi)} d(\xi) e^{-i\xi x} d\xi &= -\sigma_{y0}^0(x), \quad x \in M. \end{aligned}$$

Отсюда следует

Теорема 16. Задача дифракции упругой волны на трещина равносильна паре интегральных уравнений

$$\int_M c(t) K_c(t, x) dt = -\tau_0^0(x), \quad \int_M d(t) K_d(t, x) dt = -\sigma_{y0}^0(x), \quad x \in M, \quad (72)$$

где

$$K_c(t, x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\rho\omega^2 - 2\mu\xi^2)^2 + 4\mu^2\xi^2\gamma_1(\xi)\gamma_2(\xi)}{2\rho\omega^2\gamma_2(\xi)} e^{i\xi(t-x)} d\xi,$$

$$K_d(t, x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\rho\omega^2 - 2\mu\xi^2)^2 + 4\mu^2\xi^2\gamma_1(\xi)\gamma_2(\xi)}{2\rho\omega^2\gamma_1(\xi)} e^{i\xi(t-x)} d\xi.$$

Аналогичные уравнения были получены в работе [60] (уравнения (4.5) и (4.6)), для их численного решения был применен метод Галеркина. В качестве вспомогательной задачи использовалась задача о скачке для системы уравнений Ламе.

Задача дифракции упругой волны на периодической системе трещин сведена к БСЛАУ в [61].

9. Задачи для гиперболических и параболических уравнений

9.1. При исследовании граничных задач для уравнений смешанного типа в смешанных областях, начиная с классических работ Трикоми и Геллерстедта, часто используется метод интегральных уравнений [62–64]. В отдельных частях смешанной области рассматриваются вспомогательные задачи, при этом на границе изменения типа обычно задаются (в случае уравнения 2-го порядка с двумя независимыми переменными) значения искомого решения и его нормальной производной – функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$. Для каждой частичной области выводятся соотношения, связывающие эти функции. Эти соотношения вместе с заданными на границе изменения типа условиями сопряжения и приводят к интегральному уравнению. Легко видеть, что зависимости между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$ представляют собой условия разрешимости вспомогательных переопределенных граничных задач, причем как для уравнений эллиптического типа, так и для уравнений других типов.

В [65] (см. также [5, 13]) метод вспомогательной переопределенной задачи Коши использован при решении задач о скачке и граничных задач с дефектом на линии изменения типа для уравнений смешанного типа в смешанных областях.

9.2. Метод переопределенной граничной задачи может быть применен и при исследовании параболических уравнений. Ограничимся только одним примером. Рассмотрим переопределенную задачу для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad z > 0, \quad t > 0. \quad (73)$$

Будем искать его решение, удовлетворяющее начальному и граничным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi(x, z), \quad u|_{z=0} = \chi(x, t), \quad \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=0} = \psi(x, t). \quad (74)$$

Отметим, что было бы достаточно задать только одно из граничных условий.

Обозначим

$$\gamma(\xi, \tau) = \sqrt{i \frac{\tau}{a^2} - \xi^2} = \frac{1+i}{a\sqrt{2}} \sqrt{\tau + ia^2\xi^2}.$$

Теорема 17. *Решение задачи (73), (74) существует тогда и только тогда, когда образы Фурье граничных функций удовлетворяют условию*

$$\frac{1}{a^2} \varphi(\xi, \gamma(\xi, \tau)) - \psi(\xi, \tau) + i\gamma(\xi, \tau)\chi(\xi, \tau) = 0. \quad (75)$$

Доказательство. Условие разрешимости (75) обеспечивает аналитическую продолжимость по переменной ζ с вещественной оси в верхнюю комплексную полуплоскость решения уравнения

$$\left(\zeta^2 + \xi^2 - i \frac{\tau}{a^2} \right) u(\xi, \zeta, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{a^2} \varphi(\xi, \zeta) - \psi(\xi, \tau) + i\zeta\chi(\xi, \tau) \right]. \quad \square$$

В случае одной пространственной переменной условие (75) принимает вид

$$\frac{1}{a^2} \varphi \left(\frac{1+i}{a\sqrt{2}} \sqrt{\tau} \right) - \psi(\tau) + i \frac{1+i}{a\sqrt{2}} \sqrt{\tau} \chi(\tau) = 0.$$

Отметим, что здесь функции $\chi(t)$ и $\psi(t)$ связаны друг с другом дифференциальным уравнением дробного порядка $1/2$. Это утверждение можно получить при анализе хорошо известной формулы, дающей решение задачи о распространении тепла в полуограниченном стержне (см., например, [66, гл. XXIX, §2]).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 03-01-96184).

Summary

I.E. Pleshchinskaya, N.B. Pleshchinskii. Over-determined boundary value problems for elliptic partial differential equations and their applications to waves diffraction theory.

The review of the results of investigation of the boundary value problems with redundant boundary conditions for the partial differential equations is given. The necessary and sufficient conditions of solvability for the over-determined problems are obtained by the integral Fourier transform method in the classes of distributions for the equations with constant coefficients. The Helmholtz equation, the Maxwell equations and sets of equations for the dynamic elasticity theory are considered as examples. These solvability conditions are used for reducing some problems of propagation and diffraction of electromagnetic and elastic waves theory to the integral and summatorial equations.

Литература

1. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 832 с.
2. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
4. Pleshchinskaya I.E., Pleshchinskii N.B. The Cauchy problem and potentials for elliptic partial differential equations and some of their applications // Advances in Equations and Inequalities / Ed. J.M. Rassias. – Hadronic Press, 1999. – P. 127–146.
5. Плещинский Н.Б. О задачах сопряжения решений уравнений с частными производными. Метод частичных областей // На рубеже веков. НИИММ им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета. 1998–2002 гг. – Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва, 2003. – С. 148–167.
6. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. Обобщенные функции. Вып. 3. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.
7. Хёрмандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – М.: Мир, 1965. – 380 с.
8. Волевич Л.Р., Гиндикин С.Г. Обобщенные функции и уравнения в свертках. – М.: Физматлит, 1994. – 336 с.
9. Волевич Л.Р., Гиндикин С.Г. Задача Коши // Итоги науки и техники Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – М.: ВИНИТИ, 1988. – Т. 32. – С. 5–98.
10. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 512 с.

11. Егоров Ю.В. Линейные дифференциальные уравнения главного типа. – М.: Наука, 1984. – 360 с.
12. Комеч А.И. Линейные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами // Итоги науки и техники Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – М.: ВИНТИ, 1988. – Т. 31. – С. 127–261.
13. Махер Ахмед. Метод задачи о скачке в задачах сопряжения решений уравнений с частными производными: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – Казань, 2001. – 95 с.
14. Schwartz L. Distributions à valeurs vectorielles. I, II // Ann. Inst. Fourier. – 1957. – V. 7. – P. 1–141; 1958. – V. 8. – P. 1–209.
15. Лионс Ж.-Л., Маджеснес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 368 с.
16. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа, или применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: ИЛ, 1962. – 280 с.
17. Pleshchinskaya I.E., Pleshchinskii N.B. On classification of eigen waves of planar, cylindrical and spherical dielectric waveguides // Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. Proc. Int. Conf. MMET*98. Kharkov, Ukraine, June 2–5, 1998. – V. 2. – P. 781–783.
18. Pleshchinskii N.B., Tumakov D.N. On solving diffraction problems for the junctions of open waveguides in the classes of distributions // Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. Proc. Int. Conf. MMET*98. Kharkov, Ukraine, June 2–5, 1998. – V. 2. – P. 801–803.
19. Плещинский Н.Б. Метод преобразования Фурье в задачах сопряжения электромагнитных полей // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 6. Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах. – Казань: НИИММ им. Н.Г. Чеботарева, 2000. – С. 153–185.
20. Плещинский Н.Б., Тумаков Д.Н. Метод частичных областей для скалярных координатных задач дифракции электромагнитных волн в классах обобщенных функций // Препринт 2000-1. – Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва, 2000. – 50 с.
21. Tumakov D.N. The classes of solving of the Helmholtz equation in halfplane // Conf. Proc. 10th Int. Conf. Mathematical Methods in Electromagnetic Theory MMET*04. Dnepropetrovsk, Ukraine, Sept. 14–17, 2004. – P. 237–239.
22. Maher A., Pleshchinskii N.B. Plane electromagnetic wave scattering and diffraction in a stratified medium // Proc. Int. Conf. Mathematical Methods in Electromagnetic Theory MMET 2000. Kharkov, Ukraine, Sept. 12–5, 2000. – V. 2. – P. 426–428.
23. Maher A., Плещинский Н.Б. Задача о скачке для уравнения Гельмгольца в плоскостной среде и ее приложения // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 1. – С. 45–56.
24. Maher Ахмед. Задача о скачке для уравнения Гельмгольца в слоистых средах // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 6. Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах. – Казань: НИИММ им. Н.Г. Чеботарева, 2000. – С. 203–211.
25. Maher Ахмед. Дифракция электромагнитной волны на системе металлических лент в плоскослоистой среде // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 13. – Казань: Изд-во «ДАС», 2001. – С. 142–148.
26. Плещинский Н.Б., Тумаков Д.Н. Граничные задачи для уравнения Гельмгольца в квадранте и в полуплоскости, составленной из двух квадрантов // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 7. – С. 63–74.

27. *Тумаков Д.Н.* Задачи сопряжения решений уравнения Гельмгольца в координатных областях: Дисс. . . канд. физ.-мат. наук. – Казань, 2002. – 127 с.
28. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
29. *Bourganov A.F., Pleshchinskii N.B.* On reflection and refraction of the electromagnetic waves on the linear and nonlinear media interface // Conf. Proc. 10th Int. Conf. Mathematical Methods in Electromagnetic Theory MMET*04. Dnepropetrovsk, Ukraine, Sept. 14–17, 2004. – Р. 571–573.
30. *Бурганов А.Ф.* О рассеянии электромагнитной волны на границе раздела линейной и нелинейной сред // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 29. Математическое моделирование и математическая физика. – Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва, 2004. – С. 89–94.
31. *Pleshchinskii N.B., Tumakov D.N.* Regularization by the integral identities method for integral and series equations in diffraction problems // Proc. Int. Conf. Mathematical Methods in Electromagnetic Theory MMET 2000. Kharkov, Ukraine, Sept. 12–15, 2000. – V. 1. – Р. 199–201.
32. *Pleshchinskii N.B.* Integral transforms method in the conjunction problems of electromagnetic fields // Functional-Analytic and Complex Methods, their Interactions, and Applications to Partial Differential Equations / Ed. W. Tutschke. – Publishing House World Scientific, 2001. – Р. 161–177.
33. *Плещинский Н.Б.* Математические модели в задачах сопряжения электромагнитных полей // Актуал. пробл. мат. моделир. и информатики. Матер. науч. конф., г. Казань, 30 янв. – 06 февр. 2002 г. – Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва, 2002. – С. 71–86.
34. *Тумаков Д.Н.* Обоснование метода усечения БСЛАУ задачи о скачке поперечного сечения плоского волновода // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 6. Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах. – Казань: НИИММ им. Н.Г. Чеботарева, 2000. – С. 234–240.
35. *Raskina O.A., Tumakov D.N.* Рассеяние электромагнитного поля на N-разветвлении плоского волновода // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 2. Итерационные методы решения линейных и нелинейных сеточных задач. – Казань: Изд-во «Унипресс», 1999. – С. 240–244.
36. *Raskina O.A., Tumakov D.N.* Electromagnetic wave diffraction on an N-branching of a plane waveguide // Proc. Int. Conf. Mathematical Methods in Electromagnetic Theory MMET 2000. Kharkov, Ukraine, Sept. 12–15, 2000. – V. 2. – Р. 400–402.
37. *Тумаков Д.Н.* О задаче дифракции электромагнитной волны на разветвлении плоского волновода // Иссл. по прикл. матем. и информатике. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2003. – Вып. 24. – С. 128–137.
38. *Плещинский Н.Б.* Об интегральных уравнениях первого рода с логарифмической особенностью в ядре и методах их регуляризации // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 17. Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах. – Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва, 2002. – С. 90–120.
39. *Плещинский Н.Б.* Уравнение Гельмгольца в полуплоскости и скалярные задачи дифракции электромагнитных волн на плоских металлических экранах // Препринт ПМФ-03-02. – Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва, 2003. – 30 с.
40. *Плещинский И.Н.* Дифракция электромагнитной волны на наклонной металлической пластине в плоском волноводе // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 11. Проблемы современной математики. – Казань: Изд-во «Унипресс», 2001. – С. 218–221.

41. *Плещинский И.Н.* Численный метод решения задачи дифракции электромагнитной волны на наклонной металлической пластине в плоском волноводе // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 13. – Казань: Изд-во «ДАС», 2001. – С. 197–204.
42. *Плещинский И.Н., Плещинский Н.Б.* О задачах дифракции волн на экранах, расположенных на наклонной границе раздела сред в волноводах с металлическими стенками // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 17. Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах. – Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва, 2002. – С. 175–187.
43. *Pleshchinskii I.N., Pleshchinskii N.B.* The problems of electromagnetic waves diffraction on the dielectric index step in the waveguides with metallic bounds // Conf. Proc. 10th Int. Conf. Mathematical Methods in Electromagnetic Theory MMET*04. Dnepropetrovsk, Ukraine, Sept. 14–17, 2004. – Р. 127–129.
44. *Плещинский И.Н.* Задача дифракции электромагнитной волны на криволинейной границе раздела сред в плоском волноводе. Метод интегральных тождеств // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 29. Математическое моделирование и математическая физика. – Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва, 2004. – С. 95–106.
45. *Сайфутдинов И.Г.* Задача дифракции электромагнитной волны на стыке цилиндрических волноводов // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 32. Матем. моделирование и матем. физика. – Казань: Изд-во Казанск. матем. о-ва, 2005. – С. 11–18.
46. *Тумаков Д.Н.* Интегральное уравнение задачи дифракции электромагнитной волны на криволинейном металлическом экране // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 13. Численные методы решения линейных и нелинейных краевых задач. – Казань: Изд-во «ДАС», 2001. – С. 218–225.
47. *Тумаков Д.Н.* Обоснование численного метода решения задачи дифракции электромагнитной волны на криволинейной поверхности // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 17. Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах. – Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва, 2002. – С. 188–193.
48. *Плещинская И.Е.* Задача Коши для системы Maxwella в полупространстве // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Материалы Всеросс. школы-конф., посв. 130-летию со дня рожд. Д.Ф. Егорова, г. Казань, 13–18 сент. 1999 г. – Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва, 1999. – С. 173–174.
49. *Pleshchinskaya I.E.* On Cauchy problem for elliptic partial differential equations in a half-space // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (AMADE'99). Тез. докл. междунар. конф. Минск, Беларусь, 14–18 сент. 1999 г. – Минск: Белгосуниверситет, 1999. – С. 168–170.
50. *Плещинский Н.Б.* Интегральные уравнения задачи дифракции электромагнитной волны на плоском экране // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Материалы Всеросс. школы-конф., посв. 130-летию со дня рожд. Д.Ф. Егорова, г. Казань, 13–18 сент. 1999 г. – Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва, 1999. – С. 174–176.
51. *Pleshchinskii N.B.* Fourier transformation method for the conjugation problems of electromagnetic fields // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (AMADE'99). Тез. докл. междунар. конф. Минск, Беларусь, 14–18 сент. 1999 г. – Минск: Белгосуниверситет, 1999. – С. 170–171.
52. *Pleshchinskii I.N., Pleshchinskii N.B.* Diffraction of the eigen waves on an inclined medium interface in the waveguides with metallic bounds // Conf. Proc. 2002 Int. Conf. Mathematical Methods in Electromagnetic Theory MMET*02. Kiev, Ukraine, Sept. 10–13, 2002. – V. 2. – P. 546–548.

53. *Плещинский И.Н.* Переопределенная граничная задача для системы уравнений Максвелла в полубесконечной цилиндрической области и ее приложения // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 32. Матем. моделирование и матем. физика. – Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва, 2005. – С. 19–30.
54. *Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г.* Математические модели электродинамики. – М.: Выш. шк., 1991. – 224 с.
55. *Плещинская И.Е., Плещинский Н.Б.* Задача Коши для системы уравнений динамической теории упругости в полупространстве и ее приложения // Препринт ПМФ-05-03. – Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва, 2005. – 26 с.
56. *Плещинский Н.Б.* Отражение, преломление и дифракция двумерных упругих волн. Метод переопределенной задачи Коши // Препринт ПМФ-04-01. – Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва, 2004. – 34 с.
57. *Александрова И.Л.* Прямая задача об отражении и преломлении упругих волн в слоистой среде // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 32. Матем. моделирование и матем. физика. – Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва, 2005. – С. 50–59.
58. *Тумаков Д.Н.* Собственные колебания упругой полосы // Препринт ПМФ-05-02. – Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва, 2005. – 26 с.
59. *Ежова Ю.В.* Комплексные собственные значения в задаче о колебаниях упругой полосы // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 32. Матем. моделирование и матем. физика. – Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва, 2005. – С. 67–79.
60. *Гусенкова А.А.* Метод потенциальных функций в задачах теории упругости для тел с дефектом // ПММ. – 2002. – Т. 66, Вып. 3. – С. 470–480.
61. *Осипов Е.А.* Задача дифракции упругой волны на периодической системе дефектов // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 32. Матем. моделирование и матем. физика. – Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва, 2005. – С. 60–66.
62. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа // Итоги науки. Физ.-мат. науки. 2. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 164 с.
63. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. – М.: Наука, 1970. – 296 с.
64. *Крикунов Ю.М.* Краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1986. – 148 с.
65. *Махер А., Плещинский Н.Б.* Граничные задачи для уравнений смешанного типа с дефектом на линии изменения типа // Препринт. – Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва, 2001. – 30 с.
66. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Основные дифференциальные уравнения математической физики. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 768 с.

Поступила в редакцию
01.11.05

Плещинская Ирина Евгеньевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и прикладной математики Казанского государственного технического университета.

Плещинский Николай Борисович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Казанского государственного университета.

E-mail: *pnb@ksu.ru*