

УДК 532.546

## ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ МИЛН-ТОМСОНА НА СЛУЧАЙ КОНЦЕНТРИЧЕСКОГО КОЛЬЦА

*А.М. Мальцева, Ю.В. Обносов, С.В. Rogozin*

### Аннотация

Дано замкнутое аналитическое решение проблемы плоской теории фильтрации в бесконечной трех-компонентной гетерогенной среде с заданной главной частью,  $f(z)$ , искомого комплексного потенциала. Среда представляет из себя изотропное концентрическое кольцо, два других изотропных компонента дополняют кольцо до полной плоскости.

Новые решения получены для случая произвольного распределения особенностей главной части  $f(z)$ , включая случаи их граничного расположения. Кроме того, обобщая более ранние постановки, проведены исследования для комплексных коэффициентов краевого условия. Приведены четыре примера, иллюстрирующие полученные решения, и построены соответствующие линии тока и эквипотенциали.

Хорошо известно, что многие абсолютно различные физические процессы в теории фильтрации, электродинамики, магнитодинамики, теплопроводности и др., описываются одинаковыми математическими моделями, т. е. одними и теми же дифференциальными (интегро-дифференциальными) уравнениями и граничными условиями. В данной работе изучается одна из моделей теории гетерогенных сред.

А именно, в качестве плоской трехфазной гетерогенной среды рассматривается вся плоскость с двумя концентрическими окружностями радиусов  $r$  и  $R$  ( $0 < r < R$ ), разделяющими разнородные компоненты среды. Точнее, изучается вопрос о возмущении заданного комплексного потенциала путем внесения в бесконечную плоскую изотропную среду  $S_1$  инородного гетерогенного двухфазного кругового включения  $S_2 \cup \bar{S}_3$  (см. рис. 1). Задача в такой постановке, с одной стороны, обобщает известную теорему Милн-Томсона об окружности [1] так же, как и результаты работ [2, 3]. С другой стороны, именно такая задача решалась в работе [4]. Следует сказать, что полученные в этой работе формулы для решения справедливы лишь в случае, когда заданный потенциал можно представить в виде суммы трех слагаемых, имеющих особенности внутри круга  $S_3 = \{z : |z| < r\}$ , в кольце  $S_2 = \{z : r < |z| < R\}$  и в области  $S_1 = \{z : |z| > R\}$  соответственно. Однако ясно, что при наличии у потенциала логарифмических особенностей в кольце  $S_2$  или внутри круга  $S_3$  он также будет иметь в общем случае особенность и в бесконечно удаленной точке в области  $S_1$ , поэтому требуемое разбиение невозможно, и приведенные в работе [4] формулы (II), (III) в этих случаях, вообще говоря, неприменимы. Ситуация здесь такая же, как и с «общим» решением задачи о круговом включении, полученным в [2], когда это решение при наличии логарифмической особенности потенциала внутри кругового включения, пришлось подправлять исходя из геометрических соображений. Гораздо более общая по сравнению с предлагаемой ниже задача о двух произвольных круговых включениях рассматривалась в работе [6], но там, в частности для произвольного асимметричного кольца, решение получено лишь при внешнем расположении особенностей заданного комплексного потенциала.

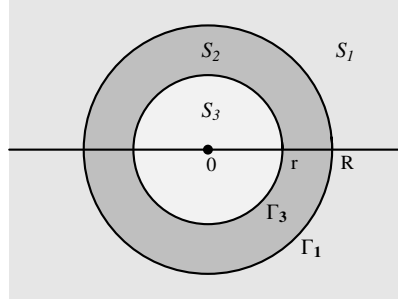


Рис. 1. Концентрическое кольцо

В настоящей работе описанная выше задача решена в предположении, что особенности заданного комплексного потенциала произвольным образом расположены относительно компонентов среды, включая и ранее не рассматривавшийся случай их граничного расположения. Кроме того, на основе обобщения результатов предшественников решение соответствующей краевой задачи получено нами в случае комплексных коэффициентов краевого условия (такие условия возникают, например, в теории электродинамики).

### 1. Постановка задачи

Пусть заданный в изотропной плоскости комплексный потенциал  $f(z)$  с конечным числом особенностей в точках множества  $T$  возмущен путем внесения в плоскость инородного двухфазного гетерогенного включения  $\bar{S}_3 \cup S_2$ .

Введем обозначения:  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ ,  $F(z) = f'(z)$ ,  $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  – соответствующий возмущенный комплексный потенциал,  $v(z) = w'(z) = v_x(x, y) - iv_y(x, y)$  – функция, комплексно сопряженная с вектором скорости  $\mathbf{v}(x, y) = (v_x(x, y), v_y(x, y))$ , если последний интерпретировать как комплекснозначную функцию  $\mathbf{v}(x, y) = v_x(x, y) + iv_y(x, y)$ . В терминах функции  $\mathbf{v}(x, y)$  задача состоит в следующем: требуется построить плоскопараллельное стационарное поле  $\mathbf{v}(x, y) = \mathbf{v}_p(x, y)$ ,  $(x, y) \in S_p$ ,  $p = 1, 2, 3$ , являющееся потенциальным и соленоидальным:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_p(x, y) = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v}_p(x, y) = 0 \quad (1)$$

в каждой изотропной фазе  $S_p$  всюду, за исключением конечного числа особых точек множества  $T \cap S$ . На границе контакта разнородных фаз  $\partial S = \partial S_1 \cup \partial S_3 = \Gamma_1 \cup \Gamma_3$  предполагаются равными нормальные и касательные составляющие предельных значений векторов  $\mathbf{v}_p$  и  $\mathbf{v}_2$ ,  $\check{\rho}_p \mathbf{v}_p$  и  $\check{\rho}_2 \mathbf{v}_2$ ,  $p = 1, 3$ , соответственно:

$$[\mathbf{v}_p(x, y)]_n = [\mathbf{v}_2(x, y)]_n, \quad [\check{\rho}_p \mathbf{v}_p(x, y)]_\tau = [\check{\rho}_2 \mathbf{v}_2(x, y)]_\tau, \quad p = 1, 3. \quad (2)$$

Во втором соотношении (2) постоянный в фазе  $S_p$  коэффициент  $\check{\rho}_p$  характеризует физические свойства среды. В общем случае этот коэффициент является тензором:

$$\check{\rho}_p = \rho_p \begin{vmatrix} 1 & \beta_p \\ -\beta_p & 1 \end{vmatrix},$$

где (как, например, в теории электродинамики)  $\rho_p \geq 0$  – сопротивление, а  $\beta_p \in \mathbb{R}$  – параметр Холла фазы  $S_p$ ,  $p = 1, 2, 3$ .

В терминах комплексного потенциала  $w(x, y) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  в теории гидродинамики задача (1), (2) эквивалентна следующей ( $\beta_p = 0$ ):

$$k_p \varphi_2(t) = k_2 \varphi_p(t), \quad \psi_2(t) = \psi_p(t), \quad t \in \Gamma_p, \quad p = 1, 3.$$

Здесь  $\varphi = \varphi_p(x, y)$  – потенциал поля,  $\psi = \psi_p(x, y)$  – функция тока в фазе  $S_p$ ,  $\partial\varphi/\partial x = v_x$  и  $-\partial\varphi/\partial y = -v_y$  – гармонические сопряженные функции,  $k_p = 1/\rho_p$  – проводимость компоненты  $S_p$ .

Таким образом, физическая плоскость  $(x, y)$  интерпретируется у нас как плоскость комплексного переменного  $z = x + iy$ , вектор  $\mathbf{v}$  – как комплекснозначная функция  $\mathbf{v}(z) = v_x + iv_y$ , а тензор  $\check{\rho}_p$  в этом случае можно интерпретировать как комплексное число  $\check{\rho}_p = \rho_p(1 - i\beta_p)$ .

Комплексно сопряженная с  $\mathbf{v}(z)$  функция  $v(z) = v_p(z) = v_{px}(x, y) - iv_{py}(x, y)$ ,  $z \in S_p$ ,  $p = 1, 2, 3$ , в силу условия (1) голоморфна в каждой из компонент  $S_p$  и непрерывна в их замыкании всюду, за исключением точек множества  $T$ , причем в точках  $S \cap T$  ее главная часть совпадает с главной частью заданной функции  $F(z)$ , а о поведении в граничных точках  $\partial S \cap T$ , если таковые имеются, будет сказано позже.

Учитывая то, что производная  $t'(s)$  по натуральному параметру  $s$  от функции точки  $t(s) \in \Gamma_{1,3}$  совпадает с единичным вектором касательной к  $\Gamma_{1,3}$  в этой точке, граничные условия (2) можно переписать в следующем виде:

$$\operatorname{Im}[\overline{t'(s)}v_2(t)] = \operatorname{Im}[\overline{t'(s)}v_p(t)], \quad \operatorname{Re}[\overline{t'(s)}\check{\rho}_2v_2(t)] = \operatorname{Re}[\overline{t'(s)}\check{\rho}_pv_p(t)].$$

Выписанные вещественные краевые условия эквивалентны [5, с. 53] следующему комплексному условию:

$$v_2(t) = A_{2p}v_p(t) - B_{2p}[t'(s)]^{-2}\overline{v_p(t)}, \quad t \in \Gamma_p, \quad p = 1, 3, \quad (3)$$

где

$$A_{pq} = \frac{\rho_p + \rho_q}{2\rho_p} - i\frac{\rho_p\beta_p - \rho_q\beta_q}{2\rho_p}, \quad B_{pq} = \frac{\rho_p - \rho_q}{2\rho_p} - i\frac{\rho_p\beta_p - \rho_q\beta_q}{2\rho_p}. \quad (4)$$

В дальнейшем будет использоваться обозначение:

$$\overline{B_{pq}}/A_{pq} = \Delta_{pq}, \quad (5)$$

и вытекающие из (4), (5) соотношения:

$$\begin{aligned} B_{pq} &= 1 - \overline{A_{pq}}, \quad A_{qp} = \rho_p\overline{A_{pq}}/\rho_q, \quad B_{qp} = -\rho_p B_{pq}/\rho_q, \\ |A_{qp}|^2 - |B_{qp}|^2 &= \rho_p/\rho_q, \quad B_{qp}/A_{qp} = -\overline{\Delta_{pq}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Учитывая, что  $t'(s) = it/r$  на  $\Gamma_3$  и  $t'(s) = it/R$  на  $\Gamma_1$ , граничное условие (3) запишется в виде:

$$\begin{cases} v_2(t) = A_{21}v_1 + B_{21}R^2t^{-2}\overline{v_1(t)}, & t \in \Gamma_1 = \{t : |t| = R\}, \\ v_2(t) = A_{23}v_3 + B_{23}r^2t^{-2}\overline{v_3(t)}, & t \in \Gamma_3 = \{t : |t| = r\}. \end{cases} \quad (7)$$

Функция комплексно-сопряженная с вектором скорости невозмущенного потока,  $F(z) = f'(z)$ , как однозначная мероморфная функция с конечным числом полюсов в расширенной плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$  является рациональной функцией. Исследование задачи (7) проведем сначала в предположении, что  $F(z)$  не имеет полюсов на  $\partial S$ .

При сделанных предположениях функцию  $F(z)$  можно представить в виде суммы  $F(z) = F_1(z) + F_2(z) + F_3(z)$ , где каждая из функций  $F_p(z)$  имеет конечное число полюсов в области  $S_p$  ( $p = 1, 2, 3$ ). Исследование задачи (7) начнем с наиболее простого случая.

## 2. Решение задачи (7) в случае, когда $\operatorname{res}_\infty F_2(z) = \operatorname{res}_\infty F_3(z) = 0$

Кусочно-мероморфное решение  $v(z)$  задачи (7) будем отыскивать в следующей форме:

$$v(z) = v_p(z) = F_p(z) + v_{p0}(z), \quad z \in S_p, \quad p = 1, 2, 3, \quad (8)$$

где  $F_p(z) = f'_p(z)$  – известная главная часть функции  $v_p(z)$ , а  $v_{p0}(z)$  – неизвестная правильная часть, голоморфная в  $S_p$ . При этом функция  $F_1(z)$  представляет из себя сумму конечного числа простых дробей и полинома, а  $F_{2,3}(z)$  – суммы простых дробей. На бесконечности функции  $F_{2,3}(z)$  и искомая регулярная часть  $v_{10}$ , в общем случае, имеют нуль по крайней мере первого порядка. Однако в рассматриваемой ситуации, когда  $\operatorname{res}_\infty F_2(z) = \operatorname{res}_\infty F_3(z) = 0$ , функции  $F_{2,3}(z)$  и искомая функция  $v_{10}(z)$  на бесконечности имеют нуль не ниже второго порядка.

Голоморфная в кольце  $S_2$  функция  $v_{20}(z)$  по теореме Лорана единственным образом представима в виде суммы:

$$v_{20}(z) = v_{20}^+(z) + v_{20}^-(z), \quad v_{20}^-(\infty) = 0, \quad (9)$$

где функции  $v_{20}^+(z)$  и  $v_{20}^-(z)$  голоморфны, соответственно, в круге радиуса  $R$  и во внешности круга радиуса  $r$ .

Рассмотрим следующие функции

$$\Phi(z) = \begin{cases} F_2(z) + v_{20}^+(z) - A_{23}v_{30}(z) - B_{23}r^2z^{-2}\widehat{F}_3(z), & |z| \leq r, \\ -v_{20}^-(z) + A_{23}F_3(z) + B_{23}r^2z^{-2}\widehat{v}_{30}(z), & |z| \geq r. \end{cases} \quad (10)$$

$$\Psi(z) = \begin{cases} A_{21}F_1(z) - v_{20}^+(z) + B_{21}R^2z^{-2}\widetilde{v}_{10}(z), & |z| \leq R, \\ F_2(z) + v_{20}^-(z) - A_{21}v_{10}(z) - B_{21}R^2z^{-2}\widetilde{F}_1(z), & |z| \geq R, \end{cases} \quad (11)$$

где введены обозначения

$$\widehat{\varphi}(z) = \overline{\varphi(r^2/\bar{z})}, \quad \widetilde{\varphi}(z) = \overline{\varphi(R^2/\bar{z})}. \quad (12)$$

При сделанных предположениях функция  $z^{-2}\widehat{F}_3(z)$  имеет в нуле устранимую особенность, а значит, эта функция, как и функции  $F_2(z)$ ,  $v_{20}^+(z)$ ,  $v_{30}(z)$ , голоморфна в  $S_3$ . Функции  $v_{20}^-(z)$ ,  $F_3(z)$ ,  $z^{-2}\widehat{v}_{30}(z)$  голоморфны вне  $\overline{S_3}$  и стремятся к нулю на бесконечности. На границе  $\Gamma_3$  левое и правое предельные значения функции  $\Phi(z)$  в силу (7)–(9) совпадают. Следовательно, функция (10) голоморфна в  $\mathbb{C}$  и стремится к нулю на бесконечности, и по теореме Лиувилля  $\Phi(z) \equiv 0$ . Аналогично, используя (11), получим  $\Psi(z) \equiv 0$ .

Таким образом, приходим к системе функциональных уравнений:

$$\begin{aligned} F_2(z) + v_{20}^+(z) - A_{23}v_{30}(z) - B_{23}r^2z^{-2}\widehat{F}_3(z) &= 0, & |z| \leq r, \\ -v_{20}^-(z) + A_{23}F_3(z) + B_{23}r^2z^{-2}\widehat{v}_{30}(z) &= 0, & |z| \geq r, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} A_{21}F_1(z) - v_{20}^+(z) + B_{21}R^2z^{-2}\widetilde{v}_{10}(z) &= 0, & |z| \leq R, \\ F_2(z) + v_{20}^-(z) - A_{21}v_{10}(z) - B_{21}R^2z^{-2}\widetilde{F}_1(z) &= 0, & |z| \geq R. \end{aligned} \quad (14)$$

Исключим из системы (13) функцию  $v_{30}(z)$  и сделаем в полученном равенстве замену  $z \rightarrow gz$ , где

$$g = r^2/R^2 < 1. \quad (15)$$

Учитывая соотношения (4)–(6), (12) и равенство  $\widehat{F}_2(gz) = \widetilde{F}_2(z)$ , придем к уравнению

$$\frac{\overline{B}_{32}gz^2}{R^2}(F_2(gz) + v_{20}^+(gz)) - \widetilde{F}_3(z) + \overline{A}_{32}\widetilde{v}_{20}^-(z) = 0, \quad |z| \leq R^2/r. \quad (16)$$

Аналогичным образом, исключение из системы (14) функции  $v_{10}$  приводит к результату:

$$A_{12}v_{20}^+(z) + \frac{B_{12}R^2}{z^2}(\tilde{F}_2(z) + \tilde{v}_{20}^-(z)) - F_1(z) = 0, \quad |z| \leq R. \quad (17)$$

Исключая теперь из соотношений (16) и (17) функцию  $\tilde{v}_{20}^-(z)$ , получим функциональное уравнение относительно  $v_{20}^+(z)$ :

$$v_{20}^+(z) = \delta(v_{20}^+(gz) + F_2(gz)) + \frac{\bar{\Delta}_{21}R^2}{z^2} \left( \frac{\tilde{F}_3(z)}{\bar{A}_{32}} + \tilde{F}_2(z) \right) + \frac{F_1(z)}{A_{12}}, \quad (18)$$

где  $|z| \leq R$ , а

$$\delta = g\bar{\Delta}_{21}\Delta_{23} = g\Delta. \quad (19)$$

Функции  $F_2(z)$  и  $F_3(z)$ , имеющие в рассматриваемом случае на бесконечности нуль второго порядка, можно представить в виде:

$$F_3(z) = F_{30}(z)R^2/z^2, \quad F_2(z) = F_{20}(z)R^2/z^2, \quad (20)$$

где  $F_{30}(z)$  и  $F_{20}(z)$  – ограниченные на бесконечности функции (множитель  $R^2$  взят для упрощения последующих формул). В силу (20) уравнение (18) принимает вид:

$$v_{20}^+(z) = \delta(v_{20}^+(gz) + F_2(gz)) + \bar{\Delta}_{21} \left( \frac{\tilde{F}_{30}(z)}{\bar{A}_{32}} + \tilde{F}_{20}(z) \right) + \frac{F_1(z)}{A_{12}}. \quad (21)$$

Заменяя последовательно в (21)  $z$  на  $g^k z$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , приходим к бесконечной системе, исключая из которой  $v_{20}^+(gz)$ ,  $v_{20}^+(g^2z)$ ,  $\dots$ , после  $N$  шагов получим уравнение

$$\begin{aligned} v_{20}^+(z) = & \delta^{N+1}v_{20}^+(g^{N+1}z) + \sum_{k=1}^N \delta^k F_2(g^k z) + \bar{\Delta}_{21}\bar{A}_{32}^{-1} \sum_{k=0}^N \delta^k \tilde{F}_{30}(g^k z) + \\ & + \bar{\Delta}_{21} \sum_{k=0}^N \delta^k \tilde{F}_{20}(g^k z) + A_{12}^{-1} \sum_{k=0}^N \delta^k F_1(g^k z), \quad |z| \leq R. \quad (22) \end{aligned}$$

Так как величина (19) по модулю меньше единицы, то  $\delta^{N+1} \rightarrow 0$ , и из (22) в пределе, когда  $N \rightarrow \infty$ , получим решение уравнения (18) в виде абсолютно и равномерно сходящегося при  $|z| \leq R$  ряда:

$$v_{20}^+(z) + F_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k \left[ F_2(g^k z) + \bar{\Delta}_{21} \left( \frac{\tilde{F}_{30}(g^k z)}{\bar{A}_{32}} + \tilde{F}_{20}(g^k z) \right) + \frac{F_1(g^k z)}{A_{12}} \right]. \quad (23)$$

Последовательно из уравнений (13) и (14) найдем остальные неизвестные функции

$$\begin{aligned} v_{30}(z) &= \bar{\Delta}_{32}g^{-1}\hat{F}_{30}(z) + A_{23}^{-1}(v_{20}^+(z) + F_2(z)), \\ v_{20}^-(z) &= A_{32}^{-1}F_3(z) + \bar{\Delta}_{23}r^2z^{-2}(\hat{v}_{20}^+(z) + \hat{F}_2(z)), \\ v_{10}(z) &= \bar{\Delta}_{12}R^2z^{-2}\tilde{F}_1(z) + A_{21}^{-1}(v_{20}^-(z) + F_2(z)). \end{aligned}$$

Учитывая то, что оператор  $\widehat{\varphi}$ , примененный к функциям  $\varphi(g^k z)$ ,  $\widetilde{\varphi}(g^k z)$ , переводит первую из них в функцию  $\widehat{\varphi}(g^{-k} z)$ , равную значению  $\widehat{\varphi}(z)$  в точке  $g^{-k} z$ , а вторую – в  $\varphi(g^{-k-1} z)$ , получим

$$\widehat{v}_{20}^+(z) + \widehat{F}_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\delta}^k \left[ \widehat{F}_2(z/g^k) + \Delta_{21} \left( \frac{F_{30}(z/g^{k+1})}{A_{23}} + F_{20}(z/g^{k+1}) \right) + \frac{\widehat{F}_1(z/g^k)}{\overline{A}_{12}} \right]. \quad (24)$$

Таким образом, решение задачи (7) запишется в следующей форме:

$$v_1(z) = F_1(z) + \overline{\Delta}_{12} R^2 z^{-2} \widetilde{F}_1(z) + A_{21}^{-1} (F_2(z) + A_{23}^{-1} F_3(z)) + \frac{r^2 \overline{\Delta}_{23}}{z^2 A_{21}} \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\delta}^k \left[ \widehat{F}_2(z/g^k) + \Delta_{21} \left( \frac{F_{30}(z/g^{k+1})}{A_{23}} + F_{20}(z/g^{k+1}) \right) + \frac{\widehat{F}_1(z/g^k)}{\overline{A}_{12}} \right], \quad (25)$$

$$v_2(z) = \frac{F_3(z)}{A_{32}} + \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k \left[ F_2(g^k z) + \overline{\Delta}_{21} \left( \frac{\widetilde{F}_{30}(g^k z)}{\overline{A}_{32}} + \widetilde{F}_{20}(g^k z) \right) + \frac{F_1(g^k z)}{A_{12}} \right] + \overline{\Delta}_{23} \frac{r^2}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\delta}^k \left[ \widehat{F}_2(z/g^k) + \Delta_{21} \left( \frac{F_{30}(z/g^{k+1})}{A_{23}} + F_{20}(z/g^{k+1}) \right) + \frac{\widehat{F}_1(z/g^k)}{\overline{A}_{12}} \right], \quad (26)$$

$$v_3(z) = F_3(z) + \overline{\Delta}_{32} g^{-1} \widehat{F}_{30}(z) + A_{23}^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k \left[ F_2(g^k z) + \overline{\Delta}_{21} \left( \frac{\widetilde{F}_{30}(g^k z)}{\overline{A}_{32}} + \widetilde{F}_{20}(g^k z) \right) + \frac{F_1(g^k z)}{A_{12}} \right], \quad (27)$$

где все параметры определяются формулами (4), (5), (15), (19), (20), а под функцией  $\widehat{\varphi}(g^j z)$  ( $\widetilde{\varphi}(g^j z)$ ) понимается значение функции  $\widehat{\varphi}(z)$  ( $\widetilde{\varphi}(z)$ ) в точке  $g^j z$ .

Отметим, что в частном случае вещественных коэффициентов ( $\beta_j = 0$ ,  $j = 1, 2, 3$ ) и  $F(z) = F_1(z)$ , решение (25)–(27) после интегрирования совпадает с полученным в [4] решением (I).

В приводимом ниже и во всех последующих примерах будем считать проводимость внешней среды  $S_1$  равной единице ( $k_1 = 1/\rho_1 = 1$ ), что не уменьшает общности, так как решение (25)–(27) существенным образом зависит лишь от относительных проводимостей  $k_j/k_1 = \rho_1/\rho_j$ . Кроме того, для простоты в примерах будем рассматривать вещественный случай, когда  $\beta_j = 0$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

**Пример 1.** Пусть заданный комплексный потенциал  $f(z)$  определяет течение с постоянной скоростью  $\overline{V}_0$  в бесконечности и единственным источником/стоком в конечной точке  $z_0$ , т. е.  $f'(z) = F(z) = F_1(z) = V_0 + Q/(z - z_0)$ . Требуется найти линии тока и эквипотенциали возмущенного комплексного потенциала в результате внесения в среду  $S_1$  двухфазного кругового включения с внешним радиусом  $R = 10$  и внутренним  $r = 5$ , если  $|z_0| > R$ . При таких предположениях  $F_2(z) = F_3(z) \equiv 0$ , и формулы (25)–(27) в рассматриваемом вещественном случае приводят к результату

$$v_1(z) = V_0 + \frac{Q}{z - z_0} - \frac{\overline{Q} \Delta_{12}}{z - \widetilde{z}_0} + \frac{\overline{Q} \Delta_{13}}{z} + \overline{V}_0 \frac{R^2}{z^2} \frac{\Delta_{12} + g \Delta_{23}}{1 - \delta} - \frac{\Delta_{23} \overline{Q}}{A_{12} A_{21}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k}{z - g^k z_0^*},$$

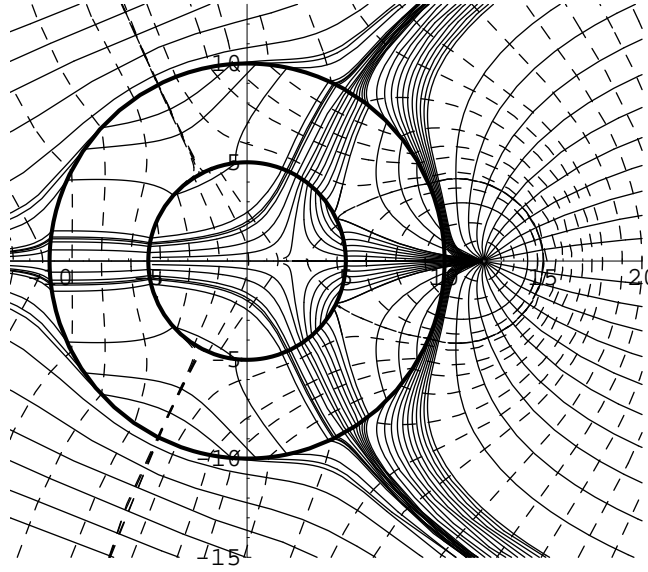


Рис. 2. Сплошными линиями изображены линии тока, пунктирными – эквипотенциали

$$v_2(z) = \frac{V_0}{A_{12}(1-\delta)} + \frac{\bar{Q}\Delta_{23}}{A_{12}(1-\Delta)z} + \frac{\bar{V}_0\Delta_{23}}{A_{12}(1-\delta)} \frac{r^2}{z^2} - \frac{\Delta_{23}\bar{Q}}{A_{12}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k}{z - g^k z_0^*} + \frac{Q}{A_{12}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k}{z - g^{-k} z_0},$$

$$v_3(z) = \frac{V_0}{A_{12}A_{23}(1-\delta)} + \frac{Q}{A_{12}A_{23}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k}{z - g^{-k} z_0}.$$

Расчет возмущенного поля скоростей фильтрации по приведенным формулам при проводимостях фаз включения  $k_2 = 0.1$ ,  $k_3 = 10$ , мощности  $Q = 10$  источника в точке  $z_0 = 12$  и  $V_0 = 1$  отражен на рис. 2.

### 3. Решение задачи (7) при $|\operatorname{res}_{\infty} F_2(z)| + |\operatorname{res}_{\infty} F_3(z)| \neq 0$

В силу принципа наложения достаточно рассмотреть случай, когда  $F(z) = a_2/(z - z_2) + a_3/(z - z_3) = F_2(z) + F_3(z)$ , где  $z_j \in S_j$ ,  $j = 2, 3$  (случай произвольных  $F_2(z)$ ,  $F_3(z)$ , без особенностей на границе, получается простым сложением искомого решения с ранее найденным решением (25)–(27)).

На основании представлений (8), (9) в данном случае получим:

$$\begin{cases} v_1(z) = v_{10}(z), \\ v_2(z) = F_2(z) + v_{20}^+(z) + v_{20}^-(z), \\ v_3(z) = F_3(z) + v_{30}(z), \end{cases} \quad (28)$$

где, в отличие от предыдущего случая, функция  $v_{10}(z)$  имеет нуль первого порядка на бесконечности, если  $\operatorname{res}_{\infty} F_2(z) + \operatorname{res}_{\infty} F_3(z) \neq 0$ , и нуль не ниже второго порядка

в противном случае. Учитывая (28), рассмотрим следующие функции:

$$\Phi(z) = \begin{cases} \frac{a_2}{z - z_2} + v_{20}^+(z) - A_{23}v_{30}(z) - \frac{B_{23}r^2}{z} \frac{\bar{a}_3}{(r^2 - \bar{z}_3z)}, & |z| \leq r, \\ A_{23} \frac{a_3}{z - z_3} - v_{20}^-(z) + \frac{B_{23}r^2}{z^2} \hat{v}_{30}(z), & |z| \geq r, \end{cases} \quad (29)$$

$$\Psi(z) = \begin{cases} v_{20}^+(z) - \frac{B_{21}R^2}{z^2} \tilde{v}_{10}(z), & |z| \leq R, \\ A_{21}v_{10}(z) - v_{20}^-(z) - \frac{a_2}{z - z_2}, & |z| \geq R. \end{cases} \quad (30)$$

Легко видеть, что функция (29) голоморфна в проколотой плоскости  $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ , так как она, очевидно, голоморфна в проколотом круге  $S'_3$  и вне этого круга. На границе  $\partial S_3$  предельные значения функции (29) извне и изнутри  $S_3$  совпадают в силу второго граничного условия (7). Так как в нуле у  $\Phi(z)$  простой полюс, а на бесконечности она стремится к нулю, то по обобщенной теореме Лиувилля  $\Phi(z) \equiv C_1/z$ , где  $C_1$  – некоторая произвольная комплексная константа, которая будет определена позднее.

Аналогично показывается, что и функция (30) определяется с точностью до произвольной константы в виде  $\Psi(z) \equiv C_2/z$ .

Таким образом, приходим к системе функциональных уравнений

$$\begin{cases} \frac{a_2}{z - z_2} + v_{20}^+(z) - A_{23}v_{30}(z) - \frac{B_{23}r^2}{z} \frac{\bar{a}_3}{(r^2 - \bar{z}_3z)} = \frac{C_1}{z}, & |z| \leq r, \\ A_{23} \frac{a_3}{z - z_3} - v_{20}^-(z) + \frac{B_{23}r^2}{z^2} \hat{v}_{30}(z) = \frac{C_1}{z}, & |z| \geq r, \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{cases} v_{20}^+(z) - \frac{B_{21}R^2}{z^2} \tilde{v}_{10}(z) = \frac{C_2}{z}, & |z| \leq R, \\ A_{21}v_{10}(z) - v_{20}^-(z) - \frac{a_2}{z - z_2} = \frac{C_2}{z}, & |z| \geq R. \end{cases} \quad (32)$$

Из первого уравнения системы (31) и условия голоморфности функций  $v_{30}(z)$  и  $v_{20}^+(z)$  в точке  $z = 0$  найдем константу  $C_1$ :

$$C_1 = -B_{23}\bar{a}_3. \quad (33)$$

Исключая из системы (31) функцию  $v_{30}(z)$ , с учетом (33) найдем:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{B_{23}}z^2}{r^2} \left( v_{20}^+(z) + \frac{a_2}{z - z_2} \right) + (|A_{23}|^2 - |B_{23}|^2 \bar{z}_3 r^{-2} z) \frac{\bar{a}_3 z}{r^2 - \bar{z}_3 z} - \\ - A_{23} \hat{v}_{20}^-(z) = -A_{23} \overline{B_{23}} a_3 r^{-2} z, \quad |z| \leq r. \end{aligned}$$

Заменяя в последнем соотношении  $z$  на  $zr^2/R^2 = gz$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{B_{23}}gz^2}{R^2} \left( v_{20}^+(gz) + \frac{a_2}{gz - z_2} \right) + (|A_{23}|^2 - |B_{23}|^2 \bar{z}_3 R^{-2} z) \frac{\bar{a}_3 z}{R^2 - \bar{z}_3 z} - \\ - A_{23} \tilde{v}_{20}^-(z) = -A_{23} \overline{B_{23}} a_3 R^{-2} z, \quad |z| \leq R^2/r. \end{aligned} \quad (34)$$

Из системы (32) исключим функцию  $\tilde{v}_{10}(z)$ :

$$\overline{A_{21}}v_{20}^+(z) - B_{21} \frac{R^2}{z^2} \left( \tilde{v}_{20}^-(z) + \frac{\bar{a}_2 z}{R^2 - \bar{z}_2 z} \right) = \frac{C_2 \overline{A_{21}} + \overline{C_2} B_{21}}{z}, \quad |z| \leq R. \quad (35)$$



Исключая теперь из уравнений (34) и (35) функцию  $\tilde{v}_{20}^-(z)$ , придем к следующему функциональному уравнению относительно  $v_{20}^+(z)$ :

$$\begin{aligned} v_{20}^+(z) - \delta \left( v_{20}^+(gz) + \frac{a_2}{gz - z_2} \right) - \bar{\Delta}_{21} \left( \frac{\bar{a}_3 \bar{z}_3 \bar{A}_{32}^{-1}}{R^2 - \bar{z}_3 z} + \frac{\bar{a}_2 \bar{z}_2}{R^2 - \bar{z}_2 z} \right) = \\ = (\bar{\Delta}_{21}(\bar{A}_{23} \bar{a}_3 + \bar{B}_{23} a_3 + \bar{a}_2) + C_2 + \bar{C}_2 \bar{\Delta}_{21}) / z, \quad |z| \leq R. \end{aligned} \quad (36)$$

Левая часть равенства (36) голоморфна в начале координат, а значит, правая часть должна быть тождественно равна нулю, что дает условие для определения константы  $C_2$ :

$$C_2 + \bar{C}_2 \bar{\Delta}_{21} = -\bar{\Delta}_{21}(\bar{A}_{23} \bar{a}_3 + \bar{B}_{23} a_3 + \bar{a}_2).$$

Единственное решение этого уравнения имеет вид

$$C_2 = B_{12} A_{21} (\bar{c} - \Delta_{21} c), \quad \text{где } c = A_{23} a_3 + B_{23} \bar{a}_3 + a_2.$$

После элементарных преобразований с использованием формул (4)–(6) для константы  $C_2$  получим представление

$$C_2 = -B_{21} A, \quad \text{где } A = (\bar{B}_{12} a_2 + \bar{A}_{12} \bar{a}_2 + \bar{B}_{13} a_3 + \bar{A}_{13} \bar{a}_3). \quad (37)$$

Определяя  $C_2$  по формуле (37), уравнение (36) приведем к виду:

$$v_{20}^+(z) - \delta \left( v_{20}^+(gz) + \frac{a_2}{gz - z_2} \right) + \bar{\Delta}_{21} \left( \frac{\bar{a}_3 \bar{A}_{32}^{-1}}{z - \tilde{z}_3} + \frac{\bar{a}_2}{z - \tilde{z}_2} \right) = 0,$$

где использованы соответствующие обозначения

$$\tilde{z}_j = R^2 / \bar{z}_j, \quad z_j^* = r^2 / \bar{z}_j. \quad (38)$$

Решение полученного уравнения, найденное точно так же, как ранее было найдено решение уравнения (21), представимо в виде бесконечного ряда

$$v_{20}^+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k \left[ \frac{a_2 \Delta}{z - g^{-(k+1)} z_2} - \bar{\Delta}_{21} \left( \frac{\bar{a}_3 \bar{A}_{32}^{-1}}{z - g^{-k} \tilde{z}_3} + \frac{\bar{a}_2}{z - g^{-k} \tilde{z}_2} \right) \right], \quad (39)$$

где

$$\Delta = \bar{\Delta}_{21} \Delta_{23}. \quad (40)$$

Искомое решение задачи (7) находится на основании соотношений (28), (31), (32), (33), (37), (39), (40) в следующей форме:

$$v_1(z) = \frac{\bar{\Delta}_{13} A}{z} - A_{21}^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\Delta}^k \left[ \frac{\bar{a}_2 \bar{\Delta}_{23}}{z - g^{k+1} \tilde{z}_2} - \frac{a_2}{z - g^k z_2} - \frac{a_3 \bar{A}_{32}^{-1}}{z - g^k z_3} \right], \quad (41)$$

$$\begin{aligned} v_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k \left[ \frac{a_2 \Delta}{z - g^{-(k+1)} z_2} - \bar{\Delta}_{21} \left( \frac{\bar{a}_2}{z - g^{-k} \tilde{z}_2} + \frac{\bar{a}_3 \bar{A}_{32}^{-1}}{z - g^{-k} \tilde{z}_3} \right) \right] - \\ - \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\Delta}^k \left( \frac{\bar{a}_2 \bar{\Delta}_{23}}{z - g^{k+1} \tilde{z}_2} - \frac{a_2}{z - g^k z_2} - \frac{a_3 \bar{A}_{32}^{-1}}{z - g^k z_3} \right) + \frac{B_{23} A}{\bar{A}_{13} z}, \end{aligned} \quad (42)$$

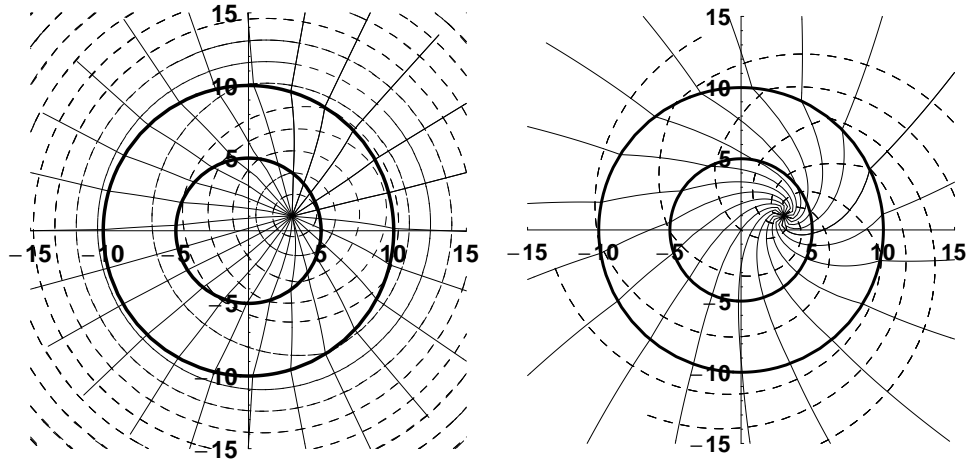


Рис. 3. Левый рисунок соответствует случаю источника, правый – вихреисточника

$$v_3(z) = \frac{a_3}{z - z_3} - \frac{\overline{\Delta}_{32} \overline{a}_3}{z - z_3^*} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k}{A_{23}} \left[ \frac{a_2}{z - g^{-k} z_2} - \overline{\Delta}_{21} \left( \frac{\overline{a}_2}{z - g^{-k} \tilde{z}_2} + \frac{\overline{a}_3 \overline{A}_{32}^{-1}}{z - g^{-k} \tilde{z}_3} \right) \right]. \quad (43)$$

В частности, если  $\rho_2 = \rho_3$ ,  $a_2 = 0$ ,  $a_3 = a$ ,  $z_3 = z_0$ , формулы (41)–(43) принимают вид

$$v_1(z) = \frac{a A_{21}^{-1}}{z - z_0} + \frac{\overline{\Delta}_{12}}{z} (\overline{B}_{12} a + \overline{A}_{12} \overline{a}), \quad v_2(z) = v_3(z) = \frac{a}{z - z_0} + \frac{\overline{a} \overline{\Delta}_{21}}{z - \tilde{z}_0},$$

полученное решение совпадает с соответствующим частным случаем общего решения из [3].

**Пример 2.** Пусть  $S_3 = \{z : |z| < 5\}$ ,  $S_2 = \{z : 5 < |z| < 10\}$  и  $S_1 = \{z : |z| > 10\}$ . Проводимости сред  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  равны, соответственно,  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1/3$ ,  $k_3 = 1/5$ , коэффициенты  $A_{pq}$ ,  $B_{pq}$  определяются по формулам (4) при  $\beta_j = 0$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

Пусть в области  $S_3$  в точке  $z_3 = 3 + i$  задан единственный источник интенсивности  $Q = 2$ . Таким образом,  $F_3(z) = Q/(z - z_3)$  ( $a_3 = Q$ ,  $z_3 = 3 + i$ ). Соответствующие линии тока и линии равного потенциала изображены на рис. 3 слева.

Пусть в точке  $z_3 = 3 + i$  расположен вихреисточник и  $F_3(z) = (2 - 2i)/(z - z_3)$ . Линии тока и эквипотенциали представляют собой два взаимортогональных семейства спиралей, с фокусом в точке  $z_3$  (справа на рис. 3)

**Пример 3.** Пусть проводимости сред такие же, как и в примере 2. В области  $S_3$  расположен источник ( $F_3(z) = 4/(z - 3)$ ), а в области  $S_2$  – сток ( $F_2(z) = -2/(z - 8)$ ).

Соответствующие линии тока и эквипотенциали, найденные по формулам (41)–(43), изображены на рис. 4.

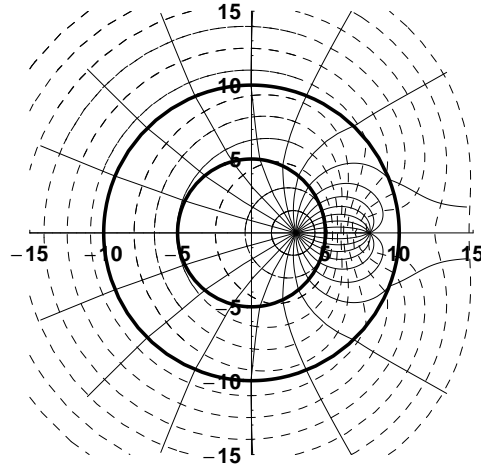


Рис. 4. Случай источника в точке  $z = 3$  и стока в точке  $z = 8$

#### 4. Решение задачи (7) при наличии особенностей у заданного потенциала на границе $\partial S$

В этом пункте рассмотрим случай, когда комплексный потенциал  $f(z)$  имеет конечное число особенностей в точках границы  $\partial S$ . Не уменьшая общности, достаточно исследовать случай потенциала, имеющего по одной особенности на  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_3$ , т. е. когда

$$F(z) = f'(z) = \sum_{k=1}^n a_k(z - t_1)^{-k} + \sum_{k=1}^m b_k(z - t_2)^{-k} = F_{01}(z) + F_{02}(z),$$

где  $t_1 \in \Gamma_1$ ,  $t_2 \in \Gamma_3$ .

Так же, как и в работе [3], будем предполагать, что главные части  $F_j(z)$  искомого решения  $v(z) = v_j(z)$ ,  $z \in S_j$ , имеют ту же структуру, что и  $F(z)$ , а именно,

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \sum_{k=1}^n a_{1k}(z - t_1)^{-k}, & F_3(z) &= \sum_{k=1}^m b_{3k}(z - t_2)^{-k}, \\ F_2(z) &= \sum_{k=1}^n a_{2k}(z - t_1)^{-k} + \sum_{k=1}^m b_{2k}(z - t_2)^{-k} = F_{21}(z) + F_{22}(z), \end{aligned} \quad (44)$$

при этом в силу закона сохранения и гладкости границы должны выполняться равенства  $F_1(z) + F_{21}(z) = 2F_{01}(z)$ ,  $F_3(z) + F_{22}(z) = 2F_{02}(z)$ , поэтому

$$a_{1k} + a_{2k} = 2a_k, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad b_{2k} + b_{3k} = 2b_k, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (45)$$

Если использовать представление (8) решения задачи (7), то в данном случае, в отличие от предыдущих, надо будет определять не только неизвестные регулярные части  $v_{j0}$ , но и коэффициенты  $a_{1k}$ ,  $a_{2k}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ),  $b_{2k}$ ,  $b_{3k}$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) главных частей (44) искомых функций  $v_j$ .

С учетом представлений (8), (44) введем функции

$$\Phi(z) = \begin{cases} v_{20}^+(z) - A_{23}v_{30}(z) + F_{21}(z), & |z| \leq r, \\ A_{23}F_3(z) - v_{20}^-(z) - F_{22}(z) + \frac{B_{23}r^2}{z^2}(\widehat{v}_{30}(z) + \widehat{F}_3(z)), & |z| \geq r; \end{cases} \quad (46)$$

$$\Psi(z) = \begin{cases} v_{20}^-(z) - A_{21}v_{10}(z) + F_{22}(z), & |z| \geq R, \\ -v_{20}^+(z) + A_{21}F_1(z) - F_{21}(z) + \frac{B_{21}R^2}{z^2}(\tilde{v}_{10}(z) + \tilde{F}_1(z)), & |z| \leq R. \end{cases} \quad (47)$$

Ясно, что функция (46) голоморфна внутри и вне круга  $S_3$ , стремится к нулю на бесконечности и в силу второго граничного условия (7) непрерывна на границе  $\partial S_3$ . По теореме Лиувилля  $\Phi(z) \equiv 0$ . Причем для того, чтобы  $\Phi(z)$  была непрерывна в точке  $t_2$  необходимо потребовать выполнения тождества

$$A_{23}F_3(z) - F_{22}(z) - B_{23} \left( \frac{\bar{b}_{31}}{z - t_2} + \sum_{k=2}^m \frac{t_2^{k-1}}{(z - t_2)^k} \sum_{j=k}^m \frac{\bar{b}_{3j} \binom{j-2}{k-2}}{(-\bar{t}_2)^{j-1}} \right) \equiv 0, \quad (48)$$

где использовано представление

$$r^2 z^{-2} \widehat{F}_3(z) = \bar{b}_{31} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{z - t_2} \right) - \sum_{k=2}^m \frac{t_2^{k-1}}{(z - t_2)^k} \sum_{j=k}^m \bar{b}_{3j} (-\bar{t}_2)^{1-j} \binom{j-2}{k-2}. \quad (49)$$

Учитывая (44), приравняем нулю коэффициенты при всех различных степенях  $z - t_2$  в выражении (48) и с помощью (45) придем к системе

$$(1 + A_{23})b_{3k} - (1 - \bar{A}_{23})(-t_2/\bar{t}_2)^{k-1} \bar{b}_{3k} = 2b_k^*, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (50)$$

где

$$b_1^* = b_1, \quad b_m^* = b_m, \quad b_k^* = b_k + \frac{B_{23}}{2t_2^{1-k}} \sum_{j=k+1}^m \frac{\bar{b}_{3j} \binom{j-2}{k-2}}{(-\bar{t}_2)^{j-1}}, \quad k = 2, 3, \dots, m-1. \quad (51)$$

Решение системы (50) имеет вид

$$b_{3k} = ((1 + \bar{A}_{23})b_k^* + (1 - \bar{A}_{23})(-t_2/\bar{t}_2)^{k-1} \bar{b}_{3k}^*) / (2\operatorname{Re} A_{23}), \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (52)$$

С помощью (51) по формулам (52) сначала определяются  $b_{31}$ ,  $b_{3m}$ , а затем, если  $m > 2$ , последовательно  $b_{3m-1}$ ,  $b_{3m-2}$ ,  $\dots$ ,  $b_{32}$ .

Отметим, что коэффициенты  $b_{21}$ ,  $b_{31}$ , найденные на основании формул (50)–(52), в силу представления (5) и соотношений (6) связаны равенствами

$$A_{23}b_{31} - B_{23}\bar{b}_{31} = b_{21}, \quad A_{32}b_{21} - B_{32}\bar{b}_{21} = b_{31}. \quad (53)$$

Коэффициенты полинома  $F_{22}(z)$  теперь находятся на основании (45) по формулам  $b_{2k} = 2b_k - b_{3k}$ . Однако, используя условие  $v_3(t) = A_{32}v_2 + B_{32}r^2 t^{-2} \overline{v_2(t)}$ ,  $|t| = r$ , эквивалентное второму условию (7), можно получить аналогичные (52) формулы

$$b_{2k} = ((1 + \bar{A}_{32})\tilde{b}_k + (1 - \bar{A}_{32})(-t_2/\bar{t}_2)^{k-1} \overline{\tilde{b}_k}) / (2\operatorname{Re} A_{32}), \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (54)$$

где  $\tilde{b}_k$  вычисляются по формулам (51) после замены  $B_{23}$  на  $B_{32}$ .

Теперь, учитывая (46), (48), (49), получим

$$\begin{aligned} v_{20}^+(z) - A_{23}v_{30}(z) + F_{21}(z) &\equiv 0, \quad |z| \leq r, \\ B_{23}r^2 z^{-2} \widehat{v}_{30}(z) - v_{20}^-(z) + B_{23}\bar{b}_{31}/z &\equiv 0, \quad |z| \geq r. \end{aligned} \quad (55)$$

В результате исключения функции  $v_{30}(z)$  из двух последних тождеств придем к уравнению

$$\bar{B}_{23}(v_{20}^+(z) + F_{21}(z) + A_{23}b_{31}/z) - A_{23}r^2 z^{-2} \widehat{v}_{20}^-(z) \equiv 0, \quad |z| \leq r. \quad (56)$$

Аналогичным образом показывается, что при выполнении обязательного условия

$$A_{21}F_1(z) - F_{21}(z) - B_{21} \left( \frac{\bar{a}_{11}}{z-t_1} + \sum_{k=2}^n \frac{t_1^{k-1}}{(z-t_1)^k} \sum_{j=k}^n \frac{\bar{a}_{1j} \binom{j-2}{k-2}}{(-\bar{t}_1)^{j-1}} \right) \equiv 0,$$

функция (47) равна  $C/z$ , где параметр  $C$  будет определен позднее. С помощью последнего условия и (45) коэффициенты полиномов  $F_1(z)$ ,  $F_{21}(z)$  однозначно определяются соотношениями

$$\begin{aligned} a_{1k} &= ((1 + \bar{A}_{21})a_k^* + (1 - \bar{A}_{21})(-t_1/\bar{t}_1)^{k-1}\bar{a}_k^*) / (2\operatorname{Re} A_{21}), \\ a_{2k} &= ((1 + \bar{A}_{12})\tilde{a}_k + (1 - \bar{A}_{12})(-t_1/\bar{t}_1)^{k-1}\bar{a}_k) / (2\operatorname{Re} A_{12}), \end{aligned} \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (57)$$

где

$$a_1^* = a_1, \quad a_n^* = a_n, \quad a_k^* = a_k + \frac{B_{21}}{2t_1^{1-k}} \sum_{j=k+1}^n \frac{\bar{a}_{1j} \binom{j-2}{k-2}}{(-\bar{t}_1)^{j-1}}, \quad k = 2, 3, \dots, n-1, \quad (58)$$

а  $\tilde{a}_k$  вычисляются по формулам (58) после замены  $B_{21}$  в правых частях этих формул на  $B_{12}$ . Коэффициенты  $a_{1k}$ ,  $a_{2k}$  определяются по формулам (57), (58) в той же последовательности, как определялись коэффициенты  $b_{3k}$ ,  $b_{2k}$  по формулам (51), (52). Так как  $\Psi(z) = C/z$ , то на основании (47) и представления

$$R^2 z^{-2} \tilde{F}_1(z) = \bar{a}_{11} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{z-t_1} \right) - \sum_{k=2}^n \frac{t_1^{k-1}}{(z-t_1)^k} \sum_{j=k}^n \bar{a}_{1j} (-\bar{t}_1)^{1-j} \binom{j-2}{k-2}$$

получим

$$\begin{aligned} v_{20}^-(z) - A_{21}v_{10}(z) + F_{22}(z) &= C/z, \quad |z| \geq R, \\ B_{21}(R^2 z^{-2} \tilde{v}_{10}(z) + \bar{a}_{11}) - v_{20}^+(z) &= C/z, \quad |z| \leq R. \end{aligned} \quad (59)$$

Исключая из системы (59) функцию  $v_{10}(z)$ , найдем

$$\frac{B_{21}R^2}{z^2} (\tilde{v}_{20}^-(z) + \tilde{F}_{22}(z)) + \bar{A}_{21} \left( \frac{B_{21}\bar{a}_{11}}{z} - v_{20}^+(z) \right) \equiv \frac{\bar{A}_{21}C + B_{21}\bar{C}}{z} \quad (60)$$

при  $|z| \leq R$ .

Из уравнений (56), (60), заменяя в первом из них  $z$  на  $gz$ , после исключения функции  $v_{20}^-(z)$ , учитывая (53), получим функциональное уравнение относительно  $v_{20}^+(z)$ :

$$\begin{aligned} v_{20}^+(z) - \delta(v_{20}^+(gz) + F_{21}(gz)) + \bar{\Delta}_{21}F_{20}(z) &= \\ &= (B_{21}a_{11} + \bar{\Delta}_{21}\bar{A}_{23}\bar{b}_{31} - C - \bar{\Delta}_{21}\bar{C})/z, \quad |z| \leq R, \end{aligned} \quad (61)$$

где  $\delta$  определяется по формуле (19), а

$$F_{20}(z) = \frac{\bar{b}_{21}}{z} - \frac{R^2}{z^2} \tilde{F}_{22}(z) = \frac{\bar{b}_{21}}{z-\tilde{t}_2} - \tilde{t}_2 \sum_{k=2}^m \frac{\bar{b}_{2k} (-\bar{t}_2)^{-k} z^{k-2}}{(z-\tilde{t}_2)^k}, \quad (62)$$

в свою очередь  $\tilde{t}_2 = R^2/\bar{t}_2$ . Прежде, чем решать полученное функциональное уравнение, заметим, что его левая часть голоморфна в точке  $z = 0$ , а значит, коэффициент при  $1/z$  в правой части должен равняться нулю. Таким образом, получаем уравнение для определения параметра  $C$ , решение которого с учетом

представления (5) и соотношений (6) после ряда упрощений можно представить в виде

$$C = B_{21}(\bar{A}_{12}c + \bar{B}_{12}\bar{c}), \quad c = \bar{A}_{21}a_{11} + \bar{A}_{23}\bar{b}_{31}. \quad (63)$$

Окончательно уравнение относительно  $v_{20}^+(z)$  приводится к виду

$$v_{20}^+(z) = \delta(v_{20}^+(gz) + F_{21}(gz)) - \bar{\Delta}_{21}F_{20}(z), \quad |z| \leq R.$$

Решением последнего уравнения является абсолютно и равномерно сходящийся в круге  $|z| < R$  ряд

$$v_{20}^+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k (\delta F_{21}(g^{k+1}z) - \bar{\Delta}_{21}F_{20}(g^kz)).$$

Из соотношений (55), (59) теперь легко определить функции  $v_{10}$ ,  $v_{20}^-$ ,  $v_{30}$ , а вместе с ними на основании представлений (8), (9) и решение задачи (7):

$$v_1(z) = F_1(z) + A_{21}^{-1} \left[ F_{22}(z) - C/z + B_{23}\bar{b}_{31}/z + r^2 z^{-2} \bar{\Delta}_{23} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\delta}^k \left( \overline{F_{21}(g^k r^2 / \bar{z})} - \Delta_{21} \overline{F_{20}(g^k r^2 / \bar{z})} \right) \right],$$

$$v_2(z) = F_2(z) + \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k (\delta F_{21}(g^{k+1}z) - \bar{\Delta}_{21}F_{20}(g^kz)) + B_{23}\bar{b}_{31}/z + r^2 z^{-2} \bar{\Delta}_{23} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\delta}^k \left( \overline{F_{21}(g^k r^2 / \bar{z})} - \Delta_{21} \overline{F_{20}(g^k r^2 / \bar{z})} \right), \quad (64)$$

$$v_3(z) = F_3(z) + A_{23}^{-1} \sum_0^{\infty} \delta^k (F_{21}(g^kz) - \bar{\Delta}_{21}F_{20}(g^kz)),$$

где коэффициенты функций (44) определяются по формулам (51), (52) (54), (57), (58), функция  $F_{20}$  задается равенством (62), а параметры  $g$ ,  $\delta$  и  $C$  находятся из соотношений (15), (19) и (63) соответственно.

**Замечание.** Если  $\rho_1 = \rho_2$ ,  $\beta_1 = \beta_2$  и  $F(z) = F_{02}(z)$ , то  $B_{12} = B_{21} = \Delta_{12} = \Delta_{21} = \Delta = C = 0$ ,  $A_{12} = A_{21} = 1$ ,  $F_{01} \equiv F_1 \equiv F_{21} \equiv 0$ , и формулы (64) приводят к результату

$$v_1(z) = v_2(z) = F_{21}(z) + \frac{B_{23}\bar{b}_{31}}{z}, \quad v_3(z) = F_3(z),$$

где коэффициенты  $b_{kj}$ ,  $k = 2, 3$ , полиномов  $F_{21}(z)$ ,  $F_3(z)$  определяются по формулам (51)–(54). Выписанное решение, с точностью до обозначений, совпадает с соответствующим решением, полученным в [3].

**Пример 4.** Рассмотрим в заключение задачу о формировании возмущенного поля скоростей фильтрации в случае, когда заданный единственный вихреисточник/сток попадает в граничную точку  $t_2$  на  $\Gamma_3$ , т. е. в наших обозначениях  $F(z) =$

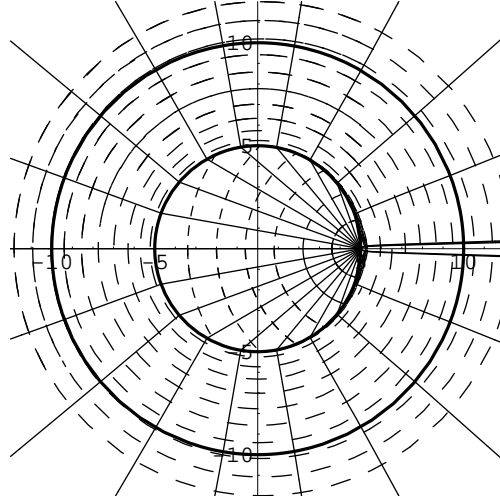


Рис. 5. Случай источника мощности  $Q = 10$  в граничной точке  $t_2 = r$  и проводимостей  $k_2 = 0.1$ ,  $k_3 = 10$

$F_{02}(z) = b_1/(z - t_2)$ . Соответственно,  $F_{01} \equiv F_1 \equiv F_{21} \equiv 0$ ,  $F_{20}(z) = \bar{b}_{21}/(z - \tilde{t}_2)$ ,  $F_{22}(z) = b_{21}/(z - t_2)$ ,  $F_3(z) = b_{31}/(z - t_2)$ , где

$$b_{21} = \frac{(1 + \bar{A}_{32})b_1 + (1 - \bar{A}_{32})\bar{b}_1}{A_{32} + \bar{A}_{32}}, \quad b_{31} = \frac{(1 + \bar{A}_{23})b_1 + (1 - \bar{A}_{23})\bar{b}_1}{A_{23} + \bar{A}_{23}}.$$

С учетом выписанных представлений на основании формул (64) получим

$$\begin{aligned} v_1(z) &= \frac{b_{21}}{A_{21}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{\Delta}^k}{z - g^k t_2} - \frac{\alpha}{z}, \\ v_2(z) &= b_{21} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{\Delta}^k}{z - g^k t_2} - \bar{\Delta}_{21} \bar{b}_{21} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k}{z - g^{-k} \tilde{t}_2} + \frac{\beta}{z}, \\ v_3(z) &= \frac{b_{31}}{z - t_2} - \frac{\bar{\Delta}_{21} \bar{b}_{21}}{A_{23}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k}{z - g^{-k} \tilde{t}_2}, \end{aligned}$$

где

$$\alpha = C - B_{23} \bar{b}_{31} + \bar{\Delta} b_{21} / (1 - \bar{\Delta}), \quad \beta = C - \alpha,$$

а  $C$  определяется по формуле (63) с  $a_{11} = 0$ . Вычисления по приведенным формулам при соответствующих фиксированных значениях параметров отражены на рис. 5.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского и Белорусского фондов фундаментальных исследований (проекты № 06-01-81019-Бел\_а и Ф06Р-106).

### Summary

*A.M. Mal'tceva, Yu.V. Obnosov, S.V. Rogosin* A generalization of Milne-Thomson theorem for the case of annulus.

A closed analytical solution to the problem on 2-D seepage flow with a given main part,  $f(z)$ , of a desired complex potential in an infinite heterogeneous three-component porous

medium is presented. The medium is composed of an isotropic annulus and two other dissimilar components adding annulus up to the whole plane.

New solutions are derived for the cases of arbitrary distribution of singularities of a given main part  $f(z)$  including for the cases of singularities at the interface. Besides, the cases involving complex coefficients in the boundary conditions are considered. Four examples, illustrating gotten solutions, are given and corresponding stream lines and equipotential lines are represented.

#### Литература

1. *Милн-Томсон Л.М.* Теоретическая гидродинамика. – М.: Мир. 1964. – С. 153–154.
2. *Голубева О.В.* Обобщение теоремы об окружности на фильтрационные течения // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1966. – № 1. – С. 113–116.
3. *Obnosov Yu.V.* A generalized Milne-Thomson theorem // Appl. Math. Lett. – 2006. – V. 19. – P. 581–586.
4. *Костыцына Л.И.* К вопросу о движении фильтрационного потока в кусочно-однородной среде // Учен. зап. Моск. обл. пед. ин-та. Тр. каф. теор. физ. – 1966. – Т. 164, Вып. 6. – С. 67–82.
5. *Емец Ю.П.* Краевые задачи электродинамики анизотропно проводящих сред. – Киев: Наук. думка, 1987. – 254 с.
6. *Honein E., Honein T., Herrmann G.* On two circular inclusions in harmonic problems // Quart. Appl. Math. – 1992. – V. 50, No 3. – P. 479–499.

Поступила в редакцию  
05.12.06

---

**Малыцева Александры Михайловна** – студентка механико-математического факультета Казанского государственного университета.

**Обносов Юрий Викторович** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений Казанского государственного университета.

E-mail: [Yurii.Obnosov@ksu.ru](mailto:Yurii.Obnosov@ksu.ru)

**Рогозин Сергей Васильевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций Белорусского государственного университета, г. Минск.