

УДК 519.634

doi: 10.26907/2541-7746.2020.4.426-440

АСИМПТОТИКА МЕДЛЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ЦИЛИНДРА В ЖИДКОСТИ ПОСЛЕ ОТРЫВНОГО УДАРА

М.В. Норкин

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, 344090, Россия

Аннотация

Рассмотрен процесс схлопывания каверны, образованной в результате отрывного удара прямоугольного цилиндра в идеальной, несжимаемой, тяжелой жидкости. В предположении, что скорость цилиндра мала, построены асимптотики основных характеристик удара. Возникающие при этом трудности связаны главным образом с тем, что динамика точек отрыва заранее неизвестна и зависит от малого параметра, которым является безразмерная скорость движения цилиндра. С помощью специальной замены переменных проблема сведена к исследованию задачи, в которой динамика точек отрыва соответствует главному приближению, не зависящему от указанного параметра. Это дает возможность определить второй член асимптотики, учитывающий нелинейные слагаемые в модели. В главном приближении сформулирована задача со свободной границей, которая в каждый фиксированный момент времени аналогична классической модели удара с отрывом. На основе первых двух членов асимптотики описан процесс схлопывания каверны с учетом подъема внутренней свободной границы жидкости и проведено сравнение с известными результатами.

Ключевые слова: идеальная несжимаемая жидкость, прямоугольный цилиндр, отрывной удар, динамика точек отрыва, число Фруда, число кавитации

Введение

Удар твердого тела, полностью погруженного в жидкость, приводит к отрыву частиц жидкости от его поверхности и к образованию присоединенной каверны за телом [1]. Форма каверны и конфигурация внешней свободной поверхности заранее неизвестны и подлежат определению в ходе решения задачи. При небольших скоростях движения цилиндра удается получить полное решение проблемы образования и схлопывания каверны, опираясь на задачи со свободной границей, близкие по своей структуре к классической модели удара [1], а также на асимптотический метод малого параметра. В работах [2, 3] изучалась динамика точек отрыва, вызванная медленными движениями кругового и прямоугольного цилиндров в жидкости после отрывного удара. Исследование этих задач проводилось с помощью специальной математической модели, основанной на полном пренебрежении квадратичными членами и возмущениями свободных границ жидкости. При этом зависимость точек отрыва от времени носила нелинейный характер. Предложенная модель была получена из физических соображений и подтверждалась хорошим согласованием с другими подходами. Было установлено, что при числе Фруда, меньших 0.5, линеаризованную модель можно использовать для изучения процесса схлопывания тонкой каверны и приближенного определения времени

схлопывания. Из физических соображений ясно, что данная модель должна соответствовать главному члену асимптотики при малых скоростях движения цилиндра. Однако соответствующий асимптотический анализ исходной нелинейной задачи не проводился. В предлагаемой статье строится асимптотика задачи по малому параметру, в качестве которого выступает безразмерная скорость движения цилиндра (фактически число Фруда). Подробно анализируются первые два члена асимптотики. На их основе изучается динамика точек отрыва и описывается процесс схлопывания тонкой каверны с учетом подъема внутренней свободной границы жидкости. Приводятся конкретные примеры решений.

В настоящей работе проводится некоторая аналогия со статьей [4], в которой рассматривается такая же физическая постановка задачи. При этом существенное отличие состоит в том, что в [4] асимптотика строится по другому параметру – малому времени, а скорость движения цилиндра не предполагается малой величиной. Отметим, что в работах, посвященных асимптотическому анализу на малых временах, главным образом рассматривались большие числа Фруда. При малых числах Фруда вследствие сильного увеличения скоростей движения точек отрыва асимптотики малых времен становятся не эффективными. Этим, в частности, объясняется интерес к задачам удара при малых числах Фруда.

Анализ полученных ранее результатов показывает, что при малых скоростях движения цилиндра процесс схлопывания каверны целесообразно рассматривать с учетом искусственной кавитации (в естественной ситуации, когда давление в каверне равно нулю, он происходит практически мгновенно). При давлении в каверне, близком к атмосферному, процесс схлопывания становится хорошо обозримым. Во многих случаях время схлопывания составляет сотые или десятые доли секунды. Именно такие времена в ударных задачах считаются малыми. При этом под мгновенным процессом удара следует понимать тысячные или десятитысячные доли секунды. Заметим, что исследование задачи на малых временах является актуальным в силу важности происходящих там физических явлений и процессов (образование волн, каверн, брызговых струй, существенное изменение реакции жидкости на тело и различные другие вопросы).

Среди близких работ отметим статью [5], в которой рассмотрен отрыв столба жидкости от днища цилиндрической емкости при ударе и изучено схлопывание образующейся цилиндрической полости. В ней дан обзор современных работ, в которых теоретически и экспериментально подтверждается возникновение кавитации при ударе по цилиндрической емкости, частично заполненной жидкостью. Современные публикации по гидродинамическому удару свидетельствуют о том, что большой интерес проявляется не только к изучению динамических процессов, происходящих после удара, но и к самой классической модели удара. При этом наряду с кавитационным ударом также рассматривается и безотрывный удар [6–8]. В последних работах определяются присоединенные массы для некоторых новых конфигураций и приводятся данные экспериментов.

1. Постановка задачи

Рассматривается плоская задача об отрывном ударе прямоугольного цилиндра, полностью погруженного в идеальную, несжимаемую, тяжелую жидкость [1]. Предполагается, что после удара цилиндр движется вглубь жидкости с постоянной скоростью без вращения. Позади тела образуется присоединенная каверна, форма которой зависит от физических и геометрических параметров задачи. Требуется изучить процесс схлопывания каверны при малых скоростях движения цилиндра, соответствующих небольшим числам Фруда. Математическая постановка задачи,

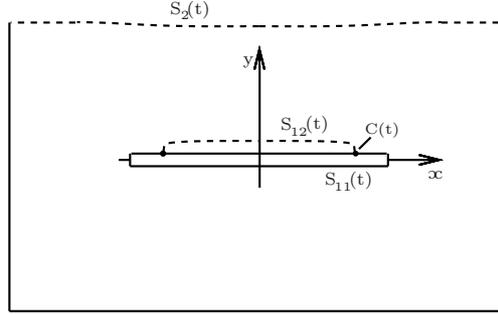


Рис. 1. Постановка задачи

записанная в безразмерных переменных, в подвижной системе координат, связанной с цилиндром, имеет вид (рис. 1)

$$\Delta\varphi = 0, \quad R \in \Omega(t) \quad (1)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -n_y, \quad R \in S_{11}(t), \quad (2)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} + \varepsilon^2 \frac{\partial\varphi}{\partial y} + 0.5\varepsilon^2 (\nabla\varphi)^2 + b + \zeta(x, \tau) - \varepsilon^2\tau - H - 0.5\chi = 0, \quad R \in S_{12}(t), \quad (3)$$

$$\varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \varepsilon = \varepsilon \frac{\partial\zeta}{\partial x} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial\zeta}{\partial\tau}, \quad R \in S_{12}(t), \quad (4)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} + \varepsilon^2 \frac{\partial\varphi}{\partial y} + 0.5\varepsilon^2 (\nabla\varphi)^2 + \psi(x, \tau) = 0, \quad R \in S_2(t), \quad (5)$$

$$\varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial\psi}{\partial\tau}, \quad R \in S_2(t), \quad (6)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \quad y = -H_b + \varepsilon^2\tau; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \quad x = \pm H_R, \quad (7)$$

$$\varphi(x, y, 0) = \varphi_0(x, y), \quad \zeta(x, 0) = 0, \quad \psi(x, 0) = 0. \quad (8)$$

Подробная запись условия непротекания (2) определяется равенствами

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -1, \quad y = b, \quad c(\tau) < |x| < 1; \quad y = -b, \quad -1 < x < 1;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \quad x = \pm 1, \quad -b < y < b.$$

Начальное условие $\varphi_0(x, y)$, соответствующее классической модели удара, находится на основе решения смешанной краевой задачи теории потенциала с односторонними ограничениями на поверхности тела [1]:

$$\Delta\varphi_0 = 0, \quad R \in \Omega(0); \quad \varphi_0 = 0, \quad R \in S_2(0), \quad (9)$$

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial n} = -n_y, \quad \varphi_0 \leq 0, \quad R \in S_{11}(0), \quad (10)$$

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial n} \geq -n_y, \quad \varphi_0 = 0, \quad R \in S_{12}(0), \quad (11)$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} = 0, \quad y = -H_b; \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = 0, \quad x = \pm H_R. \quad (12)$$

Безразмерные переменные, растянутое время τ и функции Φ , η , ξ , подлежащие определению, вводятся по формулам

$$t' = \frac{a}{v} \cdot t, \quad x' = ax, \quad y' = ay, \quad \Phi' = av\Phi, \quad p' = \rho v^2 p, \quad v = \sqrt{ga},$$

$$t = \varepsilon \tau, \quad \varphi(x, y, \tau) = \varepsilon^{-1} \Phi(x, y, \varepsilon \tau), \quad \zeta(x, \tau) = \eta(x, \varepsilon \tau), \quad \psi(x, \tau) = \xi(x, \varepsilon \tau).$$

где штрихами помечаются размерные величины.

Неподвижные координаты X , Y связаны с подвижными x , y соотношениями: $X = x$, $Y = y + h(t)$. Ось y направлена вертикально вверх (против вектора силы тяжести), начало координат находится в центре прямоугольника. Картина течения жидкости предполагается симметричной относительно оси y .

В работе используются следующие обозначения: $\Phi(x, y, t)$ – потенциал скоростей абсолютного движения жидкости, записанный относительно подвижной системы координат; $\Omega(t)$ – область течения жидкости; $S_{11}(t) = \{c(t) \leq |x| \leq 1, y = b\} \cup \{-1 \leq x \leq 1, y = -b\} \cup \{x = \pm 1, -b \leq y \leq b\}$ – часть поверхности цилиндра, на которой не происходит отрыва частиц жидкости, $S_{12}(t) = \{y = b + \eta(x, t), -c(t) < x < c(t)\}$ – внутренняя свободная граница жидкости (граница каверны); $x = \pm c(t), y = b$ – координаты точек отрыва в момент времени t ; $y = H + \xi(x, t) + t$ – уравнение внешней свободной границы; $\bar{V} = (0, -v_0)$ – скорость, приобретенная цилиндром в результате удара ($v_0 > 0$); $h(t) = -t$ – безразмерный закон движения цилиндра; $2a$, $2b$ – длины горизонтальной и вертикальной сторон прямоугольника (после обезразмеривания для b сохраняется прежнее обозначение); R – радиус-вектор с координатами (x, y) .

Задача (1)–(8) содержит следующие безразмерные параметры:

$$\varepsilon = Fr_0 = \frac{v_0}{\sqrt{ga}}, \quad \chi_0 = 2 \frac{p_a - p_c}{\rho v_0^2}, \quad \chi = 2 \frac{p_a - p_c}{\rho v^2},$$

где Fr_0 – число Фруда; χ_0 – число кавитации (безразмерная разность давлений на внешней свободной поверхности и в каверне); χ – число кавитации, связанное с фиксированной скоростью v ; p_a – атмосферное давление; p_c – давление в каверне; g – ускорение свободного падения; ρ – плотность жидкости. Скорость цилиндра v_0 предполагается малой величиной по сравнению с характерной скоростью $v = \sqrt{ga}$.

В дальнейшем для сравнения с результатами работы [3] будут использованы следующие простые зависимости:

$$\tau = \varepsilon^{-2} t_0, \quad \chi = \varepsilon^2 \chi_0,$$

где безразмерное время t_0 определяется по аналогии с t (вместо v пишется v_0).

В точках пересечения внутренней свободной границы жидкости с поверхностью цилиндра (в точках отрыва) ставится условие Кутты–Жуковского, означающее, что скорость жидкости в этих точках должна быть конечной.

2. Асимптотическое решение задачи при малых ε

Основные трудности, возникающие при решении поставленной задачи, заключаются в том, что функция $c(t) = c(\varepsilon \tau) > 0$, определяющая в каждый фиксированный момент времени одну из двух симметричных точек отрыва, заранее неизвестна и содержит малый параметр ε . Так как в главном приближении уравнение и краевые условия не зависят от ε , то старшее приближение для точки отрыва,

обозначаемое через $c_0(\tau)$, также не будет зависеть от этого параметра. Отметим, что с помощью прямого разложения искомых функций в асимптотические ряды по параметру ε не удастся найти второй член асимптотики. Для его определения необходимо сделать такую замену переменных, в результате которой функция $c(\varepsilon\tau)$ перейдет в функцию $c_0(\tau)$, не зависящую от указанного параметра. Такую замену удобно сделать с помощью степенной функции:

$$x_1 = x^{\alpha(\tau)}, \quad \alpha(\tau) = \frac{\ln c_0(\tau)}{\ln c(\varepsilon\tau)}; \quad y_1 = y, \quad x > 0, \quad (13)$$

где $x = c(\varepsilon\tau)$, $y = b$ – координаты точки отрыва, соответствующие фиксированному (малому) числу ε , а $x = c_0(\tau)$, $y = b$ – координаты точки отрыва, отвечающие главному приближению.

Отметим, что при замене (13) прямоугольник, расположенный в области $x > 0$ (половина прямоугольного цилиндра), остается инвариантным. В самом общем виде (при замене $x = x(x_1, \tau)$, $y = y_1$) преобразованная модель дана в [4, с. 110], где проводился асимптотический анализ исходной нелинейной задачи на малых временах. При этом нужно учесть, что в указанной работе по-другому вводились безразмерные переменные, поэтому малый параметр не стоит в граничных условиях при соответствующих членах. Кроме этого имеются некоторые отличия в обозначениях: $\hat{x} \rightarrow x_1$, $t \rightarrow \tau$, $\varepsilon \rightarrow b$.

Отметим также, что при построении асимптотики по малому времени нужно определить только одну точку отрыва c_0 , соответствующую начальному моменту времени. В отличие от этого, в настоящей статье возникает функция $c_0(\tau)$, зависящая от времени. В силу симметрии задачи относительно оси y дальнейшие рассуждения проводятся при $x > 0$.

Решение преобразованной задачи будем искать в виде следующих асимптотических разложений ($\varepsilon \rightarrow 0$):

$$\varphi(x(x_1, \tau), y_1, \tau) = \varphi_1(x_1, y_1, \tau) + \varepsilon^2 \varphi_2(x_1, y_1, \tau) + \dots, \quad (14)$$

$$\zeta(x(x_1, \tau), \tau) = \varepsilon^2 \zeta_1(x_1, \tau) + \varepsilon^4 \zeta_2(x_1, \tau) + \dots, \quad (15)$$

$$\psi(x(x_1, \tau), \tau) = \varepsilon^2 \psi_1(x_1, \tau) + \varepsilon^4 \psi_2(x_1, \tau) + \dots, \quad (16)$$

$$c(\varepsilon\tau) = c_0(\tau) + \varepsilon^2 c_1(\tau) + \dots. \quad (17)$$

Подставляя (14)–(17) в преобразованную задачу, осуществляя с помощью формулы Тейлора перенос краевых условий с возмущенных участков границы на первоначально невозмущенный уровень и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , приходим для определения функций φ_1 и φ_2 к смешанным краевым задачам для уравнений Лапласа и Пуассона в области $\Omega(0)$. При дополнительном предположении, что точки отрыва монотонно сближаются, проинтегрируем динамические условия (в задачах для φ_1 и φ_2) по времени от 0 до τ при любом фиксированном $x \in (0, c_0(\tau))$. В результате для определения главного приближения приходим к следующей задаче:

$$\Delta \varphi_1 = 0, \quad R \in \Omega(0) \quad (18)$$

$$\varphi_1 = (H - b)\tau + 0.5\chi\tau, \quad y_1 = b, \quad 0 < x_1 < c_0(\tau), \quad (19)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} = -1, \quad y_1 = b, \quad c_0(\tau) < x_1 < 1; \quad y_1 = -b, \quad 0 < x_1 < 1, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = 0, \quad x_1 = 1, \quad -b < y_1 < b, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = 0, \quad x_1 = 0, \quad -H_b < y_1 < -b, \quad b < y_1 < H; \quad x_1 = H_R, \quad (22)$$

$$\varphi_1 = 0, \quad y_1 = H; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} = 0, \quad y_1 = -H_b. \quad (23)$$

При $\tau = 0$ приходим к задаче, полностью совпадающей с классической моделью удара (9)–(12), ее решение удовлетворяет следующему начальному условию: $\varphi_1(x_1, y_1, 0) = \varphi_0(x_1, y_1)$.

В силу того, что динамика точки отрыва заранее неизвестна, полученная в главном приближении задача является задачей со свободной границей. Неизвестная функция $c_0(\tau)$ определяется из условия регулярности потенциала φ_1 в точке отрыва, обеспечивающего выполнение условия Кутты–Жуковского. Кроме последнего условия должно также выполняться условие неотрицательности давления на смоченной поверхности тела, которое проверяется уже после решения задачи. В процессе решения задачи это условие проверить не удастся, поскольку в краевое условие входит не давление, а интеграл от давления по времени.

В классической задаче гидродинамического удара формулируются граничные условия типа неравенств, которые равносильны условию Кутты–Жуковского. Эти неравенства оказываются очень полезными для численного решения задачи со свободной границей итерационными методами. В случае аналитического решения задачи, напротив, более удобным оказывается условие Кутты–Жуковского. Так как полученная в главном приближении задача исследуется численно, то естественно попытаться сформулировать односторонние ограничения на поверхности тела, которые хотя бы локально будут равносильны условию Кутты–Жуковского.

Сначала сформулируем неравенства в зонах контакта и отрыва, исходя из физических соображений. В реальных жидкостях давление в зоне контакта должно быть неотрицательным. Точнее, должно выполняться неравенство $p \geq p_c$, где $p_c \approx 0$ – давление насыщенных паров жидкости или газа. В случае искусственной кавитации и малых скоростей движения цилиндра это условие можно усилить, потребовав, чтобы давление в зоне контакта не опускалось ниже давления в каверне ($p \geq p_c$). После интегрирования по времени придем к следующему неравенству:

$$0.5\chi\tau - \varphi_1(x_1, y_1, \tau) + \varphi_0(x_1, y_1) + (H - y_1)\tau \geq 0. \quad (24)$$

В естественной ситуации ($p_c = 0$) получаем совпадение с неравенством $p \geq 0$. Заметим, что при больших скоростях движения цилиндра и искусственной кавитации условие $p \geq p_c$ может нарушаться. Сделанные выводы подтверждаются в работах, посвященных асимптотическому анализу исходной нелинейной задачи на малых временах (соответствующий обзор дан в [4]).

В зоне отрыва формулируется приближенное условие

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \geq -n_y, \quad y = b, \quad 0 < x_1 < c_0(\tau), \quad (25)$$

означающее, что жидкие частицы не могут входить внутрь твердого тела. При его выводе предполагается, что внутренняя свободная граница мало отличается от поверхности тела, и, следовательно, жидкие частицы, находящиеся на ней, фактически лежат на верхней стороне прямоугольника. Точность этого условия зависит от справедливости предположения о малости возмущения внутренней свободной границы жидкости.

Теперь рассмотрим вопрос о связи условий (24), (25) с условием Кутты–Жуковского. Перенесем начало координат в точку отрыва ($x_1 \rightarrow x_1 + c_0(\tau)$, $y_1 \rightarrow y_1 + b$) и введем в рассмотрение новую гармоническую функцию φ_* , связанную с φ

соотношением

$$\varphi_1 = -y_1 + 0.5\chi\tau + (H - b)\tau + \varphi_*.$$

Поскольку точки отрыва монотонно сближаются, при $\tau > 0$ функция $\varphi_0(x_1, y_1)$ будет равна нулю в некоторой окрестности точки отрыва при $y_1 = b$. Учитывая это, получим для функции φ_* справа и слева от точки отрыва однородные краевые условия Дирихле и Неймана. В окрестности точки отрыва решение задачи представляется в полярных координатах в виде разложения по функциям вида $c_n r^{n+0.5} \cos(n + 0.5)\varphi$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Из условия регулярности решения задачи в точке отрыва следует, что коэффициент c_0 равен нулю. Таким образом, искомое разложение имеет вид

$$\varphi_* \sim c_1 r^{1.5} \cos 1.5\varphi, \quad c_1 = c_1(\tau).$$

Примеры решения классической задачи об ударе с отрывом показывают, что $c_1(0) \neq 0$. На основании этого будем считать, что $c_1(\tau) \neq 0$ на некотором промежутке $(0, \tau_*)$. Для таких τ согласно последнему соотношению получим в достаточно маленькой окрестности рассматриваемой точки соответственно слева и справа от нее следующие неравенства:

$$c_1 < 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi_*}{\partial y_1} > 0, \quad \varphi_* < 0; \quad c_1 > 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi_*}{\partial y_1} < 0, \quad \varphi_* > 0.$$

Заметим, что случай $c_1 < 0$ при $\tau = 0$ полностью согласуется с классической моделью удара с отрывом, а случай $c_1 > 0$, напротив, ей противоречит. В конкретных примерах справедливость неравенства $c_1 < 0$ для всех τ (вплоть до момента схлопывания) можно проверить численно. Таким образом, при $c_1 < 0$ условие Кутты–Жуковского приводит к неравенствам, которые по крайней мере локально совпадают с (24), (25). Отметим также, что при численной реализации задачи (18)–(23) достаточно локальной формулировки краевых условий типа неравенств.

Теперь остановимся на определении второго приближения. Функцию φ_2 , удовлетворяющую уравнению Пуассона, можно свести к гармонической при помощи подстановки:

$$\varphi_2 = s(\tau)x_1 \ln x_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + u, \quad s(\tau) = \frac{c_1(\tau)}{c_0(\tau) \ln c_0(\tau)},$$

где функция u , не зависящая от $s(\tau)$, определяется решением следующей задачи:

$$\Delta u = 0, \tag{26}$$

$$u = G(\varphi_1, x_1, y_1, \tau), \quad y_1 = b, \quad 0 < x_1 < c_0(\tau); \quad y_1 = H, \quad 0 < x_1 < H_R, \tag{27}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_1} = 0, \quad y_1 = b, \quad c_0(\tau) < x_1 < 1; \quad y_1 = -b, \quad 0 < x_1 < 1, \tag{28}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad x_1 = 1, \quad -b < y_1 < b; \quad \frac{\partial u}{\partial y_1} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2} \tau, \quad y_1 = -H_b, \tag{29}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad x_1 = 0, \quad -H_b < y_1 < -b, \quad b < y_1 < H; \quad x_1 = H_R, \tag{30}$$

$$G(\varphi_1, x_1, y_1, \tau) = 0.5 \int_0^\tau g_s^2 ds - g_\tau \int_0^\tau (g_s + 1) ds - \int_0^\tau (\tau - s) g_s ds,$$

$$g_\tau = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}(x_1, y_1, \tau).$$

После решения краевых задач для φ_1 и u коэффициент $c_1(\tau)$ находится из условия регулярности функции φ_2 в точке отрыва. При этом учитывается поведение функций φ_1 и u вблизи точки раздела краевых условий:

$$\varphi_1 \sim \text{const} [x_1 - c_0(\tau)]^{3/2}, \quad u \sim \text{const} [x_1 - c_0(\tau)]^{1/2}$$

при $y_1 = b$, $x_1 \rightarrow c_0(\tau) + 0$. В итоге приходим к следующей формуле:

$$c_1(\tau) = -\frac{a_2(\tau)}{a_1(\tau)}, \tag{31}$$

$$a_1(\tau) = \lim_{x_1 \rightarrow c_0(\tau)+0} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2} \sqrt{x_1 - c_0(\tau)}, \quad a_2(\tau) = \lim_{x_1 \rightarrow c_0(\tau)+0} \frac{\partial u}{\partial x_1} \sqrt{x_1 - c_0(\tau)}.$$

Отметим, что рассуждения, проведенные при выводе формулы (31), аналогичны тем, которые были сделаны в [4] при построении асимптотики по малому времени.

Асимптотики (14)–(17) позволяют последовательно рассматривать вопросы, связанные с динамикой точек отрыва и определением форм внутренней и внешней свободных границ жидкости. Ниже приводятся окончательные формулы для коэффициентов асимптотических разложений (15), (16):

$$\begin{aligned} \zeta_1(x_1, \tau) &= \nu_1, & \zeta_2(x_1, \tau) &= \nu_2, & y_1 &= b; \\ \psi_1(x_1, \tau) &= \nu_1, & \psi_2(x_1, \tau) &= \nu_2, & y_1 &= H, \end{aligned} \tag{32}$$

$$\nu_1 = \int_0^\tau (g_s + 1) ds, \quad \nu_2 = s(\tau)x_1 \ln x_1 \int_0^\tau \frac{\partial g_s}{\partial x_1} ds + \int_0^\tau \frac{\partial u}{\partial y_1} ds.$$

Отметим, что для корректности рассуждений, связанных с регулярностью решения задачи и выводом формулы (31), вообще говоря, нужна непрерывная дифференцируемость функции $G = G(\varphi_1, x_1, y_1, \tau)$ при $y_1 = b$, $x_1 \in [0, c_0(\tau)]$. Краевое условие (27), содержащее функцию G , было получено на основании представления функции $\zeta_1(x_1, \tau)$ в виде (32). Вследствие этого G является непрерывной в точке отрыва, а ее первая производная по переменной x_1 имеет в ней корневую особенность. Чтобы сгладить эту особенность, нужно правильно определить функцию $\zeta_1(x_1, \tau)$ в маленькой окрестности точки отрыва. Другими словами, нужно построить погранслоное решение в точке отрыва и согласовать его с внешним разложением (15). Вкратце остановимся на решении этого вопроса. Преобразованное кинематическое уравнение внутренней свободной границы имеет вид

$$\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + \varepsilon = \varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} \left(\frac{\partial x}{\partial x_1} \right)^{-2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \varepsilon^{-1} \left[\frac{\partial \zeta}{\partial \tau} - \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} \left(\frac{\partial x}{\partial x_1} \right)^{-1} \frac{\partial x}{\partial \tau} \right].$$

Погранслоное решение, согласующееся с внешним разложением (15) и удовлетворяющее начальному условию при $\tau = 0$, можно представить в виде:

$$\zeta(x_1, \tau) = \varepsilon^{7/2} \frac{\beta(\tau)}{c'_0(\tau)} [F(\tilde{x}) - F(\tilde{x}_0)], \quad \tilde{x} = \frac{c_0(\tau) - x_1}{\varepsilon}, \quad \tilde{x}_0 = \frac{c_0(0) - x_1}{\varepsilon}. \tag{33}$$



Рис. 2. Согласование погранслойных решений и внешнего разложения при $\tau = 0.625$: $\varepsilon = Fr_0 = 0.3$, $\chi_0 = -5$.(5)

Сначала оно ищется в форме (33) с $F(\tilde{x}_0) = 0$. На основании регулярности решения задачи с односторонними ограничениями левая часть дифференциального уравнения заменяется асимптотикой (в главном приближении $\varphi \sim \varphi_1$):

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} + 1 \sim \beta(\tau) \sqrt{c_0(\tau) - x_1}, \quad x_1 \rightarrow c_0(\tau) - 0,$$

Производная функции φ_1 по x_1 , которая входит в правую часть дифференциального уравнения, стремится к нулю при $y_1 \rightarrow b$. Поэтому, чтобы получить главный член ее разложения, нужно сделать один шаг по формуле Тейлора (разложение ведется по y_1 при $y_1 = b$ и фиксированном x_1), а затем учесть асимптотическое поведение функции φ_1 в окрестности точки раздела краевых условий:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1 \partial y_1} \zeta(x_1, \tau) + \dots \sim \frac{-\beta(\tau)}{2\sqrt{c_0(\tau) - \tilde{x}}} \zeta(x_1, \tau).$$

После перехода в дифференциальном уравнении к погранслойной переменной в главном приближении по ε (порядок $\varepsilon^{3/2}$) найдем функцию $F(\tilde{x})$:

$$F'(\tilde{x}) = \sqrt{\tilde{x}}, \quad F(\tilde{x}) = \frac{2}{3} \tilde{x}^{3/2}.$$

Построенное таким образом решение необходимо подправить, так как в силу отрицательности коэффициента ($c'_0(\tau) < 0$, $\beta(\tau) > 0$) оно уходит внутрь прямоугольника. Непосредственно можно убедиться, что для производной $\zeta_\tau(x_1, \tau)$ (по-прежнему считаем, что $F(\tilde{x}_0) = 0$) будет выполнено условие сращивания с внешним разложением в промежуточном пределе ($\varepsilon \rightarrow 0$, x_η фиксировано) [9]:

$$x_\eta = \frac{c_0(\tau) - x_1}{\eta(\varepsilon)}, \quad \eta(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow \infty.$$

Используя установленный факт, получим искомую погранслойную функцию с помощью интегрирования по времени. Так как зона сращивания сама зависит от времени, оправданным будет только локальное интегрирование в окрестности фиксированного τ . При этом возникает произвольная постоянная (зависящая от данного τ), которую можно представить в виде $\varepsilon^{7/2} \beta(\tau) / c'_0(\tau) \cdot \gamma$. С целью сохранения структуры погранслойного решения (временной коэффициент умножается на функцию, зависящую от времени только через погранслойную переменную) будем считать величину γ не зависящей от времени. Определяя ее однозначно из начального условия, приходим к представлению (33). Полученная формула хорошо подтверждается численными экспериментами для различных значений параметров задачи. На рис. 2 показано согласование погранслойного решения (сплошная линия) с внешним разложением (пунктирная линия) при $\tau = 0.625$ ($\varepsilon = 0.3$, $\chi_0 = -5$.(5)). В этом случае величины $\beta(\tau)$ и $c'_0(\tau)$ приближенно равны 1.24 и -0.6 . При дальнейшем уменьшении параметра ε кривые практически сливаются.

Решение кинематического уравнения внутренней свободной границы, удовлетворяющее однородному условию при $x_1 = c_0(\tau)$, будем искать в виде:

$$\zeta(x_1, \tau) = \varepsilon^\alpha F(\tilde{x}) + \dots, \quad \tilde{x} = \frac{c_0(\tau) - x_1}{\varepsilon^\lambda},$$

где постоянные α и λ подбираются таким образом, чтобы первые два члена в правой части дифференциального уравнения (нелинейный член и производная по времени) имели одинаковый порядок по ε , а остальные члены имели более высокий порядок малости. Одинаковые порядки по ε получаются при $\lambda = 2\alpha + 4$. В этом случае функция $F(\tilde{x})$ имеет вид

$$F(\tilde{x}) = -\frac{2c'_0(\tau)}{\beta(\tau)} \sqrt{\tilde{x}}.$$

Возвращаясь к переменной x_1 , получим для возмущения свободной границы вблизи точки отрыва асимптотическую формулу

$$\zeta(x_1, \tau) \sim -\varepsilon^{-2} \frac{2c'_0(\tau)}{\beta(\tau)} \sqrt{c_0(\tau) - x_1}.$$

Отметим, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ возмущение свободной границы должно исчезать. Таким образом, множитель ε^{-2} означает, что последнюю формулу нужно рассматривать в очень маленькой окрестности точки отрыва (корень есть маленькая величина). Вследствие этого кривая выходит из точки отрыва под прямым углом и при малых ε практически не отличается от вертикального отрезка прямой (рис. 2). В промежуточном пределе ($\eta(\varepsilon)/\varepsilon^\lambda \rightarrow \infty$) главные по ε члены двух погранслойных решений совпадут, если $\eta(\varepsilon) = \varepsilon^8$, $\lambda > 8$ (например, $\lambda = 10$, $\alpha = 3$), а фиксированная величина $x_\eta = [c_0(0) - c_0(\tau)]^3 \beta^4(\tau) / [2c'_0(\tau)]^4$.

Заметим, что особенность у производной в граничном условии (27) создается за счет функции $-(g_\tau + 1)\zeta_1(x_1, \tau)$, которая выделяется из ее среднего члена (к функции g_τ нужно прибавить и вычесть единицу). Будем считать, что за исключением очень маленькой окрестности точки отрыва функция $\zeta_1(x_1, \tau)$ определена по первой формуле (32), а в указанной окрестности имеет вид погранслойного решения.

Обратим также внимание на то, что погранслойное решение, удовлетворяющее условию сращивания, после перехода к старой переменной x_1 , будет сохранять вид внешнего разложения (ε^2 умножается на функцию, не зависящую от ε), а второе погранслойное решение, напротив, не будет его сохранять. В связи с этим вторые члены разложений (14)–(17) могут получить дополнительную зависимость от ε . Это не нарушает рассуждений, проведенных при выводе вторых членов асимптотики, так как отброшенные члены имеют более высокие порядки малости. Однако можно предложить другой способ сглаживания, который не приводит к дополнительной зависимости вторых членов асимптотических разложений от ε . В нем вместо второго погранслойного решения нужно использовать сглаживающую функцию, сохраняющую вид внешнего разложения. Эта функция будет связывать первое погранслойное решение с точкой отрыва. Теоретически оба подхода приводят к эффективному приближенному решению задачи, удовлетворяющему условию Кутты–Жуковского. Различие в этих подходах (например, при определении $c_1(\tau)$) может проявиться только при очень малых ε , для которых вторые члены разложений теряют свою актуальность.

Следует отметить, что проведенное сглаживание практически не влияет на численное определение коэффициента $c_1(\tau)$ по формуле (31). Это объясняется тем, что для численного анализа задачи (26)–(30) применяется слабая вариационная постановка (в интегральной форме), которая сама по себе сглаживает особенности. Таким образом, при численной реализации можно использовать функцию G в первоначальном виде.

Табл. 1

t_0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.23	0.25
asimp	0.77	0.64	0.48	0.24	0.02	0
linear	0.78	0.68	0.53	0.34	0.15	0

Табл. 2

t_0	0.05	0.1	0.15	0.16
asimp	0.72	0.49	0.1	0
linear	0.73	0.53	0.17	0

Табл. 3

t_0	0.03	0.05	0.07	0.08	0.09
asimp	0.71	0.58	0.38	0.23	0.01
linear	0.72	0.59	0.4	0.28	0.06

3. Численная реализация и анализ результатов

Сначала рассмотрим задачу со свободной границей (18)–(25). При фиксированном τ приходим к определению точки отрыва, отделяющей на границе тела область безотрывного обтекания от зоны отрыва. С помощью специального итерационного метода решение данной нелинейной задачи (с неизвестной зоной отрыва) сводится к последовательному решению линейных краевых задач с фиксированными точками раздела краевых условий первого и второго рода. Для начала итерационного процесса нужно выбрать положение точки отрыва так, чтобы в некоторой ее окрестности нарушалось условие (24). Этого всегда можно добиться, уменьшая начальную зону отрыва, то есть приближая $c_0(\tau)$ к нулю. Точка, соответствующая локальному отрицательному минимуму функции (24), выбирается за следующее приближение к точке отрыва. Далее процесс повторяется. На каждом шаге итерационного метода зона отрицательных значений функции (24) уменьшается. Процесс заканчивается, когда эта зона исчезает. Подробно этот алгоритм описан в работах автора, посвященных начальному этапу движения твердых тел в жидкости с учетом явления кавитации (библиографию можно посмотреть в [4]). Аналогично организуется итерационный процесс, основанный на уточнении кинематического условия (25). В этом случае главное приближение к зоне отрыва должно быть достаточно большим (величина $c_0(\tau)$ приближается к единице). В каждом методе вторые условия в виде неравенств проверяются после окончания алгоритма. Отметим также, что линейные задачи, возникающие на каждом шаге итерационного процесса, решаются численно с помощью метода конечных элементов [10]. После нахождения главного приближения φ_1 и определения функции $c_0(\tau)$ решается задача (26)–(30). При этом интегралы по времени, входящие в динамические краевые условия, вычисляются с помощью формулы правых прямоугольников. Так как для определения функции g_τ при каждом фиксированном τ нужно решить задачу со свободной границей (18)–(25), для вычисления этих интегралов, а следовательно, и для решения всей задачи нужно применить метод шагов по времени.

Таким образом, чтобы воспользоваться асимптотической формулой (17), нужно на каждом шаге по времени определить величину $c_0(\tau)$, решая задачу со свободной границей (18)–(23), затем найти функцию u и приближенно определить коэффициент $c_1(\tau)$ по формуле (31).

Численные результаты, найденные для точки отрыва $c(t) = c(\varepsilon\tau)$ сравниваются с данными, полученными на основе линеаризованной модели, предложенной в [2, 3]. Результаты сравнения при $\chi = -0.5$, $H = 1$, $H_b = -3$, $H_R = 4$ приведены

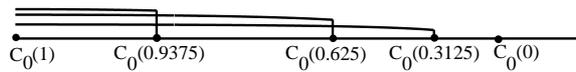


Рис. 3. Подъем внутренней свободной границы при схлопывании каверны: $\varepsilon = Fr_0 = 0.4$, $\chi_0 = -3.125$, $\tau = 6.25t_0$

в табл. 1–3. Во второй строке каждой из этих таблиц представлены результаты, найденные по асимптотической формуле (17). Третья строка содержит данные, полученные на основе специальной линеаризованной модели. Численные результаты, приведенные в табл. 1, получены при $\varepsilon = 0.5$, $\chi_0 = -2$, $\tau = 4t_0$. Табл. 2 соответствует случаю $\varepsilon = 0.4$, $\chi_0 = -3.125$, $\tau = 6.25t_0$. В табл. 3 собраны результаты, отвечающие $\varepsilon = 0.3$, $\chi_0 = -5.5$, $\tau = 11.1t_0$. Заметим также, что для сравнения численных результатов используется связь между безразмерным параметром t_0 , введенным в работе [3] (там он обозначается через t) и параметром τ : $\tau = \varepsilon^{-2}t_0$. Подчеркнем, что разница между t и t_0 состоит в том, что при введении безразмерного времени вместо v пишется v_0 .

Хорошо видно, что при уменьшении параметра ε погрешность, полученная в результате сравнения, уменьшается. Таким образом, линеаризованная модель, предложенная в [2, 3], дает хорошее согласование с асимптотической теорией при малых скоростях движения цилиндра.

Теперь остановимся на определении формы внутренней свободной границы жидкости. Сравнение численных результатов, полученных на основе главного члена асимптотики и линеаризованной модели [3], показало их хорошее согласование во всем диапазоне изменения переменной x_1 . Проведенное сравнение подтверждает справедливость предложенной в [3] модели схлопывания тонкой каверны с учетом подъема внутренней свободной границы жидкости. Основной вывод состоит в том, что при малых скоростях движения цилиндра (и не очень большом давлении в каверне) точки отрыва монотонно сближаются, а свободная граница немного поднимается. На рис. 3 изображена динамика рассматриваемого процесса при $\varepsilon = Fr_0 = 0.4$, $\chi_0 = -3.125$, $\tau = 6.25t_0$ (остальные параметры не меняются). Анализ проведен без учета погранслоного решения, которое сглаживает углы, но при этом не влияет на форму каверны в целом. Отметим, что при дальнейшем уменьшении параметра ε возмущение свободной границы становится менее заметным. Следовательно, процесс схлопывания каверны при малых скоростях движения цилиндра в основном сводится к изучению динамики точек отрыва. Заметим также, что использование двух членов асимптотики позволяет несколько расширить диапазон применимости рассматриваемой модели.

Заключение

Проведен асимптотический анализ задачи о медленных движениях прямоугольного цилиндра в жидкости после отрывного удара с учетом искусственной кавитации. На основании первых двух членов асимптотики изучена динамика точек отрыва внутренней свободной границы жидкости и проведено ее согласование со специальной линеаризованной моделью. Ввиду малости второго члена асимптотики в формуле (15) (порядок $O(\varepsilon^4)$, $\varepsilon \rightarrow 0$), анализ возмущения внутренней свободной границы жидкости выполнен в главном приближении. Проведенный асимптотический анализ подтверждает основной результат работы [3], состоящий в том, что монотонное сближение точек отрыва сопровождается небольшим подъемом внутренней свободной границы жидкости. При малых скоростях движения

цилиндра возмущением внутренней свободной границы можно пренебречь и свести основной вопрос к изучению динамики точек отрыва. Проведенное исследование показывает, что при малых скоростях движения цилиндра можно получить полное решение проблемы образования и схлопывания присоединенной каверны. При этом реальные числа Фруда, для которых применим предложенный метод, образуют довольно широкий диапазон: $Fr_0 < 0.5$. При других числах Фруда динамика отрыва после удара изучена только на малых временах [4]. Таким образом, перспективы исследования таких задач связаны главным образом с изучением дальнейшей динамики каверны при больших и умеренных числах Фруда.

Литература

1. *Седов Л.И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. – М.: Наука, 1966. – 448 с.
2. *Норкин М.В.* Динамика точек отрыва при ударе плавающего кругового цилиндра // Прикл. механ. и техн. физика. – 2019. – Т. 60, № 5. – С. 19–27. – doi: 10.15372/PMTF20190503.
3. *Норкин М.В.* Динамика точек отрыва при вертикальном ударе плавающего прямоугольного цилиндра // Вестн. ЮУрГУ. Серия «Матем. моделирование и программирование». – 2020. – Т. 13, № 2. – С. 108–120. – doi: 10.14529/mmp200209.
4. *Норкин М.В.* Движение прямоугольного цилиндра в жидкости после удара на малых временах с образованием каверны // Сиб. журн. индустр. матем. – 2020. – Т. 23, № 2. – С. 106–118. – doi: 10.33048/SIBJIM.2020.23.208.
5. *Аганин А.А., Ильгамов М.А., Мустафин И.Н.* Ударная кавитация жидкости в цилиндрической емкости // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2020. – Т. 162, кн. 1. – С. 27–37. – doi: 10.26907/2541-7746.2020.1.27-37.
6. *Hilmervik K.B., Tyvand P.A.* Incompressible impulsive wall impact of liquid cylinders // J. Eng. Math. – 2017. – V. 103, No 1. – P. 159–171. – doi: 10.1007/s10665-016-9866-6.
7. *Hilmervik K.B., Tyvand P.A.* Impact of narrow plates on broader liquid bodies // Appl. Ocean Res. – 2019. – V. 87. – P. 247–255. – doi: 10.1016/j.apor.2019.04.002.
8. *Savchenko Yu., Savchenko G., Semenov Yu.A.* Impulsive motion inside a cylindrical cavity // Mathematics. – 2020. – V. 8, No 2. – Art. 192, P. 1–11. – doi:10.3390/math8020192.
9. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. – М.: Мир, 1972. – 274 с.
10. *Жуков М.Ю., Ширяева Е.В.* Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии. – Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2008. – 256 с.

Поступила в редакцию
30.09.2020

Норкин Михаил Викторович, доктор физико-математических наук, профессор Института математики, механики и компьютерных наук

Южный федеральный университет

ул. Мильчакова, д. 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090, Россия

E-mail: norkinmi@mail.ru

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2020, vol. 162, no. 4, pp. 426–440

doi: 10.26907/2541-7746.2020.4.426-440

Asymptotics of Slow Motions of a Rectangular Cylinder in a Liquid after a Separation Impact

*M. V. Norkin**Southern Federal University, Rostov-on-Don, 344090, Russia*E-mail: *norkinmi@mail.ru*

Received September 30, 2020

Abstract

The process of collapse of a cavern, which is formed following the separation impact produced by a rectangular cylinder in an ideal, incompressible, and heavy liquid, was studied. Assuming that the speed of the cylinder is low, asymptotics of the main characteristics of the impact were constructed. The difficulties arising in this case are mainly related to the fact that the dynamics of the separation points is not known in advance and depends on a small parameter, i.e., on the dimensionless velocity of the cylinder. With the help of a special change of variables, the matter was reduced to the study of a problem with the dynamics of separation points corresponding to the leading approximation independent of the indicated parameter. This enabled us to determine the second term of the asymptotics with account for the nonlinear terms in the model. In the leading approximation, a problem with a free boundary, which is similar to the classical model of an impact with separation at each fixed moment of time, was formulated. On the basis of the first two terms of the asymptotics, the process of collapse of the cavern was described with allowance for the rise of the inner free boundary of the liquid. Comparison with the previously obtained results was carried out.

Keywords: ideal incompressible fluid, rectangular cylinder, separation impact, dynamics of separation points, Froude number, cavitation number

Figure Captions

Fig. 1. Formulation of the problem.

Fig. 2. Matching the boundary layer solutions and the external expansion for $\tau = 0.625$: $\varepsilon = Fr_0 = 0.3$, $\chi_0 = -5.5$.

Fig. 3. Lifting of the internal free boundary when the cavern collapses: $\varepsilon = 0.4$, $Fr_0 = 0.4$, $\chi_0 = -3.125$, $\tau = 6.25t_0$.

References

1. Sedov L.I. *Ploskie zadachi gidrodinamiki i aerodinamiki* [Two-Dimensional Problems of Hydrodynamics and Aerodynamics]. Moscow, Nauka, 1966. 448 p. (In Russian)
2. Norkin M.V. Dynamics of separation points upon impact of a floating circular cylinder. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2019, vol. 60, no. 5, pp. 798–804. doi: 10.1134/S0021894419050031.

3. Norkin M.V. Dynamics of separation points during vertical impact of a floating rectangular cylinder. *Vestn. YuUrGU. Ser. "Mat. Model. Program."*, 2020, vol. 13, no. 2, pp. 108–120. doi: 10.14529/mmp200209. (In Russian)
4. Norkin M.V. The movement of a rectangular cylinder in a liquid at short times after impact with formation of a cavity. *J. Appl. Ind. Math.*, 2020, vol. 14, no. 2, pp. 385–395. doi: 10.1134/S1990478920020155.
5. Aganin A.A., Ilgamov M.A., Mustafin I.N. Impact-induced cavitation in a cylindrical container with liquid. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 162, no. 1, pp. 27–37. doi: 10.26907/2541-7746.2020.1.27-37. (In Russian)
6. Hilmervik K.B., Tyvand P.A. Incompressible impulsive wall impact of liquid cylinders. *J. Eng. Math.*, 2017, vol. 103, no. 1, pp. 159–171. doi: 10.1007/s10665-016-9866-6.
7. Hilmervik K.B., Tyvand P.A. Impact of narrow plates on broader liquid bodies. *Appl. Ocean Res.*, 2019, vol. 87, pp. 247–255. doi: 10.1016/j.apor.2019.04.002.
8. Savchenko Yu., Savchenko G., Semenov Yu.A. Impulsive motion inside a cylindrical cavity. *Mathematics*, 2020, vol. 8, no. 2, art. 192, pp. 1–11. doi: 10.3390/math8020192.
9. Cole D.J. *Metody vozmushchenii v prikladnoi matematike* [Perturbation Methods in Applied Mathematics]. Moscow, Mir, 1972. 274 p. (In Russian)
10. Zhukov M.Yu., Shiryaeva E.V. *Ispolzovanie paketa konechnykh elementov FreeFem++ dlya zadach gidrodinamiki, elektroforeza i biologii* [Using the FreeFem++ Finite Element Software for the Problems of Hydrodynamics, Electrophoresis, and Biology]. Rostov-on-Don, Izd. YuGU, 2008. 256 p. (In Russian)

⟨ **Для цитирования:** Норкин М.В. Асимптотика медленных движений прямоугольного цилиндра в жидкости после отрывного удара // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2020. – Т. 162, кн. 4. – С. 426–440. – doi: 10.26907/2541-7746.2020.4.426-440. ⟩

⟨ **For citation:** Norkin M.V. Asymptotics of slow motions of a rectangular cylinder in a liquid after a separation impact. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 162, no. 4, pp. 426–440. doi: 10.26907/2541-7746.2020.4.426-440. (In Russian) ⟩