КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
им. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Ф.Г. АВХАДИЕВ

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ В ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

Учебно-методическое пособие

Казань 2013

УДК 517

Рекомендовано к опубликованию и размещению на сайте Казанского (Приволжского) федерального университета Учебно-методической комиссией Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского, протокол № 1 от 10.10.13.

Рецензенты:
д.ф.-м.н., профессор **Ю.В. Обносов,**
к.ф.-м.н., доцент **Ю.Р. Агачев**.

Научный редактор:
д.ф.-м.н., профессор **С.Р. Насыров.**

Авхадиев Фарит Габидинович
Точные оценки в теории функций // Казань: Казанский федеральный университет, 2013, 40 стр.

В учебно-методическом пособии изложены точ-ные оценки теории функций. Первые семь из них даны в главе 1. Они представляют собой простые утверждения и иллюстрируют применения методов, известных студентам-математикам младших курсов. Во второй главе приведены с краткими доказательства-ми десять классических неравенств, носящих имена выдающих-ся математиков, а именно, неравенства Гаусса, Чебышева, Коши-Буняковского-Шварца, Бесселя, Юнга, Гельдера, Минковского, Йенсена, Гильберта-Шура и Харди.

Книга предназначена для студентов-бакалавров, применяющих различные неравенства при оценке погрешности численных методов анализа и при выполнении курсовых работ.

Библ. 8 названий.

Содержание

1 Простейшие оценки

Цель этой главы – убедить студентов 2-го и 3-го курсов в том, что они владеют основными методами для вывода различных оценок – неравенств для функций. Поэтому названия разделов содержат слово "метод". Выбор задач является более или менее случайным, их решение служит лишь иллюстрацией метода доказательства.

1.1 Метод математической индукции

В этом разделе приведены три неравенства, доказанные методом математической индукции. Отметим попутно, что метод математической индукции является одним из самых простых и эффективных методов, применяется во всех областях элементарной и высшей математики, в частности, и в теории функций.

Начнем с доказательства следующего **неравенства Бернулли**.

Теорема 1.1 *Пусть* $x_1, x_2, \dots, x_n$ – *вещественные числа одного и того же знака, большие или равные* -1. *Тогда*

$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Доказательство. Если $n = 1$, то и слева и справа получаем одно и то же выражение $1+x_1$. Пусть неравенство Бернулли справедливо при $n = k$. Тогда для $n = k+1$ будем иметь

$$(1+x_1)\dots(1+x_k)(1+x_{k+1}) \geq (1+x_1+\dots+x_k)(1+x_{k+1}) =$$

$$= 1 + x_1 + \dots + x_k + x_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} x_j x_{k+1}.$$

Здесь, кроме предположения индукции, мы пользовались тем, что $1 + x_{k+1} \geq 0$. По условию теоремы числа x_j и x_{k+1} имеют один и тот же знак, поэтому $x_j x_{k+1} \geq 0$, и мы получаем требуемое утверждение

$$(1+x_1)\dots(1+x_k)(1+x_{k+1}) \geq 1 + x_1 + \dots + x_k + x_{k+1}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1.1.1 *Если $x \leq -1$, то справедливо неравенство*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad (n > 1),$$

причем знак равенства имеет место лишь при $x = 0$.

Действительно, полагая $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x > -1$, как частный случай неравенства Бернулли, получаем неравенство

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Чтобы доказать последнюю часть утверждения снова применяем метод математической индукции. А именно, взяв за базу индукции $n = 2$, доказываем строгое неравенство

$$(1+x)^n > 1 + nx$$

при $x \in [-1, 0) \cup (0, +\infty)$. Для $n = 2$ имеем очевидное неравенство

$$1 + 2x + x^2 > 1 + 2x,$$

и далее

$$(1+x)^{k+1} > (1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2 > 1 + (k+1)x.$$

Теорема 1.2 *Пусть $0 \leq x_j \leq \pi \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда*

$$\left| \sin\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right) \right| \leq \sum_{j=1}^{n} \sin x_j.$$

Доказательство. База индукции $n = 1$. Пусть неравенство

$$\left| \sin\left(\sum_{j=1}^{k} x_j \right) \right| \leq \sum_{j=1}^{k} \sin x_j$$

верно. Далее, при переходе к случаю, когда число слагаемых равно $k + 1$, удобно пользоваться следующим обозначением: $\alpha = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$.

В силу известной формулы тригонометрии будем иметь равенства

$$\sin\left(\sum_{j=1}^{k+1} x_j \right) = \sin(\alpha + x_{k+1}) = \sin\alpha \cdot \cos x_{k+1} + \cos\alpha \cdot \sin x_{k+1}.$$

Так как $|\cos x_{k+1}| \le 1$, $|\cos\alpha| \le 1$ и $\sin x_{k+1} \ge 0$, получаем окончательно

$$\left|\sin\left(\sum_{j=1}^{k+1} x_j\right)\right| \le |\sin\alpha| + \sin x_{k+1} \le \sum_{j=1}^{k+1} \sin x_j.$$

Таким образом, теорема доказана.

Следующее утверждение – хорошо известное соотношение между арифметическим и геометрическим средними заданных положительных чисел. Имеется много доказательств этого замечательного факта, приведем одно из них.

Теорема 1.3 *Пусть* $a_k > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$. *Тогда*

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

причем равенство в этом неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Доказательство. База индукции $n = 1$. Пусть доказываемое утверждение имеет место при $n = k$. Требуется доказать, что оно верно тогда и для $n = k + 1$.

Обозначим $s := a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}$ и $x := a_{k+1}$. Тогда доказываемое неравенство запишется в виде

$$x \prod_{j=1}^{k} a_j \le \frac{s^{k+1}}{(k+1)^{k+1}}.$$

Произведение k чисел, стоящее в левой части этой формулы, не превосходит $(s - x)^k / k^k$ по предположению индукции, причем равенство возможно лишь при $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = (s - x)/k$. Поэтому доказываемое неравенство для $n = k + 1$ будет справедливо, если мы установим, что

$$f(x) := x(s - x)^k \le \frac{s^{k+1} k^k}{(k+1)^{k+1}} \quad (\forall x \in (0, s)).$$

Имеем: $f(0) = f(s) = 0$. Кроме того, при $x \in (0, s)$ функция $f(x) > 0$, а ее производная $f'(x) = 0$ в единственной точке $x_0 =$

$s/(k+1)$. Поэтому $f(x) \le f(x_0) = s^{k+1}k^k/(k+1)^{k+1}$, $f(x) < f(x_0)$ при $x \in (0, s) \setminus \{x_0\}$.

Тем самым, неравенство доказано.

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x = x_0$ и

$$\sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k},$$

следовательно, по предположению индукции будем иметь:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_k = (s - x_0)/k.$$

Но тогда $a_{k+1} = x_0 = s/(k+1)$ и $a_1 = a_2 = \dots = a_k = (s - x_0)/k = s/(k+1)$. Таким образом, равенство в случае $n = k+1$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$a_1 = a_2 = \dots = a_k = a_{k+1} = x_0 = s/(k+1),$$

что и требовалось доказать.

1.2 Методы дифференциального исчисления

Известно, что основатели математического анализа Ньютон и Лейбниц открыли дифференциальное исчисление, стремясь создать метод нахождения максимумов и минимумов функций. И эта цель ими была достигнута. Поэтому, если функция $f : [a, b\,] \to \mathbb{R}$ является дифференцируемой, то каждый из нас может найти величины [1]

$$M = \max_{x \in [a,b]} f(x), \quad m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$$

и записать неравенства

$$m \leq f(x) \leq M, \quad x \in [a, b].$$

Этот подход был использован нами частично в ходе доказательства предыдущей теоремы по отношению к функции $f(x) = x(s-x)^k, \quad x \in [0, s]$.

Имеются и более изощренные приемы получения оценок методами математического анализа, основанные на теориях монотонных и выпуклых функций, а также на теориях рядов и интегралов. Некоторые примеры, подтверждающие этот тезис, будут рассмотрены в следующей главе.

В этом разделе мы приведем лишь несколько простых, хорошо известных утверждений.

[1] Научный редактор книги профессор С. Р. Насыров считает эту фразу черезчур оптимистичной ввиду того, что для достаточно сложных функций могут возникнуть непреодолимые трудности с решением уравнения $f'(x) = 0$ и нахождением значений функции в критических точках и концах отрезка [a,b].

Теорема 1.4 *Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет конечную производную $f'(x)$ внутри него. Если f не является линейной, то в интервале (a, b) найдется по меньшей мере одна точка c такая, что*

$$|f'(c)| > \left|\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right|.$$

Доказательство. Введем вспомогательную функцию

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) - f(x).$$

Предположим для определенности, что

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0.$$

Докажем, что существует точка $c \in (a, b)$, для которой $g'(c) < 0$. Это даст требуемое неравенство

$$g'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(c) < 0.$$

Предположим обратное. Пусть $g'(x) \geq 0$ для всех $x \in (a, b)$. Отсюда следует, что $g(x)$ является неубывающей функцией. Но $g(a) = g(b) = 0$, следовательно, $g(x) \equiv 0$. А это равносильно линейности $f(x)$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Теорема 1.5 *Пусть $\varphi : [a, b] \to [a, b]$, $\psi[a, b] \to [a, b]$ и $f[a, b] \to [a, b]$ – монотонно возрастающие функции, такие, что для любой точки $x \in [a, b]$*

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x).$$

Тогда

$$\varphi[\varphi(x)] \leq f[f(x)] \leq \psi[\psi(x)], \quad x \in [a, b].$$

Доказательство. Обозначим $y = \varphi(x)$, $z = f(x)$ и $t = \psi(x)$. Так как

$$y \leq z \leq t,$$

а неравенства $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ имеют место для любых значений переменного $x \in [a, b]$, то

$$\varphi[\varphi(x)] = \varphi(y) \leq f(y) \leq f(z) = f[f(x)],$$

$$f[f(x)] = f(z) \leq \psi(z) \leq \psi(t) = \psi[\psi(x)],$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1.6 *Если* $x \geq 0$, *то существует такая монотонно возрастающая функция* $\theta(x)$, *что*

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

где

$$\frac{1}{4} \leq \theta(x) \leq \frac{1}{2},$$

причем

$$\lim_{x\to 0} \theta(x) = \frac{1}{4}, \quad \lim_{x\to+\infty} \theta(x) = \frac{1}{2}.$$

Доказательство. Применяя формулу Лагранжа о конечных приращениях к функции $f(t) = \sqrt{t}$ на отрезке $[x, x+1]$, получаем

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta}},$$

где $\theta \in (0, 1)$. Рассматривая последнее равенство как уравнение относительно θ, находим

$$\theta = \frac{1-2x}{4} + \frac{\sqrt{x(x+1)}}{2}.$$

Отсюда следует

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{2} + \frac{2x+1}{4\sqrt{x(x+1)}} > 0$$

при $x > 0$. Таким образом, $\theta = \theta(x)$ – монотонно возрастающая функция. Нетрудно найти

$$\inf_{x>0} \theta(x) = \lim_{x\to 0^+} \theta(x) = \frac{1}{4},$$

$$\sup_{x>0} \theta(x) = \lim_{x\to+\infty} \theta(x) = \frac{1}{2}.$$

Теорема 1.7 *Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет конечную производную $f'(x)$ внутри него. Если $\sup_{x \in (a,b)} |f'(x)| = M < \infty$, то для любых двух точек x, y из $[a, b]$*

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $x < y$. По формуле Лагранжа о конечных приращениях, примененной к функции $f(t)$ при $t \in [x, y]$, имеем: существует точка $t = c \in (x, y)$ такая, что

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y).$$

Отсюда и следует требуемое неравенство с учетом соотношения $|f'(c)| \leq M$.

Как следствие этой теоремы получаем, например, неравенства

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|;$$

$$py^{p-1}(x - y) \leq x^p - y^p \leq px^{p-1}(x - y), \quad \text{если } 0 < y < x \text{ и } p > 1;$$

$$|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \leq |a - b|;$$

$$\frac{a - b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a - b}{b}, \quad \text{если } 0 < b < a.$$

1.3 Упражнения

1. Применяя метод математической индукции, доказать, что для любого натурального числа n справедливы следующие равенства:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \qquad (1)$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}; \qquad (2)$$

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1. \qquad (3)$$

Сравните свои решения со следующими рассуждениями. Утверждения верны при $n = 1$, Предположим, что утверждения верны при $1 \leq n \leq k$, и остается доказать их при $n = k+1$. Индуктивный переход от случая $n = k$ к случаю $n = k+1$ для всех трех равенств сводится к простым алгебраическим преобразованиям. А именно, при доказательстве (1) имеем

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$= (k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6} + k + 1\right] =$$

$$= (k+1)\frac{2k^2 + 7k + 6}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6},$$

т. е. получили требуемое выражение для $n = k + 1$.

Для (2) при $n = k + 1$ будем иметь

$$S_{k+1} = 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 =$$

$$= (1 + 2 + \dots + k)^2 + (k+1)^3.$$

Но $1 + 2 + \dots + k = k(k+1)/2$, поэтому

$$S_{k+1} = (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right) =$$

$$= \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2 = (1 + 2 + \dots + (k+1))^2.$$

В случае формулы (3)

$$(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-1}) + 2^k = (2^k - 1) + 2^k = 2^{k+1} - 1.$$

2. Применяя метод математической индукции, доказать следующие неравенства:

$$(2n)! < 2^{2n}(n!)^2; \tag{4}$$

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \qquad \text{при} \quad n > 1; \tag{5}$$

$$2! \cdot 4! \ldots (2n)! > [(n+1)!]^n \qquad \text{при} \quad n > 1; \tag{6}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \ldots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}; \tag{7}$$

$$n^{n+1} > (n+1)^n \qquad (n \geq 3). \tag{8}$$

Указания. При доказательстве (4) требуемое неравенство

$$(2k+2)! < 2^{2k+2}((k+1)!)^2$$

следует из предположения индукции

$$(2k)! < 2^{2k}(k!)^2$$

и элементарного неравенства

$$(2k+1)(2k+2) < 4(k+1)^2.$$

База индукции $n = 2$ при доказательстве (5), и для $n = 2$ имеем

$$2! < \left(\frac{2+1}{2}\right)^2.$$

Пусть $k! < (k+1)^k/2^{2k}$. Тогда

$$(k+1)! = k!(k+1) < (k+1)^{k+1}/2^k =$$

$$= \frac{(k+2)^{k+1}}{2^k} \cdot \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1} < \frac{(k+2)^{k+1}}{2^{k+1}},$$

в силу того, что

$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} > 2$$

согласно неравенству Бернулли при $x = 1/(k+1)$, $n = k+1$.

Рассмотрим (6). При $n = 2$

$$2! \cdot 4! = 48 > 36 = (3!)^2.$$

Если неравенство верно при $n = k$, то при $n = k + 1$

$$2!4!\ldots(2k)!(2k+2)! > [(k+1)!]^k(2k+2)! =$$

$$= [(k+2)!]^{k+1}\frac{(2k+2)!}{(k+2)!(k+2)^k} =$$

$$= [(k+2)!]^{k+1}\frac{(k+3)(k+4)\ldots(2k+2)}{(k+2)^k} > [(k+2)!]^{k+1}.$$

Для (7) при $n = 1$ имеем

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}},$$

и пусть неравенство имеет место для $n = k$. Тогда

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\ldots\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2} = \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}.$$

Остается доказать, что

$$\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}}$$

или, что то же самое,

$$\sqrt{(2k+1)(2k+3)} < 2k+2 = \frac{(2k+1)+(2k+3)}{2}.$$

Последнее неравенство верно, так как для неравных положительных чисел их среднее арифметическое строго больше среднего геометрического (см. теорему 1.3).

Для (8) база индукции $n = 3$. Индуктивный переход также не представляет особых трудностей. Имеем

$$(k+1)^{k+2} = k^{k+1}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1}(k+1) > (k+2)^{k+1},$$

если $k^{k+1} > (k+1)^k$, так как требуемое неравенство

$$\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1}(k+1)^{k+1} > (k+2)^{k+1}$$

равносильно простому неравенству

$$(k+1)^2 > k(k+2).$$

2 Классические неравенства

В этой главе мы приводим с доказательствами 10 теорем, составляющих фундамент теории неравенств. Главным образом речь идет об интегральных неравенствах, прошедших проверку временем и носящих имена выдающихся математиков.

2.1 Оценки Гаусса и Чебышева

Рассмотрим интегральные неравенства для монотонных функций, установленные в середине 19-го столетия.

Приведем сначала интегральное неравенство, принадлежащее Карлу Фридриху Гауссу.

Теорема 2.1 *Если $\lambda > 0$ и функция f является неотрицательной и невозрастающей при $x > 0$, то*

$$\lambda^2 \int_\lambda^{+\infty} f(x)\,dx \leq \frac{4}{9}\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx. \tag{9}$$

Если $f(x) \not\equiv 0$ и интеграл $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ сходится, то равенство в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда

$$f(x) = \begin{cases} const > 0 & , \quad 0 < x < a, \\ 0 & , \quad x > a, \end{cases}$$

где $a \in (\lambda, +\infty)$ – корень уравнения $27\lambda^2(a-\lambda) = 4a^3$.

Доказательство. Пусть

$$g(x) = \frac{4x^3}{27\lambda^2} + \lambda, \qquad \lambda > 0.$$

С привлечением определения числа a легко проверить, что $g(a) = a$ и $g(x) > x$ для всех $x > 0, \quad x \neq a$.

Но тогда простые преобразования с учетом невозрастания f и неравенства $g^{-1}(y) \leq y$ приводят к соотношениям

$$\frac{4}{9\lambda^2}\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x) g'(x)\,dx =$$

$$= \int_{g(0)}^{+\infty} f(g^{-1}(y))\,dy \geq \int_{g(0)}^{+\infty} f(y)\,dy.$$

Очевидно, полученное неравенство эквивалентно (9) в силу того, что $g(0) = \lambda$.

С другой стороны, поскольку $g^{-1}(y) < y$ для всех $y > \lambda$, $y \neq a$, то равенство является возможным тогда и только тогда, когда $f(x) \equiv C_1$ для $0 < x < a$ и $f(x) \equiv C_2$ для $x > a$, где C_1 и C_2 – некоторые постоянные, причем $C_1 \geq C_2$. Постоянная C_2 должна быть равна нулю, иначе рассматриваемые интегралы не будут сходящимися.

Этим и завершается доказательство теоремы 2.1.

Перейдем теперь к неравенству Пафнутия Львовича Чебышева.

Теорема 2.2 *Пусть f, g и m – функции, интегрируемые на отрезке $[a, b]$. Предположим, что $m(x) \geq 0$ на $[a, b]$ и*

$$0 < \int_a^b m(x)\, dx < +\infty.$$

(i) Если обе функции f и g являются либо невозрастающими, либо неубывающими, то

$$\frac{\int_a^b f(x)m(x)dx \int_a^b g(x)m(x)\, dx}{\int_a^b m(x)dx} \leq \int_a^b f(x)g(x)m(x)dx. \qquad (10)$$

(ii) Если функция f является невозрастающей, а функция g — неубывающей, то

$$\frac{\int_a^b f(x)m(x)dx \int_a^b g(x)m(x)dx}{\int_a^b m(x)dx} \geq \int_a^b f(x)g(x)m(x)dx. \qquad (11)$$

Доказательство. Самый простой путь основан на использовании следующего тождества К.А. Андреева:

$$A := \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))m(x)m(y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_a^b m(x)\, dx \int_a^b f(x)g(x)m(x)\, dx -$$

$$- \int_a^b f(x)m(x)\, dx \int_a^b g(x)m(x)\, dx.$$

Ясно, что в силу условий, наложенных на функции, подинтегральное выражение в двойном интеграле является неотрицательным в случае (i) и неположительным в случае (ii). Поэтому $A \geq 0$ в случае (i) и $A \leq 0$ в случае (ii). Таким образом, неравенства (10) и (11) являются простыми следствиями приведенного тождества.

Само тождество К. А. Андреева также получается просто: подинтегральную функцию в двойном интеграле записываем в виде алгебраической суммы

$$f(x)g(x)m(x)m(y) - f(x)g(y)m(x)m(y) -$$

$$-f(y)g(x)m(x)m(y)+f(y)g(y)m(x)m(y)$$

четырех слагаемых, затем переходим к повторным интегралам и пользуемся тривиальными равенствами вида

$$\int_a^b f(x)m(x)\,dx = \int_a^b f(y)m(y)\,dy\,.$$

Таким образом, мы убедились в справедливости теоремы П.Л. Чебышева.

Замечание. Взяв кусочно-постоянные функции в неравенствах (10) и (11) непосредственно получаем часто применяемые неравенства Чебышева для векторов:

Пусть $p>0$. *Предположим, что* $m_k \geq 0$, $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$ *для* $k=1,2,\ldots,n$. *Если*

$$(a_k-a_j)(b_k-b_j)\geq 0$$

для всех $k=1,2,\ldots,n$ *и* $j=1,2,\ldots,n$, *то*

$$\sum_{k=1}^n a_k^p m_k \sum_{k=1}^n b_k^p m_k \leq \sum_{k=1}^n m_k \sum_{k=1}^n a_k^p b_k^p.$$

Если же

$$(a_k-a_j)(b_k-b_j)\leq 0,$$

для всех $k=1,2,\ldots,n$ *и* $j=1,2,\ldots,n$, *то*

$$\sum_{k=1}^n a_k^p m_k \sum_{k=1}^n b_k^p m_k \geq \sum_{k=1}^n m_k \sum_{k=1}^n a_k^p b_k^p.$$

Равенства в обоих случаях имеют место тогда и только тогда, когда все a_k *или все* b_k *равны.*

2.2 Теорема Коши-Буняковского-Шварца

Теорема 2.3 *Пусть функции f и $g \in L^2[a,b]$. Тогда*

$$\left(\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx\right)^2 \le \int_a^b |f(x)|^2 dx \int_a^b |g(x)|^2 dx. \qquad (12)$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $|f|$ и $|g|$ являются линейно зависимыми как элементы $L^2[a,b]$, т. е. $|f(x)|$ и $|g(x)|$ являются линейно зависимыми на множестве $[a,b]\setminus E$ для некоторого множества E такого, что $\mu(E)=0$.

Доказательство. Пусть

$$A := \int_a^b |f(x)|^2 dx, \quad C := \int_a^b |g(x)|^2 dx$$

и

$$B := \int_a^b |f(x)g(x)|\,dx.$$

Если f (или g) является нуль-функцией на отрезке, т. е. равна нулю на $[a,b]\setminus E$ для некоторого множества E такого, что $\mu(E) = 0$, то $A = B = 0$ (или $C = B = 0$). Тогда $AC = 0 = B^2$, т. е. (12) верно тривиальным образом.

Предположим, что $AB > 0$. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}$ можем записать соотношения

$$AC - B^2 + (At - B)^2 = A^2t^2 - 2ABt + AC =$$

$$= A\int_a^b \left(t|f(x)| - |g(x)|\right)^2 dx \ge 0.$$

Взяв $t = t_0 = B/A$, получаем неравенство (12).

Кроме того, ясно, что равенство $AC = B^2$ имеет место тогда и только тогда, когда $t_0|f(x)| - |g(x)|$ является нуль-функцией.

Итак, неравенство Коши-Буняковского-Шварца сформулировано и доказано для простейшего случая, когда рассматриваются интегралы по конечному отрезку.

Замечание 1. Точно так же можно доказать неравенство Коши-Буняковского-Шварца в более общих случаях, предполагая существование рассматриваемых интегралов. В частности, *неравенство*

$$B^2 \le AC$$

будет справедливым в следующих случаях.

(i) Пусть f *и* $g \in L^2(\Omega, m)$, *и пусть*

$$A = \int_\Omega |f(x)|^2 m(x)\,dx, \quad B = \int_\Omega |f(x)g(x)| m(x)\,dx,$$

$$C = \int_\Omega |g(x)|^2 m(x)\,dx,$$

где Ω *– область в евклидовом пространстве* $\mathbb{R}^n$, $n \ge 1$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$, $dx = dx_1 \ldots dx_n$, $m(x) \ge 0$ *в* Ω.

Равенство $B^2 = AC$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $|f(x)|$ *и* $|g(x)|$ *являются линейно зависимыми на множестве* $\Omega \setminus E$, *где* E *– некоторое подмножество* Ω, *обладающее свойством*

$$\int_E m(x)\,dx = 0.$$

(ii) A, B *и* C *– следующие интегралы Римана-Стилтьеса*

$$A = \int_{x=a}^{x=b} |f(x)|^2 m(x)\,d\psi(x), \ B = \int_{x=a}^{x=b} |f(x)g(x)| m(x)\,d\psi(x),$$

$$C = \int_{x=a}^{x=b} |g(x)|^2 m(x)\,d\psi(x),$$

где ψ *– неубывающая функция на отрезке* $[a, b]$.

В условии для равенства подмножество E *должно быть таким, что*

$$\int_E m(x)\,d\psi(x) = 0.$$

Замечание 2. Выбирая в (12) $a = 0$, $b = 1$ и кусочно-постоянные функции, определенные равенствами $f(x) = a_k$ и $g(x) = b_k$ для $(k-1)/n \le x < k/n$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, легко получаем неравенство Коши для векторов

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \le \sqrt{\sum_{k=1}^n |a_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n |b_k|^2}.$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ являются линейно зависимыми.

2.3 Результаты Бесселя и Юнга

Пусть ψ – неубывающая функция на отрезке $[a, b]$. Пусть, далее, $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ – функции, для которых существуют интегралы Римана-Стилтьеса

$$\delta_{kj} := \int_a^b \varphi_k(x)\varphi_j(x)\, d\psi(x)$$

для всех $k \geq 0$, $j \geq 0$ и

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1 \quad , & k = j, \\ 0 \quad , & k \neq j. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию f с конечным интегралом $\int_a^b |f(x)|^2\, d\psi(x)$. Определим коэффициенты Фурье

$$a_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\, d\psi(x).$$

Теорема 2.4 *Имеет место следующее неравенство Бесселя*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2\, d\psi(x). \tag{13}$$

Доказательство. Для любого $n \geq 0$ имеем

$$0 \leq \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k\varphi_k(x) \right|^2 d\psi(x) =$$

$$= \int_a^b |f(x)|^2\, d\psi(x) - 2\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 + \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_k a_j \delta_{kj} =$$

$$= \int_a^b |f(x)|^2\, d\psi(x) - \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2,$$

что влечет (13).

Ясно, что равенство в (13) будет иметь место тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k\varphi_k(x) \right|^2 d\psi(x) = 0.$$

Получаемое в этом случае равенство называется равенством Парсеваля и имеет вид:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 \, d\psi(x).$$

В частности, мы получаем равенство Парсеваля для случая:

$$f \in L^2[0, 2\pi], \quad \psi(x) = x/\pi$$

и

$$\varphi_0(x) = 1/\sqrt{2}, \quad \varphi_{2k}(x) = \cos(2kx),$$
$$\varphi_{2k-1}(x) = \sin((2k-1)x), \; k \geq 1.$$

Замечание. Неравенство Бесселя является справедливым и для комплекснозначных функций f и φ_k при следующем условии: δ_{kj} и a_k определены соотношениями

$$\delta_{kj} = \int_a^b \varphi_k(x)\overline{\varphi_j(x)} \, d\psi(x), \quad a_k = \int_a^b f(x)\overline{\varphi_k(x)} \, d\psi(x),$$

где $\overline{w} = u - iv$ означает, как принято, комплексное сопряжение числа $w = u + iv$.

Рассмотрим теперь неравенство Юнга.

Теорема 2.5 *Пусть $y = f(x)$ – непрерывная, строго возрастающая функция на отрезке $[0, c]$, причем $f(0) = 0$. Если f^{-1} – функция, обратная к f, и*

$$0 \leq a \leq c, \quad 0 \leq b \leq f(c),$$

то справедливо неравенство

$$ab \leq \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(y)\,dy. \tag{14}$$

Равенство в этом неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда справедливо равенство $b = f(a)$.

Доказательство. Необходимо проанализировать три следующих случая:

$$b < f(a), \;\; b = f(a), \;\; b > f(a).$$

Поскольку соотношение (14) является симметричным относительно переменных x и y, то достаточно рассмотреть два случая, которые можно записать в виде одного условия $b \leq f(a)$.

Пусть $b \leq f(a)$. Тогда

$$\int_b^{f(a)} f^{-1}(y)\,dy = \int_0^{f(a)} f^{-1}(y)\,dy - \int_0^b f^{-1}(y)\,dy \geq 0.$$

Далее, график функции $y = f(x)$, $0 \leq x \leq a$, делит прямоугольник $\{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq f(a)\}$ на две части. Вычисляя площади этих частей с помощью интегралов и складывая, получаем

$$\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^{f(a)} f^{-1}(y)\,dy = af(a).$$

С учетом этих соотношений имеем

$$\Delta := \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(y)\,dy - ab =$$

$$= af(a) - \int_b^{f(a)} f^{-1}(y)\,dy - ab.$$

Очевидно, если $b = f(a)$, то $\Delta = 0$.

Если же $b < f(a)$, то простые преобразования приводят к искомому неравенству

$$\Delta = (a - c)(f(a) - b) > 0,$$

где

$$c = \frac{1}{f(a) - b} \int_b^{f(a)} f^{-1}(y)\, dy < a.$$

Утверждение $c < a$ следует из того, что $c \in (f^{-1}(b), a)$ по теореме о среднем для интегралов с учетом строгой монотонности подинтегральной функции.

Этим и завершается доказательство.

Приведем два простых применения неравенства Юнга для обоснования числовых неравенств.

Пример 1. Выбираем $y = x^{p-1}$ с некоторой постоянной $p > 1$. Взяв $q = p/(p-1)$ в (14) получаем неравенство

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Пример 2. Для $y = \ln(1 + x)$ неравенство Юнга влечет

$$1 + a + b + ab \le (1 + a)\ln(1 + a) + e^b.$$

2.4 Неравенство Гельдера

Неравенство Гельдера является обобщением неравенства Коши-Буняковского-Шварца.

Теорема 2.6 *Пусть*

$$p > 1, \quad q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

и пусть $f \in L^p[a,b]$, $g \in L^q[a,b]$. *Тогда произведение* fg *интегрируемо и имеет место неравенство*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq$$

$$\leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{1/q}. \tag{15}$$

Равенство в (15) имеет место тогда и только тогда, когда $|f(x)|^p$ *и* $|g(x)|^q$ *являются линейно зависимыми на множестве* $[a,b] \setminus E$, $\mu(E) = 0$.

Доказательство. Если f (или g) – нуль-функция, то доказывать нечего.

Предположим, что

$$\lambda := \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} > 0, \quad \mu := \left(\int_a^b |g(x)|^q \, dx\right)^{1/q} > 0,$$

и докажем простое, базовое неравенство Гельдера (сравните с примером 1 из предыдущего пункта)

$$u(x)v(x) \leq \frac{u^p(x)}{p} + \frac{v^q(x)}{q}, \tag{16}$$

где x – фиксированная точка отрезка $[a,b]$, и

$$u(x) = \frac{1}{\lambda}|f(x)|, \quad v(x) = \frac{1}{\mu}|g(x)|.$$

Если $u(x) = v(x) = 0$, то (16) является тривиальным. Если же $u(x)+v(x) > 0$, то, очевидно, $u(x) > 0$ или $v(x) > 0$, и неравенство (16) эквивалентно неравенству

$$y := t^\alpha - \alpha t + \alpha - 1 \leq 0$$

где
$$t=\frac{v^q}{u^p},\quad \alpha=\frac{1}{q},\quad \text{или}\quad t=\frac{u^p}{v^q},\quad \alpha=\frac{1}{p},$$
соответственно.

Поскольку $y(t)<0=y(1)$ для всех $t>0$, $t\neq 1$, получаем, что (16) справедливо и равенство в (16) имеет место тогда и только тогда, когда $u^p(x)=v^q(x)$.

Интегрируя (16) по отрезку $[a,b]$, немедленно получаем все утверждения теоремы 2.2 в случае $\lambda\mu>0$.

Замечание 1. Точно так же получаем обобщения неравенства (15) на более общие интегралы. В частности, *справедливы следующие неравенства Гельдера: во-первых,*
$$\int_\Omega |f(x)g(x)|m(x)\,dx \le$$
$$\le \left(\int_\Omega |f(x)|^p m(x)dx\right)^{1/p}\left(\int_\Omega |g(x)|^q m(x)dx\right)^{1/q}, \tag{17}$$
где Ω – область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $m(x)\ge 0$ в Ω, $dx=dx_1\dots dx_n$,

и, во-вторых,
$$\int_a^b |f(x)g(x)|m(x)\,d\psi(x) \le$$
$$\le \left(\int_a^b |f(x)|^p m(x)d\psi(x)\right)^{1/p}\left(\int_a^b |g(x)|^q m(x)d\psi(x)\right)^{1/q},$$
где ψ – неубывающая функция на отрезке $[a,b]$.

В обоих случаях условия достижения равенства одни и те же с формальной точки зрения. А именно, функции $|f(x)|^p$ и $|g(x)|^q$ являются линейно-зависимыми на некотором множестве $\Omega\setminus E$ или $[a,b]\setminus E$. Здесь подмножество E должно удовлетворять условию
$$\int_E m(x)\,dx=0\quad \text{или}\quad \int_E m(x)\,d\psi(x)=0,$$
соответственно.

Замечание 2. Методом математической индукции легко получаются обобщения (15) и (17) на произведение k функций $f_1, f_2, \ldots, f_k$. Например, если $p_j > 0$, $f_j \in L^{p_j}[a,b]$ и $1/p_1 + 1/p_2 + \ldots + 1/p_k = 1$, то

$$\int_a^b |\prod_{j=1}^k f_j(x)|\, dx \leq \prod_{j=1}^k \left(\int_a^b |f_j(x)|^{p_j}\, dx \right)^{1/p_j}.$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда одна из функций f_j является нуль-функцией, или же, существуют функция $f \in L^1[a,b]$ и подмножество $E \subset [a,b]$ такие, что $\mu(E) = 0$ и

$$f(x) = |f_j(x)|^p / \int_a^b |f_j(y)|^{p_j}\, dy, \quad x \in [a,b] \setminus E,$$

для всех $j = 1, 2, \ldots, n$.

Замечание 3. Взяв кусочно-постоянные функции в (15), легко получаем неравенство Гельдера для векторов

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q}.$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы $(|a_1|, \ldots, |a_n|)$ и $(|b_1|, \ldots, |b_n|)$ являются линейно-зависимыми.

2.5 Неравенство Минковского

Теорема 2.7 *Пусть* $p \in [1, \infty)$. *Если* f *и* $g \in L^p[a,b]$, *то* $f + g \in L^p[a,b]$ *и имеет место неравенство*

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le$$

$$\le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}. \qquad (18)$$

Равенство в случае $p > 1$ *имеет место тогда и только тогда, когда* f *и* g *являются пропорциональными с неотрицательными коэффициентами (т. е.* $c_1 f(x) = c_2 g(x)$ *для неотрицательных постоянных* c_1 *и* c_2, *причем* $c_1 + c_2 > 0$*) на некотором множестве вида* $[a,b] \setminus E$, $\mu(E) = 0$.

Доказательство. При $p = 1$ утверждение является тривиальным. Пусть $p > 1$. Обозначим

$$M = \int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^p dx.$$

Согласно неравенству Гельдера с показателями $p > 1$ и $q = p/(p-1) > 1$, примененному к двум функциям $|f(x)|$ и $(|f(x)| + |g(x)|)^{p-1}$, имеем

$$\int_a^b |f(x)|(|f(x)| + |g(x)|)^{p-1}\,dx \le M^{1/q} \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p},$$

$$\int_a^b |g(x)|(|f(x)| + |g(x)|)^{p-1}\,dx \le M^{1/q} \left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Суммируя эти два неравенства, получаем

$$M^{1-1/q} \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{1/p}, \qquad (19)$$

что немедленно влечет (18).

Если f и g пропорциональны с неотрицательными коэффициентами на $[a,b] \setminus E$, $\mu(E) = 0$, то в (18) будем иметь знак равенства. В частности, знак равенства имеет место, если хотя бы одна из функций f и g является нуль-функцией, этот случай описывается равенством $c_1 f(x) = c_2 g(x)$ на множестве $[a,b] \setminus E$, $\mu(E) = 0$, когда одна из постоянных c_1 и c_2 равна нулю.

Предположим теперь, что ни f, ни g не являются нуль-функциями, но мы имеем знак равенства в (18). Тогда равенства будут и в (19), и в тех двух неравенствах, полученных применением неравенства Гельдера и использованных при выводе (19). Согласно теореме 2.6, равенства в этих вспомогательных утверждениях возможны лишь в том случае, когда $|f(x)|^p$ и $(|f(x)|+|g(x)|)^p$, также $(|f(x)|+|g(x)|)^p$ и $|g(x)|^p$ пропорциональны почти всюду на $[a,b]$. А это влечет условие $c_1|f(x)| = c_2|g(x)|$ на множестве $[a,b] \setminus E$, $\mu(E) = 0$ с некоторыми положительными коэффициентами c_1, c_2. Тогда должно быть $c_1 f(x) = c_2 g(x)$ на множестве $[a,b] \setminus E_1$ для некоторого множества $E_1 \subset [a,b]$, $\mu(E_1) = 0$, так как мы должны иметь равенство $|f(x)+g(x)| = |f(x)|+|g(x)|$ почти всюду на $S := \{x \in [a,b] : |f(x)|+|g(x)| > 0\}$ для получения равенства в (18) при наличии равенства в (19).

Замечание 1. Аналогично доказываются обобщения. В частности, справедливы следующее неравенств Минковского:

$$\left(\int_a^b \sum_{j=1}^k |f_j(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \le \sum_{j=1}^k \left(\int_a^b |f_j(x)|^p \, dx \right)^{1/p},$$

где $p > 1$, $f_j \in L^p[a,b]$. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда существуют некоторая функция $f \in L^p[a,b]$ и постоянные $c_j \ge 0$ такие, что

$$f_j(x) = c_j f(x), \quad x \in [a,b] \setminus E, \quad \mu(E) = 0,$$

для всех $j = 1, 2, \ldots, k$.

Замечание 2. Пользуясь неравенствами Гельдера, приведенными в замечаниях предыдущего раздела, легко получаем и новые версии неравенства Минковского в форме:

$$\left(\int_\Omega |\sum_{j=1}^k f_j(x)|^p m(x) \, dx \right)^{1/p} \le \sum_{j=1}^k \left(\int_\Omega |f_j(x)|^p m(x) \, dx \right)^{1/p},$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $m(x) \geq 0$ в Ω, $p > 1$, и

$$\left(\int_a^b | \sum_{j=1}^k f_j(x)|^p m(x)\, d\psi(x) \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^k \left(\int_a^b |f_j(x)|^p m(x)\, d\psi(x) \right)^{1/p},$$

где $\psi(x)$ − неубывающая функция и $m(x) \geq 0$ на $[a, b]$, $p \geq 1$.

Замечание 3. Последние неравенства можно обобщить, заменяя суммы интегралами. Например, если $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, $m_1(x) \geq 0$, $m_2(y) \geq 0$, то

$$\left(\int_Y \left| \int_X (f(x,y) m_1(x)\, dx \right|^p m_2(y)\, dy \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \int_X \left(\int_Y |(f(x,y)|^p m_2(y)\, dy \right)^{1/p} m_1(x)\, dx$$

в предположении существования интеграла, стоящего в правой части неравенства.

2.6 Выпуклые функции и теорема Йенсена

Пусть $-\infty \le \alpha < \beta \le +\infty$, и пусть I – интервал с крайними точками α и β. Функция φ: $I \to \mathbb{R}$ называется выпуклой, если

$$\varphi(\lambda t + (1-\lambda)\tau) \le \lambda\varphi(t) + (1-\lambda)\varphi(\tau) \tag{20}$$

для всех $\lambda \in [0,1]$ и всех t, $\tau \in I$.

Из (20) следует

(i) φ является непрерывной в интервале (α, β), и существует интегрируемая в смысле Лебега функция $h : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ такая, что

$$\varphi(t) - \varphi(\tau) = \int_\tau^t h(x)\,dx$$

для всех t и $\tau \in (\alpha, \beta)$, в частности, для почти всех $t \in I$ функция φ дифференцируема и имеет место равенство $\varphi'(t) = h(t)$;

(ii) для любого $t \in (\alpha, \beta)$ существуют односторонние производные $\varphi'(t+0)$ и $\varphi'(t-0)$ такие, что $\varphi'(t+0) = \varphi'(t-0)$ за исключением разве лишь некоторого счетного множества точек. Кроме того, $\varphi'(t+0)$ является неубывающей и непрерывной справа, а $\varphi'(t-0)$ не убывает и непрерывна слева;

(iii) в любой точке $t \in (\alpha, \beta)$

$$\varphi'(t-0) \le \varphi'(t+0)$$

и

$$\varphi(\tau) \ge \varphi(t) + \lambda(t)(\tau - t) \tag{21}$$

для любого $\tau \in (\alpha, \beta)$ и любого $\lambda(t) \in [\varphi'(t-0), \varphi'(t+0)]$.

С другой стороны, имеются простые критерии выпуклости гладких функций:

(iv) пусть $\varphi \in C^1(\alpha, \beta)$. Функция φ выпукла тогда и только тогда, когда φ' – неубывающая функция;

(v) пусть $\varphi \in C^2(\alpha, \beta)$. Функция φ выпукла тогда и только тогда, когда $\varphi''(t) \ge 0$.

Доказательства свойств (i), (ii), (iii) и (iv), (v) можно найти в книгах [1], [5], [7].

Функцию φ называют вогнутой, если функция $(-\varphi)$ является выпуклой. Понятно, что для вогнутых функций имеют место соотношения типа (20) и (21) с противоположными знаками неравенства.

Неравенство Йенсена для выпуклых функций представлено в следующем утверждении.

Теорема 2.8 *Предположим, что* $f : [a,b] \to (\alpha, \beta)$ *— непрерывная функция, и* ψ *— неубывающая функция на отрезке* $[a,b]$*, обладающая свойством* $0 < \int_a^b d\psi(x) < +\infty$*. Если* φ *— некоторая выпуклая функция в интервале* (α,β)*, существует и конечен интеграл Римана-Стилтьеса* $\int_a^b \varphi(f(x))\, d\psi(x)$*, то*

$$\varphi\left(\frac{\int_a^b f(x)\, d\psi(x)}{\int_a^b d\psi(x)}\right) \le \frac{\int_a^b \varphi(f(x))\, d\psi(x)}{\int_a^b d\psi(x)}. \tag{22}$$

Доказательство. Пусть

$$\tau_0 := \int_a^b f(x)\, d\psi(x) / \int_a^b d\psi(x).$$

Очевидно, $\tau_0 \in (\alpha, \beta)$. В силу (21) можно записать

$$\varphi(\tau_0) + \varphi'(\tau_0 + 0)(f(x) - \tau_0) \le \varphi(f(x)).$$

Следовательно,

$$\int_a^b [\varphi(\tau_0) + \varphi'(\tau_0 + 0)(f(x) - \tau_0)] d\psi(x) \le \int_a^b \varphi(f(x)) d\psi(x).$$

Отсюда и получаем доказываемое неравенство (22) с учетом определения $\tau_0 \in (\alpha, \beta)$ и легко проверяемого равенства

$$\int_a^b (f(x) - \tau_0)\, d\psi(x) = 0.$$

Замечание 1. По той же схеме легко получаем обобщения (22) на другие типы интегралов.

Замечание 2. Рассмотрим некоторые частные случаи неравенства (22), которые являются весьма употребительными на практике.

Случай 1. Выбираем $\varphi(t) = t^{s/r}$, $0 \le t < \infty$, $0 < r < s < \infty$, $f(x) = |F(x)|^r$, тогда получаем следующее неравенство, играющее фундаментальную роль при сравнении интегральных средних.

$$\left(\frac{\int_a^b |F(x)|^r \, d\psi(x)}{\int_a^b d\psi(x)} \right)^{1/r} \le \left(\frac{\int_a^b |F(x)|^s \, d\psi(x)}{\int_a^b d\psi(x)} \right)^{1/s}. \tag{23}$$

Отметим, что неравенство (23) можно получить также как следствие неравенства Гельдера (покажите!).

Случай 2. Если $\varphi(t) = e^t$, $-\infty < t < \infty$, то (22) превращается в следующее утверждение:

$$\frac{\int_a^b f(x) \, d\psi(x)}{\int_a^b d\psi(x)} \le \ln \frac{\int_a^b \exp(f(x)) \, d\psi(x)}{\int_a^b d\psi(x)}.$$

2.7 Теоремы Гильберта-Шура и Харди

Приведем сначала теорему, принадлежащую Гильберту и Шуру, о точной оценке двойного интеграла специального вида.

Теорема 2.9 *Если f и $g \in L^2(0,\infty)$, то справедливо следующее точное неравенство*

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{|f(x)g(y)|}{x+y}\,dx\,dy \le$$
$$\le \pi\sqrt{\int_0^{+\infty}|f(x)|^2\,dx}\ \sqrt{\int_0^{+\infty}|g(y)|^2\,dy}. \tag{24}$$

Доказательство. Имеем

$$\Delta := \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{|f(x)g(y)|}{x+y}\,dx\,dy =$$
$$= \int_0^{+\infty}|f(x)|\,dx\int_0^{+\infty}\frac{|g(y)|}{x+y}\,dy =$$
$$= \int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t}\int_0^{+\infty}|f(x)g(xt)|\,dx.$$

Применяя к внутреннему интегралу неравенство Коши-Буняковского-Шварца, получаем

$$\Delta \le \int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t}\sqrt{\int_0^{+\infty}|f(x)|^2\,dx}\sqrt{\int_0^{+\infty}|g(xt)|^2\,dx} =$$
$$= \int_0^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)}\sqrt{\int_0^{+\infty}|f(x)|^2\,dx}\sqrt{\int_0^{+\infty}|g(x)|^2\,dx},$$

что эквивалентно искомому неравенству (24).

Покажем теперь, что постоянная π в неравенстве (24) является наилучшей, т. е. не может быть уменьшена. Для этого применим неравенство (24) к функциям

$$f_n(x) = g_n(x) = \begin{cases} 0 & , \qquad 0 \le x < 1/n, \\ x^{-(1/2+1/n)} & , \qquad 1/n \le x < +\infty. \end{cases}$$

Интегралы от этих функций вычисляются в явном виде. Имеем

$$\Delta_n := \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\, dx \int_0^{+\infty} \frac{|g_n(y)|}{x+y}\, dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t} \int_0^{+\infty} f_n(x) f_n(xt)\, dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{t^{-1/2-1/n}}{1+t} dt \int_{1/(tn)}^{\infty} x^{-1-2/n} dx +$$

$$+ \int_1^{\infty} \frac{t^{-1/2-1/n}}{1+t} dt \int_{1/n}^{\infty} x^{-1-2/n} dx =$$

$$= \frac{n^{1+2/n}}{2} \left(\int_0^1 \frac{t^{-1/2+1/n}}{1+t} dt + \int_1^{\infty} \frac{t^{-1/2-1/n}}{1+t} dt \right).$$

Кроме того,

$$\delta_n := \sqrt{\int_0^{+\infty} |f_n(x)|^2\, dx} \sqrt{\int_0^{+\infty} |g_n(y)|^2\, dy} =$$

$$= \int_{1/n}^{\infty} x^{-1-2/n} = \frac{n^{1+2/n}}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta_n}{\delta_n} = \int_0^1 \frac{t^{-1/2+1/n}}{1+t} dt + \int_1^{\infty} \frac{t^{-1/2-1/n}}{1+t} dt,$$

и при $n \to \infty$ получаем

$$\frac{\Delta_n}{\delta_n} \to \int_0^{\infty} \frac{t^{-1/2}}{1+t} dt = 2 \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{1+\tau^2} = \pi.$$

Теорема доказана.

Приведем теперь теорему Харди.

Теорема 2.10 *Пусть* $f(x) \geq 0$, $f \in L^2(0,\infty)$ *и*

$$F(x) := \int_0^x f(t)dt.$$

Тогда

$$\int_0^{+\infty} \frac{F^2(x)}{x^2}\,dx < 4\int_0^{+\infty} f^2(x)\,dx, \tag{25}$$

кроме того случая, когда $f \equiv 0$. *Константа* 4 *является наилучшей.*

Доказательство. Применяя неравенство Коши-Буняковского-Шварца к интегралу $\int_0^x f(t)dt$ для двух функций $f(t)$ и $g(t) \equiv 1$, получаем

$$0 \leq F^2(x) \leq x\int_0^x f^2(t)dt = o(x) \text{ при } x \to 0.$$

Интегрированием по частям, для любого $X \in (0,\infty)$ будем иметь

$$\int_0^X \frac{F^2(x)}{x^2}\,dx = -\int_0^X F^2(x)\,d(1/x) =$$

$$= \lim_{\xi\to 0^+} \frac{F^2(\xi)}{\xi} - \frac{F^2(X)}{X} + 2\int_0^X \frac{F(x)}{x}f(x)\,dx \leq$$

$$\leq 2\int_0^X \frac{F(x)}{x}f(x)\,dx,$$

так как $F^2(\xi) = o(\xi)$, поэтому предел при $\xi \to 0^+$ равен нулю, а слагаемое $[-F^2(X)/X] \leq 0$.

Переходя к пределу при $X \to +\infty$ и применяя снова неравенство Коши-Буняковского-Шварца для двух функций $f(x)$ и $g(x) = F(x)/x$, получаем для рассматриваемых несобственных интегралов

$$\int_0^{+\infty} \frac{F^2(x)}{x^2}\,dx \leq 2\int_0^{+\infty} \frac{F(x)}{x}f(x)\,dx <$$

$$< 2\sqrt{\int_0^{+\infty} \frac{F^2(x)}{x^2}\,dx}\ \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(x)\,dx}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{\int_0^{+\infty} \frac{F^2(x)}{x^2}\,dx} < 2\ \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(x)\,dx},$$

что равносильно неравенству (25). Появление строгого неравенства обусловлено тем, что равенство в неравенстве Коши-Буняковского-Шварца возможно лишь для пропорциональных функций $f(x)$ и $g(x) = F(x)/x$. Но это означало бы, что f является степенью x. И тогда интеграл $\int_0^{+\infty} f^2(x)\,dx$ был бы расходящимся, так как интеграл вида $\int_0^{+\infty} x^p\,dx$ расходится при любом значении параметра p.

Для доказательства точности постоянной рассматриваем следующий пример: $f(x) = 0$ для $0 \le x < 1$, $f(x) = x^{-1/2-\varepsilon}$ для $x \ge 1$, с параметром $\varepsilon \in (0, 1/2)$, $\varepsilon \to 0$.

3 Заключение

В списке литературы для дальнейшего изучения указаны лишь восемь книг, расположенных в хронологическом порядке по годам издания. Студентам 2-го и 3-го курсов я рекомендую начать углубленное изучение темы по монографии Митриновича [5], лишь после этого обратиться к книгам Харди, Литтлвуда и Пойа [1] и Беккенбаха и Белмана [3] (вместо Литтлвуд и Пойа ранее использовались иные транскрипции этих фамилий: Литтльвуд и Полиа). Все эти книги содержат богатый материал, фактически являются справочниками по неравенствам теории функций и методам их доказательства.

Монография Маршалла и Олкина [7] вполне доступна студентам-математикам 3-го курса. Для чтения монографий Хадвигера [4], Бураго и Залгаллера [6] требуется солидный уровень знаний по дифференциальной геометрии и теории меры. Первые главы ставшей уже классической монографии Пойа и Сегё [2] просты для изучения. Но для понимания основного содержания нужны знания из университетского курса УЧП, точнее, из теории краевых задач для дифференциальных уравнений эллиптического типа. К этому направлению относится и книга автора [8].

Список литературы

[1] *Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г.* Неравенства. – М.: ИЛ, 1948.

[2] *Полиа Г., Сегё Г.* Изопериметрические неравенства математической физики. – М.: Физматгиз, 1962.

[3] *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. – М.: Мир, 1965.

[4] *Хадвигер Г.* Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. – М.: Наука, 1966.

[5] *Mitrinovic D.S.* Analytic Inequalities. – Springer-Verlag, Berlin, Hedelberg, New York, 1970.

[6] *Бураго Ю.Д., Залгаллер В.А.* Геометрические неравенства. – Ленинград: Наука, 1980.

[7] *Маршалл А., Олкин И.* Неравенства: теория мажорации и ее приложения. – М.: Мир, 1983.

[8] *Авхадиев Ф.Г.* Неравенства для интегральных характеристик областей. – Учебное пособие. Казань: Казанский государственный университет, 2006.

.