Известия вузов. Математика
2017, №1, с. 12–16

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Б.А. КАЦ, С.Р. МИРОНОВА, А.Ю. ПОГОДИНА

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА О СКАЧКЕ НА КОНТУРЕ С ПРОТЯЖЕННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

Аннотация. Пусть Γ — образ интервала $(0,1)$ при его взаимнооднозначном непрерывном отображении $\phi : (0,1) \to \mathbb{C}$. Если разность замыкания Γ и самого множества Γ состоит более, чем из одной точки, то будем называть Γ контуром с протяженными особенностями.

Исследуются краевые задачи о скачке для аналитических функций на контурах такого типа. Получены новые условия разрешимости этих задач.

Ключевые слова: задача о скачке, контур с особенностями.

УДК: 517.544

Краевая задача о скачке — одна из широко известных и используемых краевых задач для аналитических функций (например, [1], [2]). Это задача о восстановлении аналитической функции по ее скачку на заданном контуре. Контур при этом может быть замкнутой кривой, дугой или объединением конечного или даже счетного множества кривых или дуг. Однако эта задача имеет смысл и в случае, когда контур имеет более сложное устройство.

Пусть Γ — образ открытого интервала $(0,1)$ при его взаимнооднозначном непрерывном отображении $\phi : (0,1) \to \mathbb{C}$. Обозначим $\Gamma_0^\varepsilon := \phi((0,\varepsilon))$, $\Gamma_1^\varepsilon := \phi((1-\varepsilon,1))$, $\Gamma^\varepsilon := \phi([\varepsilon, 1-\varepsilon])$, где $0 < \varepsilon < 1$. Если множества $\Delta_0 := \bigcap\limits_{\varepsilon>0} \overline{\Gamma_0^\varepsilon}$ и $\Delta_1 := \bigcap\limits_{\varepsilon>0} \overline{\Gamma_1^\varepsilon}$ состоят из одной точки, причем эти точки не совпадают и не лежат на Γ, то $\overline{\Gamma}$ — простая жорданова дуга. Если же в этих множествах более одной точки, то будем называть Γ контуром с протяженными особенностями. Примером может служить контур $\Gamma = \{x + i\sin(x^{-1}(1-x)^{-1}) : 0 < x < 1\}$. Здесь $\Delta_j = \{j + iy : -1 \le y \le 1\}$, $j = 0, 1$.

Всюду ниже считаем, что множество $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup \Delta_0 \cup \Delta_1$ не содержит бесконечно удаленной точки.

Необходимость решать задачу о скачке на контурах такого рода возникает при решении краевых задач со сдвигом методом конформного склеивания. Так, в работе [3] показано, как при наличии у сдвига степенных особенностей конформное склеивание превращает гладкую кривую в контур, для которого предельные множества Δ_0 и Δ_1 являются окружностями.

Данная работа продолжает исследования, начатые авторами в статье [4], где множество Δ предполагалось прямолинейным отрезком, а кривая Γ сгущалась к ней зигзагообразно. Здесь рассматриваем более общую ситуацию и ряд конкретных случаев.

1. Начнем со случая, когда множества Γ, Δ_0 и Δ_1 попарно не пересекаются. Будем считать, что контур Γ направлен от Δ_0 к Δ_1.

Поступила 07.05.2015

Пусть на Γ задана комплекснозначная функция $g(t)$, удовлетворяющая условию Гёльдера с показателем ν

$$\sup\left\{\frac{|g(t')-g(t'')|}{|t'-t''|^{\nu}} : t',\ t''\in\Gamma,\ t'\neq t''\right\} := h_{\nu}(g,\Gamma)<\infty.$$

Множество всех таких функций обозначим через $H_{\nu}(\Gamma)$. Легко видеть, что любая функция этого класса продолжима по непрерывности до определенной на $\overline{\Gamma}$ функции класса $H_{\nu}(\overline{\Gamma})$. Ниже за продолженной таким образом функцией сохраняем ее обозначение.

Будем искать голоморфную в $\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{\Gamma}$ функцию $\Phi(z)$, имеющую в точках $t\in\Gamma$ предельные значения с обеих сторон, связанные соотношением

$$\Phi^{+}(t)-\Phi^{-}(t)=g(t),\quad t\in\Gamma. \tag{1}$$

Адаптируем для решения этой задачи прием, предложенный первым из авторов данной статьи для решения краевой задачи Римана на неспрямляемых кривых (например, [5]–[7]). Зафиксируем точки $z_j\in\Delta_j$, $j=0,1$, и рассмотрим однозначную ветвь логарифмической функции

$$k(z):=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{z-z_1}{z-z_0}, \tag{2}$$

выделенную в $\mathbb{C}\setminus\overline{\Gamma}$ условием $k(\infty)=0$. При наших предположениях $z_1\neq z_0$. Функция (2) имеет единичный скачок на контуре Γ. Ее граничные значения удовлетворяют условию Гёльдера с показателем единица вне любых окрестностей $\Delta_{0,1}$.

Пусть на компакте A задана функция $f\in H_{\nu}(A)$. Обозначим через $f^{w}(z)$ ее продолжение Уитни (например, [8]) на всю комплексную плоскость. Функция $f^{w}(z)$ совпадает с $f(t)$ на A, непрерывна на всей комплексной плоскости и удовлетворяет там условию Гёльдера с тем же показателем ν. Кроме того, в $\mathbb{C}\setminus\overline{\Gamma}$ она имеет частные производные всех порядков, причем

$$|\nabla f^{w}(z)|\leq C\,\mathrm{dist}^{\nu-1}(z,A), \tag{3}$$

где $C>0$ не зависит от z. Без ограничения общности можно считать, что $f^{w}(z)$ имеет компактный носитель, содержащий A внутри себя.

Продолжим по Уитни g с $\overline{\Gamma}$ в $\mathbb{C}$ и рассмотрим произведение $\varphi(z)=g^{w}(z)k(z)$. Оно имеет на Γ скачок $g(t)$, но не является голоморфным. В работах [6], [7] такие функции называются квази-решениями задачи о скачке. Применим преобразование[1]

$$\varphi\mapsto\Phi:=\varphi-T\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}},\quad Tf:=\frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}}\frac{f(\zeta)d\zeta d\overline{\zeta}}{\zeta-z}.$$

В силу известных (например, [9]) свойств интегрального оператора T отсюда заключаем, что при

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}\in L^{p},\quad p>2, \tag{4}$$

получим решение задачи. Чтобы проверить последнее условие, зафиксируем некоторое $\varepsilon>0$ и введем три гладкие функции с компактными носителями $\psi_j(z)$, $j=0,1,2$, обладающие следующими свойствами:

— сумма $\psi_1+\psi_2+\psi_3$ равна единице на $\overline{\Gamma}$;

— при $j=0,1$ носитель ψ_j содержит Δ_j и содержится в ε-окрестности этого множества;

— носитель ψ_3 содержит Γ^{ε} и не пересекается с $\Delta_{0,1}$.

Положим $g_j:=g\psi_j$, $\varphi(z)=g_j^{w}(z)k(z)$, $\Phi_j=\varphi_j-T\frac{\partial\varphi_j}{\partial\overline{z}}$. Здесь g_j^{w} понимается как продолжение Уитни с множества $S_j:=\overline{\Gamma}\cap\operatorname{supp}\varphi_j$. Очевидно, сумма $\Phi_0+\Phi_1+\Phi_2$ есть решение

[1]В [6], [7] это преобразование называется регуляризацией квазирешения.

задачи, если все интегралы определены и $\frac{\partial\varphi_2}{\partial\bar{z}} \in L^p$, $p > 2$. Поскольку множество S_2 не содержит точек $z_{0,1}$, то последнее условие выполнено при $\nu > \frac{1}{2}\overline{\mathrm{dm}}S_2$ (см. [5], [6]). Здесь $\overline{\mathrm{dm}}A$ означает верхнюю размерность Минковского компакта A; эта величина известна также как верхняя метрическая размерность, размерность Колмогорова и box-counting dimension (см. [10], [11]. Обозначим $\overline{\mathrm{dm}}'\Gamma := \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\overline{\mathrm{dm}}\Gamma^\varepsilon$. В силу неравенства (3) справедлива

Теорема 1. *Пусть Γ, Δ_0 и Δ_1 попарно не пересекаются, $g \in H_\nu(\Gamma)$,*

$$\nu > \frac{1}{2}\overline{\mathrm{dm}}'\Gamma, \tag{5}$$

а функции $K^j_\nu(z) := k(z)\,\mathrm{dist}^{\nu-1}(z, \Gamma^\varepsilon_j)$ интегрируемы вблизи Δ_j, $j = 0, 1$, при некотором положительном ε, тогда задача (1) разрешима.

Будем называть контур Γ локально спрямляемым, если при любом $\varepsilon \in (0, 1)$ спрямляма дуга Γ^ε. Размерность Минковского спрямляемой дуги равна единице, в этом случае $\overline{\mathrm{dm}}'\Gamma = 1$. Как известно ([12], теорема Пенлеве), спрямляемая дуга устранима в классе аналитических в ее окрестности и непрерывных на ней функций. Поэтому для локально спрямляемого контура разность любых двух решений задачи о скачке голоморфна в $\overline{\mathbb{C}} \setminus (\Delta_0 \cup \Delta_1)$.

Следствие. Пусть контур Γ локально спрямляемый, множества Γ, Δ_0 и Δ_1 попарно не пересекаются, $g \in H_\nu(\Gamma)$, $\nu > \frac{1}{2}$, а функции $K^j_\nu(z)$ интегрируемы вблизи Δ_j, $j = 0, 1$, при некотором $\varepsilon > 0$. Тогда (1) разрешима и ее общее решение есть $\Phi(z) + F(z)$, где Φ — любое ее частное решение (например, построенное при доказательстве теоремы 1), а F — произвольная голоморфная в $\overline{\mathbb{C}} \setminus (\Delta_0 \cup \Delta_1)$ функция.

Для локально спрямляемого контура Φ_2 можно выразить через интеграл типа Коши. Если при любом $\varepsilon \in (0, 1)$ дуга Γ^ε не только спрямлямая, но и кусочно-гладкая (в этом случае контур можно назвать локально гладким), то этот интеграл имеет на этих дугах непрерывные предельные значения при любом $\nu > 0$, и условие $\nu > \frac{1}{2}$ в этом случае можно снять.

Отметим еще, что $K^j_1(z) = k(z)$ при $\nu = 1$, т. е. в этом случае условия теоремы и следствия упрощаются.

2. Обсудим теперь возможность постановки задачи о скачке на контурах с протяженными особенностями, при которой эта задача имеет единственное решение. Здесь наложим на Γ и g дополнительные ограничения. Потребуем, чтобы предельное множество $\Delta := \Delta_0 \cup \Delta_1$ состояло из конечного числа спрямляемых дуг и удовлетворяло условию

$$\Delta \subset \{z : v(z) = 0\},$$

где $v(z)$ — заданная на всей комплексной плоскости функция с непрерывными частными производными первого порядка, причем произведение $v(z)k(z)$ было непрерывно на $\Delta_{0,1}$. Такой контур будем называть v-допустимым. Далее, пусть скачок g представим в виде $g = vg_0$, $g_0 \in H_\nu(\Gamma)$. Тогда произведение $\varphi = vg^w_0 k$ является квазирешением задачи (1), и при условии (4) его регуляризация $\varphi - T\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}$ является решением задачи о скачке, непрерывным на Δ и исчезающим в бесконечно удаленной точке. В силу той же теоремы Пенлеве такое решение единственно.

Теорема 2. *Пусть Γ — локально спрямляемый v-допустимый контур, множества Γ, Δ_0 и Δ_1 попарно не пересекаются, $g = vg_0$, $g_0 \in H_\nu(\Gamma)$ и $\nu > \frac{1}{2}$. Если функции $v(z)K^j_\nu(z)$ и $k(z)$ интегрируемы вблизи Δ_j, $j = 0, 1$, в степени $p > 2$ при некотором $\varepsilon > 0$, то задача*

(1) *разрешима в классе функций, непрерывных на* Δ *и исчезающих в бесконечно удаленной точке, причем ее решение в этом классе единственно.*

3. Приведем простой пример. Пусть $Y(x)$ — заданная на интервале $(0,1)$ вещественная непрерывно-дифференцируемая функция, $\lim\limits_{x\to 0} Y(x) = \lim\limits_{x\to 1} Y(x) = +\infty$. Рассмотрим контур $\Gamma := \{x + i\sin Y(x) : 0 < x < 1\}$. Это локально гладкий контур с протяженными особенностями $\Delta_j = \{j + iy : -1 \le y \le 1\}$, $j = 0, 1$. Положим $z_j = j$, $j = 0, 1$. Функция $k(z)$ имеет в этих точках логарифмические особенности.

Рассмотрим сначала случай $\nu = 1$. Очевидно, функция $k(z)$ интегрируема вблизи отрезков Δ_j, $j = 0, 1$, так что все условия следствия выполнены, т.е. задача (1) со скачком $g \in H_1(\Gamma)$ разрешима, и ее общее решение имеет вид $\Phi(z) + F(z)$, где Φ — любое частное решение, а F — произвольная голоморфная в $\overline{\mathbb{C}} \setminus (\Delta_0 \cup \Delta_1)$ функция.

Далее, контур Γ является v-допустимым при $v(x) = x^n(1-x)^n$, где n — любое натуральное число. Ясно, что произведение vk интегрируемо в любой конечной области в любой степени $p \ge 1$. Поэтому согласно теореме 2 задача (1) со скачком $g = vg_0$, $g_0 \in H_1(\Gamma)$, разрешима в классе непрерывных на отрезках $\Delta_{0,1}$ и исчезающих в бесконечно удаленной точке функций, причем ее решение в этом классе единственно.

Теперь пусть $\nu < 1$. В этом случае предположим, что вблизи нуля функция $Y(x)$ убывает и $Y(x) \sim x^{-\gamma}$, а вблизи единицы эта функция возрастает и $Y(x) \sim (1-x)^{-\gamma}$. Непосредственный подсчет показывает, что функции $K_\nu^j(z)$ интегрируемы вблизи Δ_j, $j = 0, 1$, при $\nu > \frac{\gamma}{1+\gamma}$. При выполнении этого условия задача (1) со скачком $g \in H_\nu(\Gamma)$ разрешима, и ее общее решение имеет вид $\Phi(z) + F(z)$, где Φ — любое частное решение, а F — произвольная голоморфная в $\overline{\mathbb{C}} \setminus (\Delta_0 \cup \Delta_1)$ функция.

Если $g = vg_0$, $g_0 \in H_\nu(\Gamma)$, где v — та же функция, что и выше, то $v(z)K_\nu^j(z)$ и $k(z)$ интегрируемы вблизи Δ_j, $j = 0, 1$, в степени $p > 2$ при $n > (1-\nu)(1+\gamma)$. Поэтому при этом условии задача с таким скачком разрешима в классе непрерывных на отрезках $\Delta_{0,1}$ и исчезающих в бесконечно удаленной точке функций, причем ее решение в этом классе единственно.

Литература

[1] Гахов Ф.Д. *Краевые задачи* (Наука, М., 1977).

[2] Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения* (Наука, М., 1962).

[3] Кац Б.А. *О краевой задаче Римана со степенным сдвигом*, Изв. вузов. Матем., №8, 18–26 (1987).

[4] Кац Б.А., Миронова С.Р., Погодина А.Ю. *Задача о скачке на контуре с предельным континуумом*, Изв. вузов. Матем., №2, 70–75 (2015).

[5] Кац Б.А. *Краевая задача Римана на неспрямляемой жордановой кривой*, ДАН СССР **267** (4), 789–792 (1982).

[6] Кац Б.А. *Задача Римана на разомкнутой жордановой кривой*, Изв. вузов. Матем., №12, 30–38 (1983).

[7] Kats B.A. *The Riemann boundary value problem on non-rectifiable curves and related questions*, Complex Var. Elliptic Equ. **59** (8), 1053–1069 (2014).

[8] Стейн И. *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций* (Мир, М., 1973).

[9] Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические фукции* (Наука, М., 1988).

[10] Falconer K.J. *Fractal geometry.* 3rd Ed. (Wiley and Sons, 2014).

[11] Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М. *ε-энтропия и емкость множеств в функциональных пространствах*, УМН **14** (2), 3–86 (1959).

[12] Painlevé P. *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques* (These) (Gauthier-Villars, Paris, 1887).

Б.А. Кац

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: katsboris877@gmail.com

С.Р. Миронова

*Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева,
ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия,*

e-mail: srmironova@yandex.ru

А.Ю. Погодина

*Саратовский государственный университет,
ул. Астраханская, д. 83, г. Саратов, 410012, Россия,*

e-mail: apogodina@yandex.ru

B.A. Kats, S.R. Mironova, and A.Yu. Pogodina

Jump boundary-value problem on a contour with elongate singularities

Abstract. Let Γ be an image of the interval $(0, 1)$ under one-to-one continuous mapping $\phi : (0, 1) \to \mathbb{C}$. If the difference of closure of Γ and the very set Γ contains more than one point, then we say that Γ is a contour with elongate singularities.

We study the jump boundary-value problem for analytical functions on that contours and obtain new solvability criteria for it.

Keywords: jump problem, contour with singularities.

B.A. Kats

*Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,*

e-mail: katsboris877@gmail.com

S.R. Mironova

*Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev,
10 K. Marks str., Kazan, 420111 Russia,*

e-mail: srmironova@yandex.ru

A.Yu. Pogodina

*Saratov State University,
83 Astrakhanskaya str., Saratov, 410012 Russia,*

e-mail: apogodina@yandex.ru