Известия вузов. Математика *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
2018, №6, с. 9–24 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

А.Н. ЗАРУБИН

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРЕЖАЮЩЕ-ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО УРАВНЕНИЯ ТРИКОМИ

Аннотация. Исследуется краевая задача для уравнения смешанного типа Трикоми с кратным функциональным запаздыванием и опережением. Построено общее решение уравнения. Задача однозначно разрешима.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, интегральное уравнение, разностное уравнение.

УДК: 517.956

1. Введение. Постановка задачи

Функционально-дифференциальное уравнение Трикоми

$$L[A(x)U(x,y) - B(x)U(\alpha_1(\alpha_1(x)),y) + C(x)U(\alpha_2(\alpha_2(x)),y)] = 0, \tag{1}$$

где $L \equiv y\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — оператор ([1], с. 79) Трикоми; коэффициенты $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ — непрерывные достаточно гладкие функции; $\alpha_1(x)<x$, $\alpha_1'(x)>1$ ($\alpha_1'(x)<1$) и $\alpha_2(x)>x$, $\alpha_2'(x) < 1$ ($\alpha_2'(x) > 1$) — гомеоморфные растягивающе(сжимающе)-запаздывающее и сжимающе(растягивающе)-опережающее отображения, сохраняющие ориентацию, являющиеся диффеоморфизмами класса $C^2(x_0, x_3)$, причем

$$\alpha_1(\alpha_2(x)) = \alpha_2(\alpha_1(x)) = x \tag{2}$$

и

$$x_n = \alpha_1(x_{n+1}), \quad x_{n+1} = \alpha_2(x_n) \quad (n = 0, \pm1, \pm2, 3, 4, 5), \tag{3}$$

т. е. $x_{-2} = \alpha_1^2(x_0) < x_{-1} = \alpha_1^1(x_0) < 0 = x_0 < x_1 = \alpha_2^1(x_0) < x_2 = \alpha_2^2(x_0) < x_3 = \alpha_2^3(x_0) < x_4 = \alpha_2^4(x_0) < x_5 = \alpha_2^5(x_0)$, если в силу (2), (3)

$$\alpha_1^1(x_0) = \alpha_1(x_0) = x_{-1}, \quad \alpha_1^2(x_0) = \alpha_1(\alpha_1(x_0)) = \alpha_1(x_{-1}) = x_{-2};$$
$$\alpha_2^1(x_0) = \alpha_2(x_0) = x_1, \quad \alpha_2^2(x_0) = \alpha_2(\alpha_2(x_0)) = \alpha_2(x_1) = x_2;$$
$$\alpha_2^3(x_0) = \alpha_2(\alpha_2(\alpha_2(x_0))) = \alpha_2(\alpha_2(x_1)) = \alpha_2(x_2) = x_3;$$
$$\alpha_2^4(x_0) = \alpha_2(\alpha_2(\alpha_2(\alpha_2(x_0)))) = \alpha_2(\alpha_2(\alpha_2(x_1))) = \alpha_2(\alpha_2(x_2)) = \alpha_2(x_3) = x_4;$$

$$\alpha_2^5(x_0) = \alpha_2(\alpha_2(\alpha_2(\alpha_2(\alpha_2(x_0))))) = \alpha_2(\alpha_2(\alpha_2(\alpha_2(x_1)))) = \\ = \alpha_2(\alpha_2(\alpha_2(x_2))) = \alpha_2(\alpha_2(x_3)) = \alpha_2(x_4) = x_5,$$

рассмотрим в эллиптико–гиперболической области $D = D^+ \cup D^- \cup I$, где

$$D^+ = D_0^+ \cup D_1^+ \cup D_2^+ \cup J = \{(x,y) : x_0 < x < x_3,\ 0 < y < h\} \quad (0 < h \equiv \text{const})$$

Поступила 28.02.2017

и $D^- = D_0^- \cup D_1^- \cup D_2^-$ — эллиптическая и гиперболическая части области D, причем

$$D_k^+ = \{(x,y) : x_k < x < x_{k+1},\ 0 < y < h\} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, 3, 4, 5),$$

$$D_k^- = \{(x,y) : \frac{2}{3}(-y)^{3/2} < \alpha_1^k(x) < -\frac{2}{3}(-y)^{3/2} + x_1, 0 < \frac{2}{3}(-y)^{3/2} < x_1/2\} \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, 3, 4, 5),$$

$$I = \{(x,y) : x_0 < x < x_3,\ y = 0\}, \quad J = J_1 \cup J_2,$$

а $J_k = \{(x,y) : x = x_k,\ 0 < y < h\}$ $(k = 1, 2)$.

Пусть $D_k = D_k^+ \cup D_k^- \cup I_k$, $I_k = \{(x,y) : x_k < x < x_{k+1},\ y = 0\}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, 3, 4, 5)$, а $\alpha_1^{-2}(x) = \alpha_2(\alpha_2(x))$, $\alpha_1^{-1}(x) = \alpha_2(x)$, $\alpha_1^0(x) = x$, $\alpha_1^1(x) = \alpha_1(x)$, $\alpha_1^2(x) = \alpha_1(\alpha_1(x))$, $\alpha_1^3(x) = \alpha_1(\alpha_1(\alpha_1(x)))$, $\alpha_1^4(x) = \alpha_1(\alpha_1(\alpha_1(\alpha_1(x))))$, $\alpha_1^5(x) = \alpha_1(\alpha_1(\alpha_1(\alpha_1(\alpha_1(x)))))$.

Тип функциональных отклонений очевиден из представлений

$$U(\alpha_1(\alpha_1(x)), y) = U(x - (x - \alpha_1(\alpha_1(x))), y) = U(x - \tau_1(x), y),$$

$$U(\alpha_2(\alpha_2(x)), y) = U(x + (\alpha_2(\alpha_2(x)) - x), y) = U(x + \tau_2(x), y),$$

где $\tau_1(x) = x - \alpha_1(\alpha_1(x)) > 0$, $\tau_2(x) = \alpha_2(\alpha_2(x)) - x > 0$.

Пример 1. Отображения $\alpha_1(x) = \sqrt[3]{x^3 - \tau^3}$ (растягивающе-запаздывающее), $\alpha_2(x) = \sqrt[3]{x^3 + \tau^3}$ $(0 < \tau \equiv \mathrm{const})$ (сжимающе-опережающее) удовлетворяют (2) и $\alpha_1(x) < x$, $\alpha_1(\alpha_1(x)) = \sqrt[3]{x^3 - 2\tau^3} < x$; $\alpha_2(x) > x$, $\alpha_2(\alpha_2(x)) = \sqrt[3]{x^3 + 2\tau^3} > x$, причем $-\sqrt[3]{2}\tau = x_{-2} < -\tau = x_{-1} < 0 = x_0 < \tau = x_1 < \sqrt[3]{2}\tau = x_2 < \sqrt[3]{3}\tau = x_3 < \sqrt[3]{4}\tau = x_4 < \sqrt[3]{5}\tau = x_5$.

Пример 2. Отображения $\alpha_1(x) = \ln(x)$ (сжимающе-запаздывающее), $\alpha_2(x) = e^x$ (растягивающе-опережающее) удовлетворяют (2) и $\alpha_1(x) < x$, $\alpha_1(\alpha_1(x)) = \ln(\ln x) < x$; $\alpha_2(x) > x$, $\alpha_2(\alpha_2(x)) = e^{e^x} > x$, причем $-\infty = x_{-1} < 0 = x_0 < 1 = x_1 < e = x_2 < e^e = x_3 < e^{e^e} = x_4$.

Пример 3. Отображения $\alpha_1(x) = x - \tau$ (запаздывающее), $\alpha_2(x) = x + \tau$ $(0 < \tau \equiv \mathrm{const})$ (опережающее) удовлетворяют (2) и $\alpha_1(x) < x$, $\alpha_1(\alpha_1(x)) = x - 2\tau < x$; $\alpha_2(x) > x$, $\alpha_2(\alpha_2(x)) = x + 2\tau > x$, причем $-2\tau = x_{-2} < -\tau = x_{-1} < 0 = x_0 < \tau = x_1 < 2\tau = x_2 < 3\tau = x_3 < 4\tau = x_4$.

Пример 4. Отображения $\alpha_1(x) = (x-1)/q$ (сжимающе-запаздывающее), $\alpha_2(x) = qx + 1$, $q > 1$ (растягивающе-опережающее) удовлетворяют (2) и $\alpha_1(x) < x$, $\alpha_1(\alpha_1(x)) = (x - 1 - q)/q^2 < x$; $\alpha_2(x) > x$, $\alpha_2(\alpha_2(x)) = q^2 x + 1 + q > x$, причем $-1/q^2 - 1/q = x_{-2} < -1/q = x_{-1} < 0 = x_0 < 1 = x_1 < q + 1 = x_2 < q(q+1) + 1 = x_3 < q[q(q+1)+1] + 1 = x_4$.

Задача T. *В области D найти решение $U(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \setminus J) \cap C^2(D \setminus (I \cup J))$ уравнения* (1), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$U(x,h) = \varphi(x), \quad x_0 \le x \le x_3, \tag{4}$$

$$U(x_0,y) = U(x_3,y) = 0, \quad 0 \le y \le h, \tag{5}$$

$$U(x,y)\big|_{\alpha_1^k(x) = \frac{2}{3}(-y)^{3/2}} = \psi_k(x), \quad x_k \le x \le \alpha_2^k(x_1/2) \quad (k = 0, 1, 2), \tag{6}$$

$$\alpha_2^0(x_1/2) = x_1/2,\ \alpha_2^1(x_1/2) = \alpha_2(x_1/2),\ \alpha_2^2(x_1/2) = \alpha_2(\alpha_2(x_1/2)),$$

$$U(x,y) = r(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D_{-2} \cup D_{-1}}, \tag{7}$$

$$U(x,y) = q(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D_3 \cup D_4}, \tag{8}$$

условиям сопряжения

$$U(x,0-) = U(x,0+) = \omega(x), \quad x_0 \le x \le x_3, \tag{9}$$

$$U_y(x,0-) = U_y(x,0+) = \nu(x), \quad x_0 < x < x_3,\ x \ne x_1, x_2, \tag{10}$$

условиям согласования

$$\begin{gathered}\varphi(x_0)=\varphi(x_3)=\psi_0(x_0)=0,\\ r(x_{-2},y)=r(x_{-1},y)=r(x_0,y)=q(x_3,y)=q(x_4,y)=q(x_5,y)=0,\end{gathered}\tag{11}$$

где $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $\varphi(x)$, $\psi_k(x)$ $(k=0,1,2)$, $r(x,y)$, $q(x,y)$, $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ *— заданные непрерывные достаточно гладкие функции.*

Замечание 1. Аналогичные задачи в области D могут быть рассмотрены для уравнений

$$L(A(x)U(x,y)-B(x)U(\alpha_1(x),y)+C(x)U(\alpha_2(\alpha_2(x)),y))=0,\tag{12}$$

$$L(A(x)U(x,y)-B(x)U(\alpha_1(\alpha_1(x)),y)+C(x)U(\alpha_2(x),y))=0,\tag{13}$$

$$L(A(x)U(\alpha_1(x),y)-B(x)U(\alpha_1(\alpha_1(x)),y)+C(x)U(\alpha_2(\alpha_2(x)),y))=0,\tag{14}$$

$$L(A(x)U(\alpha_2(x),y)-B(x)U(\alpha_1(\alpha_1(x)),y)+C(x)U(\alpha_2(\alpha_2(x)),y))=0,\tag{15}$$

где в (12)–(15) L — оператор Лаврентьева–Бицадзе, Трикоми или Геллерстедта.

2. Общее решение

Уравнение (1) в терминах функций

$$U_k^{\pm}(x,y)=U(x,y),\quad (x,y)\in D_k^{\pm}\quad (k=0,1,2),\tag{16}$$

с учетом (7), (8), можно записать в форме системы

$$L(R(x)\overline{U}^{\pm}(x,y)-\overline{\Phi}(x,y))=0,\quad (x,y)\in D_0^{\pm},\tag{17}$$

где

$$\overline{U}^{\pm}(x,y)=(U_0^{\pm}(x,y),U_1^{\pm}(\alpha_2(x),y),U_2^{\pm}(\alpha_2^2(x),y))^{\top};\tag{18}$$

$$R(x)=(R_0(x),R_1(x),R_2(x))^{\top},\tag{19}$$

причем $R_0(x)=(A(x),0,C(x))$, $R_1(x)=(0,A(\alpha_2(x)),0)$, $R_2(x)=(-B(\alpha_2^2(x)),0,A(\alpha_2^2(x)))$ — первая, вторая и третья строки матрицы $R(x)$;

$$\overline{\Phi}(x,y)=(\Phi_0(x,y),\Phi_1(x,y),\Phi_2(x,y))^{\top},\tag{20}$$

а $\Phi_0(x,y)=B(x)r(\alpha_1^2(x),y)$, $\Phi_1(x,y)=B(\alpha_2(x))r(\alpha_1(x),y)-C(\alpha_2(x))q(\alpha_2^3(x),y)$, $\Phi_2(x,y)=-C(\alpha_2^2(x))q(\alpha_2^4(x),y)$.

Обращая оператор Трикоми ([1], с. 83), запишем общее решение системы (17) в виде

$$\begin{aligned}R(x)\overline{U}^{\pm}(x,y)=\overline{\Phi}(x,y)+y\int_0^1\overline{F}^{\pm}(x,y,t)[t(1-t)]^{-1/6}dt+\\ +\int_0^1\overline{G}^{\pm}(x,y,t)[t(1-t)]^{-5/6}dt,(x,y)\in D_0^{\pm},\end{aligned}\tag{21}$$

где

$$\begin{gathered}\overline{F}^{\pm}(x,y,t)=(f_0^{\pm}(x,y,t),f_1^{\pm}(x,y,t),f_2^{\pm}(x,y,t))^{\top},\\ \overline{G}^{\pm}(x,y,t)=(g_0^{\pm}(x,y,t),g_1^{\pm}(x,y,t),g_2^{\pm}(x,y,t))^{\top},\end{gathered}\tag{22}$$

а

$$f_k^{\pm}(x,y,t)=f_k^{\pm}(x+\frac{2}{3}(-|y|\operatorname{sgn}y)^{3/2}(2t-1)),\tag{23}$$

$$g_k^{\pm}(x,y,t)=g_k^{\pm}(x+\frac{2}{3}(-|y|\operatorname{sgn}y)^{3/2}(2t-1)),\tag{24}$$

причем $f_k^{\pm}(x,y,t)$, $g_k^{\pm}(x,y,t)$ $(k=0,1,2)$ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Если определитель $|R(x)| \neq 0, x_0 \leq x \leq x_1$, то система (21) имеет единственное решение

$$\overline{U}^{\pm}(x,y) = R^{-1}(x)\Bigg[\overline{\Phi}(x,y) + y\int_0^1 \overline{F}^{\pm}(x,y,t)[t(1-t)]^{-1/6}dt +$$
$$+ \int_0^1 \overline{G}^{\pm}(x,y,t)[t(1-t)]^{-5/6}dt\Bigg], (x,y) \in D_0^{\pm}, \quad (25)$$

где обратная матрица

$$R^{-1}(x) = (R_0^{-1}(x), R_1^{-1}(x), R_2^{-1}(x))^{\top}, \quad (26)$$

а

$$R_0^{-1}(x)|R(x)| = (A(\alpha_2(x))A(\alpha_2^2(x)), 0, -C(x)A(\alpha_2(x))),$$
$$R_1^{-1}(x)|R(x)| = (0, A(x)A(\alpha_2^2(x)) + C(x)B(\alpha_2^2(x)), 0),$$
$$R_2^{-1}(x)|R(x)| = (A(\alpha_2(x))B(\alpha_2^2(x)), 0, A(x)A(\alpha_2(x)))$$

— первая, вторая и третья строки обратной матрицы $R^{-1}(x)$;

$$|R(x)| = A(\alpha_2(x))[A(x)A(\alpha_2^2(x)) + C(x)B(\alpha_2^2(x))] \neq 0, \quad x_0 \leq x \leq x_1.$$

Равенство (25) является общим решением системы (21) (а значит, уравнения (1)), которое в силу (18)–(20), (26) можно записать в покомпонентном виде

$$U_k^{\pm}(\alpha_2^k(x), y) = R_k^{-1}(x)\overline{\Phi}(x,y) + yR_k^{-1}(x)\int_0^1 \overline{F}^{\pm}(x,y,t)[t(1-t)]^{-1/6}dt +$$
$$+ R_k^{-1}(x)\int_0^1 \overline{G}^{\pm}(x,y,t)[t(1-t)]^{-5/6}dt, (x,y) \in D_0^{\pm}, \quad (27)$$

или

$$U_k^{\pm}(x,y) = R_k^{-1}(\alpha_1^k(x))\overline{\Phi}(\alpha_1^k(x), y) + yR_k^{-1}(\alpha_1^k(x))\int_0^1 \overline{F}^{\pm}(\alpha_1^k(x), y, t)[t(1-t)]^{-1/6}dt +$$
$$+ R_k^{-1}(\alpha_1^k(x))\int_0^1 \overline{G}^{\pm}(\alpha_1^k(x), y, t)[t(1-t)]^{-5/6}dt, \quad (x,y) \in D_k^{\pm} \quad (k = 0,1,2). \quad (28)$$

Из (27) (или (28)) следует

$$\begin{aligned} U_0^{\pm}(x_1 - 0, y) = U_1^{\pm}(x_1 + 0, y) = 0, 0 \leq y \leq h, \\ U_1^{\pm}(x_2 - 0, y) = U_2^{\pm}(x_2 + 0, y) = 0, 0 \leq y \leq h; \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} U_{0x}^{\pm}(x_1 - 0, y) \neq U_{1x}^{\pm}(x_1 + 0, y), 0 < y < h, \\ U_{1x}^{\pm}(x_2 - 0, y) \neq U_{2x}^{\pm}(x_2 + 0, y), 0 < y < h. \end{aligned} \quad (30)$$

3. Однозначная разрешимость задачи T

Теорема 1. *Если* $A(x), B(x), C(x), \alpha_1(x), \alpha_2(x)$, $\varphi(x) \in C[x_0, x_3] \cap C^2(x_0, x_3)$; $\psi_k(x) \in C[x_k, \alpha_2^k(x_1/2)] \cap C^2(x_k, \alpha_2^k(x_1/2))$ $(k = 0,1,2)$; $r(x,y) \in C(\overline{D_{-1} \cup D_{-2}}) \cap C^2(D_{-1} \cup D_{-2})$, $q(x,y) \in C(\overline{D_3 \cup D_4}) \cap C^2(D_3 \cup D_4)$ *абсолютно интегрируемы на своих промежутках;* $\varphi(x_0) = \varphi(x_3) = \psi_0(x_0) = 0$, $r(x_k, y) = q(x_{3-k}, y) = 0$ $(k = -2, -1, 0)$ *и* $\psi_k'(x)$ *при* $x \to x_k$ $(k = 0,1,2)$ *допускает интегрируемую особенность, то существует единственное решение задачи* T.

Единственность решения задачи T следует из того, что однородная задача T имеет тривиальное решение. Доказательство этого факта основано на установлении знакоопределенности интеграла

$$\beta = \int_{x_0}^{x_3} (A(x)\omega(x) - B(x)H(x-x_2)\omega(\alpha_1(\alpha_1(x))) + C(x)H(x_1-x)\omega(\alpha_2(\alpha_2(x))))\times$$
$$\times (A(x)\nu(x) - B(x)H(x-x_2)\nu(\alpha_1(\alpha_1(x))) + C(x)H(x_1-x)\nu(\alpha_2(\alpha_2(x))))dx$$

аналогично тому, как это проводится для уравнения Трикоми ([2], с. 491–493; [3], с. 128–130); $H(\xi)$ — функция Хевисайда ([3], с. 14).

Вопрос существования решения задачи T в области $D = D_0 \cup D_1 \cup D_2 \cup J$ связан с построением в областях $D_k = D_k^+ \cup D_k^- \cup I_k$ $(k = 0,1,2)$ на основании общих решений (27) (или (28)) функций $U_k^{\pm}(\alpha_2^k(x), y)$, $(x,y) \in D_0^{\pm}$ (или $U_k^{\pm}(x,y)$, $(x,y) \in D_k^{\pm}$) $(k = 0,1,2)$, удовлетворяющих условиям (4)–(11), (16), (29), (30), в которых функции $\varphi(x)$, $\psi_k(x)$ $(k = 0,1,2)$, $r(x,y)$, $q(x,y)$ заданы, а $\omega(x)$, $\nu(x)$ подлежат определению. Поскольку условия (29) на $x = x_1, x_2$ $(0 \le y \le h)$ известны, то достаточно решить задачу T для уравнения (1) в областях D_k $(k = 0,1,2)$, т. е. найти функции $U_k^{\pm}(x,y), (x,y) \in D_k^{\pm}$ $(k = 0,1,2)$.

Проведем построение решения задачи T для уравнения (1) в области $D_0 = D_0^+ \cup D_0^- \cup I_0$, т. е. найдем функции $U_k^{\pm}(\alpha_2^k(x), y)$, $(x,y) \in D_0^{\pm}$, при условиях (4)–(11), (16), (29):

$$U_k^+(\alpha_2^k(x), h) = \varphi(\alpha_2^k(x)), \quad x_0 \le x \le x_1, \tag{31}$$

$$U_k^+(\alpha_2^k(x_0), y) = U_k^+(\alpha_2^k(x_1), y) = 0, \quad 0 \le y \le h, \tag{32}$$

$$U_k^-(\alpha_2^k(x), y)\big|_{x=\frac{2}{3}(-y)^{3/2}} = \psi_k(\alpha_2^k(x)), \quad x_0 \le x \le x_1/2, \tag{33}$$

$$U_k^-(\alpha_2^k(x), 0-) = U_k^+(\alpha_2^k(x), 0+) = \omega(\alpha_2^k(x)), \quad x_0 \le x \le x_1, \tag{34}$$

$$U_{ky}^-(\alpha_2^k(x), 0-) = U_{ky}^+(\alpha_2^k(x), 0+) = \nu(\alpha_2^k(x)), \quad x_0 < x < x_1, \tag{35}$$

$$\omega(\alpha_2^k(x_0)) = \omega(\alpha_2^k(x_1)) = \psi_k(\alpha_2^k(x_0)) = \varphi(\alpha_2^k(x_0)) = \varphi(\alpha_2^k(x_1)) = 0. \tag{36}$$

Задача Коши. *Найти в области D_0^- решение $U_k^-(\alpha_2^k(x), y)$ уравнения (1) из класса $C(\overline{D_0^-}) \cap C^2(D_0^-)$, удовлетворяющее условиям*

$$U_k^-(\alpha_2^k(x), 0-) = \omega(\alpha_2^k(x)), \quad x_0 \le x \le x_1, \tag{34*}$$

$$U_{ky}^-(\alpha_2^k(x), 0-) = \nu(\alpha_2^k(x)), \quad x_0 < x < x_1, \tag{35*}$$

и (36), где $\omega(\alpha_2^k(x)), \nu(\alpha_2^k(x))$ — непрерывные достаточно гладкие функции, причем $\omega(\alpha_2^k(x_0)) = \omega(\alpha_2^k(x_1)) = 0$ $(k = 0,1,2)$ и $\alpha_2^0(x) = x$, $\alpha_2^1(x) = \alpha_2(x)$, $\alpha_2^2(x) = \alpha_2(\alpha_2(x))$.

Теорема 2. *Если $\omega(\alpha_2^k(x)) \in C[x_0,x_1] \cap C^2(x_0,x_1)$; $\nu(\alpha_2^k(x)) \in C^1(x_0,x_1)$, $\omega(\alpha_2^k(x_0)) = \omega(\alpha_2^k(x_1)) = 0$, то существует единственное решение задачи Коши $U_k^-(\alpha_2^k(x), y) \in C(\overline{D_0^-}) \cap C^2(D_0^-)$ $(k = 0,1,2)$ вида*

$$U_k^-(\alpha_2^k(x), y) = R_k^{-1}(x)\overline{\Phi}(x,y) + yR_k^{-1}(x)\int_0^1 \overline{F}^-(x,y,t)[t(1-t)]^{-1/6}dt +$$
$$+ R_k^{-1}(x)\int_0^1 \overline{G}^-(x,y,t)[t(1-t)]^{-5/6}dt, \ (x,y) \in D_0^-, \tag{37}$$

где $\overline{F}^-(x,y,t)$, $\overline{G}^-(x,y,t)$ определены в (22), а $f_k^-(x,y,t), g_k^-(x,y,t)$ $(k = 0,1,2)$ определены в (43), (44).

Доказательство следует из (27). Действительно, для определения произвольных функций $f_k^-(x,y,t)$, $g_k^-(x,y,t)$ $(k=0,1,2)$ в $\overline{F}^-(x,y,t)$, $\overline{G}^-(x,y,t)$ учтем в общем решении (27) условия задачи Коши (34), (35).

Тогда получим равенства

$$U_k^-(\alpha_2^k(x),0)=\omega(\alpha_2^k(x))=R_k^{-1}(x)\overline{\Phi}(x,0)+\\ +R_k^{-1}(x)\int_0^1\overline{G}^-(x,0,t)[t(1-t)]^{-5/6}dt,\quad x_0\le x\le x_1,$$

$$U_{ky}^-(\alpha_2^k(x),0)=\nu(\alpha_2^k(x))=R_k^{-1}(x)\overline{\Phi}_y(x,0)+\\ +R_k^{-1}(x)\int_0^1\overline{F}^-(x,0,t)[t(1-t)]^{-1/6}dt, x_0<x<x_1\quad(k=0,1,2),$$

т. е. системы уравнений

$$R^{-1}(x)\int_0^1\overline{G}^-(x,0,t)[t(1-t)]^{-5/6}dt=\overline{\omega}(x)-R^{-1}(x)\overline{\Phi}(x,0), x_0\le x\le x_1,$$

$$R^{-1}(x)\int_0^1\overline{F}^-(x,0,t)[t(1-t)]^{-1/6}dt=\overline{\nu}(x)-R^{-1}(x)\overline{\Phi}_y(x,0),\quad x_0<x<x_1,$$

решения которых имеют вид

$$\int_0^1\overline{G}^-(x,0,t)[t(1-t)]^{-5/6}dt=R(x)\overline{\omega}(x)-\overline{\Phi}(x,0),\quad x_0\le x\le x_1, \tag{38}$$

$$\int_0^1\overline{F}^-(x,0,t)[t(1-t)]^{-1/6}dt=R(x)\overline{\nu}(x)-\overline{\Phi}_y(x,0),\quad x_0<x<x_1, \tag{39}$$

где

$$\overline{\omega}(x)=(\omega(x),\omega(\alpha_2(x)),\omega(\alpha_2^2(x)))^\top, \tag{40}$$

$$\overline{\nu}(x)=(\nu(x),\nu(\alpha_2(x)),\nu(\alpha_2^2(x)))^\top. \tag{41}$$

Далее, так как в силу (22)–(24)

$$\overline{G}^-(x,0,t)=(g_0^-(x),g_1^-(x),g_2^-(x))^\top,\quad \overline{F}^-(x,0,t)=(f_0^-(x),f_1^-(x),f_2^-(x))^\top,$$

а

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt=B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{42}$$

— бета-функция ([4], с. 962), то из (38), (39) найдем компоненты

$$B(1/6,1/6)g_k^-(x)=R_k(x)\overline{\omega}(x)-\Phi_k(x,0),\quad x_0\le x\le x_1,$$

$$B(5/6,5/6)f_k^-(x)=R_k(x)\overline{\nu}(x)-\Phi_{ky}(x,0),\quad x_0<x<x_1.$$

Поэтому равенства (23)–(24) будут иметь представления с $\omega=x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2}(2t-1)$

$$B(5/6,5/6)f_k^-(x,y,t)=B(5/6,5/6)f_k^-(\omega)=R_k(\omega)\overline{\nu}(\omega)-\Phi_{k\xi}(\omega,0),\quad x_0<x<x_1, \tag{43}$$

$$B(1/6,1/6)g_k^-(x,y,t)=B(1/6,1/6)g_k^-(\omega)=\\ =R_k(\omega)\overline{\omega}(\omega)-\Phi_k(\omega,0),\quad x_0\le x\le x_1\quad(k=0,1,2). \tag{44}$$

Подставив (43), (44) в (22), а $\overline{F}^-(x,y,t)$, $\overline{G}^-(x,y,t)$ в (27), получим решение (37) задачи Коши в области D_0^-.

Функциональное соотношение между $\omega(\alpha_2^k(x))$ и $\nu(\alpha_2^k(x))$, привнесенное из D_0^- на линию изменения типа уравнения (1) $y=0$, $x_0<x<x_1$, получим из (37), полагая $y=-(3x/2)^{2/3}$ и учитывая условие (33) задачи T:

$$U_k^-(\alpha_2^k(x),y)\big|_{x=\frac{2}{3}(-y)^{3/2}} = U_k^-\big(\alpha_2^k(x),-\big(3x/2)^{2/3}\big) = \psi_k(\alpha_2^k(x)) = R_k^{-1}(x)\overline{\Phi}\big(x,-\big(3x/2)^{2/3}\big)-$$
$$-\big(3x/2\big)^{2/3}\big)R_k^{-1}(x)\int_0^1 \overline{F}^-\big(x,-(3x/2)^{2/3},t\big)[t(1-t)]^{-1/6}dt + R_k^{-1}(x)\int_0^1 \overline{G}^-\big(x,-\big(3x/2\big)^{2/3},t\big)\times$$
$$\times[t(1-t)]^{-5/6}dt, \quad x_0\le x\le x_1/2,$$

т. е.

$$R^{-1}(x)\Big\{-\big(3x/2\big)^{2/3}\int_0^1 \overline{F}^-\big(x,-(3x/2)^{2/3},t\big)[t(1-t)]^{-1/6}dt + \int_0^1 \overline{G}^-\big(x,-\big(3x/2\big)^{2/3},t\big)\times$$
$$\times[t(1-t)]^{-5/6}dt\Big\} = \overline{\psi}(x) - R^{-1}(x)\overline{\Phi}\big(x,-\big(3x/2\big)^{2/3}\big), \quad x_0\le x\le x_1/2,$$

и потому

$$-\big(3x/2\big)^{2/3}\int_0^1 \overline{F}^-\big(x,-\big(3x/2\big)^{2/3},t\big)[t(1-t)]^{-1/6}dt + \int_0^1 \overline{G}^-\big(x,-\big(3x/2\big)^{2/3},t\Big)\times$$
$$\times[t(1-t)]^{-5/6}dt = R(x)\overline{\psi}(x) - \overline{\Phi}\big(x,-\big(3x/2\big)^{2/3}\big), \quad x_0\le x\le x_1/2, \quad (45)$$

где $\overline{\psi}(x) = (\psi_0(x),\psi_1(\alpha_2(x)),\psi_2(\alpha_2^2(x)))^\top$.

На основании (23)–(24)

$$\begin{aligned} f_k^-\big(x,-\big(3x/2\big)^{2/3},t\big) &= f_k^-(2xt),\\ g_k^-\big(x,-\big(3x/2\big)^{2/3},t\big) &= g_k^-(2xt); \end{aligned} \quad (46)$$

а из (22)

$$\begin{aligned} \overline{F}^-\big(x,-\big(3x/2\big)^{2/3},t\big) &= (f_0^-(2xt),f_1^-(2xt),f_2^-(2xt))^\top,\\ \overline{G}^-\big(x,-\big(3x/2\big)^{2/3},t\big) &= (g_0^-(2xt),g_1^-(2xt),g_2^-(2xt))^\top. \end{aligned}$$

Поэтому в покомпонентной записи из (45), (46) имеем

$$-(3x/2)^{2/3}\int_0^1 f_k^-(2xt)[t(1-t)]^{-1/6}dt + \int_0^1 g_k^-(2xt)\times$$
$$\times[t(1-t)]^{-5/6}dt = R_k(x)\overline{\psi}(x) - \Phi_k\big(x,-\big(3x/2\big)^{2/3}\big), \quad x_0\le x\le x_1/2,$$

т. е. после замены x на $x/2$ и подстановки $s=xt$

$$-\left(\frac{3x}{4}\right)^{2/3}\int_0^x f_k^-(s)[s(x-s)]^{-1/6}ds + x^{2/3}\int_0^x g_k^-(s)[s(x-s)]^{-5/6}ds = Q_k(x)\equiv$$
$$\equiv R_k(x/2)\overline{\psi}(x/2) - \Phi_k\big(x/2,-\big(3x/4\big)^{2/3}\big), \quad x_0\le x\le x_1 \quad (k=0,1,2). \quad (47)$$

Разрешим (47) относительно функции $f_k^-(x)$.

Используя известную формулу обращения ([1], с. 83)

$$M(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{N(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

интегрального уравнения Абеля

$$\int_0^x \frac{M(t)dt}{(x-t)^\alpha} = N(x), \quad 0<\alpha<1,$$

из (47) получим

$$f_k^-(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3} x^{1/6}\frac{d}{dx}\int_0^x \xi^{2/3}(x-\xi)^{-5/6}d\xi \int_0^\xi g_k^-(r)[r(\xi-r)]^{-5/6}dr -$$
$$-\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}\frac{1}{2\pi}x^{1/6}\frac{d}{dx}\int_0^x (x-\xi)^{-5/6}Q_k(\xi)d\xi, \quad x_0\le x\le x_1. \quad (48)$$

Применив формулу Дирихле перестановки порядка интегрирования и последующую замену переменной $\xi = r+s(x-r)$ во внутреннем интеграле первого слагаемого в (48), найдем

$$\int_0^x \xi^{2/3}(x-\xi)^{-5/6}d\xi\int_0^\xi g_k^-(r)[r(\xi-r)]^{-5/6}dr = \int_0^x r^{-5/6}g_k^-(r)dr\int_r^x \xi^{2/3}(x-\xi)^{-5/6}\times$$
$$\times(\xi-r)^{-5/6}d\xi = \int_0^x r^{-1/6}(x-r)^{-2/3}g_k^-(r)dr\int_0^1 s^{-5/6}(1-s)^{-5/6}\left(1-s\frac{r-x}{r}\right)^{2/3}ds =$$
$$= B(1/6,1/6)\int_0^x r^{-1/6}(x-r)^{-2/3}g_k^-(r)\,{}_2F_1\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{6};\frac{1}{3};\frac{r-x}{r}\right)dr =$$
$$= B(1/6,1/6)\int_0^x r^{-5/6}g_k^-(r)\left(\frac{x-r}{x}\right)^{-2/3}{}_2F_1\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{6};\frac{1}{3};\frac{x-r}{x}\right)dr.$$

Здесь использованы тождества ([5], с. 12–14) $\int\limits_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-ut)^{-\alpha}dt = B(b,c-b){}_2F_1(a,b;c;u)$, $\operatorname{Re}c>\operatorname{Re}b>0$, $|\arg(1-u)|<\pi$, и ${}_2F_1(a,b;c;u)=(1-u)^{-a}\,{}_2F_1\big(a,c-b;c;\frac{u}{u-1}\big)$, $|\arg(1-u)|<\pi$, где ${}_2F_1(a,b;c;u)$ — гипергеометрическая функция Гаусса ([5], с. 10), а $B(\alpha,\beta)$ — бета-функция (42).

Поэтому (48) представимо в форме

$$f_k^-(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}B(1/6,1/6)x^{1/6}\frac{d}{dx}\int_0^x r^{-5/6}g_k^-(r)\left(\frac{x-r}{x}\right)^{-2/3}\times$$
$$\times\,{}_2F_1\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{6};\frac{1}{3};\frac{x-r}{x}\right)dr - \left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}\frac{1}{2\pi}x^{1/6}\frac{d}{dx}\int_0^x(x-\xi)^{-5/6}Q_k(\xi)d\xi,\ x_0\le x\le x_1. \quad (49)$$

Покажем, что функция

$$\rho_\varepsilon(x) = x^{1/6}\frac{d}{dx}\int_0^{x-\varepsilon} r^{-5/6}g_k^-(r)\left(\frac{x-r}{x}\right)^{-2/3}{}_2F_1\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{6};\frac{1}{3};\frac{x-r}{x}\right)dr$$

удовлетворяет предельному равенству

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\rho_\varepsilon(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x (x-r)^{-2/3}g_k^-(r)dr, x_0<x<x_1.$$

Пользуясь формулами ([6], с. 431)

$$\frac{d}{du}[u^a\,{}_2F_1(a,b;c;u) = au^{a-1}\,{}_2F_1(a+1,b;c;u),$$
$${}_2F_1(a,b;b;u) = (1-u)^{-a}, |\arg(1-u)|<\pi,$$

будем иметь

$$\rho_\varepsilon(x) = x^{1/6}(x-\varepsilon)^{-5/6} g_k^-(x-\varepsilon)\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^{-2/3} {}_2F_1\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{\varepsilon}{x}\right) - \frac{2}{3}x^{1/6}\int_0^{x-\varepsilon} r^{-5/6} g_k^-(r)\times$$
$$\times\left(\frac{x-r}{x}\right)^{-5/3} {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{x-r}{x}\right)\frac{r}{x^2}dr = \varepsilon^{-2/3}\left(\frac{x}{x-\varepsilon}\right)^{5/6} {}_2F_1\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{\varepsilon}{x}\right) g_k^-(x-\varepsilon) -$$
$$-\frac{2}{3}\int_0^{x-\varepsilon}(x-r)^{-5/3} g_k^-(r)dr = \varepsilon^{-2/3}\left[\left(\frac{x}{x-\varepsilon}\right)^{5/6} {}_2F_1\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{\varepsilon}{x}\right) - 1\right] g_k^-(x-\varepsilon) +$$
$$+\frac{d}{dx}\int_0^{x-\varepsilon}(x-r)^{-2/3} g_k^-(r)dr.$$

Поскольку $\left(\frac{x}{x-\xi}\right)^{5/6} {}_2F_1\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{\varepsilon}{x}\right) - 1 = o(\varepsilon/x)$, то, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, найдем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\rho_\varepsilon(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x (x-r)^{-2/3} g_k^-(r)dr.$$

Тогда из (49) получим

$$f_k^-(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3} B(1/6, 1/6)\frac{d}{dx}\int_0^x (x-r)^{-2/3} g_k^-(r)dr -$$
$$-\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}\frac{1}{2\pi}x^{1/6}\frac{d}{dx}\int_0^x (x-\xi)^{-5/6} Q_k(\xi)d\xi. \quad (50)$$

С учетом выражений для $g_k^-(x)$, $f_k^-(x)$, $Q_k(x)$ из (43), (44), (47), (40), (41) формула (50) примет вид

$$R_k(x)\overline{\nu}(x) - \Phi_{ky}(x,0) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3} B(5/6, 5/6)\frac{d}{dx}\int_0^x (x-r)^{-2/3}[R_k(r)\overline{\omega}(r) -$$
$$-\Phi_k(r,0)]dr - \left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}\frac{1}{2\pi}B(5/6, 5/6)x^{1/6}\frac{d}{dx}\int_0^x (x-\xi)^{-5/6}\Bigg[R_k(\xi/2)\overline{\psi}(\xi/2) -$$
$$-\Phi_k\left(\xi/2, -\left(\frac{3}{4}\xi\right)^{2/3}\right)\Bigg]d\xi, \quad x_0 \le x \le x_1 (k = 0, 1, 2). \quad (51)$$

Выражение (51) является искомым функциональным соотношением.

Задача Дирихле. *В области D_0^+ найти решение $U_k^+(\alpha_2^k(x), y)$ уравнения* (1) *из класса $C(\overline{D}_0^+) \cap C^2(D_0^+)$, удовлетворяющее условиям* (31), (32),

$$U_k^+(\alpha_2^k(x), 0+) = \omega(\alpha_2^k(x)), \quad x_0 \le x \le x_1, \qquad (34^{**})$$

где $\varphi(\alpha_2^k(x)), \omega(\alpha_2^k(x))$ — непрерывные достаточно гладкие функции, причем

$$\omega(\alpha_2^k(x_0)) = \omega(\alpha_2^k(x_1)) = \varphi(\alpha_2^k(x_0)) = \varphi(\alpha_2^k(x_1)) = 0.$$

Теорема 3. *Если $\varphi(\alpha_2^k(x)), \omega(\alpha_2^k(x)) \in C[x_0, x_1] \cap C^2(x_0, x_1)$ и $\omega(\alpha_2^k(x_0)) = \omega(\alpha_2^k(x_1)) = \varphi(\alpha_2^k(x_0)) = \varphi(\alpha_2^k(x_1)) = 0$, то существует единственное решение $U_k^+(\alpha_2^k(x), y) \in C(\overline{D}_0^+) \cap$*

$C^2(D_0^+)$ *задачи Дирихле вида*

$$U_k^+(\alpha_2^k(x),y)=R_k^{-1}(x)\overline{\Phi}(x,y)+yR_k^{-1}(x)\int_0^1\overline{F}^+(x,y,t)[t(1-t)]^{-1/6}dt+$$
$$+R_k^{-1}(x)\int_0^1\overline{G}^+(x,y,t)[t(1-t)]^{-5/6}dt,(x,y)\in D_0^+\quad(k=0,1,2),\quad(52)$$

где

$$\overline{F}^+(x,y,t)=(f_0^+(x,y,t),f_1^+(x,y,t),f_2^+(x,y,t))^\top,$$
$$\overline{G}^+(x,y,t)=(g_0^+(x,y,t),g_1^+(x,y,t),g_2^+(x,y,t))^\top,$$

а $f_k^+(x,y,t)$, $g_k^+(x,y,t)$ $(k=0,1,2)$ *определены* (56), (63).

Доказательство следует из (27). Действительно, для определения произвольных функций $f_k^+(x,y,t)$, $g_k^+(x,y,t)$ $(k=0,1,2)$ в $\overline{F}^+(x,y,t)$, $\overline{G}^+(x,y,t)$ учтем в общем решении (27) условия задачи Дирихле (31), (34). Тогда получим равенства

$$U_k^+(\alpha_2^k(x),0)=\omega(\alpha_2^k(x))=R_k^{-1}(x)\overline{\Phi}(x,0)+$$
$$+R_k^{-1}(x)\int_0^1\overline{G}^+(x,0,t)[t(1-t)]^{-5/6}dt,\quad x_0\le x\le x_1,$$

$$U_k^+(\alpha_2^k(x),h)=\varphi(\alpha_2^k(x))=R_k^{-1}(x)\overline{\Phi}(x,h)+hR_k^{-1}(x)\int_0^1\overline{F}^+(x,h,t)[t(1-t)]^{-1/6}dt+$$
$$+R_k^{-1}(x)\int_0^1\overline{G}^+(x,h,t)[t(1-t)]^{-5/6}dt,\quad x_0\le x\le x_1;$$

т. е. системы уравнений

$$R^{-1}(x)\int_0^1\overline{G}^+(x,0,t)[t(1-t)]^{-5/6}dt=\overline{\omega}(x)-R^{-1}(x)\overline{\Phi}(x,0),\quad x_0\le x\le x_1,$$

$$R^{-1}(x)\left[h\int_0^1\overline{F}^+(x,h,t)[t(1-t)]^{-1/6}dt+\int_0^1\overline{G}^+(x,h,t)[t(1-t)]^{-5/6}dt\right]=$$
$$=\overline{\varphi}(x)-R^{-1}(x)\overline{\Phi}(x,h),\quad x_0\le x\le x_1,$$

решения которых имеют вид

$$\int_0^1\overline{G}^+(x,0,t)[t(1-t)]^{-5/6}dt=R(x)\overline{\omega}(x)-\overline{\Phi}(x,0),\quad x_0\le x\le x_1,\quad(53)$$

$$h\int_0^1\overline{F}^+(x,h,t)[t(1-t)]^{-1/6}dt+\int_0^1\overline{G}^+(x,h,t)[t(1-t)]^{-5/6}dt=$$
$$=R(x)\overline{\varphi}(x)-\overline{\Phi}(x,h),\quad x_0\le x\le x_1,\quad(54)$$

где

$$\overline{\varphi}(x)=(\varphi(x),\varphi(\alpha_2(x)),\varphi(\alpha_2^2(x)))^\top,\quad(55)$$

а $\overline{\omega}(x)$ определены в (40).

В силу (22)–(24)

$$\overline{G}^{+}(x,0,t) = (g_0^{+}(x,0,t), g_1^{+}(x,0,t), g_2^{+}(x,0,t))^{\top},$$
$$\overline{F}^{+}(x,h,t) = (f_0^{+}(x,h,t), f_1^{+}(x,h,t), f_2^{+}(x,h,t))^{\top},$$
$$\overline{G}^{+}(x,h,t) = (g_0^{+}(x,h,t), g_1^{+}(x,h,t), g_2^{+}(x,h,t))^{\top},$$

где

$$g_k^{+}(x,0,t) = g_k^{+}(x),$$
$$f_k^{+}(x,h,t) = f_k^{+}\left(x - i\frac{2}{3}h^{3/2}(2t-1)\right) = f_k^{+}(x - i\overline{h}(2t-1)),$$
$$g_k^{+}(x,h,t) = g_k^{+}\left(x - i\frac{2}{3}h^{3/2}(2t-1)\right) = g_k^{+}(x - i\overline{h}(2t-1)),$$

а $\overline{h} = \frac{2}{3}h^{3/2}$. Компоненты (53), (54), учитывая (42), (40), (55), представим равенствами

$$B(1/6,1/6)g_k^{+}(x) = R_k(x)\overline{\omega}(x) - \Phi_k(x,0), \quad x_0 \le x \le x_1; \tag{56}$$

$$\big(3\overline{h}/2\big)^{2/3}\int_0^1 f_k^{+}(x - i\overline{h}(2t-1))[t(1-t)]^{-1/6}dt + \int_0^1 g_k^{+}(x - i\overline{h}(2t-1))[t(1-t)]^{-5/6}dt =$$
$$= V_k(x) \equiv R_k(x)\overline{\varphi}(x) - \Phi_k\big(x, \big(3\overline{h}/2\big)^{2/3}\big), \quad x_0 \le x \le x_1. \tag{57}$$

Запишем (57) в виде

$$\left(\frac{3}{2}\overline{h}\right)^{2/3}(2i\overline{h})^{-2/3}\left(\int_0^{x+i\overline{h}} - \int_0^{x-i\overline{h}}\right) f_k^{+}(\xi)(x + i\overline{h} - \xi)^{-1/6}(\xi - (x - i\overline{h}))^{-1/6}d\xi +$$
$$+ (2i\overline{h})^{2/3}\left(\int_0^{x+i\overline{h}} - \int_0^{x-i\overline{h}}\right) g_k^{+}(\xi)(x + i\overline{h} - \xi)^{-5/6}(\xi - (x - i\overline{h}))^{-5/6}d\xi = V_k(x),$$
$$x_0 \le x \le x_1 \quad (k = 0,1,2), \tag{58}$$

а (58) — в форме разностного уравнения

$$\Theta_k(z) - \Theta_k(\overline{z}) = V_k(x), \quad x_0 \le x \le x_1,$$

или

$$\Theta_k(x + i\overline{h}) - \Theta_k(x - i\overline{h}) = V_k(x), \quad x_0 \le x \le x_1 \quad (k = 0,1,2),$$

которое представимо также равенством

$$\Theta_k(x) = \mathbb{P}_x^{2i\overline{h}}\Theta_k(x) + \mathbb{P}_x^{i\overline{h}}V_k(x), \tag{59}$$

где

$$\Theta_k(z) = \left(\frac{3}{2}\overline{h}\right)^{2/3}(2i\overline{h})^{-2/3}\int_0^z f_k^{+}(\xi)(z - \xi)^{-1/6}(\xi - \overline{z})^{-1/6}d\xi +$$
$$+ (2i\overline{h})^{2/3}\int_0^z g_k^{+}(\xi)(z - \xi)^{-5/6}(\xi - \overline{z})^{-5/6}d\xi, \tag{60}$$

причем $z = x + i\overline{h}$, $\overline{z} = x - i\overline{h}$, а $\mathbb{P}_x^{l(t)}$ — оператор сдвига по переменной x: $\mathbb{P}_x^{l(t)}\rho(x,y) = \rho(x - l(t), y)$.

Разностное уравнение (59) имеет решение [7]

$$\Theta_k(x)=\sum_{m=0}^{+\infty}\mathbb{P}_x^{i\overline{h}(2m+1)}V_k(x)=i\int_{x_0}^{x_1}V_k(\xi)G(x,\xi)d\xi,\quad x_0\le x\le x_1, \tag{61}$$

где

$$G(x,\xi)=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{+\infty}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\ln(\gamma^+(x,\xi;\pi\overline{h}(2m+1))\gamma^-(x,\xi;\pi\overline{h}(2m+1)))\right\},$$

когда $\gamma^\pm(x,\xi;\pi\overline{h}(2m+1))=\cos(\pi(\xi\pm x)/x_1)-\operatorname{ch}(\pi\overline{h}(2m+1)/x_1)$, поскольку любая ([8], с. 7) непрерывная финитная на промежутке $[x_0,x_1]=[0,x_1]$ функция

$$V_k(x)=(V_k(\xi),\delta(\xi-x)-\delta(\xi+x))=\int_{x_0}^{x_1}V_k(\xi)[\delta(\xi-x)-\delta(\xi+x)]d\xi,$$

где

$$\delta(z)=\frac{1}{2x_1}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp(i\lambda_n z),\lambda_n=n\pi/x_1,$$

— дельта-функция Дирака ([9], с. 711–714), и поэтому

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\mathbb{P}_x^{i\overline{h}(2m+1)}V_k(x)=\frac{1}{2x_1}\int_{x_0}^{x_1}V_k(\xi)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(e^{i\lambda_n(\xi-x)}-e^{-i\lambda_n(\xi+x)})\sum_{m=0}^{+\infty}e^{-\lambda_n\overline{h}(2m+1)}d\xi=$$

$$=\frac{i}{x_1}\int_{x_0}^{x_1}V_k(\xi)\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}[\sin\lambda_n(\xi-x)+\sin\lambda_n(\xi+x)]e^{-\lambda_n\overline{h}(2m+1)}\right)d\xi=i\int_{x_0}^{x_1}V_k(\xi)G(x,\xi)d\xi,$$

если применить формулу 5.4.12.1 из ([10], с. 739).

На основании (60), (61) относительно $f_k^+(x)$ приходим к обобщенному интегральному уравнению Абеля ([11], с. 572)

$$\int_0^x\frac{f_k^+(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{1/6}(\xi-(x-2i\overline{h}))^{1/6}}=\sigma(x)\equiv-\big(3\overline{h}/2\big)^{-2/3}(2i\overline{h})^{4/3}\times$$

$$\times\int_0^x\frac{g_k^+(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{5/6}(\xi-(x-2i\overline{h}))^{5/6}}+i\big(3\overline{h}/2\big)^{-2/3}(2i\overline{h})^{2/3}\int_{x_0}^{x_1}V_k(\xi)G(x,\xi)d\xi.$$

Действуя на него оператором $\frac{d}{dx}\int\limits_0^x\frac{1}{(x-t)^{5/6}}[\dots]dt$, используя гипергеометрическую функцию Гаусса ([5], с. 12) ${}_2F_1(a,b;c;t)$, получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода с разностным ядром

$$f_k^+(x)+\int_0^x f_k^+(\xi)\frac{d}{dx}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6};1;\frac{x-\xi}{2i\overline{h}}\right)d\xi=\frac{(2i\overline{h})^{1/6}}{\Gamma(5/6)}\mathcal{D}_{0+}^{5/6}\sigma(x), \tag{62}$$

где $\mathcal{D}_{0+}^{5/6}\sigma(x)=\frac{1}{\Gamma(1/6)}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x\frac{\sigma(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{5/6}}$ — дробная производная Римана–Лиувилля ([12], с. 43) функции $\sigma(x)$ порядка $5/6$.

Решение этого уравнения можно представить в виде ([13], с. 98)

$$f_k^+(x)=\frac{(2i\overline{h})^{1/6}}{\Gamma(5/6)}\left[\mathcal{D}_{0+}^{5/6}\sigma(x)+\int_0^x W(x-t)\mathcal{D}_{0+}^{5/6}\sigma(t)dt\right]. \tag{63}$$

Здесь резольвента $W(x)$ определяется через ядро $Ж(x) = {}_2F_1\big(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}; 1; \frac{x}{2i\overline{h}}\big)$ по формуле

$$W(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p\widetilde{Ж}(p)} - 1\right], \ \widetilde{Ж}(p) = \mathcal{L}[Ж(x)],$$

где $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^{-1}$ — прямое и обратное преобразования Лапласа ([14], с. 30–39). Поэтому

$$\widetilde{Ж}(p) = \mathcal{L}[Ж(x)] = \int_0^{+\infty} e^{-px}Ж(x)dx = \ ([15],\ 4.21(1),\ \text{с. } 191;\ [6],\ 2.21.2.3,\ \text{с. } 318) =$$

$$= \sqrt{\overline{h}}\mathbb{K}_{1/3}(-ip\overline{h})/\sqrt{2i\pi p},$$

$$W(x) = \mathcal{L}^{-1}[\widetilde{W}(p)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{px}\widetilde{W}(p)dp;$$

$\mathbb{K}_\nu(t)$ — функция Макдональда ([4], с. 972).

Окончательный вид $f_k^+(x)$ будет иметь после подстановки в $\sigma(x)$ выражения для $g_k^+(x)$ из (56).

Сделав замену в форме (56), (63) в (22), а $\overline{F}^+(x,y)$, $\overline{G}^+(x,y)$ в (27), получим решение (52) задачи Дирихле в области D_0^+.

Функциональное соотношение между $\omega(\alpha_2^k(x))$ и $\nu(\alpha_2^k(x))$, привнесенное из D_0^+ на линию изменения типа уравнения (1) $y = 0$, $x_0 < x < x_1$, получим из (52) при условии (35)

$$U_{ky}^+(\alpha_2^k(x), 0) = \nu(\alpha_2^k(x)) = R_k^{-1}(x)\overline{\Phi}_y(x,0) + R_k^{-1}(x)\int_0^1 \overline{F}^+(x,0,t)[t(1-t)]^{-1/6}dt,$$

т. е.

$$R^{-1}(x)\int_0^1 \overline{F}^+(x,0,t)[t(1-t)]^{-1/6}dt = \overline{\nu}(x) - R^{-1}(x)\overline{\Phi}_y(x,0), \quad x_0 < x < x_1.$$

Отсюда в силу (22), (23), (42) имеем компоненты

$$B(5/6,5/6)f_k^+(x) = R_k(x)\overline{\nu}(x) - \Phi_{ky}(x,0). \tag{64}$$

Подставив (64), (56) в (61), (60), получим

$$\big(3\overline{h}/2\big)^{2/3}(2i\overline{h})^{-2/3}\frac{1}{B(5/6,5/6)}\int_0^x \frac{R_k(\xi)\overline{\nu}(\xi) - \Phi_{ky}(\xi,0)}{(x-\xi)^{1/6}(\xi-(x-2i\overline{h}))^{1/6}}d\xi + (2i\overline{h})^{2/3}\frac{1}{B(1/6,1/6)}\times$$
$$\times\int_0^x \frac{R_k(\xi)\overline{\omega}(\xi) - \Phi_k(\xi,0)}{(x-\xi)^{5/6}(\xi-(x-2i\overline{h}))^{5/6}}d\xi = i\int_{x_0}^{x_1} V_k(\xi)G(x,\xi)d\xi, \quad x_0 \le x \le x_1 \quad (k=0,1,2) \tag{65}$$

— искомое функциональное соотношение, в котором согласно (57)

$$V_k(x) = R_k(x)\overline{\varphi}(x) - \Phi_k\big(x, \big(3\overline{h}/2\big)^{2/3}\big).$$

Вопрос существования решения задачи T в области $D_0 = D_0^+ \cup D_0^- \cup I_0$ сводится к разрешимости системы функциональных уравнений (51), (65), т. е. к интегральному уравнению

$$(2i\overline{h})^{2/3}\frac{1}{B(1/6,1/6)}\int_0^x \frac{R_k(\xi)\overline{\omega}(\xi) - \Phi_k(\xi,0)}{(x-\xi)^{5/6}(\xi-(x-2i\overline{h}))^{5/6}}d\xi + (2i\overline{h})^{-2/3}\big(3\overline{h}/2\big)^{2/3}\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}\frac{1}{2\pi}\times$$
$$\times\int_0^x \frac{1}{(x-\xi)^{1/6}(\xi-(x-2i\overline{h}))^{1/6}}\left\{\frac{d}{d\xi}\int_0^\xi (\xi-r)^{-2/3}[R_k(r)\overline{\omega}(r) - \Phi_k(r,0)]dr - \xi^{1/6}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{d}{d\xi}\int_0^\xi (\xi-r)^{-5/6}\left[R_k(r/2)\overline{\psi}(r/2) - \Phi_k\big(r/2, -(3r/4)^{2/3}\big)\right]dr\right\}d\xi = i\int_{x_0}^{x_1} V_k(\xi)G(x,\xi)d\xi, \tag{66}$$

$$x_0 \le x \le x_1 \quad (k=0,1,2).$$

Применив формулу Дирихле перестановки порядка интегрирования, замену переменной $\xi = r + z(x-r)$, гипергеометрическую функцию Гаусса и формулы ее преобразования, а также равенство $\frac{d}{d\xi}\int\limits_0^\xi (\xi-r)^{-2/3}[\ldots]dr = \int\limits_0^\xi (\xi-r)^{-2/3}\big(\frac{d}{dr}[\ldots]\big)dr$, имеющее место при $[\cdots]|_{r=0}$, найдем

$$\int_0^x \frac{d\xi}{(x-\xi)^{1/6}(\xi-(x-2i\overline{h}))^{1/6}}\frac{d}{d\xi}\int_0^\xi (\xi-r)^{-2/3}[R_k(r)\overline{\omega}(r)-\Phi_k(r,0)]dr =$$
$$= \int_0^x \frac{d\xi}{(x-\xi)^{1/6}(\xi-(x-2i\overline{h}))^{1/6}}\int_0^\xi (\xi-r)^{-2/3}\left(\frac{d}{dr}[\ldots]\right)dr = \int_0^x \left(\frac{d}{dr}[\ldots]\right)dr\times$$
$$\times\int_r^x (\xi-r)^{-2/3}(x-\xi)^{-1/6}(\xi-(x-2i\overline{h}))^{-1/6}d\xi = \int_0^x \left(\frac{d}{dr}[\ldots]\right)(x-r)^{1/6}\times$$
$$\times(r-(x-2i\overline{h}))^{-1/6}dr\int_0^1 z^{-2/3}(1-z)^{-1/6}\big(1-z\Omega\big)^{-1/6}dz = \left\{\Omega = \frac{r-x}{r-(x-2i\overline{h})}\right\} = (-1)^{1/6}B\left(\frac{1}{3},\frac{5}{6}\right)\times$$
$$\times\int_0^x \left(\frac{d}{dr}[\cdots]\right)\Omega^{1/6}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3};\frac{7}{6};\Omega\right)dr = -(-1)^{1/6}B\left(\frac{1}{3},\frac{5}{6}\right)\frac{1}{6}\times$$
$$\times\int_0^x [\cdots]\Omega^{-5/6}\,{}_2F_1\left(\frac{7}{6},\frac{1}{3};\frac{7}{6};\Omega\right)\frac{2i\overline{h}}{(r-(x-2i\overline{h}))^2}dr =$$
$$= -\frac{1}{6}B\left(\frac{1}{3},\frac{5}{6}\right)(2i\overline{h})^{2/3}\int_0^x \frac{R_k(r)\overline{\omega}(r)-\Phi_k(r,0)}{(x-r)^{5/6}(r-(x-2i\overline{h}))^{5/6}}dr.$$

Поэтому равенство (66) примет вид

$$-(2\overline{h})^{2/3}\frac{2}{B(1/6,1/6)}\int_0^x \frac{R_k(\xi)\overline{\omega}(\xi)-\Phi_k(\xi,0)}{(x-\xi)^{5/6}(\xi-(x-2i\overline{h}))^{5/6}}d\xi = i\int_{x_0}^{x_1} V_k(\xi)G(x,\xi)d\xi -$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^x \frac{\xi^{1/6}}{(x-\xi)^{1/6}(\xi-(x-2i\overline{h}))^{1/6}}\left(\frac{d}{d\xi}\int_0^\xi (\xi-r)^{-5/6}\Big[R_k(r/2)\overline{\psi}(r/2)-\right.$$
$$\left.-\Phi_k\big(r/2,-\big(3r/4\big)^{2/3}\big)\Big]dr\right)d\xi, \quad x_0 \le x \le x_1 \quad (k=0,1,2),$$

т. е.

$$\int_0^x \frac{R_k(\xi)\overline{\omega}(\xi)-\Phi_k(\xi,0)}{(x-\xi)^{5/6}(\xi-(x-2i\overline{h}))^{5/6}}d\xi = S(x), \quad x_0 \le x \le x_1 \quad (k=0,1,2), \tag{67}$$

где

$$S(x) = -\frac{1}{2}(2\overline{h})^{-2/3}B(1/6,1/6)\left\{i\int_{x_0}^{x_1} V_k(\xi)G(x,\xi)d\xi - \frac{1}{2\pi}B(1/6,5/6)\times\right.$$
$$\times\int_0^x \left(\frac{r}{r-(x-2i\overline{h}}\right)^{1/6} F_1\left(\frac{1}{6},-\frac{1}{6},\frac{1}{6};1;\frac{r-x}{r},\Omega\right)\frac{d}{dr}\Big[R_k(r/2)\overline{\psi}(r/2)-$$
$$\left.-\Phi_k\Big(r/2,-\big(3r/4\big)^{2/3}\Big)\Big]dr\right\}, \tag{68}$$

а F_1 — гипергеометрическая функция М. Лауричелла от двух переменных ([16], с. 114–120).

Действуя на уравнение (67) оператором $\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{1}{(x-t)^{1/6}}[\dots]dt$, используя гипергеометрическую функцию Гаусса, аналогично (62) получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода с разностным ядром

$$R_k(x)\overline{\omega}(x) - \Phi_k(x,0) + \int_0^x [R_k(r)\overline{\omega}(r) - \Phi_k(r,0)]\frac{d}{dx}\,{}_2F_1\left(\frac{5}{6},\frac{1}{6};1;\frac{x-r}{2i\overline{h}}\right)dr = \\ = \frac{(2i\overline{h})^{5/6}}{\Gamma(1/6)}\mathcal{D}_{0+}^{1/6}S(x), \quad (69)$$

где $\mathcal{D}_{0+}^{1/6}S(x) = \frac{1}{\Gamma(5/6)}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{S(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{1/6}}$ — дробная производная Римана–Лиувилля ([12], с. 43) функции $S(x)$ из (68) порядка $1/6$.

Решение уравнения (69) можно ([13], с. 98) аналогично (63) записать в виде

$$R_k(x)\overline{\omega}(x) - \Phi_k(x,0) = \frac{(2i\overline{h})^{5/6}}{\Gamma(1/6)}\left[\mathcal{D}_{0+}^{1/6}S(x) + \int_0^x W(x-t)\mathcal{D}_{0+}^{1/6}S(t)dt\right], \quad (70)$$

где резольвента $W(x)$ оределяется в форме резольвенты для уравнения (62), поскольку ядро уравнения (69) совпадает с ядром уравнения (62).

На основании свойств функций $\varphi(\alpha_2^k(x))$, $\psi_k(\alpha_2^k(x))$ $(k=0,1,2)$ (т. е. $\overline{\varphi}(x)$, $\overline{\psi}(x)$) и того, что $G(x,\xi)$ дважды непрерывно дифференцируема при $x_0 < x,\xi < x_1$, из (70) следует $\omega(\alpha_2^k(x)) \in C[x_0,x_1] \cap C^2(x_0,x_1)$.

Равенство (51), после подстановки (70), дает представление для функции $\overline{\nu}(x)$ (т. е. $\nu(\alpha_2^k(x))$ $(k=0,1,2)$), причем $\nu(\alpha_2^k(x)) \in C^1(x_0,x_1)$.

Подстановка функций $\omega(\alpha_2^k(x))$, $\nu(\alpha_2^k(x))$ в формулы (37), (52) приводит к окончательному виду решения задачи Коши и задачи Дирихле в областях D_0^- и D_0^+, т. е. в области $D_0 = D_0^+ \cup D_0^- \cup I_0$.

Литература

[1] Бицадзе А.В. *Уравнения смешанного типа* (Изд-во АН СССР, М., 1959).

[2] Франкль Ф.И. *Избранные труды по газовой динамике* (Наука, М., 1973).

[3] Зарубин А.Н. *Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом* (Изд–во Орловск. гос. ун-та, Орел, 1999).

[4] Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (Наука, М.,1971).

[5] Кампе де Ферье Ж., Кемпбелл Р., Петьо Г., Фогель Т. *Функции математической физики* (ФИЗМАТЛИТ, М., 1963).

[6] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Дополнительные главы* (Наука, М.,1986).

[7] Зарубин А.Н. *Краевая задача для уравнения смешанного типа с опережающе-запаздывающим аргументом*, Дифференц. уравнения **48** (10). 1404–1411 (2012).

[8] Агранович М.С. *Обобщенные функции* (МЦНМО, М., 2008).

[9] Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. *Курс математического анализа* (Наука, М.,1988).

[10] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Элементарные функции* (Наука, М.,1981).

[11] Гахов Ф.Д. *Краевые задачи* (Наука, М., 1977).

[12] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их применения* (Наука и техника, Минск, 1987).

[13] Полянин А.Д., Манжиров А.В. *Справочник по интегральным уравнениям* (ФИЗМАТЛИТ, М., 2003).

[14] Диткин В.А., Прудников А.П. *Интегральные преобразования и операционное исчисление* (Наука, М., 1961).

[15] Бейтмен Г., Эрдейи А. *Таблицы интегральных преобразований* (Наука, М., 1969).

[16] Appel P. and Kampé de Fériet J. *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynome d'Hermite* (Paris, Gauthier-Villars, 1926).

Александр Николаевич Зарубин

Орловский государственный университет,
ул. Комсомольская, д. 95, г. Орел, 302026, Россия,

e-mail: aleks_zarubin@mail.ru

A.N. Zarubin

Boundary-value problem for functional-differential advancing-retarding Tricomi equation

Abstract. We investigate the problem for Tricomi mixed-type equation with multiple functional retarding and advancing. We construct the general solution to the equation. The problem is uiquely solvable.

Keywords: mixed-type equation, integral equation, difference equation.

Aleksandr Nikolaevich Zarubin

Orel State University,
95 Komsomol'skaya str., Orel, 302026 Russia,

e-mail: aleks_zarubin@mail.ru