

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 534.121

doi: 10.26907/2541-7746.2022.2-3.170-180

КРЕЙСЕРСКАЯ СКОРОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КРЫЛА ПРИ МАЛЫХ ПОСТУПАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

А.Г. Егоров, А.Н. Нуриев

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Работа посвящена исследованию пропульсивного движения машущего крыла кругового поперечного сечения. Решена задача о гармонических поступательно-вращательных колебаниях крыла с произвольным сдвигом фаз в вязкой несжимаемой жидкости, движение которой описывается нестационарным уравнением Навье – Стокса. С применением метода последовательных асимптотических разложений для случая малых амплитуд колебаний построено аналитическое решение задачи в первых двух членах. Показано, что нелинейное взаимодействие временных гармоник поступательных и вращательных колебаний создает вторичные потоки, которые заставляют крыло двигаться в направлении, перпендикулярном к оси поступательных колебаний. Для крейсерского движения, когда средняя гидродинамическая сила, действующая на крыло, равна нулю, получены зависимости средней скорости от безразмерных параметров колебаний.

Ключевые слова: машущее крыло, гармонические колебания, крейсерская скорость, уравнение Навье – Стокса, асимптотический анализ

Введение

Полет птиц, при котором крыло совершает сложное поступательно-вращательное периодическое движение, издавна привлекал внимание людей. Математическая теория машущего полета начала развиваться примерно сто лет назад. В 1924 г. Прандтль [1] сформулировал проблему нестационарного движения крыла, которая в линейном приближении была решена в работе Бирнбаума [2]. Подход Прандтля – Бирнбаума, основанный на введении поверхностей разрыва скоростей внутри идеальной жидкости, нашел свое дальнейшее развитие в работах [3–6] и др. До настоящего времени основой большинства аналитических исследований машущего крыла является модель идеальной жидкости, дополняемая специальными предположениями о характере отрыва течения [1, 2, 4, 6], о структуре вихревого следа [7, 8] и т. п. В настоящем исследовании развивается иной подход, основанный на методе асимптотических разложений решения полной системы уравнений Навье – Стокса по малому параметру [9–13]. В качестве малого параметра выбирается отношение амплитуды A поперечных колебаний к радиусу a цилиндра: $\gamma = A/a$.

Асимптотическое исследование задачи о вращательно-поступательных колебаниях круглого цилиндра впервые было проведено в [14]. В работе главным образом рассматривались структурные особенности вторичных течений в условиях нулевой средней скорости движения цилиндра. Для случая высоких частот авторами было

отмечено появление ненулевой средней силы, действующей на цилиндр. Этот факт, однако, остался практически незамеченным.

В действительности, как показано в [15], асимптотическое решение задачи открывает широкие возможности в изучении пропульсивного движения цилиндра в режиме машущего крыла. В отличие от [14], в указанной работе аналитическое решение строится для случая движения тела с крейсерской скоростью в условиях нулевой средней силы, действующей за период колебаний. Крейсерская скорость при этом определяется из решения задачи.

В [15] крейсерская скорость найдена, когда гармонические вращательные и поступательные колебания синфазны. В нашем исследовании результаты [15] обобщены на случай произвольного сдвига фазы. Результаты показывают, что при относительно больших углах поворота крейсерская скорость машущего крыла сравнима со скоростью поперечных колебаний.

1. Постановка задачи

Рассмотрим движение круглого цилиндрического крыла радиуса a , совершающего одновременно поперечные и вращательные гармонические колебания с одной и той же частотой ω и амплитудами A , Θ соответственно (рис. 1), в вязкой несжимаемой жидкости. Для описания течения жидкости перейдем в подвижную полярную систему координат, перемещающуюся поступательно вместе с центром цилиндра, и безразмерим пространственные переменные, время и скорость на a , ω^{-1} , $U = A\omega$ соответственно. Используя в качестве основных характеристик течения завихренность w и функцию тока ψ , связанные со скоростями v_r , v_θ движения жидкости соотношениями

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad w = -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right),$$

запишем определяющие уравнения в виде

$$r > 1: \quad w = \Delta \psi, \quad \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\gamma}{r} \frac{\partial(\psi, w)}{\partial(r, \theta)} = \beta^{-1} \Delta w, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\psi, w)}{\partial(r, \theta)} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial r},$$

где Δ – оператор Лапласа, β и γ – безразмерные частота и амплитуда поперечных колебаний. Эти параметры определяются как

$$\beta = \frac{a^2 \omega}{\nu}, \quad \gamma = \frac{A}{a}.$$

Далее параметр γ будет считаться малым.

Уравнения движения жидкости дополним следующими граничными условиями:

$$r = 1: \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = \xi \cos t \quad (2)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \psi \sim -r \sin \theta \cos(t + \varphi) + u_\infty^* r \cos(\theta + \alpha). \quad (3)$$

На границе цилиндра ($r = 1$) задаются условия прилипания (2). Параметр ξ – это третий безразмерный параметр задачи. Он определяет отношение амплитуд вращательного (Θ) и поступательного (A) колебаний

$$\xi = \frac{a\Theta}{A}.$$

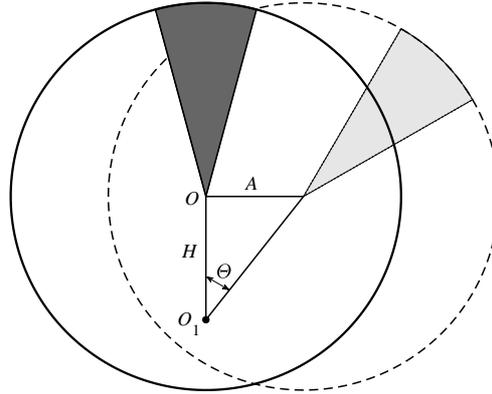


Рис. 1. Схема синфазных поперечно-крутильных колебаний цилиндра. Пунктирной линией показано крайнее положение цилиндра. A , Θ – амплитуды поперечных и крутильных колебаний, $H = A/\Theta$ – расстояние между центром цилиндра O и центром скоростей O_1 в выделенном положении

Правая часть условия на бесконечности (3) содержит два слагаемых. Первое определяет однородный осцилляционный поток в направлении оси Ox колебаний цилиндра, φ – сдвиг фаз между крутильными и поперечными колебаниями. Второе слагаемое в (3) задает стационарный поток, направленный под углом α к оси Oy , он определяет среднюю скорость движения цилиндра в жидкости. Далее рассмотрим случай движения цилиндра с крейсерской скоростью. В условиях малости амплитуд колебания порядок крейсерской скорости, очевидно, не может быть выше чем $O(\xi\gamma)$, поэтому далее примем, что $u_\infty^* = u_\infty \xi \gamma$. Величины u_∞ и α будем считать неизвестными и определять их в ходе решения задачи из условия равенства нулю средних за период сил, действующих на цилиндр:

$$\langle f_x(t) \rangle = \langle f_y(t) \rangle = 0. \quad (4)$$

Угловыми скобками здесь и далее обозначается среднее за период колебаний, через f_x , f_y – нормированные на $2\pi\rho a^2 U \omega$ (ρ – плотность жидкости) компоненты сил, представимые в терминах завихренности как [15]:

$$f_y - i f_x = \frac{i}{2} \sin(t + \varphi) + \frac{1}{2\pi\beta} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial w}{\partial r} - w \right)_{r=1} e^{i\theta} d\theta. \quad (5)$$

Первое слагаемое в выражении для сил есть сила Крылова–Фруда, появляющаяся как результат перехода в подвижную систему координат. Слагаемые, пропорциональные w и $\partial w/\partial r$ в (5), представляют вклад в силы и момент касательных напряжений и давления соответственно.

2. Асимптотическое решение

2.1. Разложение по малому параметру. Не делая пока никаких допущений относительно частоты колебаний β , предположим малость амплитуд поперечных колебаний $\gamma \ll 1$ и малость углов поворота $\Theta \sim \gamma$ (то есть $\xi \sim 1$). Будем искать решение поставленной задачи в виде ряда по степеням γ , ограничиваясь первыми двумя членами

$$\psi = \psi^{(0)} + \gamma\psi^{(1)} + \dots, \quad w = w^{(0)} + \gamma w^{(1)} + \dots. \quad (6)$$

В главном члене получаем стоксово приближение исходной задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} w^{(0)} - \beta^{-1} \Delta w^{(0)} &= 0, & w^{(0)} &= \Delta \psi^{(0)} \\ r = 1: \quad \psi^{(0)} &= 0, & \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial r} &= \xi \cos t, & r \rightarrow \infty: \quad \psi^{(0)} &\sim -\cos(t + \varphi) \cdot r \sin \theta. \end{aligned} \quad (7)$$

Стоксово решение задачи описывает чисто периодическое движение жидкости.

Для следующего члена имеем из (1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} w^{(1)} - \beta^{-1} \Delta w^{(1)} &= G, & w^{(1)} &= \Delta \psi^{(1)}, & G &= \frac{1}{r} \frac{\partial(\psi^{(0)}, w^{(0)})}{\partial(r, \theta)}; \\ r = 1: \quad \psi^{(1)} &= \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r} = 0, & r \rightarrow \infty: \quad \psi^{(1)} &\sim \xi u_\infty r \cos(\theta + \alpha). \end{aligned} \quad (8)$$

Решение второй подзадачи содержит как периодическую, так и стационарную составляющие. Последняя часто называется вторичными течениями. Как будет показано далее, именно эти течения, в рассматриваемом случае поперечно вращательных колебаний, обеспечивают направленное движение цилиндра в жидкости.

2.2. Стоксово приближение. В стоксовом приближении линейная задача (7) расщепляется на две. Первая из них – задача обтекания неподвижного цилиндра колебательным потоком жидкости, вторая – задача вращательных колебаний цилиндра в неподвижной жидкости. Таким образом, общий поток представляется в виде суммы двух потоков

$$\begin{aligned} \psi^{(0)} &= \sin \theta \operatorname{Re}(\Psi_1(r) e^{i(t+\varphi)}) + \xi \operatorname{Re}(\Psi_2(r) e^{it}), \\ w^{(0)} &= \sin \theta \operatorname{Re}(W_1(r) e^{i(t+\varphi)}) + \xi \operatorname{Re}(W_2(r) e^{it}). \end{aligned}$$

Решение соответствующих одномерных задач дает

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= -r + \frac{1}{r} + \frac{S_x}{r} + z^{-2} W_1, & W_1 &= -2z \frac{K_1(zr)}{K_0(z)}, & S_x(z) &= \frac{2K_1(z)}{zK_0(z)}, \\ \Psi_2 &= S_\theta + z^{-2} W_2, & W_2 &= -z \frac{K_0(zr)}{K_1(z)}, & S_\theta(z) &= \frac{K_0(z)}{zK_1(z)}, & z &= \sqrt{i\beta}. \end{aligned}$$

Здесь K_j – модифицированные функции Бесселя. Как видно, вне стоксова пограничного слоя толщины порядка $\beta^{-1/2}$ завихренность экспоненциально быстро затухает и течение становится потенциальным. Дополнительные вязкие члены $S_x r^{-1}$ и S_θ , исчезающие в эффективно невязкой жидкости (при $\beta = \infty$), корректируют вне пограничного слоя бесциркуляционный поток идеальной жидкости.

В практически важном случае больших β поведение S_x , S_θ дается асимптотиками

$$\begin{aligned} z \rightarrow \infty: \quad S_\theta(z) &\sim \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{3}{8z^3} - \frac{3}{8z^4} + O(z^{-5}), \\ S_x(z) &\sim \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{4z^3} + \frac{1}{4z^4} + O(z^{-5}). \end{aligned}$$

2.3. Задача о вторичных течениях. Обратимся к нахождению членов первого порядка в асимптотическом представлении (6). Нас будут интересовать лишь их стационарные компоненты, описывающие вторичные течения. Такие же компоненты следует удерживать в правой части G уравнения (8).

2.3.1. Вычисление правой части. Выделим стационарные компоненты в G . Используя полученные выше в п. 2.2. выражения для $\psi^{(0)}, \omega^{(0)}$, получим

$$rG = \frac{1}{2} \sin 2\theta \left[\operatorname{Re} \left(\Psi'_1 e^{i(t+\varphi)} \right) \operatorname{Re} \left(W_1 e^{i(t+\varphi)} \right) - \operatorname{Re} \left(\Psi_1 e^{i(t+\varphi)} \right) \operatorname{Re} \left(W'_1 e^{i(t+\varphi)} \right) \right] + \\ + \xi \cos \theta \left[\operatorname{Re} \left(\Psi'_2 e^{it} \right) \operatorname{Re} \left(W_1 e^{i(t+\varphi)} \right) - \operatorname{Re} \left(W'_2 e^{it} \right) \operatorname{Re} \left(\Psi_1 e^{i(t+\varphi)} \right) \right].$$

Штрихи здесь и далее обозначают дифференцирование по r . Возьмем среднее от произведений в правой части. Обозначая чертой сверху комплексное сопряжение, получим

$$\begin{aligned} \left\langle \operatorname{Re} \left(\Psi'_2 e^{it} \right) \cdot \operatorname{Re} \left(W_1 e^{i(t+\varphi)} \right) \right\rangle &= \frac{1}{4} \left\langle \left(\Psi'_2 e^{it} + \overline{\Psi'_2} e^{-it} \right) \left(W_1 e^{i(t+\varphi)} + \overline{W_1} e^{-i(t+\varphi)} \right) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{4} \left\langle \Psi'_2 W_1 e^{i(2t+\varphi)} + \overline{\Psi'_2} \overline{W_1} e^{-i(2t+\varphi)} + \Psi'_2 \overline{W_1} e^{-i\varphi} + \overline{\Psi'_2} W_1 e^{i\varphi} \right\rangle = \\ &= \frac{1}{4} \left(0 + 0 + \Psi'_2 \overline{W_1} e^{-i\varphi} + \overline{\Psi'_2} W_1 e^{-i\varphi} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\Psi'_2 \overline{W_1} e^{-i\varphi} \right). \end{aligned}$$

Проводя аналогичные выкладки для остальных произведений, найдем

$$\langle G \rangle = G_x \sin 2\theta + \xi G_\theta \cos \theta,$$

$$G_x(r; \beta) = \frac{1}{4r} \operatorname{Re} \left(\overline{W_1} \Psi'_1 - \overline{\Psi_1} W'_1 \right), \quad G_\theta(r; \beta, \varphi) = \frac{1}{2r} \operatorname{Re} \left(e^{-i\varphi} \left(\overline{W_1} \Psi'_2 - \overline{\Psi_1} W'_2 \right) \right).$$

Используя полученные в п. 2.2. формулы для Ψ_1, Ψ_2, W_1, W_2 и обозначая

$$\Phi_k(r; \beta) = \frac{K_k(\sqrt{i\beta}r)}{K_k(\sqrt{i\beta})}, \quad S(\beta) = S_x + 1 = \frac{K_2(\sqrt{i\beta})}{K_0(\sqrt{i\beta})},$$

найдем G_x, G_θ . Для G_θ имеем

$$\begin{aligned} G_\theta(r; \beta, \varphi) &= \frac{1}{2r} \operatorname{Re} \left(e^{-i\varphi} \left(\overline{W_1} \frac{W'_2}{i\beta} - W'_2 \left(-r + \overline{S}r^{-1} - \frac{\overline{W_1}}{i\beta} \right) \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2r} \operatorname{Re} \left(e^{-i\varphi} W'_2 \left(\frac{2}{i\beta} \overline{W_1} + \left(r - \frac{\overline{S}}{r} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

С учетом

$$W'_2 = i\beta\Phi_1, \quad W_1 = -i\beta\Phi_1(S-1)$$

получим

$$G_\theta(r; \beta, \varphi) = \operatorname{Re} \left(i\beta e^{-i\varphi} \left(\frac{1}{r} |\Phi_1|^2 (\overline{S} - 1) + \frac{1}{2} \Phi_1 (1 - \overline{S}r^{-2}) \right) \right).$$

Аналогичные выкладки для G_x дают

$$G_x(r; \beta) = \frac{\beta}{2} \operatorname{Im} \left(\frac{\overline{S}\Phi_0}{r^2} + 2S\Phi_2\overline{\Phi_0} - S\Phi_2 \right).$$

2.3.2. Решение задачи. Представляя решение в виде

$$\psi^{(1)} = \Psi_x(r) \sin 2\theta + \xi \Psi_\theta(r) \cos \theta, \quad (9)$$

получим для нахождения Ψ_x и Ψ_θ следующие задачи

$$\mathcal{L}_2^2 \Psi_x = -\beta G_x, \quad \mathcal{L}_1^2 \Psi_\theta = -\beta G_\theta, \quad \mathcal{L}_k = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{k^2}{r^2}; \quad (10)$$

$$r = 1: \quad \Psi_x = \Psi'_x = \Psi_\theta = \Psi'_\theta = 0, \quad r \rightarrow \infty: \quad \Psi'_x = 0, \quad \Psi'_\theta = u_\infty. \quad (11)$$

Правые части (10) экспоненциально убывают с ростом r . Как следствие, существуют единственные экспоненциально убывающие на бесконечности решения $\tilde{\Psi}_x$, $\tilde{\Psi}_\theta$ неоднородных уравнений (10). С использованием метода вариации произвольной постоянной их можно представить в следующей интегральной форме:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_x &= -\frac{\beta r^4}{48} \int_1^\infty G_x(rx) (x^2 - 1)^3 \frac{dx}{x}, \\ \tilde{\Psi}_\theta &= -\frac{\beta r^4}{16} \int_1^\infty G_\theta(rx) (x^4 - 4x^2 \ln x - 1) dx. \end{aligned} \quad (12)$$

Добавляя к $\tilde{\Psi}_x$, $\tilde{\Psi}_\theta$ общие решения однородных уравнений, запишем

$$\begin{aligned} \Psi_x &= \tilde{\Psi}_x - \frac{B_x}{r^2} + C_x \left(1 - \frac{1}{r^2}\right), \\ \Psi_\theta &= \tilde{\Psi}_\theta - \frac{B_\theta}{r} + C_\theta \left(r - \frac{1}{r}\right) + D \left(r \ln r - \frac{r}{2} + \frac{1}{2r}\right). \end{aligned} \quad (13)$$

Граничные условия при $r = 1$ удовлетворяются за счет выбора произвольных констант $B_{x,\theta}$, $C_{x,\theta}$

$$B_{x,\theta} = \tilde{\Psi}_{x,\theta}(1), \quad C_\theta = -\frac{\tilde{\Psi}'_\theta(1) + \tilde{\Psi}_\theta(1)}{2}, \quad C_x = -\frac{\tilde{\Psi}'_x(1) + 2\tilde{\Psi}_x(1)}{2}. \quad (14)$$

Функция Ψ_x при $r \rightarrow \infty$ выходит на константу C_x , что не противоречит граничным условиям на бесконечности. Функция Ψ_θ имеет классическую логарифмическую особенность на бесконечности. Определить константу D и удовлетворить условию для функции тока при $r \rightarrow \infty$ для произвольной скорости стационарного потока без специального учета конвективных членов невозможно (парадокс Стокса). Лишь при специальном выборе $u_\infty = C_\theta(\beta)$ и $\alpha = 0$ условие на бесконечности выполняется, а константа D обращается в нуль. Оказывается, что указанный выбор в точности соответствует принятому нами требованию равенства нулю средних за период сил, действующих на тело со стороны жидкости (см. [15]).

Отсюда следует, что крейсерская скорость, с которой будет перемещаться в неподвижной жидкости свободный цилиндр, направлена вдоль оси Oy и равна $u_\infty = C_\theta$.

3. Анализ результатов

Основной интересующей нас характеристикой исследуемого процесса является безразмерная крейсерская скорость цилиндра. Представим u_∞ в виде суммы синфазной (по отношению к скорости вращательных колебаний) $u_{\infty,c}$ и квадратурной $u_{\infty,s}$ составляющих

$$u_\infty = u_{\infty,c}(\beta) \cos \varphi - u_{\infty,s}(\beta) \sin \varphi.$$

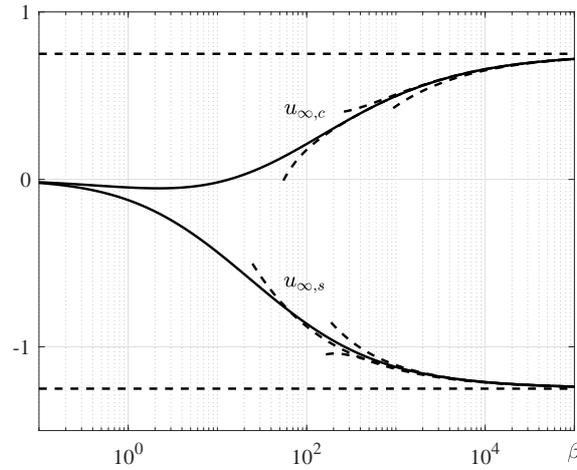


Рис. 2. Зависимость крейсерской скорости от безразмерной частоты β при $\varphi = 0$ ($u_\infty = u_{\infty,c}$) и $\varphi = -\pi/2$ ($u_\infty = u_{\infty,s}$). Штриховыми линиями показаны асимптотики различных порядков

Величины $u_{\infty,c}$ и $u_{\infty,s}$ подсчитываются по формулам (14) с заменой в них $\tilde{\Psi}_\theta$ на $\tilde{\Psi}_{\theta,c}$ и $\tilde{\Psi}_{\theta,s}$ соответственно. Экспоненциально убывающие функции $\tilde{\Psi}_{\theta,c}$ и $\tilde{\Psi}_{\theta,s}$ задаются интегралом (12) с заменой в нем ядра G_θ на вещественнозначные функции $G_{\theta,c}$ и $G_{\theta,s}$

$$G_{\theta,s} + iG_{\theta,c} = \frac{\beta}{r} |\Phi_1|^2 (S - 1) + \frac{\beta}{2} \bar{\Phi}_1 (1 - Sr^{-2}).$$

Зависимости $u_{\infty,c}(\beta)$, $u_{\infty,s}(\beta)$ показаны сплошными линиями на рис. 2. Первая из них отвечает случаю $\varphi = 0$ синфазных колебаний. Она была получена ранее в [15]. Вторая – случаю $\varphi = -\pi/2$.

Как было установлено в [15], для синфазных колебаний (когда $u_\infty = u_{\infty,c}$) имеются два вида среднего стационарного движения цилиндра: прямое ($u_\infty > 0$) и обратное ($u_\infty < 0$). Первый из них реализуется при $\beta > \beta_\theta = 13.5355$ и характеризуется монотонным ростом скорости u_∞ с ростом β . Максимальная размерная скорость такого движения (см рис. 2), равная $\frac{3}{4} \gamma \xi U = \frac{3}{4} \Theta U$, вполне соизмерима с максимальной скоростью U колебаний цилиндра. Обратное движение происходит при $\beta < \beta_\theta$. Его безразмерная скорость достигает наименьшего значения $u_\infty = -0.0534$ при $\beta = 2.18$. Эта скорость более чем на порядок меньше наибольшей безразмерной скорости $u_\infty = 0.75$ прямого движения.

Для случая $u_\infty = u_{\infty,s}$ (когда фазы вращательных и поступательных колебаний смещены на $\varphi = -\pi/2$) полученные результаты показывают наличие лишь одного вида среднего стационарного движения цилиндра – обратного ($u_\infty < 0$). Безразмерная скорость монотонно убывает с ростом β и достигает наименьшего значения $u_\infty = -\frac{5}{4} \gamma \xi U = -\frac{5}{4} \Theta U$. С изменением фазы колебаний на противоположную ($\varphi = \pi/2$) крейсерская скорость, очевидно, меняет свой знак.

Асимптотическое поведение крейсерской скорости в практически важном случае $\beta \rightarrow \infty$ можно найти с использованием известного асимптотического разложения модифицированных функций Бесселя при больших значениях аргумента

и леммы Ватсона:

$$\begin{aligned} C_{\theta,c} &= \frac{3}{4} - 7\sqrt{2}\beta^{-1/2} + \frac{1117}{16}\beta^{-1} - \frac{3183}{8\sqrt{2}}\beta^{-3/2} + O(\beta^{-2}), \\ C_{\theta,s} &= -\frac{5}{4} + \frac{21}{4\sqrt{2}}\beta^{-1/2} + \frac{187}{8}\beta^{-1} - \frac{21713}{32\sqrt{2}}\beta^{-3/2} + O(\beta^{-2}). \end{aligned} \quad (15)$$

Для сравнения они, наряду с точным результатом, показаны штриховыми линиями на рис. 2.

На практике для вычисления $u_{\infty,c}(\beta)$, $u_{\infty,s}(\beta)$ удобно пользоваться аппроксимациями Паде. Для $u_{\infty,c}$ имеем

$$u_{\infty,c}(\beta) = \frac{\beta - 3.7\sqrt{\beta}}{1.33\beta + 12.7\sqrt{\beta} + 41.7}.$$

Представленная аппроксимация точна в главных двух членах асимптотики $\beta \rightarrow \infty$ и верно определяет нуль $u_{\infty,c}(\beta)$. При $\beta > 0.5$ ее относительная погрешность не превышает 5%. Аналогичная аппроксимация

$$u_{\infty,s}(\beta) = -\frac{\beta + 1.4\sqrt{\beta}}{0.8\beta + 3.5\sqrt{\beta} + 3.6}$$

также точна в главных двух членах асимптотики $\beta \rightarrow \infty$. При $\beta > 10^{-3}$ ее относительная погрешность не превышает 3%.

Заключение

В работе проведено исследование задачи о направленном движении цилиндрического крыла круглого сечения, совершающего поступательно-вращательные колебания в вязкой несжимаемой жидкости. Аналитически найдены первые два члена асимптотического разложения решения задачи по малым амплитудам колебаний ($\gamma \ll 1$): первый член описывает первичное нестационарное стоксово течение, второй – установившееся течение, формируемое в результате нелинейного взаимодействия временных гармоник. Показано, что взаимодействие временных гармоник поступательных и вращательных колебаний приводит к формированию ненулевой средней скорости движения. Полученное решение позволяет описать режим крейсерского движения, когда средняя сила, действующая на тело в период колебаний, равна нулю. Результаты исследования показывают, что максимальная по модулю безразмерная крейсерская скорость составляет $3/4\Theta$ (три четверти максимального угла поворота) при синфазных поступательно-вращательных колебаниях и $5/4\Theta$ для случая, когда фазы вращательных и поступательных колебаний смещены на $\pi/2$.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 22-79-10033.

Литература

1. Prandtl L. Über die Entstehung von Wirbeln in der idealen Flüssigkeit, mit Anwendung auf die Tragflügeltheorie und andere Aufgaben // v. Kármán T., Levi-Civita T. (Hrsg.) Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik (Innsbruck 1922). – Berlin, Heidelberg: Springer, 1924. – S. 18–33. – doi: 10.1007/978-3-662-00280-3_2.
2. Birnbaum W. Der Schlagflügelpropeller und die kleinen Schwingungen elastisch befestigter Tragflügel // Z. Flugtech. Motorluftschiffahrt. – 1924. – Bd. 15, H. 11–12. – S. 128–134.

3. *Келдыш М.В., Лаврентьев М.А.* К теории колеблющегося крыла // Технические заметки. – 1935. – № 45: Сб. общетеоретической группы ЦАГИ. – С. 48–52.
4. *Theodorsen T.* General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter: NASA Rep. No 496. – Washington: Supt. Doc., 1935. – 23 p.
5. *Некрасов А.И.* Теория крыла в нестационарном потоке. – М.: Изд-во АН СССР, 1947. – 258 с.
6. *Седов Л.И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. – М.: Наука, 1966. – 448 с.
7. *Голубев В.В.* Лекции по теории крыла. – М.-Л.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1949. – 480 с.
8. *Голубев В.В.* О некоторых вопросах теории машущего крыла // Учен. зап. Моск. гос. ун-та. – 1951. – № 152. – С. 3–12.
9. *Schlichting H.* Berechnung ebener periodischer Grenzschichtströmungen // Phys. Z. – 1932. – Bd. 33. – S. 327–335.
10. *Holtmark J., Johnsen I., Sikkeland T., Skavlem S.* Boundary layer flow near a cylindrical obstacle in an oscillating, incompressible fluid // J. Acoust. Soc. Am. – 1954. – V. 26, No 1. – P. 26–39. – doi: 10.1121/1.1907285.
11. *Riley N.* The steady streaming induced by a vibrating cylinder // J. Fluid Mech. – 1975. – V. 68, No 4. – P. 801–812. – doi: 10.1017/S0022112075001243.
12. *Wang Ch.-Y.* On high-frequency oscillatory viscous flows // J. Fluid Mech. – 1968. – V. 32, No 1. – P. 55–68. – doi: 10.1017/S0022112068000583.
13. *Nuriev A.N., Egorov A.G.* Asymptotic investigation of hydrodynamic forces acting on an oscillating cylinder at finite streaming Reynolds numbers // Lobachevskii J. Math. – 2019. – V. 40, No 6. – P. 794–801. – doi: 10.1134/S1995080219060180.
14. *Riley N., Watson E.J.* Eccentric oscillations of a circular cylinder in a viscous fluid // Mathematika. – 1993. – V. 40, No 2. – P. 187–202. – doi: 10.1112/S0025579300006975.
15. *Nuriev A.N., Egorov A.G.* Asymptotic theory of a flapping wing of a circular cross-section // J. Fluid Mech. – 2022. – V. 941. – Art. A23, P. 1–18. – doi: 10.1017/jfm.2022.287.

Поступила в редакцию
29.07.2022

Егоров Андрей Геннадьевич, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник НИЛ «Интеллектуальные биомиметические и природосообразные системы» Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: aegorov0@gmail.com

Нуриев Артем Наилевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры аэрогидромеханики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: nuriev_an@mail.ru

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2022, vol. 164, no. 2–3, pp. 170–180

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2022.2-3.170-180

Cruising Speed of a Cylindrical Wing Performing Small Translational-Rotational Oscillations

*A.G. Egorov**, *A.N. Nuriev****Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*E-mail: **aegorov0@gmail.com*, ***nuriev-an@mail.ru*

Received July 29, 2022

Abstract

This work considers the propulsive motion of a flapping wing of a circular cross section. The problem of harmonic translational-rotational oscillations of the wing with an arbitrary phase shift in a viscous incompressible fluid, the motion of which is described by the non-stationary Navier–Stokes equation, is handled. An analytical solution of the problem is obtained in the first two terms by using the method of successive asymptotic expansions for the case of small oscillation amplitudes. It is shown that the nonlinear interaction of time harmonics of translational and rotational oscillations creates secondary flows that make the wing to move in the direction perpendicular to the axis of translational oscillations. For the cruising motion regime, when the average hydrodynamic force acting on the wing is equal to zero, the dependences of the average speed on the parameters of dimensionless oscillation are found.

Keywords: flapping wing, harmonic oscillations, cruising speed, Navier–Stokes equation, asymptotic analysis

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-79-10033).

Figure Captions

Fig. 1. Scheme of in-phase lateral-torsional oscillations of the cylinder. The extreme position of the cylinder is shown by the dotted line. A , Θ are amplitudes of the lateral and torsional oscillations, $H = A/\Theta$ is the distance between the center of the cylinder O and the center of speeds O_1 in the given position.

Fig. 2. Dependence of the cruising speed on the dimensionless frequency β at $\varphi = 0$ ($u_\infty = u_{\infty,c}$) and $\varphi = -\pi/2$ ($u_\infty = u_{\infty,s}$). Asymptotics of different orders are indicated by the dashed lines.

References

1. Prandtl L. Über die Entstehung von Wirbeln in der idealen Flüssigkeit, mit Anwendung auf die Tragflügeltheorie und andere Aufgaben. In: v. Kármán T., Levi-Civita T. (Hrsg.) *Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik (Innsbruck 1922)*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1924, S. 18–33. doi: 10.1007/978-3-662-00280-3_2. (In German)

2. Birnbaum W. Der Schlagflügelpropeller und die kleinen Schwingungen elastisch befestigter Tragflügel. *Z. Flugtech. Motorluftschiffahrt*, 1924, Bd. 15, H. 11–12, S. 128–134. (In German)
3. Keldysh M.V., Lavrent'ev M.A. On the theory of the oscillating wing. *Tekh. Zametki*, 1935, no. 45: Collection of articles by the General Theoretical Group at Central Aerohydrodynamic Institute, pp. 48–52. (In Russian)
4. Theodorsen T. *General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter*. NACA Rep. no. 496. Washington, Supt. Doc., 1935. 23 p.
5. Nekrasov A.I. *Teoriya kryla v nestatsionarnom potoke* [Wing Theory in Unsteady Flow]. Moscow, Izd. Akad. Nauk SSSR, 1947. 258 p. (In Russian)
6. Sedov L.I. *Ploskie zadachi gidrodinamiki i aerodinamiki* [Flat Problems of Hydrodynamics and Aerodynamics]. Moscow, Nauka, 1966. 448 p. (In Russian)
7. Golubev V.V. *Lektsii po teorii kryla* [Lectures on the Theory of Wing]. Moscow, Leningrad, Gos. Izd. Tekh.-Teor. Lit., 1949. 480 p. (In Russian)
8. Golubev V.V. On some problems of the theory of a flapping wing. *Uch. Zap. Mosk. Gos. Univ.*, 1951, no. 152, pp. 3–12. (In Russian)
9. Schlichting H. Berechnung ebener periodischer Grenzschichtströmungen. *Phys. Z.*, 1932, Bd. 33, S. 327–335. (In German)
10. Holtsmark J., Johnsen I., Sikkeland T., Skavlem S. Boundary layer flow near a cylindrical obstacle in an oscillating, incompressible fluid. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1954, vol. 26, no. 1, pp. 26–39. doi: 10.1121/1.1907285.
11. Riley N. The steady streaming induced by a vibrating cylinder. *J. Fluid Mech.*, 1975, vol. 68, no. 4, pp. 801–812. doi: 10.1017/S0022112075001243.
12. Wang Ch.-Y. On high-frequency oscillatory viscous flows. *J. Fluid Mech.*, 1968, vol. 32, no. 1, pp. 55–68. doi: 10.1017/S0022112068000583.
13. Nuriev A.N., Egorov A.G. Asymptotic investigation of hydrodynamic forces acting on an oscillating cylinder at finite streaming Reynolds numbers. *Lobachevskii J. Math.*, 2019, vol. 40, no. 6, pp. 794–801. doi: 10.1134/S1995080219060180.
14. Riley N., Watson E.J. Eccentric oscillations of a circular cylinder in a viscous fluid. *Mathematika*, 1993, vol. 40, no. 2, pp. 187–202. doi: 10.1112/S0025579300006975.
15. Nuriev A.N., Egorov A.G. Asymptotic theory of a flapping wing of a circular cross-section. *J. Fluid Mech.*, 2022, vol. 941, art. A23, pp. 1–28. doi: 10.1017/jfm.2022.287.

Для цитирования: Егоров А.Г., Нуриев А.Н. Крейсерская скорость цилиндрического крыла при малых поступательно-вращательных колебаниях // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2022. – Т. 164, кн. 2–3. – С. 170–180. – doi: 10.26907/2541-7746.2022.2-3.170-180.

For citation: Egorov A.G., Nuriev A.N. Cruising speed of a cylindrical wing performing small translational-rotational oscillations. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2022, vol. 164, no. 2–3, pp. 170–180. doi: 10.26907/2541-7746.2022.2-3.170-180. (In Russian)