

УДК 517.54

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ГОЛОМОРФНЫХ  
В КРУГЕ ФУНКЦИЙ С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ  
ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ЧАСТЬЮ  
 $n$ -Й ПРОИЗВОДНОЙ

Э.Г. Кирьяцкий

Аннотация

Пусть  $\Phi(z) = z^n + b_2z^{n+1} + b_3z^{n+2} + \dots$  – голоморфная в круге  $|z| < 1$  функция, причем  $b_k \geq 0$ ,  $k = 2, 3, \dots$ . Пусть  $V_n(\Phi)$  – семейство функций  $F(z) = z^n + a_2z^{n+1} + a_3z^{n+2} + \dots$ , для которых  $|a_k| \leq b_k$ ,  $k = 2, 3, \dots$ . Вычисляется радиус наибольшего круга, в котором каждая функция  $F(z) \in V_n(\Phi)$  удовлетворяет условию  $\operatorname{Re} F^{(n)}(z) > 0$ .

**Ключевые слова:** голоморфная функция, производная, круг, семейство функций, положительная действительная часть.

Введение

Обозначим через  $\tilde{C}_n(E)$  класс голоморфных в единичном круге  $E$  (то есть в круге  $|z| < 1$ ) функций вида

$$F(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{n+k-1}, \quad (1)$$

для которых выполнено условие  $\operatorname{Re}\{F^{(n)}(z)\} > 0$  при любом  $z \in E$  (см. [1]). Число  $n$  назовем номером класса.

При  $n = 0$  получим класс Каратеодори  $\tilde{C}_0(E)$  (см. [2, с. 35–39.]). Если  $n = 1$ , то имеем класс однолистных в  $E$  функций с ограниченным вращением (см. [3, 4]).

Пусть  $n \geq 0$  и фиксировано. Рассмотрим голоморфную в  $E$  функцию

$$\Phi(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} b_k z^{n+k-1}, \quad \text{где } b_k \geq 0, \quad k = 2, 3, \dots$$

и обозначим через  $V_n(\Phi)$  семейство функций вида (1), подчиненных условию

$$|a_k| \leq b_k, \quad k = 2, 3, \dots$$

Очевидно, главная функция  $\Phi(z)$  однозначно определяет семейство  $V_n(\Phi)$ . Кроме того, она принадлежит этому семейству. Так как  $\frac{1}{n!} F^{(n)}(0) = 1$ , то легко понять, что каждая функция  $F_t(z)$  из семейства  $V_n(\Phi)$  принадлежит классу  $\tilde{C}_n$  в некотором своем круге  $|z| < t \leq 1$ , который обозначим через  $E_t$ .

В настоящей работе мы находим наибольший круг с центром в начале координат, внутри которого любая функция из семейства  $V_n(\Phi)$  принадлежит  $\tilde{C}_n$ . Радиус такого круга однозначно определяется функцией  $\Phi(z)$  из семейства  $V_n(\Phi)$ . Обозначим его через  $r = r[V_n(\Phi)]$ .

1. Имеет место следующая

**Теорема 1.** *Если уравнение*

$$\frac{1}{n!} \Phi^{(n)}(x) = 2 \tag{2}$$

*имеет в интервале  $0 < x < 1$  корень  $x_0$ , то*

$$r[V_n(\Phi)] = x_0.$$

*Если уравнение (2) не имеет в интервале  $0 < x < 1$  корней, то*

$$r[V_n(\Phi)] = 1.$$

**Доказательство.** Возьмем любую функцию  $F(z)$  из  $V_n(\Phi)$  и пусть  $x = |z|$ , где  $z \in E$ . Обозначив  $B_{n+k-1}^n = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$ , получим:

$$\frac{1}{n!} \operatorname{Re} \left\{ F^{(n)}(z) \right\} \geq 1 - \sum_{k=2}^{\infty} B_{n+k-1}^n b_k x^{k-1} \geq 2 - \frac{1}{n!} \Phi^{(n)}(x).$$

Таким образом,

$$\frac{1}{n!} \operatorname{Re} \left\{ F^{(n)}(z) \right\} \geq 2 - \frac{1}{n!} \Phi^{(n)}(x), \tag{3}$$

где  $F(z) \in V_n(\Phi)$  и  $|z| = x$ . Пусть  $x_0$  – корень уравнения (2) и  $0 < x_0 < 1$ . Так как функция  $\Phi^{(n)}(x)$  монотонно возрастает в интервале  $0 < x < 1$ , то  $x_0$  – единственный корень, и поэтому

$$2 - \frac{1}{n!} \Phi^{(n)}(x) > 0, \quad 0 \leq x < x_0. \tag{4}$$

Неравенства (3), (4) показывают, что любая функция  $F(z)$  из семейства  $V_n(\Phi)$  принадлежит классу  $\tilde{C}_n(E_{x_0})$ . Увеличить радиус круга  $E_{x_0}$  нельзя, так как в противном случае в семействе  $V_n(\Phi)$  найдется такая функция, которая не будет принадлежать классу  $\tilde{C}_n$  в расширенном круге, например, это функция

$$\Phi_*(z) = 2z^n - \Phi(z) = z^n - \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{n+k-1},$$

принадлежащая семейству  $V_n(\Phi)$ . Для функции  $\Phi_*(z)$  имеем

$$\frac{1}{n!} \Phi_*^{(n)}(x) = 2 - \frac{1}{n!} \Phi^{(n)}(x).$$

Отсюда следует, что если  $x_0 < x < x_1$ , то

$$\frac{1}{n!} \operatorname{Re} \left\{ \Phi_*^{(n)}(x) \right\} < 0, \tag{5}$$

то есть  $\Phi_*(z) \notin \tilde{C}_n(E_{x_1})$  в расширенном круге  $E_{x_1}$ . Таким образом,  $r[V_n(\Phi)] = x_0$ , и первая часть теоремы доказана.

Перейдем к доказательству второй части теоремы. Пусть уравнение (2) не имеет корней в интервале  $0 < x < 1$ . Так как  $\frac{1}{n!} \Phi^{(n)}(0) = 1$ , то, используя монотонность функции  $\frac{1}{n!} \Phi^{(n)}(x)$  в интервале  $0 < x < 1$ , получим:

$$\frac{1}{n!} \Phi^{(n)}(x) < 2, \quad 0 \leq x < 1.$$

Тогда из (3) следует, что любая функция  $F(z)$  из семейства  $V_n(\Phi)$  принадлежит классу  $\tilde{C}_n(E)$ . Учитывая, что функции вида (1) определены лишь в единичном круге  $E$ , получим  $r[V_n(\Phi)] = 1$ , что доказывает вторую часть теоремы.  $\square$

**Замечание 1.** Функции  $\Phi(z)$  и  $\Phi_*(z)$  принадлежат классу  $\tilde{C}_n(E_{x_0})$ .

В самом деле, так как обе функции взяты из семейства  $V_n(\Phi)$ , то к ним применимо неравенство (3). Следовательно,

$$\frac{1}{n!} \operatorname{Re} \left\{ \Phi^{(n)}(z) \right\} \geq 2 - \frac{1}{n!} \Phi^{(n)}(x) > 0, \quad |z| = x < x_0,$$

$$\frac{1}{n!} \operatorname{Re} \left\{ \Phi_*^{(n)}(z) \right\} \geq 2 - \frac{1}{n!} \Phi_*^{(n)}(x) > 0, \quad |z| = x < x_0.$$

Кроме того, неравенство (5) показывает, что для функции  $\Phi_*(z)$  увеличить круг принадлежности ее к классу  $\tilde{C}_n$  нельзя.

**Теорема 2.** Если функция

$$F(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} A_k z^{n+k-1}$$

принадлежит классу  $\tilde{C}_n(E)$ , то любая функция

$$Q(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{n+k-1},$$

коэффициенты которой подчинены условию

$$|a_k| \leq |A_k|, \quad k = 2, 3, \dots,$$

принадлежит классу  $\tilde{C}_n$ , в круге  $|z| < 1/3$ , но, вообще говоря, не в большем круге.

**Доказательство.** При  $|z| = x$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \operatorname{Re} \left\{ Q^{(n)}(z) \right\} &= 1 + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=2}^{\infty} B_{n+k-1}^n a_k z^{k-1} \right\} \geq \\ &\geq 1 - \left| \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=2}^{\infty} B_{n+k-1}^n a_k z^{k-1} \right\} \right| \geq \\ &\geq 1 - \sum_{k=2}^{\infty} B_{n+k-1}^n |a_k| |z|^{k-1} \geq 1 - \sum_{k=2}^{\infty} B_{n+k-1}^n |A_k| |z|^{k-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Далее

$$\Psi(z) = \frac{1}{n!} F^{(n)}(z) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} B_{n+k-1}^n A_k z^{k-1}. \quad (7)$$

Так как  $F(z) \in \tilde{C}_n(E)$ , то  $\operatorname{Re} \{ \Psi(z) \} > 0$  в  $E$ . Это означает, что функция  $\Psi(z)$  принадлежит классу  $\tilde{C}_0(E)$ , то есть классу Каратеодори. Но тогда для коэффициентов функции (7) справедливы неравенства (см. [2])

$$B_{n+k-1}^n |A_k| \leq 2, \quad k = 2, 3, \dots$$

Из (6) и (7) следует, что

$$\frac{1}{n!} \operatorname{Re} \left\{ Q^{(n)}(z) \right\} \geq 1 - 2 \sum_{k=2}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1-3x}{1-x}.$$

Если теперь  $0 < x < 1/3$ , то  $\operatorname{Re} \{Q^{(n)}(z)\} > 0$ , где  $|z| = x$ , то есть  $Q(z) \in \tilde{C}_n(E_{1/3})$ .

Рассмотрим теперь функции

$$F_1(z) = z^n + 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{B_{n+k-1}^n} z^{n+k-1},$$

$$Q_1(z) = z^n - 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{B_{n+k-1}^n} z^{n+k-1}.$$

Для этих функций имеем, что

$$\frac{1}{n!} \operatorname{Re} \left\{ F_1^{(n)}(z) \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1+z}{1-z} \right\},$$

$$\frac{1}{n!} \operatorname{Re} \left\{ Q_1^{(n)}(z) \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1-3z}{1-z} \right\}.$$

Поэтому функция  $F_1(z)$  принадлежит классу  $\tilde{C}_n$  в единичном круге  $E$ , а функция  $Q_1(z)$  принадлежит классу  $\tilde{C}_n$  только в круге  $|z| < R = 1/3$ .  $\square$

**Замечание 2.** Как видно из доказательства теоремы 2, радиус  $R = 1/3$  является постоянным вне зависимости от номера  $n$  класса  $\tilde{C}_n$ .

**Следствие 1.** Пусть функция  $F(z) = z^n + a_2 z^{n+1} + \dots$  принадлежит классу  $\tilde{C}_n(E)$ . Если произвольным образом изменить аргументы у коэффициентов  $a_k$ ,  $k = 2, 3, \dots$ , функции  $F(z)$ , то получится новая функция, которая будет принадлежать классу  $\tilde{C}_n$  в круге  $|z| < 1/3$ , но, вообще говоря, не в большем круге. Радиус  $R = 1/3$  является постоянным вне зависимости от номера  $n$  класса  $\tilde{C}_n$ .

**Следствие 2.** Пусть

$$\Phi(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} b_k z^{n+k-1} \in \tilde{C}_n(E), \quad \text{где } b_k \geq 0, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

Тогда корень  $x_0$  уравнения  $\frac{1}{n!} \Phi^{(n)}(x) = 2$  (если он существует в интервале  $0 < x < 1$ ) удовлетворяет неравенству  $x_0 \geq 1/3$ . Радиус  $R = 1/3$  является постоянным вне зависимости от номера  $n$  класса  $\tilde{C}_n$ .

**Доказательство.** В самом деле, по теореме 1 любая функция

$$F(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{n+k-1},$$

коэффициенты которой подчинены условию

$$|a_k| \leq b_k, \quad k = 2, 3, \dots,$$

принадлежит классу  $\tilde{C}_n$  в круге  $|z| < x_0$ . С другой стороны, любая такая функция принадлежит классу  $\tilde{C}_n$  в круге  $|z| < 1/3$ . Отсюда  $x_0 \geq 1/3$ .  $\square$

2. Обозначим через  $\tilde{K}_n(E)$  класс голоморфных в единичном круге  $E$  функций вида (1), у которых  $n$ -я разделенная разность  $[F(z); z_0, z_1, \dots, z_n]$  отлична от нуля при любых  $z_0, z_1, \dots, z_n \in E$ . Имеет место теорема, аналогичная теореме 1.

**Теорема 3.** *Если уравнение*

$$\frac{1}{n!} \Phi^{(n)}(x) = 2 \quad (8)$$

*имеет в интервале  $0 < x < 1$  корень, то любая функция из семейства  $V_n(\Phi)$  принадлежит классу  $\tilde{K}_n$  в круге  $E_{x_0}$ , но, вообще говоря, не в большем. Если же это уравнение не имеет в интервале  $0 < x < 1$  корней, то любая функция из  $V_n(\Phi)$  принадлежит классу  $\tilde{K}_n(E)$ .*

**Доказательство.** Пусть уравнение (8) имеет корень  $x_0$  в интервале  $0 < x < 1$ . Известно (см. [1]), что  $\tilde{C}_n(E_{x_0}) \subset \tilde{K}_n(E_{x_0})$ . Отсюда с учетом теоремы 1 получаем, что любая функция  $F(z)$  из семейства  $V_n(\Phi)$  принадлежит классу  $\tilde{K}_n(E_{x_0})$ . Покажем, что радиус указанного круга увеличить нельзя. Пусть, вопреки утверждению, любая функция из семейства  $V_n(\Phi)$  принадлежит классу  $\tilde{K}_n(E_{x_1})$ , где  $E_{x_1} \supset E_{x_0}$ . В частности,  $\Phi_*(z) \in \tilde{K}_n(E_{x_1})$ . Для этой функции имеем, что

$$\frac{1}{n!} \Phi_*^{(n)}(x_0) = 2 - \frac{1}{n!} \Phi^{(n)}(x_0) = 0, \quad x_0 \in E_{x_1}.$$

Однако последнее равенство не может иметь места, так как  $n$ -я производная любой функции, принадлежащей классу  $\tilde{K}_n(E_{x_0})$ , отлична от нуля в круге  $E_{x_1}$  (см. [1]). Полученное противоречие доказывает первую часть теоремы.

Докажем вторую часть теоремы. Пусть уравнение (8) не имеет корней в интервале  $0 < x < 1$ . Тогда, опираясь на соотношение  $\tilde{C}_n(E) \subset \tilde{K}_n(E)$  и на теорему 1, заключаем, что любая функция из семейства  $V_n(\Phi)$  принадлежит классу  $\tilde{K}_n(E)$ .  $\square$

3. Теперь, в зависимости от взятой главной функции  $\Phi(z)$ , займемся решением уравнения (2), что позволит нам вычислить радиус  $r[V_n(\Phi)]$ .

Построим множество многочленов  $P_{n,k}(\alpha)$ ,  $k = 2, 3, \dots$ , степени  $k - 1$  от переменной  $\alpha$  с помощью рекуррентной формулы

$$P_{n,k+1}(\alpha) = \frac{(k-1)P_{n,k-1}(\alpha) + (n+1)P_{n,k}(\alpha)P_{n,2}(\alpha)}{n+k},$$

$$P_{n,1}(\alpha) \equiv 1, \quad P_{n,2}(\alpha) = \alpha.$$

Эти многочлены, обладающие многими интересными свойствами, были рассмотрены нами в [5]. Предполагая, что  $\alpha \geq 0$ ,  $n \geq 0$ , построим функцию  $\varphi_{n,\alpha}(z)$  следующим образом:

$$\varphi_{n,\alpha}(z) = z^n + \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k+1}(\alpha) z^{n+k}.$$

Эта функция будет голоморфной в единичном круге  $E$  и коэффициенты ее  $P_{n,k+1}(\alpha)$  неотрицательны. Исходя из определения функции  $\varphi_{n,\alpha}(z)$ , запишем при различных значениях параметра  $\alpha$  несколько таких главных функций. Пусть  $\alpha = 0$ . Тогда

$$\varphi_{n,0}(z) = z^n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2m-1)}{(n+2)(n+4) \cdot \dots \cdot (n+2m)} z^{n+2m}.$$

В частности,

$$\varphi_{0,0}(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad \varphi_{1,0}(z) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}.$$

Пусть  $\alpha = 1$ . Тогда

$$\varphi_{n,1}(z) = z^n + \sum_{m=1}^{\infty} z^{n+m} = \frac{z^n}{1-z}.$$

В частности,

$$\varphi_{0,1}(z) = \frac{1}{1-z}, \quad \varphi_{1,1}(z) = \frac{z}{1-z}.$$

Пусть  $\alpha = \alpha_0 = (n+3)/(n+1)$ . Тогда

$$\varphi_{n,\alpha_0}(z) = z^n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n+m-1}{n+1} z^{n+m} = \frac{z^n \left(1 + \frac{1-n}{1+n} z\right)}{(1-z)^2}.$$

В частности,

$$\varphi_{n,2}(z) = \frac{z}{(1-z)^2}, \quad \varphi_{n,3}(z) = \frac{1+z}{(1-z)^2}.$$

Функции  $\varphi_{1,0}(z)$ ,  $\varphi_{0,1}(z)$ ,  $\varphi_{1,1}(z)$ ,  $\varphi_{1,2}(z)$ ,  $\varphi_{0,3}(z)$  являются однолиственными в  $E$  функциями. Функции  $\varphi_{n,1}(z)$ ,  $\varphi_{n,\alpha_0}(z)$  принадлежат классу  $K_n(E)$ .

**Теорема 4.** Радиус наибольшего круга принадлежности всех функций

$$F(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{n+k-1}$$

семейства  $V_n(\varphi_{n,\alpha})$  классу  $C_n$  вычисляется по формуле  $r[V_n(\varphi_{n,\alpha})] = x_0$ , где  $x_0$  – корень уравнения

$$(1+x)^{(\alpha-1)(n+1)/2} = 2(1-x)^{(\alpha+1)(n+1)/2}, \quad 0 < x < 1. \quad (9)$$

**Доказательство.** Можно показать, что [3]

$$\frac{1}{n!} \varphi_{n,\alpha}^{(n)}(x) = \frac{(1+x)^{(\alpha-1)(n+1)/2}}{(1-x)^{(\alpha+1)(n+1)/2}}. \quad (10)$$

Откуда в силу теоремы 1 мы получаем уравнение (9). Это уравнение, как легко убедиться, имеет единственный корень  $x_0$  в интервале  $0 < x < 1$ .  $\square$

**Замечание 3.** Из формулы (10), в частности, следует

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \varphi_{n,0}^{(n)}(z) &= \frac{1}{(1-z^2)^{n+1}}, \\ \frac{1}{n!} \varphi_{n,1}^{(n)}(z) &= \frac{1}{(1-z)^{n+1}}, \\ \frac{1}{n!} \varphi_{n,\alpha_0}^{(n)}(z) &= \frac{1+z}{(1-z)^{n+2}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Пользуясь формулами (11), имеем

**Следствие 3.** Если  $\alpha = 0$ , то

$$r[V_n(\varphi_{n,0})] = \sqrt{1 - 4^{-1/(n+1)}}.$$

В частности,

$$r[V_0(\varphi_{0,0})] = \sqrt{3/2}, \quad r[V_1(\varphi_{1,0})] = 1/\sqrt{2}.$$

Если  $\alpha = 1$ , то

$$r[V_n(\varphi_{n,1})] = 1 - \sqrt[n+1]{1/2}.$$

В частности,

$$r[V_0(\varphi_{0,1})] = 1/2, \quad r[V_1(\varphi_{1,1})] = 1 - \sqrt{1/2}.$$

Если  $\alpha = \alpha_0 = (n+3)/(n+1)$ , то  $r[V_1(\varphi_{1,1})] = x_0$ , где

$$1 + x_0 = 2(1 - x_0)^{n+2}.$$

В частности,

$$r[V_1(\varphi_{1,2})] \approx 0,13, \quad r[V_0(\varphi_{0,3})] = (5 - \sqrt{17})/4.$$

Возьмем теперь функцию

$$\Phi_c(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} cz^{n+k-1}$$

где  $c$  – некоторое положительное число.

**Теорема 5.** Радиус наибольшего круга принадлежности всех функций

$$F(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{n+k-1}$$

семейства  $V_n(\Phi_c)$  к классу  $\tilde{C}_n$  вычисляется по формуле

$$r[V_n(\Phi_c)] = 1 - \sqrt[n+1]{c/(1+c)}.$$

В самом деле, пользуясь теоремой 1, найдем  $r[V_n(\Phi_c)]$ . Для этого решим уравнение  $\Phi_c^{(n)}(x) = n!2$  и убедимся, что оно имеет корень  $x_0 = 1 - \sqrt[n+1]{c/(1+c)}$ . Значит,  $r[V_n(\Phi_c)] = 1 - \sqrt[n+1]{c/(1+c)}$ .

Отметим, в частности, что

$$r[V_0(\Phi_c)] = 1/(1+c) \quad \text{и} \quad r[V_1(\Phi_c)] = 1 - \sqrt{c/(1+c)}.$$

Последний результат был получен также В.И. Гавриловым в [6].

### Summary

*E.G. Kiriyatckii.* On One Family of Holomorphic in a Circle of Functions with Positive Real Part of  $n$ th Derivative.

Let  $\Phi(z) = z^n + b_2 z^{n+1} + b_3 z^{n+2} + \dots$  be a holomorphic in the unit circle  $|z| < 1$  function with  $b_k \geq 0$ ,  $k = 2, 3, \dots$ . Let  $V_n(\Phi)$  be a family of functions  $F(z) = z^n + a_2 z^{n+1} + a_3 z^{n+2} + \dots$ , for which  $|a_k| \leq b_k$ ,  $k = 2, 3, \dots$ .

The radius of the greatest circle is established for which every function  $F(z) \in V_n(\Phi)$  satisfies the condition  $\operatorname{Re} F^{(n)}(z) > 0$ .

**Key words:** holomorphic function, derivative, circle, family of functions, positive real part.

## Литература

1. *Кирьяцкий Э.Г.* Многолистные функции и разделенные разности. – Вильнюс: Техника, 1995. – 393 с.
2. *Александров И.А.* Методы геометрической теории аналитических функций. – Томск: Том. гос. ун-т, 2001. – 218 с.
3. *Зморович В.А.* К теории специальных классов однолистных функций. I // Усп. матем. наук. – 1959. – Т. 14, № 3. – С. 137–143.
4. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
5. *Кирьяцкий Э.Г.* О некоторых операторах, связанных с дробно-линейным преобразованием единичного круга // Лит. матем. сб. – 1974. – Т. 14, № 1. – С. 57–65.
6. *Гаврилов В.И.* Замечание о радиусе однолистности голоморфных функций // Матем. зам. – 1970. – Т. 7, № 3. – С. 295–298.

Поступила в редакцию  
13.08.08

---

**Кирьяцкий Эдуард Григорьевич** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования Вильнюсского технического университета им. Гедиминаса, Литва.

E-mail: *Eduard.Kiriyatzkii@takas.lt*