Печатается по решению Редакционно-издательского совета

физического факультета.

УДК 530.1: 51 - 72; 531.

Ларионов А.Л., Царевский С.Л. ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ ДИРАКА ЕЕ СВОЙСТВА. Учебно-методическое пособие./ Под ре Царевского С.Л.
Казань. 1999. - 19 с.

Учебно-методическое пособие содержит краткие сведения и теории обобщенных функций: вводится понятие обобщенно функции как предел последовательности обычных классическ определенных функций; приведены примеры дельта-сходящихс последовательностей; используя определение дельта-сходящейс последовательности, показаны основные свойства дельта-функции показана, в частности связь дельта-функции с функцией Хевисайда.

Рекомендуется как учебно-методическое пособие для студенто третьего курса физического факультета.

Рецензент: Захаров А.В., д.ф.м.н., проф. каф. теории относительности и гравитации Казанского госуниверситета.

Физический факультет Казанского госуниверситета, 1999.

Введение

Уравнения электродинамики Максвелла получены как обобщение ранее известных опытных фактов: закона Кулона, закона сохранения заряда, законов Фарадея и Эрстеда. Эти законы использовались как некие физические постулаты. Однако на пути этого обобщения сразу возникают достаточно серьезные трудности. Они появляются уже при использовании закона Кулона. Экспериментально закон Кулона справедлив (или, лучше сказать, получен) для зарядов, пространственные размеры которых достаточно малы по сравнению с расстояниями между ними. При обобщении этого закона на произвольное распределение зарядов необходимо ввести объемную плотность заряда $\rho(\mathbf{r})$ в некоторой точке $\mathbf{r}$:

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \to +0} \frac{\Delta e}{\Delta V}, \qquad (1)$$

где Δe - заряд, занимающий некоторый объем ΔV в окрестности точки $\mathbf{r}$. Для макроскопической электродинамики (а исторически уравнения Максвелла были впервые получены именно для макроскопической электродинамики) под ΔV следовало понимать физически (макроскопический) бесконечно малый объем, т.е. ΔV достаточно велик, чтобы в нем оказалось макроскопически большое число зарядов (атомов молекул - микроскопических частиц), чтобы можно было провести усреднение, и в то же время ΔV достаточно мал, чтобы на протяжении его усредненные (т.е. макроскопические) физические величины (например, напряженность поля) изменялись достаточно мало, т.е. выражение $\Delta V \to 0$ в (1) понимается достаточно условно: имеется ввиду, что ΔV мал по сравнению с объмом общего распределения зарядов, а внутри ΔV заряды расположены на достаточно больших расстояниях, чтобы можно было считать справедливыми условия применения закона Кулона. Переход же от области, занятой зарядами, к области, свободной от зарядов, описываются с помощью граничных соотношений на ,опять же, достаточно условной поверхности раздела этих областей. Таким образом, в макроскопической электродинамике условия справедливости использования закона Кулона считаются “a priori” выполненными с помощью оговорок: “объемы достаточно малы”, “расстояния достаточно велики” и т.д., хотя, конечно, понимается, что распределение зарядов дискретно. В микроскопической электродинамике, т.е. в такой теории, которая была бы справедлива на любых конечных расстояниях от зарядов, в соотношении (1) выражение $\Delta V \to 0$ следует понимать буквально. Но тогда условия справедливости использования закона Кулона требуют введения понятия точечного заряда, плотность которого следует определить так: плотность точечного заряда *e*, расположенного в точке **r'** равна нулю во всех точках $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$, в точке $\mathbf{r}=\mathbf{r}'$она равна ∞, но так, чтобы суммарный заряд в этой точке был равен *e*. Тогда, как это следует из соотношений конечного и бесконечно малого, на любых конечных расстояниях от точечного заряда условия справедливости закона Кулона заведомо выполняются. Итак, для плотности точечного заряда *e*, расположенного в точке, **r** имеем:

$$\rho(\mathbf{r}) = e\cdot\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \begin{cases} 0, & \mathbf{r} \neq \mathbf{r}'; \\ \infty, & \mathbf{r} = \mathbf{r}'; \end{cases} \tag{2}$$

$$\int\limits_{\Delta} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')dv = 1 \tag{3}$$

Интеграл в (3) берется по любому конечному объему, включающему точку **r'**. Однако такое определение функции $\rho(\mathbf{r})$ несовместимо с классическими определениями функции и интеграла. Впервые функцию, обладающую свойствами (2), (3), ввел в физику в конце 20-х годов П.Дирак. Ввел, исходя из внутренней логики квантовомеханической теории, которой он в те годы занимался. С тех пор функцию, обладающую свойствами (2), (3), называют δ-функцией Дирака. Математики долгое время (на протяжении 10-15 лет!) не признавали возможность существования δ-функции, однако в физике (по крайней мере,- в квантовой механике) она широко использовалась и с ее помощью получались новые результаты. Потребовались ряд лет и усилия многих математиков, чтобы найти математически корректное определение δ-функции. Эти исследования привели к появлению целого класса новых математических объектов - к так называемым обобщенным функциям.

Понятие обобщенной функции.

Обобщенная функция является обощением классического понятия функции. δ-функцию можно определить как предел последовательности обычных гладких функций, зависящих от некторого параметра ε так, чтобы они имели, как говорят, " дельта-образный вид". Поясним это на примере функции

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \qquad (\varepsilon > 0) \qquad (4)$$

График этой функции приведен на рис.1.

При $\varepsilon \to 0$ эта функция в пределе переходит к функции, обладающей свойствами δ-функции. Покажем это. Прежде всего отметим, что эта функция гладкая при любых ε, бесконечное число раз дифференцируемая, т.е. $\delta_\varepsilon(x)$- обычная вполне корректно классически определенная несингулярная функция. Интеграл от $\delta_\varepsilon(x)$ равен:

$$\int_a^b \delta_\varepsilon(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\varepsilon dx}{x^2+\varepsilon^2} = \frac{1}{\pi}\left[\mathrm{arctg}\frac{b}{\varepsilon} - \mathrm{arctg}\frac{a}{\varepsilon}\right],$$

Рассмотрим предел при $\varepsilon \to 0$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b \delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, \ \text{п ри} \ a<b<0, \ 0<a<b; \\ 1, \ \text{п ри} \ a<0<b. \end{cases} \qquad (5)$$

Равенство (5) выполняется для любых конечных a и b. Из Рис.1 видно также, что при $\varepsilon \to 0$ $\delta_\varepsilon(x) = 0$ при $x \neq 0$ и $\delta_\varepsilon(x) = \infty$ при $x = 0$. Это означает, что предел последовательности функций $\delta_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \to 0$ обладает свойствами δ-функции.Итак, имеем:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}. \qquad (6)$$

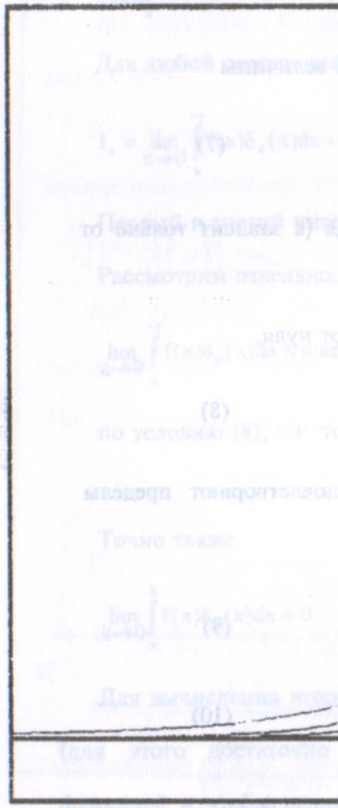

Рис.1

График функции $\delta_\varepsilon(x)=1/\pi*\varepsilon/(x^2+\varepsilon^2)$

для $\varepsilon_1=0.5$, $\varepsilon_2=0.1$, $\varepsilon_3=0.05$.

Обобщение понятия функции для $\delta(x)$ состоит в том, что она есть предел последовательности обычных функций.

Отметим, что можно построить многими способоми последовательности регулярных функций $\delta_\varepsilon(x)$, сходящихся к δ-функции. Для этого достаточно, чтобы

a) каково бы ни было $M>0$, при $|a|\le M$, $|b|\le M$ величины

$$\left|\int_a^b \delta_\varepsilon(x)dx\right| \qquad (7)$$

ограничены постоянной, не зависящей от a,b,ε (ε зависит только от M);

b) при любых фиксированных a и b, отличных от нуля,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b \delta_\varepsilon(x)dx = \begin{cases} 0 \text{ при } a<b<0 \text{ и } 0<a<b, \\ 1 \text{ при } a<0<b. \end{cases} \qquad (8)$$

Можно показать, что условиям (7) и (8) удовлетворяют пределы последовательностей:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}; \qquad (9)$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{k\to\infty}\frac{\sin kx}{x}; \qquad (10)$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{k\to\infty}\frac{\sin^2 kx}{kx^2}; \qquad (11)$$

Используя определение δ-функции как предел δ-сходящихся последовательностей, можно показать следующее соотношение:

$$\int_\Delta f(x)\delta(x)dx = f(0), \qquad (12)$$

где f(x) - непрерывная функция.

Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b f(x)\delta_\varepsilon(x)dx = f(0),\ a<0,\ b>0$$

Для любой достаточно малой окрестности $(-\gamma,\gamma)$ имеем (см. Рис.2):

$$I_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{-\gamma} f(x)\delta_\varepsilon(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\gamma}^{\gamma} f(x)\delta_\varepsilon(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\gamma^b f(x)\delta_\varepsilon(x);$$

Первый и третий интегралы равны нулю в пределе.

Рассмотрим отдельно:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{-\gamma} f(x)\delta_\varepsilon(x)dx \le \max f(x)\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{-\gamma}\delta_\varepsilon(x)dx = 0;\quad a<x<-\gamma;$$

по условию (8), т.к. точка x=0 распоожена вне интервала $(a,-\gamma)$

Точно также

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\gamma^b f(x)\delta_\varepsilon(x)dx = 0. \qquad (13)$$

Для вычисления второго интеграла воспользуемся теоремой о среднем (для этого достаточно потребовать, чтобы f(x) была непрерывной функцией и чтобы выполнялось условие (7)). В результате получим для малой окрестности $(-\gamma,\gamma)$.

$$I_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\gamma}^{\gamma} f(x)\delta_\varepsilon(x)dx = \underset{-\gamma\le\tilde{x}\le\gamma}{f(\tilde{x})}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\gamma}^{\gamma}\delta_\varepsilon(x)dx = \underset{-\gamma\le\tilde{x}\le\gamma}{f(x)} = f(0),\ \text{при } \gamma\to 0, \qquad (14)$$

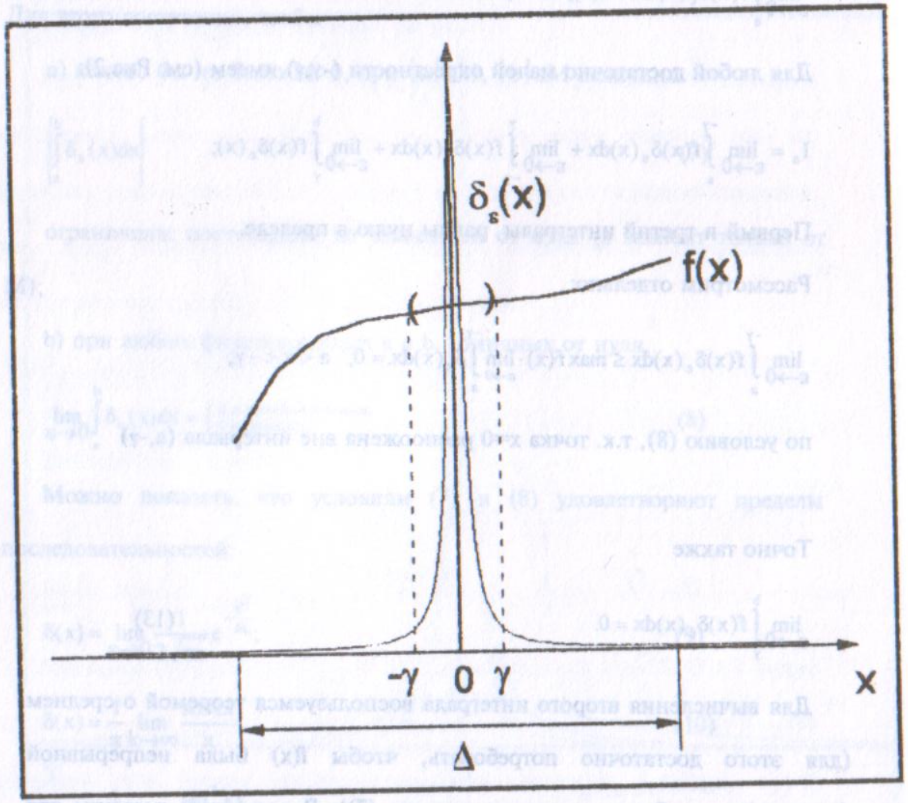

Рис.2

что и требовалось доказать. Цепочка равенств (14) отражает тот факт, что реально нельзя измерить значение физической величины в точке, а можно измерять лишь ее средние значения в достоточно малых окрестностях этой точки и объявить предел последовательности этих средних значений значением рассматриваемой физической величины в данной точке.

С δ-функцией тесно связана другая обобщенная функция - так называемая единичная "ступенька" (функция Хевисайда):

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x<0 \\ 0, & x>0 \end{cases} \qquad (15)$$

Как видно из (15), θ(x)-разрывная функция, однако ее можно построить как предел последовательности непрерывных функций. Например, рассмотрим функцию

$$\theta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{\varepsilon} \div \frac{\pi}{2}\right)$$

График этой функции при различных ε показан на Рис.3.

$$\theta(x) = \lim_{\varepsilon\to+0}\theta_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{\varepsilon} + \frac{\pi}{2}\right);$$

Построим производную от θ(x) как предел последовательности производных от $\theta_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon\to+0$:

$$\theta'(x) = \lim_{\varepsilon\to+0}\theta'_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon\to+0}\delta_\varepsilon(x) = \delta(x). \qquad (16)$$

Этот результат можно получить в общем виде для любой δ-образной последовательности $\delta_\varepsilon(x)$, обладающей свойствами (7), (8). Действительно, рассмотрим последовательность первообразных функций

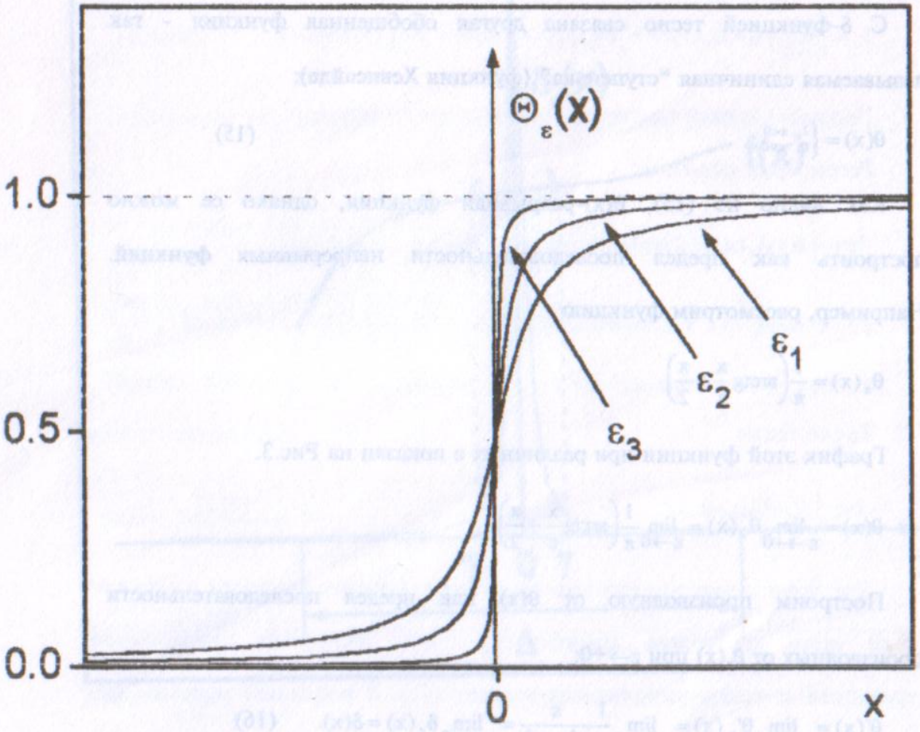

Рис.3
График функции $\Theta_\varepsilon(x)=1/\pi*(\mathrm{arctg}(x/\varepsilon)+\pi/2)$
для $\varepsilon_1=0.5$, $\varepsilon_2=0.2$, $\varepsilon_3=0.04$.

$$\theta_\varepsilon(x)=\int_{-1}^{x}\delta_\varepsilon(\xi)d\xi. \qquad (17)$$

Как это следует из определения дельта-образной последовательности, с уменьшением ε $\theta_\varepsilon(x)$ имеет пределом постоянную, равную нулю при $x<0$, и постоянную, равную единице при $x>0$, (согласно (8)), и в то же время равномерно (по ε) ограничена в каждом промежутке согласно (7). Отсюда следует, что функции $\theta_\varepsilon(x)$ в смысле обобщенных функций имеют пределом функцию $\theta(x)$, равную 0 при $x<0$ и 1 при $x>0$. Но тогда $\theta'_\varepsilon(x)=\delta_\varepsilon(x)$, как это следует из (7), и при $\varepsilon\to 0$ имеем:

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\theta'_\varepsilon(x)=\theta'(x)=\delta(x)$, что и требуется.

Свойства δ-функции.

1. $\delta(x)=\delta(-x)$. (18)

Это следует из определения (8).

2. $\int\limits_{\Delta} f(x)\delta(x-x_0)dx=\begin{cases} f(x_0), x_0\in\Delta \\ 0, x_0\notin\Delta. \end{cases}$ (19)

Это свойство следует из (12), (13), (14) простой заменой переменных в обычных интегралах (до перехода к пределу $\varepsilon\to 0$).

3. $\delta(\alpha x)=\frac{1}{|\alpha|}\delta(x)$.

В самом деле, имеем:

при $a<0, b>0$;

$\alpha > 0,$

$$\int_a^b f(x)\delta(\alpha x)dx = \int_{\alpha a}^{\alpha b} f\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\delta(\xi)\frac{d\xi}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a}^{\alpha b} f\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\delta(\xi)d(\xi) = \frac{1}{\alpha}f(0) =$$

$$\alpha x = \xi,$$

$$= \frac{1}{\alpha}\int_a^b f(x)\delta(x)dx;$$

$\alpha < 0;$

$$\alpha = -\beta; -\beta x = \xi; \qquad dx = -\frac{d\xi}{\beta};$$

$$\int_a^b f(x)\delta(-\beta x)dx = -\int_{-\beta a}^{-\beta b} f\left(\frac{\xi}{-\beta}\right)\delta(\xi)\frac{d\xi}{\beta} = +\frac{1}{\beta}\int_{-\beta b}^{-\beta a} f\left(\frac{-\xi}{\beta}\right)\delta(\xi)d\xi = \frac{1}{\beta}f(0) = \frac{1}{\beta}\int_a^b f(x)\delta(x)dx.$$

В вышеприведенных цепочках равенств замены в интегралах проведены формально; на самом деле эти интегралы есть пределы от дельта-образных последовательностей (и тогда замены переменных в них вполне оправданы). Итак, для любой непрерывной f(x) действие δ-функции $\delta(\alpha x)$ равносильно действию $\frac{1}{|\alpha|}\delta(x)$, что и требовалось доказать. Отсюда следует также, что размерность δ-функции обратно пропорциональна размерности ее аргумента.

4. Если аргумент δ-функции является однозначной функцией независимой переменной x, то имеет место формула:

$$\delta(\varphi(x)) = \sum_1 \frac{1}{|\varphi'(a_1)|}\delta(x - a_1) \qquad (20)$$

где a_l – корни уравнения $\varphi(x)=0$. Доказательство этой формулы основано на том, что при интегрировании с δ-функцией вклад в интеграл

$\int f(x)\delta(\varphi(x))dx$ дают только окрестности нулей функции $\varphi(x)=0$, так что интеграл можно разбить на сумму интегралов в окрестностях корней, в которых $\varphi(x)$ можно представить как $\varphi'_{(a_1)}(x - a_l)$.

5. $$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a}(\delta(x-a) + \delta(x+a)), \qquad (21)$$

$$\delta(\sin x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x - k\pi) \qquad (22)$$

Доказательство этих формул непосредственно следует из свойства п.4

6. Производные от δ-функции можно определить по формуле:

$$\int_a^b f(x)\frac{\partial\delta(x-x_0)}{\partial x}dx = -\frac{\partial f(x_0)}{\partial x} \qquad (23)$$

Доказательство этой формулы легко получается интегрированием по частям: Здесь следует заметить, что в формуле (23) сначала надо провести интегрирование с $\delta_\varepsilon(x - x_0)$, т.е: когда формула интегрирования по частям справедлива,а затем переходить к пределу $\varepsilon \to 0$:

$$\int_a^b f(x)\frac{\partial\delta(x-x_0)}{\partial x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b f(x)\frac{\partial\delta_\varepsilon(x-x_0)}{\partial x}dx =$$

$$f(x) = U; \frac{\partial\delta_\varepsilon}{\partial x}dx = dV; dU = \frac{\partial f}{\partial x}dx; V = \delta_\varepsilon(x - x_0);$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(f(x)\delta_\varepsilon(x-x_0)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{\partial f(x)}{\partial x}\delta_\varepsilon(x-x_0)dx\right).$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x - x_0)\Big|_{a,b} = 0$$

Аналогично можно определить производные высших порядков:

$$\int_a^b f(x)\delta^{(n)}(x-x_0)dx = (-1)^{(n)} f^{(n)}(a) \qquad (24)$$

7. Производные от разрывных функций.

Пусть функция f(x) кусочно-непрерывно дифференцируема в (a,b) и пусть $\{x_k\}$ - точки из (a,b), в которых она или ее производная имеют разрывы 1го рода со скачками h_k.

Введем функцию

$$f_1(x) = f(x) - \sum_k h_k \theta(x - x_k). \qquad (25)$$

Эта функция непрерывна и имеет, исключая конечное число точек, производную $f'(x)$.Дифференцируя равенство (25), находим:

$$f'_1 = f' - \sum_k h_k \delta(x - x_k), \quad \text{или :}$$

$$f' = f'_1 + \sum_k h_k \delta(x - x_k) \qquad (26)$$

Итак, если f(x) - кусочно-непрерывная функция с кусочно-непрерывной производной, то при дифференцировании каждая точка разрыва I рода x_k функции f(x) со скачком h_k добавляет в выражение производной слагаемое $h_k\delta(x-x_0)$.

8. $$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dk = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} Cos(kx)dk. \qquad (27)$$

Формула (27) широко используется в теоретической физике. Она представляет собой Фурье-разложение единицы. Доказательство формулы (27) можно получить с помощью предельного перехода:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx-\varepsilon|k|}dk = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(Coskx + iSinkx)e^{-\varepsilon|k|}dk =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon|k|}Coskxdk =$$

(Интеграл с Sinkx равен нулю, как интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку). Далее имеем:

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\varepsilon k}Coskxdk = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2} = \delta(x).$$

9. $$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x + i\varepsilon} = P\frac{1}{x} + i\pi\delta(x). \qquad (28)$$

Доказательство формулы (28):

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x + i\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x - i\varepsilon}{(x - i\varepsilon)(x + i\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{x}{x^2 + \varepsilon^2)} + i\frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}\right\}$$

Устремляя $\varepsilon\to+0$, получим (28).

10. Трехмерная δ-функция. Она определяется как

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0), \ \mathbf{r}(x,y,z), \ \mathbf{r}_0(x_0,y_0,z_0) \qquad (29)$$

Используя формулу (27), получим:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\infty} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}d\mathbf{k}, \quad d\mathbf{k} \equiv dk_x dk_y dk_z, \ \mathbf{k}(k_x, k_y, k_z). \qquad (30)$$

11. Приведем без доказательства формулу:

$$\Delta\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=-4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \qquad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{31}$$

12. $\theta'(x-x_0)=\delta(x-x_0).$ (32)

Заключение.

Понятие обобщенной δ-функции дает возможность выразить в математически корректной форме такие идеализированные понятия, как плотность материальной точки, плотность точечного заряда или диполя, пространственная плотность простого или двойного слоя, интенсивность мгновенного точечного источника, интенсивность мгновенной силы, приложенной в точке, и т.д.. В настоящее время теория обобщенных функций хорошо развита, имеет многочисленные приложения в физике и математике и прочно вошла в обиход физика, математика и инженера. Обобщенные функции обладают рядом замечательных свойств, расширяющих возможности классического математического анализа, например, любая обобщенная функция оказывается бесконечно дифференцируемой (в обобщенном смысле), сходящиеся ряды из обобщенных функций можно почленно дифференцировать бесконечное число раз, преобразование Фурье обобщенной функции всегда существует и т.д.. Поэтому использование техники обобщенных функций

существенно расширяет круг рассматриваемых задач и к тому же приводит к значительным упрощениям, автоматизируя элементарные операции. Понятие обобщенной δ-функции широко используется при нахождении фундаментальных решений линейных дифференциальных уравнений, к нему тесно примыкает метод функций Грина (функций единичного источника поля, функций влияния и т.д.).

ЛИТЕРАТУРА

1.И.М.Гельфанд и Г.Е.Шилов. "Обобщенные функции и действия над ними". ГИФМЛ Москва 1959.

2.В.С.Владимиров. "Обобщенные функции в математической физике". Москва "Наука" ФМЛ 1979.

3.И.Гальперин. "Введение в теорию обобщенных функций". Москва ИЛ 1954.