

УДК 517.958:621.372.8

## СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

*Е.М. Карчевский*

### Аннотация

Предложены новые постановки задач спектральной теории диэлектрических волноводов, на основе которых доказано существование собственных волн, изучены качественные свойства спектра. Построены и теоретически обоснованы новые эффективные численные методы решения этих задач.

**Ключевые слова:** спектральные задачи, диэлектрические волноводы, численные методы, интегральные уравнения.

---

### Введение

В работе дается обзор результатов, полученных на кафедре прикладной математики Казанского государственного университета в области исследования и численной реализации математических моделей спектральной теории диэлектрических волноводов. Основное внимание уделяется задачам о собственных волнах волноводов, находящихся в однородной окружающей среде.

Работа состоит из пяти разделов. Первый раздел посвящен изучению качественных свойств решений общих задач о собственных волнах волноводов с постоянным показателем преломления путем сведения их методом потенциалов простого слоя к нелинейным спектральным задачам для фредгольмовых голоморфных оператор-функций. Во втором разделе изучаются качественные свойства решений общих задач о собственных волнах волноводов с переменным показателем преломления и размытой границей. Они сводятся методом интегральных уравнений по области к нелинейным спектральным задачам для фредгольмовых голоморфных оператор-функций. Третий раздел посвящен изучению вопросов существования и качественных свойств решений задач о поверхностных собственных волнах путем сведения их методом точных нелокальных граничных условий к параметрическим задачам на собственные значения для ограниченных самосопряженных операторов с нелинейным вхождением спектральных параметров. В четвертом разделе изучаются свойства оператора двумерного сингулярного интегрального уравнения, к которому сводится задача о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода в плоско-слоистой окружающей среде. Пятый раздел посвящен разработке и теоретическому исследованию численных методов решения задач спектральной теории цилиндрических диэлектрических волноводов.

### 1. Общие задачи о собственных волнах волноводов с постоянным показателем преломления

1.1. Скалярная задача в приближении слабонаправляющего волновода. Рассмотрим скалярную задачу о собственных волнах слабонаправляющего

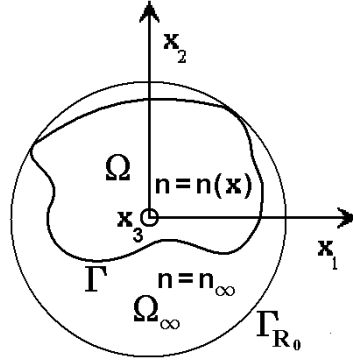


Рис. 1. Схематическое изображение поперечного сечения диэлектрического волновода в однородной окружающей среде

волновода [1]. Ненулевая функция  $u \in U$  называется собственной функцией задачи, отвечающей собственному значению  $\beta \in \Lambda$ , если

$$\Delta u + \chi_+^2 u = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$\Delta u + \chi_\infty^2 u = 0, \quad x \in \Omega_\infty, \quad (2)$$

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma, \quad (3)$$

$$u(r, \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi_\infty r) \exp(il\varphi), \quad |x| \geq R_0. \quad (4)$$

Здесь  $\Delta$  – двумерный оператор Лапласа;  $\Omega$  – область на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , ограниченная дважды непрерывно дифференцируемым контуром  $\Gamma$ , целиком лежащая в круге радиуса  $R_0$  (см. рис. 1),  $\Omega_\infty = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ ;  $U$  – множество функций, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в  $\bar{\Omega}$  и  $\bar{\Omega}_\infty$ , дважды непрерывно дифференцируемых в  $\Omega$  и  $\Omega_\infty$ ;

$$\chi_{+/\infty} = \sqrt{k^2 n_{+/\infty}^2 - \beta^2},$$

где  $k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ ,  $\omega > 0$  – заданная круговая частота электромагнитных колебаний;  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  – диэлектрическая и магнитная проницаемости свободного пространства соответственно;  $n_+$  и  $n_\infty$  – постоянные показатели преломления волновода и окружающей среды соответственно, причем такие, что  $0 < n_\infty < n_+$ ;  $H_l^{(1)}(z)$  – функции Ханкеля первого рода порядка  $l$ ; символом  $\Lambda$  обозначено пересечение римановых поверхностей функций  $\ln \chi_+(\beta)$  и  $\ln \chi_\infty(\beta)$ .

**Теорема 1 (см. [1]).** На пересечении  $\Lambda_0^{(1)}$  главных («физических») листов поверхностей  $\Lambda_+$  и  $\Lambda_\infty$  собственные значения задачи (1)–(4) могут принадлежать лишь множеству

$$G = \{\beta \in \mathbb{R} : kn_\infty < |\beta| < kn_+\}.$$

Вещественным  $\beta \in G$  соответствуют поверхностные волны ( $u$  экспоненциально убывает при  $|x| \rightarrow \infty$ ). Теорема 1 обобщает хорошо известные результаты о локализации спектра собственных волн слабонаправляющего диэлектрического волновода кругового сечения, полученные на основе элементарного анализа характеристического уравнения метода разделения переменных [2].

В статье [1] задача (1)–(4) сведена к нелинейной спектральной задаче для системы слабосингулярных интегральных уравнений по контуру  $\Gamma$  на основе представления функции  $u$  в областях  $\Omega$  и  $\Omega_\infty$  в виде потенциалов простого слоя с непрерывными по Гельдеру плотностями и ядрами в виде удовлетворяющих соответствующим «парциальным» условиям излучения (условиям вида (4), см., например, [3]) фундаментальных решений уравнений Гельмгольца (1) и (2). Построенная система интегральных уравнений трактуется как операторное уравнение вида

$$A(\beta)w \equiv (I + B(\beta))w = 0 \quad (5)$$

в банаховом пространстве  $W = C^{1,\alpha} \times C^{0,\alpha}$ . Оператор  $B(\beta)$  вполне непрерывен при любых  $\beta \in \Lambda$  [1].

Сведение системы интегральных уравнений первого рода, возникающей в результате применения метода потенциалов простого слоя и содержащей непрерывно обратимые операторы  $L : C^{0,\alpha} \rightarrow C^{1,\alpha}$  вида

$$Lp = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{t-\tau}{2} \right| p(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi], \quad (6)$$

к фредгольмовому операторному уравнению (5) проведено на основе известной процедуры регуляризации с использованием результатов Б.Г. Габдулхаева [4].

**Теорема 2 (см. [1]).** *Регулярное множество оператор-функции  $A(\beta)$ , определенной в (5), непусто, а именно  $\Lambda_0^{(1)} \setminus (D \cup G) \subset \rho(A)$ . Характеристическое множество оператор-функции  $A(\beta)$  может состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями оператор-функции  $A(\beta)$ . Каждое характеристическое значение  $\beta$  оператор-функции  $A(\beta)$  непрерывно зависит от параметров  $(\omega, n_+, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^3$ . Кроме того, с изменением параметров  $(\omega, n_+, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^3$  характеристические значения оператор-функции  $A(\beta)$  могут появляться и исчезать только на границе  $\Lambda$ , то есть в точках  $\pm kn_+$ ,  $\pm kn_\infty$  и на бесконечности.*

Здесь  $\mathbb{R}_+ = \{\omega \in \mathbb{R} : \omega > 0\}$ ,  $D$  – множество, состоящее из мнимой оси и примыкающего к ней, не пересекающегося с  $G$  интервала вещественной оси  $\{\beta \in \mathbb{R} : |\beta| < kn_\infty\}$ .

Теорема 2 обобщает хорошо известные результаты о зависимости постоянных распространения собственных волн слабонаправляющего диэлектрического волновода кругового сечения от показателей преломления волновода, окружающей среды и частоты электромагнитных колебаний, полученные в результате элементарного анализа характеристического уравнения метода разделения переменных.

Доказательство теоремы 2 основано на применении теоремы Гохберга – Крейна [5] об изолированности характеристических значений фредгольмовой голоморфной оператор-функции  $A(\beta)$  при наличии в области ее голоморфности хотя бы одной регулярной точки и теоремы С. Стейнберга [6] о поведении характеристических значений  $\beta$  такой оператор-функции в зависимости от изменения вещественного параметра  $\omega$  в случае, если оператор-функция  $A(\beta, \omega)$  является совместно непрерывной функцией параметров  $\beta$  и  $\omega$ . Отметим, что теорема С. Стейнберга справедлива для частного случая, когда оператор-функция имеет вид  $A(\beta, \omega) = I + B(\beta, \omega)$ , где  $B(\beta, \omega)$  – вполне непрерывный оператор.

В статье [1] изучены свойства оператор-функции  $A(\beta)$  и доказаны утверждения относительно спектральной эквивалентности задач (1)–(4) и (5). Во-первых,

установлено, что если  $w \in W$  является собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta_0 \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$ , то функция  $u$ , представленная в виде потенциалов простого слоя с плотностями, определяемыми вектором  $w$ , принадлежит множеству  $U$  и является собственной функцией задачи (1)–(4), отвечающей собственному значению  $\beta_0$ . Во-вторых, любая собственная функция  $u \in U$  задачи (1)–(4), отвечающая собственному значению  $\beta_0 \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$ , может быть представлена в виде потенциалов простого слоя с непрерывными по Гельдеру плотностями; при этом функция  $w$ , вычисленная по явным формулам по этим плотностям, принадлежит  $W$  и является собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta_0$ .

### 1.2. Векторная задача в полной электродинамической постановке.

Рассмотрим общую векторную задачу о собственных волнах волновода в полной электродинамической постановке [7]. Ненулевой вектор  $\{E, H\} \in U^6$  называется собственным вектором задачи, отвечающим собственному значению  $\beta \in \Lambda$ , если

$$\operatorname{rot}_\beta E = i\omega\mu_0 H, \quad \operatorname{rot}_\beta H = -i\omega\varepsilon_0 n^2 E, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \quad (7)$$

$$\nu \times E^+ = \nu \times E^-, \quad x \in \Gamma, \quad (8)$$

$$\nu \times H^+ = \nu \times H^-, \quad x \in \Gamma, \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} A_l \\ B_l \end{bmatrix} H_l^{(1)}(\chi_\infty r) \exp(il\varphi), \quad |x| \geq R_0. \quad (10)$$

Здесь символом  $\operatorname{rot}_\beta$  обозначена векторная операция, которая получается из обычной операции  $\operatorname{rot}$  заменой производной по  $x_3$  умножением на  $i\beta$ ;  $n$  – кусочно-постоянная функция, равная  $n_+$  в  $\Omega$  и  $n_\infty$  в  $\Omega_\infty$ .

**Теорема 3 [7].** *Мнимая и вещественная оси листа  $\Lambda_0^{(1)}$ , за исключением множества  $G$ , не содержат собственных значений задачи (7)–(10).*

Вещественным  $\beta \in G$  соответствуют поверхностные волны. Комплексным значениям  $\beta \in C_0^{(1)}$  отвечают комплексные собственные волны. Символом  $C_0^{(1)}$  обозначена часть листа  $\Lambda_0^{(1)}$  без мнимой и вещественной осей. Теорема 3 обобщает известные результаты о локализации спектра собственных волн диэлектрического волновода кругового сечения, полученные на основе метода разделения переменных в векторном случае.

В статье [7] задача (7)–(10) сведена к нелинейной спектральной задаче для системы сингулярных интегральных уравнений по контуру  $\Gamma$ . При этом использованы выражения собственных векторов  $\{E, H\}$  задачи (7)–(10) через потенциальные функции  $E_3, H_3$ , удовлетворяющие уравнениям (1), (2), и представления этих функций в виде потенциалов простого слоя с непрерывными по Гельдеру плотностями и ядрами в виде фундаментальных решений уравнений Гельмгольца (1) и (2), удовлетворяющих соответствующим «парциальным» условиям излучения.

Вследствие наличия в условиях сопряжения, которым удовлетворяют функции  $E_3$  и  $H_3$  на контуре  $\Gamma$ , касательных производных построенная система уравнений содержит сингулярный интегральный оператор  $S : C^{0,\alpha} \rightarrow C^{0,\alpha}$ , определяемый равенством

$$Sp = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\tau-t}{2} p(\tau) d\tau + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (11)$$

Этот линейный непрерывный оператор, как известно, непрерывно обратим (см., например, [8]). Построенная система интегральных уравнений трактуется как операторное уравнение вида

$$A(\beta)w \equiv (I + B(\beta))w = 0 \quad (12)$$

в банаховом пространстве  $W = (C^{0,\alpha})^4$ . Установлено [7], что оператор  $B(\beta)$  вполне непрерывен при любых  $\beta \in \Lambda$ .

**Теорема 4 [7].** *Регулярное множество оператор-функции  $A(\beta)$ , определенной в (12), непусто, а именно*

$$\Lambda_0^{(1)} \setminus (D \cup G \cup C_0^{(1)}) \subset \rho(A).$$

*Характеристическое множество оператор-функции  $A(\beta)$  может состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями оператор-функции  $A(\beta)$ . Каждое характеристическое значение  $\beta$  оператор-функции  $A(\beta)$  непрерывно зависит от параметров  $(\omega, n_+, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^3$ . Кроме того, с изменением параметров  $(\omega, n_+, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^3$  характеристические значения оператор-функции  $A(\beta)$  могут появляться и исчезать только на границе  $\Lambda$ , то есть в точках  $\pm kn_+$ ,  $\pm kn_\infty$  и на бесконечности.*

Теорема 4 обобщает известные результаты о зависимости постоянных распространения собственных волн диэлектрического волновода кругового сечения от показателей преломления волновода, окружающей среды и частоты электромагнитных колебаний, полученные в результате анализа характеристического уравнения метода разделения переменных в векторном случае. В ходе доказательства этой теоремы в [7] изучены свойства оператор-функции  $A(\beta)$  и установлена спектральная эквивалентность задач (12) и (7)–(10).

## 2. Общие задачи о собственных волнах волноводов с размытой границей

**2.1. Скалярная задача в приближении слабонаправляющего волновода.** Рассмотрим скалярную задачу в приближении слабонаправляющего волновода [9]. Ненулевая функция  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  называется собственной функцией этой задачи, отвечающей собственному значению  $\beta \in \Lambda$ , если

$$[\Delta + (k^2 n^2 - \beta^2)] u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (13)$$

$$u(r, \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi_\infty r) \exp(il\varphi), \quad |x| \geq R_0. \quad (14)$$

Здесь  $n$  – вещественная функция, удовлетворяющая условиям:

$$\begin{aligned} n &= n_\infty = \text{const}, \quad x \notin \Omega, \\ n_+ &= \max_{x \in \Omega} n(x) > n_\infty > 0; \end{aligned}$$

символом  $\Lambda$  обозначена поверхность Римана функции  $\ln \chi_\infty(\beta)$ .

Всюду во втором разделе предполагается, что волновод имеет размытую границу, а именно, что  $n \in C^2(\mathbb{R}^2)$ . Это предположение существенно используется в п. 2.2 при решении векторной задачи о собственных волнах. Результаты п. 2.1 справедливы для более общего случая [10]:  $n \in C^1(\Omega)$ , граница  $\Gamma$  области  $\Omega$  – липшицева кривая, на  $\Gamma$  функция  $u \in U$  удовлетворяет условиям сопряжения (3). Однако в целях единства изложения материала предположение  $n \in C^2(\mathbb{R}^2)$  делается и в п. 2.1.

**Теорема 5 [9].** На главном («физическом») листе  $\Lambda_0^{(1)}$  римановой поверхности  $\Lambda$  собственные значения задачи (13), (14) могут принадлежать лишь множеству  $G$ .

В статье [9] задача (13), (14) сведена к нелинейной спектральной задаче для интегрального уравнения по области  $\Omega$  на основе представления функции  $u$  в виде интеграла по области  $\Omega$  с ядром в виде фундаментального решения уравнения Гелмгольца (2), удовлетворяющего «парциальным» условиям излучения. Построенное интегральное уравнение трактуется как операторное уравнение вида

$$A(\beta)v \equiv (I - B(\beta))v = 0 \quad (15)$$

в пространстве  $L_2(\Omega)$ . При любых  $\beta \in \Lambda$  оператор  $B(\beta)$  является вполне непрерывным, при  $\beta \in G$  – самосопряженным и положительно определенным [9].

В статье [9] доказано, что если  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  является собственной функцией задачи (13), (14), отвечающей собственному значению  $\beta_0 \in \Lambda$ , то функция  $v$ , вычисленная по явной формуле по  $u$ , принадлежит пространству  $L_2(\Omega)$  и является собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta_0$ . С другой стороны, если  $v \in L_2(\Omega)$  является собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta_0 \in \Lambda$ , то функция  $u$ , построенная по  $v$  с помощью определенного интегрального представления, принадлежит пространству  $C^2(\mathbb{R}^2)$  и является собственной функцией задачи (13), (14), отвечающей собственному значению  $\beta_0$ .

**Теорема 6 [9].** Регулярное множество оператор-функции  $A(\beta)$ , определенной в (15), непусто, а именно  $\Lambda_0^{(1)} \setminus G \subset \rho(A)$ . Характеристическое множество оператор-функции  $A(\beta)$  может состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями оператор-функции  $A(\beta)$ . Каждое характеристическое значение  $\beta$  оператор-функции  $A(\beta)$  непрерывно зависит от параметров  $(\omega, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^2$ . Кроме того, с изменением  $(\omega, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^2$  характеристические значения оператор-функции  $A(\beta)$  могут появляться и исчезать только на границе поверхности  $\Lambda$ , то есть в точках  $\pm kn_\infty$  и на бесконечности.

**Теорема 7 [9].** Задача (13), (14) имеет по крайней мере одно простое положительное собственное значение  $\beta$ , принадлежащее множеству  $G$ ; ему отвечает положительная собственная функция.

## 2.2. Векторная задача в полной электродинамической постановке.

Рассмотрим общую векторную задачу о собственных волнах волновода с размытой границей в полной электродинамической постановке [11]. Ненулевой вектор  $\{E, H\} \in [C^2(\mathbb{R}^2)]^6$  называется собственным вектором задачи, отвечающим собственному значению  $\beta \in \Lambda$ , если

$$\operatorname{rot}_\beta E = i\omega\mu_0 H, \quad \operatorname{rot}_\beta H = -i\omega\varepsilon_0 n^2 E, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} A_l \\ B_l \end{bmatrix} H_l^{(1)}(\chi_\infty r) \exp(il\varphi), \quad |x| \geq R_0. \quad (17)$$

**Теорема 8 [11].** Мнимая и вещественная оси листа  $\Lambda_0^{(1)}$ , за исключением множества  $G$ , не содержат собственных значений задачи (16), (17).

В статье [11] задача (16), (17) сведена к нелинейной спектральной задаче для интегрального уравнения по области  $\Omega$  с помощью предложенного К. Мюллером

(С. Müller) метода сведения трехмерной задачи дифракции электромагнитных волн на неоднородном теле с размытой границей к интегральному уравнению Фредгольма второго рода по области неоднородности. Построенное интегральное уравнение трактуется как операторное уравнение вида

$$A(\beta)F \equiv (I - B(\beta))F = 0 \quad (18)$$

в пространстве  $[L_2(\Omega)]^3$ . При любых  $\beta \in \Lambda$  оператор  $B(\beta)$  вполне непрерывен [11].

В статье [11] доказано, что если вектор  $\{E, H\} \in [C^2(\mathbb{R}^2)]^6$  является собственным вектором задачи (16), (17), отвечающим собственному значению  $\beta_0 \in \Lambda$ , то  $F = E \in [L_2(\Omega)]^3$  есть собственный вектор оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающий характеристическому значению  $\beta_0$ . Если  $F \in [L_2(\Omega)]^3$  является собственным вектором оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающим характеристическому значению  $\beta_0 \in \Lambda$ , и это число  $\beta_0$  не является собственным значением задачи (13), (14), то вектор  $\{E, H\}$ , построенный по  $F$  с помощью определенного интегрального представления, принадлежит  $[C^2(\mathbb{R}^2)]^6$  и является собственным вектором задачи (16), (17), отвечающим собственному значению  $\beta_0$ .

**Теорема 9 [11].** *Регулярное множество оператор-функции  $A(\beta)$ , определенной в (18), непусто, а именно  $\Lambda_0^{(1)} \setminus (G \cup C_0^{(1)}) \subset \rho(A)$ . Характеристическое множество оператор-функции  $A(\beta)$  может состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями оператор-функции  $A(\beta)$ . Каждое характеристическое значение  $\beta$  оператор-функции  $A(\beta)$  непрерывно зависит от параметров  $(\omega, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^2$ . Кроме того, с изменением параметров  $(\omega, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^2$  характеристические значения оператор-функции  $A(\beta)$  могут появляться и исчезать только на границе поверхности  $\Lambda$ , то есть в точках  $\pm kn_\infty$  и на бесконечности.*

### 3. Задачи о поверхностных собственных волнах

**3.1. Скалярная задача в приближении слабонаправляющего волновода.** Рассмотрим скалярную задачу о поверхностных собственных волнах слабонаправляющего волновода в вариационной постановке [12]: найти все такие пары чисел  $(\beta^2, k^2) \in \Lambda$ , при которых существуют ненулевые функции  $u \in W_2^1(\mathbb{R}^2)$ , удовлетворяющие для любой функции  $v \in W_2^1(\mathbb{R}^2)$  тождеству

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \cdot \nabla v + \beta^2 uv) dx = k^2 \int_{\mathbb{R}^2} n^2 uv dx. \quad (19)$$

Здесь  $\Lambda = \{(\beta^2, k^2) : \beta^2/n_+^2 < k^2 < \beta^2/n_\infty^2, \beta^2 > 0\}$ ;  $n$  – вещественная функция, принадлежащая пространству  $C(\overline{\Omega})$ , такая, что  $n = n_\infty > 0$  в  $\Omega_\infty$ ,

$$\min_{x \in \overline{\Omega}} n(x) \geq n_\infty, \quad n_+ = \max_{x \in \overline{\Omega}} n(x) > n_\infty.$$

Область  $\Omega$  является ограниченной, не обязательно связной, каждая связная компонента ее границы  $\Gamma$  является липшицевой кривой.

В статье [12] задача (19) эквивалентным образом сведена к параметрической задаче на собственные значения в круге  $\Omega_R \supset \Omega$ , которая формулируется следующим образом: найти все  $(\beta^2, k^2) \in \Lambda$ , при которых существуют ненулевые функции  $u \in W_2^1(\Omega_R)$ , удовлетворяющие уравнению

$$A(\beta^2, k^2)u = k^2 Bu, \quad (20)$$

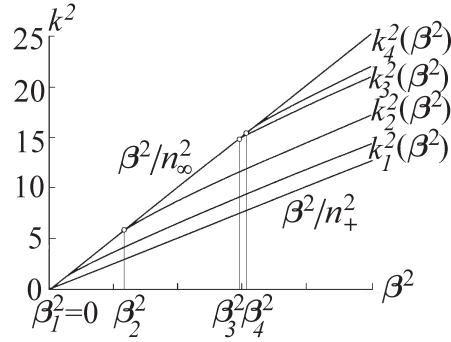


Рис. 2. Дисперсионные кривые для поверхностных собственных волн слабонаправляющего волновода с показателем преломления, изменяющимся в ограниченной области (на примере волновода кругового сечения с кусочно-постоянным показателем преломления)

где  $A(\beta^2, k^2)$  и  $B$  – ограниченные линейные самосопряженные операторы, действующие в пространстве  $W_2^1(\Omega_R)$ ; кроме того,  $A(\beta^2, k^2)$  – неотрицательный оператор для любых  $(\beta^2, k^2) \in \Lambda$ , а  $B$  – вполне непрерывный положительный оператор. Сведение задачи (19) к задаче (20) основано на построении точного нелокального условия на границе  $\Gamma_R$  области  $\Omega_R$  с использованием условия сопряжения на  $\Gamma_R$  и явной формулы для метагармонического продолжения искомого решения с  $\Gamma_R$  в  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_R$ .

В статье [12] доказано, что при любом  $\beta^2 > 0$  задача (20) имеет по крайней мере одно решение, а число всех ее решений увеличивается с ростом  $\beta^2$  и стремится к бесконечности при  $\beta^2 \rightarrow \infty$ . Для каждого конечного значения  $\beta^2$  существует конечное число решений  $(\beta^2, k_l^2(\beta^2); u_l(\beta^2))$  задачи (20). Это число определяется решениями  $\beta_l^2$  вспомогательной линейной задачи на собственные значения для ограниченных самосопряженных операторов (уравнения отсечки).

В статье [12], кроме того, доказано, что функции  $k^2 = k_l^2(\beta^2)$ , определенные на  $(\beta_l^2, \infty)$ , при всех  $l \geq 1$  являются локально липшицевыми, возрастающими, и  $k_l^2(\beta^2)/\beta^2 \rightarrow n_+^{-2}$  при  $\beta^2 \rightarrow \infty$ .

Приведенные выше результаты статьи [12] обобщают хорошо известные свойства поверхностных собственных волн слабонаправляющего цилиндрического диэлектрического волновода кругового поперечного сечения с кусочно-постоянным показателем преломления (см. рис. 2), полученные на основе метода разделения переменных.

**3.2. Векторная задача в вариационной постановке.** Рассмотрим векторную задачу о поверхностных собственных волнах в вариационной постановке [13]: найти все такие  $(\beta, k) \in \Lambda$ , при которых существуют ненулевые векторы  $\mathbf{H} \in [W_2^1(\mathbb{R}^2)]^3$ , удовлетворяющие для любого вектора  $\mathbf{H}' \in [W_2^1(\mathbb{R}^2)]^3$  тождеству

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{1}{n^2} \operatorname{rot}_\beta \mathbf{H} \cdot \overline{\operatorname{rot}_\beta \mathbf{H}'} + \frac{1}{n_\infty^2} \operatorname{div}_\beta \mathbf{H} \overline{\operatorname{div}_\beta \mathbf{H}'} \right) dx = k^2 \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{H} \cdot \overline{\mathbf{H}'} dx. \quad (21)$$

Здесь  $\Lambda = \{(\beta, k) : \beta/n_+ < k < \beta/n_\infty, \beta > 0\}$ , символом  $\operatorname{div}_\beta$  обозначена векторная операция, которая получается из обычной операции  $\operatorname{div}$  заменой производной по  $x_3$  умножением на  $i\beta$ .

На основе метода точных нелокальных граничных условий задача (19) эквивалентным образом сводится к параметрической задаче на собственные значения



в круге  $\Omega_R$ , которая формулируется следующим образом [13]: найти все  $(\beta, \sigma) \in \mathbb{R}_+^2$ , при которых существуют ненулевые векторы  $\mathbf{H} \in [W_2^1(\Omega_R)]^3$ , удовлетворяющие уравнению

$$A(\beta, \sigma)\mathbf{H} = -\sigma^2 B\mathbf{H}, \quad (22)$$

где  $\sigma = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_\infty^2}$  – поперечное волновое число,  $A(\beta, \sigma)$  и  $B$  – ограниченные линейные самосопряженные операторы, действующие в пространстве  $[W_2^1(\Omega_R)]^3$ , кроме того,  $B$  – компактный положительный оператор.

В статье [13] доказано, что при любом  $\beta > 0$  задача (22) имеет по крайней мере два решения:  $(\beta, \sigma_1(\beta); \mathbf{H}_1(\beta))$  и  $(\beta, \sigma_2(\beta); \mathbf{H}_2(\beta))$ . Число всех решений увеличивается с ростом  $\beta$  и стремится к бесконечности при  $\beta \rightarrow \infty$ . Для каждого конечного значения  $\beta$  существует конечное число решений  $(\beta, \sigma_l(\beta); \mathbf{H}_l(\beta))$  задачи (22). Это число определяется значениями точек отсечки  $\beta_l$ , квадраты которых являются решениями уравнения отсечки, представляющего собой линейную задачу на собственные значения для ограниченных самосопряженных операторов.

Кроме того, в статье [13] доказано, что функции  $\sigma = \sigma_l(\beta)$ , определенные на  $(\beta_l, \infty)$ , при всех  $l \geq 1$  являются локально липшицевыми, неубывающими, и  $\sigma_l(\beta)/\beta \rightarrow \sqrt{1 - (n_\infty/n_+)^2}$  при  $\beta \rightarrow \infty$ .

Приведенные выше результаты статьи [13] обобщают хорошо известные свойства поверхностных собственных волн цилиндрического диэлектрического волновода кругового поперечного сечения с кусочно-постоянным показателем преломления (см. рис. 3), полученные в векторном случае на основе метода разделения переменных.

#### 4. Задача о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода в плоско-слоистой среде

Рассмотрим задачу о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода в плоско-слоистой среде [14]. Предполагается, что показатель преломления  $n$  является положительной вещественной функцией, кроме того, существует ограниченная область  $\Omega$  такая, что  $n(x) = n_\infty(x_2)$  при  $x \in \Omega_\infty = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ , где функция  $n_\infty(x_2)$  зависит только от координаты  $x_2$ :

$$n_\infty(x_2) = \begin{cases} n_1, & x \in \Omega_1 = \{x : \infty < x_1 < \infty, x_2 > d\}, \\ n_2, & x \in \Omega_2 = \{x : \infty < x_1 < \infty, 0 < x_2 < d\}, \\ n_3, & x \in \Omega_3 = \{x : \infty < x_1 < \infty, x_2 < 0\}. \end{cases}$$

Предполагается, что  $\Omega \subset \Omega_2$ , и  $n$  является непрерывной функцией в области  $\Omega_2$ . Другими словами, предполагается, что волновод имеет размытую границу. Ненулевой вектор  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\} \in U^6$  называется собственным вектором задачи, отвечающим собственному значению  $\beta \in \hat{\Lambda}_0^{(1)}$ , если выполнены условия:

$$\operatorname{rot}_\beta \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2), \quad (23)$$

$$\operatorname{rot}_\beta \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 n^2 \mathbf{E}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2), \quad (24)$$

$$\nu \times \mathbf{E}^+ = \nu \times \mathbf{E}^-, \quad \nu \times \mathbf{H}^+ = \nu \times \mathbf{H}^-, \quad x \in \Gamma_j, \quad j = 1, 2. \quad (25)$$

Здесь  $\hat{\Lambda}_0^{(1)} = \{\beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Im}\beta = 0, |\beta| > kn_2\}$  – множество, принадлежащее вещественной оси главного («физического») листа римановой поверхности функции  $\ln \sqrt{k^2 n_2^2 - \beta^2}$ ;  $n_+ > n_2 \geq n_3 \geq n_1 > 0$ ; через  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  обозначены границы области  $\Omega_2$ ;  $U$  – множество функций, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в  $\bar{\Omega}_1$ ,  $\bar{\Omega}_2$  и  $\bar{\Omega}_3$ , дважды непрерывно дифференцируемых в  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$ ,

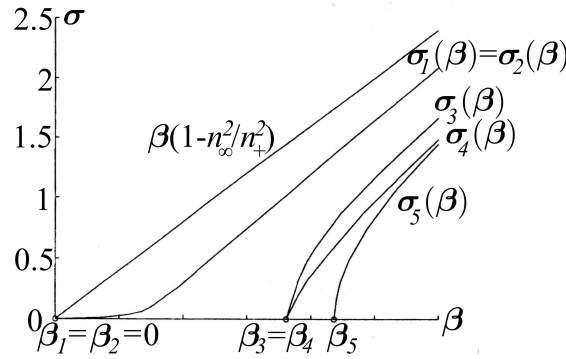


Рис. 3. Дисперсионные кривые для поверхностных собственных волн волновода с показателем преломления, изменяющимся в ограниченной области (на примере волновода кругового сечения с кусочно-постоянным показателем преломления)

экспоненциально убывающих при  $|x| \rightarrow \infty$  по любому направлению, не параллельному прямым  $\Gamma_j$ , и ограниченных при  $|x| \rightarrow \infty$  по направлениям, параллельным прямым  $\Gamma_j$ .

В работе [14] задача (23)–(25) сведена к нелинейной спектральной задаче для двумерного сингулярного интегрального уравнения на основе представления собственных векторов в виде интегралов по области  $\Omega$  с ядрами, выражающимися через известную тензорную функцию Грина для поляризационного потенциала. Построенное интегральное уравнение представляется в операторном виде

$$A(\beta)F = 0 \quad (26)$$

в пространстве  $[L_2(\Omega)]^3$ . Для всех  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  ядро оператора  $A(\beta)$  сильно сингулярно [14].

В работе [14] доказано, что для любого  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  оператор  $A(\beta)$  фредгольмов. Доказательство основано на общих результатах теории многомерных сингулярных интегральных операторов, построенной в работах С.Г. Михлина (см., например, [15]).

В случае, когда показатель преломления волновода совпадает с показателем преломления того слоя, в котором он находится, направляющая структура представляет собой планарный диэлектрический волновод. Свойства постоянных распространения и собственных волн такого волновода хорошо изучены (см., например, [16]).

## 5. Численные методы решения задач спектральной теории диэлектрических волноводов

### 5.1. Метод Галеркина решения общих задач о собственных волнах.

В этом пункте предлагается и обосновывается метод Галеркина решения нелинейных спектральных задач для систем интегральных уравнений, содержащих сингулярные интегралы с логарифмической особенностью ядра (6) и ядром Гильберта (11). При исследовании численного метода эти системы удобно трактовать как операторные уравнения (5) и (12) в гильбертовых пространствах  $W_2^1 \times L_2$  и  $(L_2)^4$  соответственно. В качестве базисных используются тригонометрические функции, которые являются собственными функциями, отвечающими известным собственным значениям, указанных сингулярных интегральных операторов. В соответствии с методом Галеркина приближенные значения  $\beta_n$  постоянных распространения  $\beta$

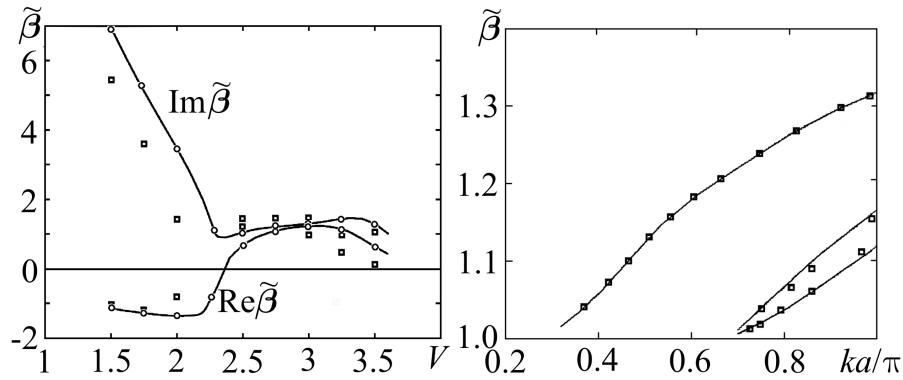


Рис. 4. Дисперсионные кривые для комплексных и поверхностных собственных волн волноводов кругового и квадратного поперечных сечений

определяются как характеристические значения соответствующих конечномерных операторов  $A_n(\beta) : H_n \rightarrow H_n$ , где  $n$  – количество базисных функций.

В статье [17] обоснована сходимость метода Галеркина решения задачи (5), а в работе [18] – задачи (12), а именно: доказано, что если  $\beta_0 \in \sigma(A)$  (символом  $\sigma(A)$  обозначено характеристическое множество оператора  $A$ ), то существует такая последовательность  $\beta_n \in \sigma(A_n)$ , что  $\beta_n \rightarrow \beta_0$ . Если  $\{\beta_n\}$  – некоторая последовательность точек из  $\Lambda$  такая, что  $\beta_n \in \sigma(A_n)$ ,  $\beta_n \rightarrow \beta_0 \in \Lambda$  при  $n \rightarrow \infty$ , то  $\beta_0 \in \sigma(A)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Если  $\{\beta_n\}$  – некоторая последовательность точек из  $\Lambda$  и  $\{x_n\}$  – некоторая последовательность нормированных векторов ( $\|x_n\| = 1$ ) таких, что имеют место соотношения  $\beta_n \in \sigma(A_n)$ ,  $A_n(\beta_n)x_n = 0$ ,  $\beta_n \rightarrow \beta_0 \in \Lambda$ ,  $x_n \rightarrow x_0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то  $\beta_0 \in \sigma(A)$  и  $A(\beta_0)x_0 = 0$ ,  $\|x_0\| = 1$ . Исследование сходимости метода Галеркина опирается на результаты Г.М. Вайникко, О.О. Карма о проекционных методах решения нелинейных спектральных задач для фредгольмовых операторов [19].

В работе [20] приведены результаты численных экспериментов поиска собственных векторов задачи (12), отвечающих комплексным собственным значениям  $\beta \in C_0^{(1)}$ . Для волновода кругового поперечного сечения результаты сопоставлены с точными решениями, полученными методом разделения переменных, и с результатами работы Т. Яблонского [21], в которой для решения задачи в исходной дифференциальной постановке применялся специальный проекционно-итерационный метод.

Результаты вычислений [20] представлены на рис. 4 слева. На этом рисунке построены дисперсионные кривые для комплексных собственных значений – зависимости вещественной и мнимой части параметра  $\tilde{\beta} = \beta/(kn_\infty)$  от  $V = kR\sqrt{n_+^2 - n_\infty^2}$  при фиксированном значении  $(n_+^2 - n_\infty^2)/(2n_\infty^2) = 30$ . Здесь  $R$  – радиус волновода. Непрерывными линиями изображены точные решения, полученные как корни характеристического уравнения (верхний график –  $\text{Im } \tilde{\beta}$ , нижний –  $\text{Re } \tilde{\beta}$ ). Кружочками на рис. 4 слева отмечены результаты вычислений по методу Галеркина, которые с графической точностью совпали с результатами работы Т. Яблонского. Помимо комплексных собственных волн волновода кругового поперечного сечения, для демонстрации эффективности предлагаемого метода в работе [20] разыскивались также комплексные собственные волны диэлектрического волновода квадратного поперечного сечения со стороной, равной  $2R$  (на рис. 4 слева квадратиками отмечены значения  $\text{Im } \tilde{\beta}$  и  $\text{Re } \tilde{\beta}$ ). При этом использовалась аппроксимация квадрата гладкими кривыми. В [20] исследовалась скорость сходимости метода при

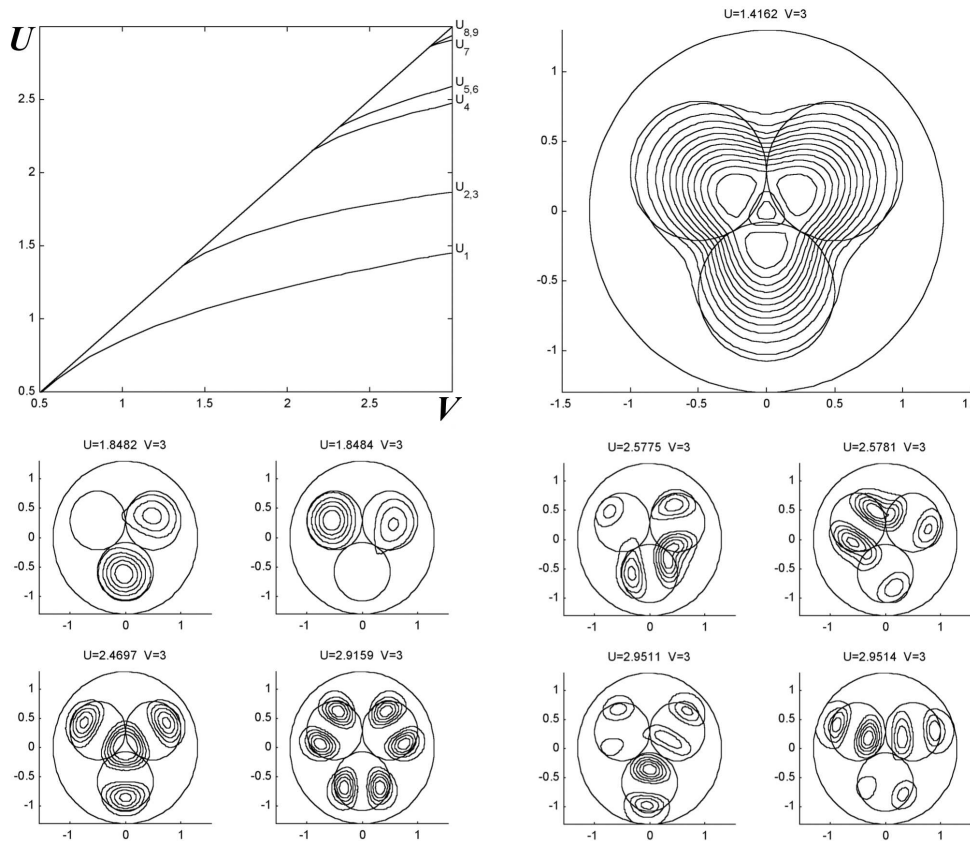


Рис. 5. Дисперсионные кривые для девяти собственных волн и линии уровня квадратов собственных функций волновода, состоящего из трех стержней кругового поперечного сечения

использовании различных кривых. На рис. 4 справа непрерывными линиями построены дисперсионные кривые для поверхностных собственных волн волновода квадратного поперечного сечения (со стороной, равной  $2a$ ), полученные методом Галеркина в статье [22]. Квадратиками на этом рисунке обозначены результаты физических экспериментов.

**5.2. Метод конечных элементов решения задач о поверхностных собственных волнах.** В статье [23] описан метод конечных элементов решения задачи (20). Используются простейшие пространства лагранжевых конечных элементов, удобные для практического применения метода. Предложен простой метод аппроксимации точного нелокального граничного условия, выписанного в явном виде на основе метода разделения переменных. Установлено, что свойства спектра конечно-элементной аппроксимации в точности соответствуют свойствам спектра исходной дифференциальной задачи. Приведены результаты численных экспериментов решения ряда конкретных задач спектральной теории диэлектрических волноводов. Полученные результаты сопоставлены с известными точными решениями и решениями, полученными другими авторами. Исследована скорость сходимости метода в зависимости от точности аппроксимации граничного условия и максимального размера элементов.

В качестве примера, демонстрирующего возможности метода [23], приведем результаты расчетов для новой волноведущей структуры. Область  $\Omega$  состояла из трех касающихся друг друга кругов с центрами в вершинах равностороннего треугольника со сторонами  $\rho$ . Показатель преломления  $n(x) = n_+$  при  $x \in \Omega$ . Радиус  $R$  окружности  $\Gamma_R$  был выбран равным  $1.3\rho$ . На рис. 5 в левом верхнем углу построены дисперсионные кривые, показывающие зависимость  $U = \rho k \sqrt{n_+^2 - (\beta/k)^2}$  от  $V = \rho k \sqrt{n_+^2 - n_\infty^2}$ , для первых девяти собственных волн. Дисперсионные кривые для  $U_2$  и  $U_3$ ,  $U_5$  и  $U_6$ ,  $U_8$  и  $U_9$  совпали с графической точностью. Вероятно, соответствующие собственные значения  $\beta$  являются кратными. На рис. 5 построены также линии уровня квадратов собственных функций  $u^2$  в расчетной области  $\Omega_R$  для  $V = 3$ .

### Summary

*E.M. Karchevskii.* Spectral Problems of the Theory of Dielectric Waveguides.

New statements of spectral problems of the theory of dielectric waveguides are proposed. Existence of the eigenwaves is proved and properties of the spectrum are investigated. New effective numerical methods for calculation of the eigenwaves are constructed and theoretically grounded.

**Key words:** spectral problems, dielectric waveguides, numerical methods, integral equations.

### Литература

1. *Карчевский Е.М.* К исследованию спектра собственных волн диэлектрических волноводов // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1999. – Т. 39, № 9. – С. 1558–1563.
2. *Снайдер А., Лав Дж.* Теория оптических волноводов. – М.: Радио и связь, 1987. – 656 с.
3. *Ильинский А.С., Шестопалов Ю.В.* Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. – 184 с.
4. *Габдулхаев Б.Г.* Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1994. – 288 с.
5. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов // Усп. матем. наук. – 1957. – Т. 12, Вып. 2. – С. 44–118.
6. *Steinberg S.* Meromorphic families of compact operators // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1968. – V. 31, No 5. – P. 372–379.
7. *Карчевский Е.М.* Исследование задачи о собственных волнах цилиндрических диэлектрических волноводов // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 7. – С. 998–999.
8. *Габдулхаев Б.Г.* Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1995. – 231 с.
9. *Карчевский Е.М., Носич А.И., Соловьев С.И.* Собственные моды диэлектрических волноводов с размытой границей // Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах: Тр. матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2000. – С. 79–114.
10. *Карчевский Е.М., Соловьев С.И.* Исследование спектральной задачи для оператора Гельмгольца на плоскости // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 4. – С. 563–565.

11. *Kartchevski E.M., Nosich A.I., Hanson G.W.* Mathematical Analysis of the Generalized Natural Modes of an Inhomogeneous Optical Fiber // *SIAM J. Appl. Math.* – 2005. – V. 65, No 6. – P. 2033–2048.
12. *Даутов Р.З., Карчевский Е.М.* Существование и свойства решений спектральной задачи теории диэлектрических волноводов // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* – 2000. – Т. 40, № 8. – С. 1250–1263.
13. *Даутов Р.З., Карчевский Е.М.* О решении векторной задачи о собственных волнах цилиндрических волноводов на основе нелокального краевого условия // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* – 2002. – Т. 42, № 7. – С. 1051–1066.
14. *Kartchevski E.M., Hanson G.* Mathematical Analysis of the Guided Modes of Integrated Optical Guides // *The Sixth Intern. Conf. on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation, Jyvaskyla, Finland, June 30 – July 4, 2003: Proceedings.* – 2003. – P. 445–450.
15. *Mikhlin S.G., Prössdorf S.P.* Singular integral operators. – Berlin: Springer-Verlag, 1986. – 528 p.
16. *Плещинский Н.Б.* Модели и методы волноводной электродинамики. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2008. – 104 с.
17. *Карчевский Е.М.* Исследование численного метода решения спектральной задачи теории диэлектрических волноводов // *Изв. вузов. Математика.* – 1999. – № 1. – С. 10–17.
18. *Karchevskii E.M.* Mathematical Analysis and Numerical Modeling of the Guided Modes of the Step-Index Optical Fibers // *SIAM Proc. Appl. Math.* – 2000. – V. 102. – P. 414–419.
19. *Вайчикко Г.М., Карма О.О.* О сходимости приближенных методов решения линейных и нелинейных операторных уравнений // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* – 1974. – Т. 14, № 4. – С. 828–837.
20. *Karchevskii E., Trifonov E.* Computing Complex Propagation Constants of Dielectric Waveguides // *Intern. Conf. on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, Kharkov, Ukraine, 12–15 September 2000: Proceedings.* – 2000. – P. 636–637.
21. *Jablonski T.F.* Complex modes in open lossless dielectric waveguides // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 1994. – V. 11, No 4. – P. 1272–1282.
22. *Карчевский Е.М.* Об определении постоянных распространения собственных волн диэлектрических волноводов методами теории потенциала // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* – 1998. – Т. 38, № 1. – С. 132–136.
23. *Даутов Р.З., Карчевский Е.М.* Вопросы существования и численные методы в спектральной теории слабонаправляющих диэлектрических волноводов // *Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах: Тр. матем. центра им. Н.И. Лобачевского.* – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2000. – С. 55–78.

Поступила в редакцию  
26.08.08

---

**Карчевский Евгений Михайлович** – доктор физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Казанского государственного университета.

E-mail: *Evgenii.Karchevskii@ksu.ru*