Известия вузов. Математика
2018, №2, с. 23–31

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Н.Г. ГУРЬЯНОВ, О.Н. ТЮЛЕНЕВА

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ РЕЗЕРВУАР С ЖИДКОСТЬЮ В ТРЕХМЕРНОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

Аннотация. В цилиндрической системе координат строится точное решение трехмерной задачи термоупругости для резервуара с жидкостью. Из решения уравнения теплопроводности определяется температурное поле. Затем решаются уравнения несимметричной задачи теории упругости, причем система разрешающих уравнений сводится к четырем отдельным уравнениям относительно перемещений конструкции. Построены несколько точных решений краевых задач. Результаты представлены в виде достаточно простых формул.

Ключевые слова: температурное поле, термоупругость, интегрируемые комбинации, краевые задачи, аналитические решения.

УДК: 517.958 : 519.3

Уравнения трехмерной теории упругости в цилиндрической системе координат как относительно перемещений, так и напряжений, в наиболее компактной форме приведены в монографиях [1], [2]. Аналогичные уравнения с учетом температурных членов, построенные с использованием соотношений Дюгамеля–Неймана, приведены в монографии [3]. Все эти уравнения обладают общим недостатком — не удается получить их интегрируемые комбинации, что приводит к непреодолимым трудностям при построении точных решений. В монографии [4] эту проблему удалось решить для уравнений, не содержащих температурных членов, путем введения в систему дополнительного уравнения относительно объемной деформации. Точное решение этого уравнения опубликовано еще в работе [1], однако использовать его для решения всей системы разрешающих уравнений удалось авторам работы [4].

Целью данной работы является построение наиболее удобной для интегрирования системы уравнений теории упругости с учетом температурных членов и решение этих уравнений.

В качестве исходных принимаются уравнения для кругового цилиндра относительно перемещений [3]. Без учета массовых сил они записываются следующим образом:

$$\begin{gathered}
\Delta w + \frac{R}{(1-2\upsilon)}\left[\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\theta}{\partial\gamma} - 2\,(1+\upsilon)\,\alpha_T\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial T}{\partial\gamma}\right] = 0,\\
\left(\Delta - \frac{1}{\alpha^2}\right)u + \frac{R}{(1-2\upsilon)}\left[\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} - 2\,(1+\upsilon)\,\alpha_T\frac{\partial T}{\partial\alpha}\right] - \frac{2}{\alpha^2}\frac{\partial\upsilon}{\partial\beta} = 0,\\
\left(\Delta - \frac{1}{\alpha^2}\right)\upsilon + \frac{R}{(1-2\upsilon)}\left[\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial\beta} - 2\,(1+\upsilon)\,\alpha_T\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial\beta}\right] + \frac{2}{\alpha^2}\frac{\partial u}{\partial\beta} = 0,\\
\theta = \frac{1}{R}\left[\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\,(\alpha\,u)}{\partial\alpha} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\upsilon}{\partial\beta} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial w}{\partial\gamma}\right].
\end{gathered} \tag{1}$$

Поступила 08.11.2016

Здесь α, β, γ — безразмерные цилиндрические координаты (α отнесена к внешнему радиусу цилиндра R, γ — к его высоте H, β — угловая координата вдоль направляющей); r — радиус внутренней боковой поверхности; u, v, w — перемещения вдоль координаты α, в окружном β и вдоль γ соответственно; T — температура тела; α_T — температурный коэффициент линейного расширения; E, υ — модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно; θ — объемная деформация,

$$\varepsilon = \frac{H}{R}, \quad t = \frac{r}{R}, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2}. \tag{2}$$

Действуя на первое уравнение системы (1) оператором $\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\gamma}$, на второе — оператором $\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}$, на третье — оператором $\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\beta}$ и суммируя полученные уравнения, получаем

$$\left(1 + \frac{1}{(1-2\upsilon)}\right)\Delta\theta - \frac{2\,(1+\upsilon)\,\alpha_T}{(1-2\upsilon)}\Delta T = 0.$$

С учетом уравнения теплопроводности $\Delta T = 0$ для несвязанной задачи приходим к уравнению относительно объемной деформации

$$\Delta\theta = 0, \tag{3}$$

совпадающему с уравнением, приведенным в работе [1] без учета температурных членов.

Заменяя последнее уравнение системы (1) уравнением (3) и включая в нее уравнение теплопроводности, приходим к системе разрешающих уравнений поставленной задачи

$$\begin{gathered}
\Delta T = 0, \quad \Delta\theta = 0,\\
\Delta w + \frac{R}{(1-2\upsilon)}\left[\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\theta}{\partial\gamma} - 2\,(1+\upsilon)\,\alpha_T\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial T}{\partial\gamma}\right] = 0,\\
\left(\Delta - \frac{1}{\alpha^2}\right)u + \frac{R}{(1-2\upsilon)}\left[\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} - 2\,(1+\upsilon)\,\alpha_T\frac{\partial T}{\partial\alpha}\right] - \frac{2}{\alpha^2}\frac{\partial v}{\partial\beta} = 0,\\
\left(\Delta - \frac{1}{\alpha^2}\right)v + \frac{R}{(1-2\upsilon)}\left[\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial\beta} - 2\,(1+\upsilon)\,\alpha_T\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial\beta}\right] + \frac{2}{\alpha^2}\frac{\partial u}{\partial\beta} = 0.
\end{gathered} \tag{4}$$

Порядок системы (4) (без уравнения теплопроводности) выше порядка системы (1), так как построение уравнения (3) проводилось с дополнительным дифференцированием. Очевидно, общее решение системы (4) должно содержать лишние постоянные интегрирования.

В монографии [4] показано, что привлечение соотношения

$$\theta \equiv \frac{1}{R}\left[\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\,(\alpha u)}{\partial\alpha} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial w}{\partial\gamma}\right] \tag{5}$$

в качестве дополнительного условия устраняет этот недостаток, т. е. полностью решает проблему.

Точное решение системы (4) строится в предположении, что температура и перемещения линейны относительно координаты γ . Этот вариант имеет практическое применение, в частности, при исследовании деформации резервуаров, заполненных жидкостью.

Периодическое по β решение ищется в виде

$$\begin{gathered}
T\,(\alpha,\beta,\gamma) = T_m\,(\alpha,\gamma)\cos\,(m\beta)\,, \quad \theta\,(\alpha,\beta,\gamma) = \theta_m\,(\alpha,\gamma)\cos\,(m\beta)\,,\\
w\,(\alpha,\beta,\gamma) = w_m\,(\alpha,\gamma)\cos\,(m\beta)\,,\\
u\,(\alpha,\beta,\gamma) = u_m\,(\alpha,\gamma)\cos\,(m\beta)\,, \quad v\,(\alpha,\beta,\gamma) = v_m\,(\alpha,\gamma)\sin\,(m\beta)\,,
\end{gathered} \tag{6}$$

где m — любое целое число.

Замечание. а) В формуле (6) можно поменять местами косинусы и синусы, а также составить комбинацию этих функций. Решение в этих случаях практически не отличается от выбранного варианта.

б) Решение может выбираться в виде конечных или бесконечных сумм по m.

Выбор одного из этих вариантов решения зависит только от краевых условий, причем вид решения совпадает с формой задания краевых условий.

Если краевые условия заданы в виде рядов (это чаще всего имеет место при статических условиях), то в большинстве случаев нет необходимости доказывать сходимость рядов, представляющих решение, она следует из очевидной сходимости рядов на границе.

В результате подстановки соотношений (6) в систему уравнений (4), взяв вместо двух последних уравнений их сумму и разность, приходим к следующей системе:

$$\begin{gathered}
\mathcal{L}_m T_m = 0, \quad \mathcal{L}_m \theta_m = 0, \\
\mathcal{L}_m w_m = -\frac{1}{(1-2\upsilon)\,\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[\theta_m - 2\,(1+\upsilon)\,\alpha_T T_m\right], \\
\mathcal{L}_{m+1}\,(u_m + v_m) = -\frac{1}{(1-2\upsilon)}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{m}{\alpha}\right)\left[\theta_m - 2\,(1+\upsilon)\,\alpha_T T_m\right], \\
\mathcal{L}_{m-1}\,(u_m - v_m) = -\frac{1}{(1-2\upsilon)}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{m}{\alpha}\right)\left[\theta_m - 2\,(1+\upsilon)\,\alpha_T T_m\right],
\end{gathered} \tag{7}$$

где $\mathcal{L}_m = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{m^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}$.

Отметим, что при $m = 0$ перемещение $v_0 \equiv 0$, и последние два уравнения совпадают, определяя перемещение u_0.

Принимая во внимание сделанные предположения о линейности перемещений по γ, обозначим

$$\begin{gathered}
T_m\,(\alpha,\gamma) = T_{m1}\,(\alpha) + T_{m2}\,(\alpha)\,\gamma, \quad \theta_m\,(\alpha,\gamma) = \theta_{m1}\,(\alpha) + \theta_{m2}\,(\alpha)\,\gamma, \\
w_m\,(\alpha,\gamma) = w_{m1}\,(\alpha) + w_{m2}\,(\alpha)\,\gamma, \\
u_m\,(\alpha,\gamma) = u_{m1}\,(\alpha) + u_{m2}\,(\alpha)\,\gamma, \quad v_m\,(\alpha,\gamma) = v_{m1}\,(\alpha) + v_{m2}\,(\alpha)\,\gamma.
\end{gathered}$$

В результате каждое из первых двух уравнений системы (7) приводит к паре одинаковых уравнений:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{m^2}{\alpha^2}\right) T_{mn} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{m^2}{\alpha^2}\right)\theta_{mn} = 0 \quad (n = 1, 2).$$

Их общие решения

$$\begin{gathered}
T_{0n}\,(\alpha) = B^1_{0n} + B^2_{0n}\ln\alpha, \quad \theta_{0n}\,(\alpha) = A^1_{0n} + A^2_{0n}\ln\alpha, \\
T_{mn}\,(\alpha) = B^1_{mn}\alpha^m + B^2_{mn}\alpha^{-m}, \quad \theta_{mn}\,(\alpha) = A^1_{mn}\alpha^m + A^2_{mn}\alpha^{-m} \quad (m > 0),
\end{gathered}$$

здесь A^k_{mn}, B^k_{mn} — постоянные интегрирования $(n, k = 1, 2)$.

Третье уравнение системы (7) также распадается на два. Для $m = 0$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) w_{01} + \frac{R}{(1-2\upsilon)\,\varepsilon}\left(L^1_{02} + L^2_{02}\ln\alpha\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) w_{02} = 0$$

и для $m > 0$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{m^2}{\alpha^2}\right) w_{m1} + \frac{R}{(1-2\upsilon)\,\varepsilon}\left(L^1_{m2}\alpha^m + L^2_{m2}\alpha^{-m}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{m^2}{\alpha^2}\right)w_{m2}=0.$$

Здесь

$$L^k_{mn}=A^k_{mn}-2\,(1+\upsilon)\,\alpha_T B^k_{mn}.$$

Их общие решения имеют вид

$$w_{01}\,(\alpha)=-\frac{R}{(1-2\upsilon)\,\varepsilon}\left[C^1_{01}+C^2_{01}\ln\alpha+\frac{1}{4}L^1_{02}\alpha^2+L^2_{02}\,\frac{\alpha^2}{4}\,(\ln\alpha-1)\right],$$

$$w_{02}\,(\alpha)=-\frac{R}{(1-2\upsilon)\,\varepsilon}\left(C^1_{02}+C^2_{02}\ln\alpha\right),$$

$$w_{11}=-\frac{R}{(1-2\upsilon)\,\varepsilon}\left\{C^1_{11}\alpha+C^2_{11}\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{8}L^1_{12}\alpha^3+\frac{1}{2}L^2_{12}\alpha\ln\alpha\right\},$$

$$w_{12}=-\frac{R}{(1-2\upsilon)\,\varepsilon}\left(C^1_{12}\alpha+C^2_{12}\frac{1}{\alpha}\right),$$

$$w_{m1}=-\frac{R}{4\,(1-2\upsilon)\,\varepsilon}\left[C^1_{m1}\alpha^m+C^2_{m1}\alpha^{-m}+\frac{L^1_{m2}}{(m+1)}\alpha^{m+2}-\frac{L^2_{m2}}{(m-1)}\alpha^{-m+2}\right],$$

$$w_{m2}=-\frac{R}{(1-2\upsilon)\,\varepsilon}\left(C^1_{m2}\alpha^m+C^2_{m2}\alpha^{-m}\right)\quad(m>1)\,,$$

C^k_{mn} — постоянные интегрирования.

В случае осесимметричной деформации цилиндра $(m=0)$ уравнение относительно u_0 приводит к уравнениям

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}\right)u_{0n}=-\frac{R}{(1-2\upsilon)}L^2_{0n}\frac{1}{\alpha}\quad(n=1,2)\,.$$

Их общие решения

$$u_{0n}=-\frac{R}{2\,(1-2\upsilon)}\left[D^1_{0n}\alpha+D^2_{0n}\frac{1}{\alpha}+L^2_{0n}\alpha\ln\alpha\right]\quad(n=1,2)\,.$$

При $m=1$ из двух последних уравнений системы (7) имеем две пары уравнений:

$$\left[\frac{d^2}{d\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{d}{d\alpha}-\frac{4}{\alpha^2}\right](u_{1n}+v_{1n})=\frac{2R\,L^2_{1n}}{(1-2\upsilon)}\frac{1}{\alpha^2},$$

$$\left[\frac{d^2}{d\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{d}{d\alpha}\right](u_{1n}-v_{1n})=-\frac{2R\,L^1_{1n}}{(1-2\upsilon)}.$$

Их решение с $A=-R/[2(1-2\upsilon)]$

$$u_{11}+v_{11}=A\left[D^1_{11}\alpha^2+D^2_{11}\alpha^{-2}+L^2_{11}\right],$$

$$u_{11}-v_{11}=A\left\{D^3_{11}+D^4_{11}\ln\alpha+L^1_{11}\alpha^2\right\},$$

$$u_{12}+v_{12}=A\left[D^1_{12}\alpha^2+D^2_{12}\alpha^{-2}+L^2_{12}\right],$$

$$u_{12}-v_{12}=A\left\{D^3_{12}+D^4_{12}\ln\alpha+L^1_{12}\alpha^2\right\}.$$

При $m>1$ приходим к уравнениям

$$\mathcal{L}_{m+1}\,(u_{mn}+v_{mn})=\frac{2R\,m}{(1-2\upsilon)}L^2_{mn}\alpha^{-(m+1)},$$

$$\mathcal{L}_{m-1}\,(u_{mn}-v_{mn})=-\frac{2R\,m}{(1-2\upsilon)}L^1_{mn}\alpha^{m-1}.$$

Их решение

$$u_{m1}+v_{m1}=A\left[D_{m1}^{1}\alpha^{(m+1)}+D_{m1}^{2}\alpha^{-(m+1)}+L_{m1}^{2}\alpha^{-(m-1)}\right],$$
$$u_{m2}+v_{m2}=A\left[D_{m2}^{1}\alpha^{(m+1)}+D_{m2}^{2}\alpha^{-(m+1)}+L_{m2}^{2}\alpha^{-(m-1)}\right],$$
$$u_{m1}-v_{m1}=A\left[D_{m1}^{3}\alpha^{(m-1)}+D_{m1}^{4}\alpha^{-(m-1)}+L_{m1}^{1}\alpha^{(m+1)}\right],$$
$$u_{m2}-v_{m2}=A\left[D_{m2}^{3}\alpha^{(m-1)}+D_{m2}^{4}\alpha^{-(m-1)}+L_{m2}^{1}\alpha^{(m+1)}\right].$$

Здесь D_{mn}^{k} — постоянные интегрирования.

В результате для $m=0$

$$\theta_{01}(\alpha)=A_{01}^{1}+A_{01}^{2}\ln\alpha,\quad \theta_{02}(\alpha)=A_{02}^{1}+A_{02}^{2}\ln\alpha,$$
$$w_{01}(\alpha)=\frac{2A}{\varepsilon}\left[C_{01}^{1}+C_{01}^{2}\ln\alpha+\frac{1}{4}L_{02}^{1}\alpha^{2}+L_{02}^{2}\frac{\alpha^{2}}{4}(\ln\alpha-1)\right],$$
$$w_{02}(\alpha)=\frac{2A}{\varepsilon}\left(C_{02}^{1}+C_{02}^{2}\ln\alpha\right),$$
$$u_{01}=A\left[D_{01}^{1}\alpha+D_{01}^{2}\frac{1}{\alpha}+L_{01}^{2}\alpha\ln\alpha\right],$$
$$u_{02}=A\left[D_{02}^{1}\alpha+D_{02}^{2}\frac{1}{\alpha}+L_{02}^{2}\,\alpha\ln\alpha\right].$$

Для $m=1$

$$\theta_{11}(\alpha)=A_{11}^{1}\alpha+A_{11}^{2}\alpha^{-1},\quad \theta_{12}(\alpha)=A_{12}^{1}\alpha+A_{12}^{2}\alpha^{-1},$$
$$w_{11}=\frac{2A}{\varepsilon}\left\{C_{11}^{1}\alpha+C_{11}^{2}\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{8}L_{12}^{1}\alpha^{3}+\frac{1}{2}L_{12}^{2}\alpha\ln\alpha\right\},$$
$$w_{12}=-\frac{2A}{\varepsilon}\left(C_{12}^{1}\alpha+C_{12}^{2}\frac{1}{\alpha}\right),$$
$$u_{11}=\frac{A}{2}\left[\left(D_{11}^{1}+L_{11}^{1}\right)\alpha^{2}+D_{11}^{2}\alpha^{-2}+D_{11}^{4}\ln\alpha+D_{11}^{3}+L_{11}^{2}\right],$$
$$v_{11}=\frac{A}{2}\left[\left(D_{11}^{1}-L_{11}^{1}\right)\alpha^{2}+D_{11}^{2}\alpha^{-2}-D_{11}^{4}\ln\alpha-D_{11}^{3}+L_{11}^{2}\right],$$
$$u_{12}=\frac{A}{2}\left[\left(D_{12}^{1}+L_{12}^{1}\right)\alpha^{2}+D_{12}^{2}\alpha^{-2}+D_{12}^{4}\ln\alpha+D_{12}^{3}+L_{12}^{2}\right],$$
$$v_{12}=\frac{A}{2}\left[\left(D_{12}^{1}-L_{12}^{1}\right)\alpha^{2}+D_{12}^{2}\alpha^{-2}-D_{12}^{4}\ln\alpha-D_{12}^{3}+L_{12}^{2}\right].$$

Для $m>1$

$$\theta_{m1}(\alpha)=A_{m1}^{1}\alpha^{m}+A_{m1}^{2}\alpha^{-m},\quad \theta_{m2}(\alpha)=A_{m2}^{1}\alpha^{m}+A_{m2}^{2}\,\alpha^{-m},$$
$$w_{m1}=\frac{A}{2\varepsilon}\left[C_{m1}^{1}\alpha^{m}+C_{m1}^{2}\alpha^{-m}+\frac{L_{m2}^{1}}{(m+1)}\alpha^{m+2}-\frac{L_{m2}^{2}}{(m-1)}\alpha^{-m+2}\right],$$
$$w_{m2}=-\frac{R}{(1-2\upsilon)\,\varepsilon}\left(C_{m2}^{1}\alpha^{m}+C_{m2}^{2}\alpha^{-m}\right),$$
$$u_{m1}=\frac{A}{2}\left[\left(D_{m1}^{1}+L_{m1}^{1}\right)\alpha^{(m+1)}+D_{m1}^{2}\alpha^{-(m+1)}+D_{m1}^{3}\alpha^{(m-1)}+\left(D_{m1}^{4}+L_{m1}^{2}\right)\alpha^{-(m-1)}\right],$$
$$v_{m1}=\frac{A}{2}\left[\left(D_{m1}^{1}-L_{m1}^{1}\right)\alpha^{(m+1)}+D_{m1}^{2}\alpha^{-(m+1)}-D_{m1}^{3}\alpha^{(m-1)}-\left(D_{m1}^{4}-L_{m1}^{2}\right)\alpha^{-(m-1)}\right],$$

$$u_{m2} = \frac{A}{2}\left[\left(D^1_{m2} + L^1_{m2}\right)\alpha^{(m+1)} + D^2_{m2}\alpha^{-(m+1)} + D^3_{m2}\alpha^{(m-1)} + \left(D^4_{m2} + L^2_{m2}\right)\alpha^{-(m-1)}\right],$$

$$v_{m2} = \frac{A}{2}\left[\left(D^1_{m2} - L^1_{m2}\right)\alpha^{(m+1)} + D^2_{m2}\alpha^{-(m+1)} - D^3_{m2}\alpha^{(m-1)} - \left(D^4_{m2} - L^2_{m2}\right)\alpha^{-(m-1)}\right].$$

Правильность полученных решений легко устанавливается непосредственной подстановкой в уравнения либо вручную, либо с использованием любой компьютерной системы.

Остается выполнить дополнительное условие (5). Из него для каждого m следует пара тождеств

$$\theta_{m1} \equiv \frac{1}{R}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{d\left(\alpha u_{m1}\right)}{d\alpha} + \frac{m}{\alpha}v_{m1} + \frac{1}{\varepsilon}w_{m2}\right), \quad \theta_{m2} \equiv \frac{1}{R}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{d\left(\alpha u_{m2}\right)}{d\alpha} + \frac{m}{\alpha}v_{m2}\right),$$

позволяющих определить значения A^k_{mn} через остальные постоянные:

$$A^1_{01} = \frac{1}{2\left(1-\upsilon\right)\left(1-2\upsilon\right)}\left\{\left(1+\upsilon\right)\left(1-2\upsilon\right)\alpha_T B^2_{01} + \frac{C^2_{02} - 4\left(1-\upsilon\right)C^1_{02}}{2\varepsilon^2} - 2\left(1-\upsilon\right)D^1_{01}\right\},$$

$$A^2_{01} = \frac{\left(1+\upsilon\right)}{\left(1-\upsilon\right)}\alpha_T B^2_{01} - \frac{1}{2\left(1-\upsilon\right)\varepsilon^2}C^2_{02}, \quad A^1_{02} = \frac{\left(1+\upsilon\right)}{2\left(1-\upsilon\right)}\alpha_T B^2_{02} - \frac{1}{\left(1-2\upsilon\right)}D^1_{02},$$

$$A^2_{02} = \frac{\left(1+\upsilon\right)}{\left(1-\upsilon\right)}\alpha_T B^2_{02},$$

$$A^1_{11} = \frac{2}{\left(3-4\upsilon\right)}\left[\left(1+\upsilon\right)\alpha_T B^1_{11} - \frac{1}{\varepsilon^2}C^1_{12} - D^1_{11}\right],$$

$$A^2_{11} = \frac{1}{2\left(3-4\upsilon\right)}\left[4\left(1+\upsilon\right)\alpha_T B^2_{11} - \frac{4}{\varepsilon^2}C^2_{12} - D^4_{11}\right],$$

$$A^1_{12} = \frac{2}{\left(3-4\upsilon\right)}\left[\left(1+\upsilon\right)\alpha_T B^1_{12} - D^1_{12}\right], \quad A^2_{12} = \frac{1}{2\left(3-4\upsilon\right)}\left[4\left(1+\upsilon\right)\alpha_T B^2_{12} - D^4_{12}\right],$$

$$A^1_{m1} = \frac{1}{\left(3-4\upsilon\right)}\left[2\left(1+\upsilon\right)\alpha_T B^1_{m1} - \frac{2}{\varepsilon^2}C^1_{m2} - \left(m+1\right)D^1_{m1}\right],$$

$$A^2_{m1} = \frac{1}{\left(3-4\upsilon\right)}\left[2\left(1+\upsilon\right)\alpha_T B^2_{m1} - \frac{2}{\varepsilon^2}C^2_{m2} + \left(m-1\right)D^4_{m1}\right].$$

Остальные постоянные интегрирования определяются следующим образом: B^k_{mn} — из граничных условий температурной задачи, C^k_{mn}, D^k_{mn} — из условий упругой задачи.

Рассмотрим случай осесимметричной деформации ($m = 0$) резервуара с жидкостью. Пусть оба его торца и внутренняя боковая поверхность теплоизолированы от окружающей среды, внешняя боковая поверхность имеет постоянную температуру Θ. В этом случае температура стенок резервуара принимает значение $T = T_{01} = \Theta$, $T_{02} = 0$, тем быстрее, чем выше теплопроводность материала. Очевидно, $B^1_{01} = \Theta$, $B^2_{01} = B^1_{02} = B^2_{02} = 0$.

Тогда

$$A^1_{01} = \frac{1}{2\left(1-\upsilon\right)\left(1-2\upsilon\right)}\left[\frac{C^2_{02} - 4\left(1-\upsilon\right)C^1_{02}}{2\varepsilon^2} - 2\left(1-\upsilon\right)D^1_{01}\right],$$

$$A^2_{01} = -\frac{1}{2\left(1-\upsilon\right)\varepsilon^2}C^2_{02}, \quad A^1_{02} = -\frac{1}{\left(1-2\upsilon\right)}D^1_{02}, \quad A^2_{02} = 0,$$

$$L^1_{01} = \frac{1}{2\left(1-\upsilon\right)\left(1-2\upsilon\right)}\left[\frac{C^2_{02} - 4\left(1-\upsilon\right)C^1_{02}}{2\varepsilon^2} - 2\left(1-\upsilon\right)D^1_{01}\right] - 2\left(1+\upsilon\right)\alpha_T B^1_{01},$$

$$L^2_{01} = -\frac{1}{2\left(1-\upsilon\right)\varepsilon^2}C^2_{02}, \quad L^1_{02} = -\frac{1}{\left(1-2\upsilon\right)}D^1_{02}, \quad L^2_{02} = 0.$$

В результате

$$\theta_{01}(\alpha) = \frac{1}{2(1-\upsilon)\varepsilon^2}\left[\frac{1}{2(1-2\upsilon)} - \ln\alpha\right] C_{02}^2 - \frac{1}{(1-2\upsilon)}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}C_{02}^1 + D_{01}^1\right), \tag{8}$$

$$\theta_{02}(\alpha) = -\frac{1}{(1-2\upsilon)}D_{02}^1, \quad w_{01}(\alpha) = -\frac{R}{(1-2\upsilon)\varepsilon}\left[C_{01}^1 + C_{01}^2\ln\alpha - \frac{1}{4(1-2\upsilon)}D_{02}^1\alpha^2\right],$$

$$w_{02}(\alpha) = -\frac{R}{(1-2\upsilon)\varepsilon}\left(C_{02}^1 + C_{02}^2\ln\alpha\right), \quad u_{02} = -\frac{R}{2(1-2\upsilon)}\left[D_{02}^1\alpha + D_{02}^2\,\frac{1}{\alpha}\right],$$

$$u_{01} = -\frac{R}{2(1-2\upsilon)}\left[D_{01}^1\alpha + D_{01}^2\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2(1-\upsilon)\varepsilon^2}C_{02}^2\,\alpha\ln\alpha\right].$$

Определим напряжения, необходимые для выполнения краевых условий, для чего воспользуемся соотношениями Дюгамеля–Неймана [3]:

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{E}{2(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\left\{\frac{2(1-2\upsilon)}{R}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + 2\upsilon\theta - 2(1+\upsilon)\alpha_T T\right\},$$

$$\sigma_{\gamma\gamma} = \frac{E}{2(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\left\{\frac{2(1-2\upsilon)}{R\varepsilon}\frac{\partial w}{\partial\gamma} + 2\upsilon\theta - 2(1+\upsilon)\alpha_T T\right\},$$

$$\sigma_{\alpha\gamma} = \frac{E}{2(1+\upsilon)R}\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial\gamma}\right).$$

Если принять

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{\alpha\alpha1} + \sigma_{\alpha\alpha2}\gamma, \quad \sigma_{\gamma\gamma} = \sigma_{\gamma\gamma1} + \sigma_{\gamma\gamma2}\gamma, \quad \sigma_{\alpha\gamma} = \sigma_{\alpha\gamma1} + \sigma_{\alpha\gamma2}\gamma,$$

то, дифференцируя соотношения (8), определяем

$$\sigma_{\alpha\alpha1} = \frac{E}{2(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\left\{-\frac{1}{(1-2\upsilon)}D_{01}^1 + D_{01}^2\frac{1}{\alpha^2} - \frac{2\upsilon}{(1-2\upsilon)\varepsilon^2}C_{02}^1 - 2(1+\upsilon)\alpha_T B_{01}^1 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2(1-\upsilon)\varepsilon^2}\left[\frac{(1-\upsilon)}{(1-2\upsilon)} + (1-2\upsilon)\,\ln\alpha\right] C_{02}^2\right\},$$

$$\sigma_{\alpha\alpha2} = \frac{E}{2(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\left\{-\frac{1}{(1-2\upsilon)}D_{02}^1 + D_{02}^2\,\frac{1}{\alpha^2}\right\},$$

$$\sigma_{\gamma\gamma1} = \frac{E}{2(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\left\{-\frac{2(1-\upsilon)}{(1-2\upsilon)\varepsilon^2}C_{02}^1 - 2(1+\upsilon)\alpha_T B_{01}^1 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(1-\upsilon)\varepsilon^2}\left[\frac{\upsilon}{2(1-2\upsilon)} - (2-\upsilon)\ln\alpha\right] C_{02}^2 - \frac{2\upsilon}{(1-2\upsilon)}D_{01}^1\right\},$$

$$\sigma_{\gamma\gamma2} = -\frac{\upsilon E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)^2}D_{02}^1, \quad \sigma_{\alpha\gamma2} = -\frac{E}{2(1+\upsilon)(1-2\upsilon)\varepsilon}C_{02}^2\frac{1}{\alpha},$$

$$\sigma_{\alpha\gamma1} = -\frac{E}{4(1+\upsilon)(1-2\upsilon)\varepsilon}\left\{\left(2C_{01}^2 + D_{02}^2\right)\frac{1}{\alpha} - \frac{2\upsilon}{(1-2\upsilon)}D_{02}^1\alpha\right\}.$$

В качестве примеров определим перемещения для трех видов граничных условий. Формулы для перемещений одинаковы во всех трех задачах:

$$w(\alpha,\gamma) = -\frac{R}{(1-2\upsilon)\varepsilon}\left\{C_{01}^1 + C_{02}^1\gamma + \left(C_{01}^2 + C_{02}^2\gamma\right)\ln\alpha - \frac{1}{4(1-2\upsilon)}D_{02}^1\alpha^2\right\},$$

$$u(\alpha,\gamma) = -\frac{R}{2(1-2\upsilon)}\left\{\left(D_{01}^1 + D_{02}^1\gamma\right)\alpha + \left(D_{01}^2 + D_{02}^2\gamma\right)\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2(1-\upsilon)\varepsilon^2}C_{02}^2\alpha\ln\alpha\right\},$$

что следует из (8). Остается определить значения постоянных интегрирования.

1) Для краевых условий

$$\begin{gathered}\sigma_{\alpha\alpha}\left(t,\gamma\right)=\rho H\left(1-\gamma\right),\quad\sigma_{\alpha\gamma}\left(t,\gamma\right)=0,\\ w\left(1,0\right)=u\left(1,0\right)=0,\quad w\left(1,1\right)=0,\quad u\left(1,1\right)=0\end{gathered}\tag{9}$$

получаем

$$\begin{gathered}C_{01}^{1}=\frac{t^{2}f}{4\left(t^{2}+1-2\upsilon\right)},\quad C_{01}^{2}=\frac{\left(2\upsilon t^{2}+1-2\upsilon\right)t^{2}f}{2\left(t^{2}+1-2\upsilon\right)},\quad C_{02}^{1}=0,\quad C_{02}^{2}=0,\\ D_{01}^{1}=-D_{01}^{2}=-\frac{\left(1-2\upsilon\right)\left[f+2\left(1+\upsilon\right)\alpha_{T}B_{01}^{1}\right]t^{2}}{\left(t^{2}+1-2\upsilon\right)},\quad D_{02}^{1}=-D_{02}^{2}=\frac{\left(1-2\upsilon\right)t^{2}f}{\left(t^{2}+1-2\upsilon\right)}.\end{gathered}\tag{10}$$

Здесь ρ — плотность жидкости, $f=\frac{2(1+\upsilon)(1-2\upsilon)\rho H}{E}$.

2) Когда граничные условия имеют вид

$$\begin{gathered}\sigma_{\alpha\alpha}\left(t,\gamma\right)=\rho H\left(1-\gamma\right),\quad\sigma_{\alpha\gamma}\left(t,\gamma\right)=0,\\ w\left(1,0\right)=u\left(1,0\right)=0,\quad\sigma_{\gamma\gamma}\left(1,1\right)=0,\quad u\left(1,1\right)=0,\end{gathered}$$

т. е. отличаются от (9) на одно условие, для постоянных C_{01}^{1}, C_{01}^{2}, C_{02}^{2}, D_{02}^{1}, D_{02}^{2} справедливы формулы (10),

$$\begin{gathered}\frac{1}{\varepsilon^{2}}C_{02}^{1}=-\frac{\left(1+\upsilon\right)\left(1-2\upsilon\right)\left(t^{2}+1\right)}{\left[t^{2}\left(1+\upsilon\right)+1-\upsilon\right]}\alpha_{T}B_{01}^{1},\\ D_{01}^{1}=-D_{01}^{2}=-\frac{2\left(1+\upsilon\right)\left(1-2\upsilon\right)t^{2}}{\left[t^{2}\left(1+\upsilon\right)+1-\upsilon\right]}\alpha_{T}B_{01}^{1}-\frac{\left(1-2\upsilon\right)t^{2}f}{\left(t^{2}+1-2\upsilon\right)}.\end{gathered}$$

3) Для граничных условий

$$\begin{gathered}\sigma_{\alpha\alpha}\left(t,\gamma\right)=\rho H\left(1-\gamma\right),\\ w\left(1,0\right)=u\left(1,0\right)=0,\quad w\left(1,1\right)=0,\quad u\left(1,1\right)=0,\quad w\left(t,0\right)=0,\quad w\left(t,1\right)=0\end{gathered}$$

постоянные C_{01}^{1}, C_{01}^{2}, C_{02}^{2}, D_{02}^{1}, D_{02}^{2} определяются формулами (10),

$$C_{01}^{2}=\frac{\left(t^{2}-1\right)t^{2}f}{4\left(t^{2}+1-2\upsilon\right)\ln t},\quad D_{01}^{1}=-D_{01}^{2}=-\frac{\left(1-2\upsilon\right)\left[f+2\left(1+\upsilon\right)\alpha_{T}B_{01}^{1}\right]t^{2}}{\left(t^{2}+1-2\upsilon\right)}.$$

Литература

[1] Рекач В.Г. *Руководство к решению задач по теории упругости* (Москва, Высш. шк., М., 1966).

[2] Партон В.З., Перлин П.И. *Методы математической теории упругости* (Наука, М., 1981).

[3] Коваленко А.Д. *Избранные труды* (Наук. думка, Киев, 1976).

[4] Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н. *Краевые задачи теории упругости для шара и цилиндра* (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 2008).

Николай Георгиевич Гурьянов

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

`e-mail:` gng.ggb@mail.ru

Ольга Николаевна Тюленева

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

`e-mail:` tdv.ton@mail.ru

N.G. Gur'yanov and O.N. Tyuleneva

Cylindrical vessel with liquid in 3D temperature pattern

Abstract. We obtain an exact solution of three-dimension thermoelasticity problem for a vessel with liquid in cylindrical coordinate system. Temperature pattern is defined based on a solution of thermal conductivity equation. Next, equations of unsymmetrical problem of the theory of elasticity are solved, besides, the system of resolving equations is reduced to four separate equations relatively to construction displacement. Several exact solutions of boundary-value problems are framed. The results are represented in the form of quite simple formulas.

Keywords: temperature pattern, thermoelasticity, integrable combinations, boundary-value problems, analytical solutions.

Nikolai Georgievich Gur'yanov

Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` gng.ggb@mail.ru

Ol'ga Nikolaevna Tyuleneva

Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` tdv.ton@mail.ru