# ВЫЧИСЛИМО ОТДЕЛИМЫЕ АЛГЕБРЫ

***Н.Х. Касымов***

профессор Национального университета Узбекистана им. М. Улугбека

Казанский Федеральный университет, Казань, 28 сентября 2022 г.

# Лекция 2

***Аннотация:*** *Равномерность и отделимость. Продуктивность и полупродуктивность. Условия близкие к продуктивности. Эффективно расщепляемые конгруэнции.*

# 1. Равномерность

Понятие равномерно вычислимо отделимой алгебры, естественное само по себе, оказалось полезным для решения ряда задач как в теории вычислимых моделей, так и в теоретической информатике. Так, А.И. Мальцевым было показано, что всякая позитивная нумерация конечно порожденной алгебры, обладающей ненулевыми конгруэнциями только конечного индекса, является разрешимой, что поставило вопрос о справедливости данного утверждения в общем случае (без условия конечной порожденности). Оказалось, что имеются контрпримеры, причем именно в классе равномерно вычислимо отделимых алгебр. Более того, всякая всякая позитивная нумерация алгебры со счетной (в частности, нетеровой) решеткой конгруэнций является вычислимо отделимой. Другой пример – проблема Бергстры-Такера в теории абстрактных типов данных о существовании инициального в конечно-базируемом многообразии обогащения для любой конечно порожденной позитивно представимой алгебры.

# Равномерность

Отрицательное решение этой проблемы было получено предъявлением примера конечно порожденной алгебры, имеющей равномерно вычислимо отделимую позитивную нумерацию с иммунной трансверсалью. Важнейшими среди равномерно вычислимо отделимых алгебр являются негативные. Можно также отметить вычислимую отделимость стандартных нумераций конечно порожденных и финитно аппроксимируемых алгебр. Свойство "эффективной расщепляемости" конгруэнций для вычислимо отделимых алгебр, предполагающее возможность эффективного построения некоторой негативной конгруэнции, строго содержащейся в пересечении всякого вычислимого семейства негативных конгруэнций, является, в некотором смысле, аналогом понятия продуктивности, для которого, в отличие от эффективных семейств позитивных конгруэнций нумерованных алгебр (точные верхние грани которых всегда позитивны и имеют ясное строение как с алгоритмической, так и с алгебраической точек зрения), не имеется удовлетворительного

# Раномерность и эффективная расщепляемость

математического описания ни с алгоритмической, ни с алгебраической точек зрения, и потому вопрос о существовании разумных критериев эффективной расщепляемости негативных конгруэнций представляется актуальным с точки зрения понимания сути процесса эффективного расщепления конгруэнций. Основной целью настоящей статьи является демонстрация того факта, что для некоторых достаточно широких и важных подклассов класса равномерно вычислимо отделимых алгебр такое удовлетворительное описание "эффективно расщепляемой нумерации" возможно.

**Теорема о негативной аппроксимируемости:** Нумерованная алгебра вычислимо отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется негативными алгебрами.
Таким образом, в рамках структурной теории вычислимо отделимых алгебр негативные алгебры определяют класс объектов, из которых строятся все вычислимо отделимые алгебры (как подходящие подпрямые произведения).
С точки зрения приложений важнейший подкласс класса вычислимо отделимых алгебр образуют равномерно вычислимо отделимые алгебры.

## Определение 1

*Нумерованная алгебра* $(A, \nu)$ *называется равномерно вычислимо отделимой, если существует частичная вычислимая функция* $f$ *трех переменных, обладающая следующим свойством: если* $x \neq y \pmod{ker(\nu)}$, *то* $\lambda z.f(x, y, z)$ *– всюду определенная вычислимая функция, являющаяся характеристической для* $ker(\nu)$*-замкнутого множества, отделяющего* $x$ *от* $y$.

Неформально, равномерность вычислимой отделимости означает наличие эффективной процедуры, "выдающей" для каждой пары $\langle x, y\rangle$ при $x \neq y \pmod{ker(\nu)}$, алгоритм разрешения $ker(\nu)$-замкнутого множества, отделяющего $x$ от $y$.

## Пример

*Эквивалентность негативна тогда и только тогда, когда она является равномерно вычислимо отделимой с вычислимо перечислимой характеристической трансверсалью.*

Пусть $\alpha \subseteq \omega$. Рассмотрим следующие эквивалентности:
1) $\eta^\alpha = \{\langle 2x, 2x+1\rangle | x \in \alpha\rangle\} \cup \{\langle 2x+1, 2x\rangle | x \in \alpha\rangle\} \cup id\ \omega$;
2) $\eta_\alpha = \alpha^2 \cup id\ \omega$;
3) $\eta^*_\alpha = \{\langle x, y\rangle | \gamma_x \setminus \alpha = \gamma_y \setminus \alpha\}$, где $\gamma$ – каноническая нумерация конечных множеств.

# Примеры

Легко проверить, что для всякого $\alpha \subseteq \omega$ все эквивалентности $\eta^\alpha, \eta_\alpha, \eta^*_\alpha$ вычислимо отделимы. При этом, $\eta^\alpha$ равномерно вычислимо отделима при всяком $\alpha$, а равномерность $\eta_\alpha$ зависит от выбора $\alpha$. Так, например, если $\omega \setminus \alpha$ иммунно, но не гипериммунно, то $\eta_\alpha$ не является равномерной; если $\alpha$ – гиперпростое с ретрассируемым дополнением, то $\eta_\alpha$ равномерно вычислимо отделима. Легко показать, что существуют равномерно вычислимо отделимые позитивные неразрешимые эквивалентности вида $\eta_\alpha$ для подходящих $\alpha \subseteq \omega$. Равномерность эквивалентности $\eta^*_\alpha$ также связана со свойствами $\alpha$. Эквивалентность $\eta$ называется эффективно бесконечной, если в нее эффективно вкладывается эквивалентность $id\ \omega$, т.е. существует такая вычислимая функция $h$, что $x \neq y \Rightarrow h(x) \neq h(y) \pmod{\eta}$. Если эквивалентность с бесконечным числом смежных классов не является эффективно бесконечной, то она называется неэффективно бесконечной.

Очень просто строятся примеры вычислимо отделимых эффективно бесконечных эквивалентностей с иммунными трансверсалями. В самом деле, пусть $\omega \setminus \alpha$ имммунно и не гипериммунно, т.е. обладает сильной таблицей $\gamma_{h(n)}, n \in \omega$, где $\gamma$ – каноническая нумерация конечных множеств, $h$ – тотальная вычислимая функция и $\forall n(\gamma_{h(n)} \cap (\omega \setminus \alpha) \neq \emptyset) \wedge (m \neq n \Rightarrow \gamma_{h(m)} \cap \gamma_{h(n)} = \emptyset)$. Тогда для $\eta^*_\alpha$ имеет место иммунность $tr(\eta^*_\alpha)$, но $\eta^*_\alpha$ эффективно бесконечна, т.к. $m \neq n \Rightarrow h(m) \neq h(n) \pmod{\eta^*_\alpha}$. С другой стороны, известно, что для равномерно вычислимо отделимой эквивалентности $\eta$ ее неэффективная бесконечность равносильна иммунности $tr(\eta)$. Заметим, что для любой эквивалентности из того, что она неэффективно бесконечна следует иммунность ее трансверсали, но вообще говоря не наоборот). Таким образом, если $\alpha$ – простое не гиперпростое, то $\eta^*_\alpha$ не является равномерно вычислимо отделимой. Характеристической функцией негативной эквивалентности $\eta$ назовем такую частичную вычислимую функцию $f$ двух переменных, что $x \neq y \pmod{\eta} \Rightarrow f(x,y) = 1$ и $f(x,y)$ не определена для $x = y \pmod{\eta}$.

# Определения. Продолжение

## Определение 2

*Нумерованная алгебра $(A, \nu)$ называется равномерно аппроксимируемой негативными алгебрами, если существует частичная вычислимая функция $g$ четырех переменных, обладающая следующим свойством: если $\nu x \neq \nu y$, то $\lambda uv.g(x, y, u, v)$ – характеристическая функция $\nu$-негативной конгруэнции, по модулю которой элементы $\nu x, \nu y$ различны.*

Известно, что нумерованная алгебра равномерно вычислимо отделима тогда и только тогда, когда она равномерно аппроксимируется негативными алгебрами. При этом, важно отметить, что равномерная аппроксимируемость позволяет не просто равномерно вычислять перечислимые индексы соответствующих различающих негативных конгруэнций, но и равномерно эффективно предъявлять их характеристические индексы (т.е. алгоритмы, позволяющие различать любые различные элементы исходной алгебры).

Для упрощения изложения будем рассматривать стандартные обогащения константами нумерованных алгебр следующим образом. Если $(A, \nu)$ – нумерованная алгебра, то через $A_\nu$ обозначим ее обогащение множеством константных символов $C = \{c_n | n \in \omega\}$, которое не пересекается с сигнатурой $\Sigma$ алгебры $A$, интерпретируя константный символ $c_n$ в элемент $\nu(n)$ этой алгебры. Тогда всякий замкнутый терм $t = f(t_1, \ldots, t_m)$ сигнатуры $\Sigma \cup C$ интерпретируется в тот элемент алгебры $A_\nu$, который является $\nu$-номером значения терма $t = f(t_1, \ldots, t_m)$ при подстановке в него соответствующих нумерации $\nu$ вычислимых функций и значений констант. Детали, основанные на индукции по сложности терма, опускаем. При этом, нумерация $\nu$ для обогащения $A_\nu$ алгебры $A$ определяет наименьший класс $m$-эквивалентных нумераций относительно $m$-сводимости (классов $m$-эквивалентных) нумераций. Через $T$ обозначим множество всех замкнутых термов сигнатуры $\Sigma \cup C$.

Алгебру $A_\nu$ будем называть стандартным $\nu$-обогащением алгебры $A$ в нумерации $\nu$. Заметим, что с алгебраической точки зрения алгебры $A$ и $A_\nu$ очень близки, в частности, решетки их конгруэнций совпадают, хотя решетка подалгебр и группа автоморфизмов алгебры $A_\nu$ тривиальны за счет констант из $C$.

**Замечание 1.** Мы фиксируем некоторую биективную вычислимую (геделевскую) нумерацию $\gamma$ множества $T$ всех замкнутых термов сигнатуры $\Sigma \cup C$ и продолжаем ее на множество пар $T \times T$. Подмножество $Q \subseteq T \times T$ называется разрешимым (перечислимым, коперечислимым и т.д.), если таковым является множество $\gamma^{-1}(Q)$. Для упрощения дальнейших обозначений в качестве натуральных чисел часто будем использовать $T$-термы, подразумевая, что перечислимость (коперечислимость и т.д.) множества $\{t_0, t_1, \dots\}$ означает перечислимость (коперечислимость и т.д.) $\gamma$-прообраза этого множества. На множестве $T$ всех замкнутых термов сигнатуры $\Sigma \cup C$ нумерация $\gamma$ индуцирует естественный линейный порядок типа $\omega$: $t_1 <_\gamma t_2 \Leftrightarrow \gamma^{-1}(t_1) < \gamma^{-1}(t_2)$.

При этом, удобно считать, что $m < n \Rightarrow c_m <_\gamma c_n$ (например, отображая разрешимое множество $\alpha = \{a_0 < a_1 < \dots\}$ на $C = \{c_0 <_\gamma c_1 <_\gamma \dots\}$ и $\omega \setminus \alpha = \{b_0 < b_1 < \dots\}$ на $T \setminus C$), поэтому в каждом $\nu$-классе ядра нумерации $\nu$ алгебры $A$ можно выбрать наименьшее натуральное число $n$, которое будем отождествлять со значением константы $c_n$ в алгебре $A_\nu$. Исходя из этого $tr(ker(A,\nu)) = \{t_0 < t_1 < \dots\}$ мы будем отождествлять с $tr(ker(A_\nu)) = \{c_{t_0} <_\gamma c_{t_1} <_\gamma \dots\}$ и, более того, в порядке $<_\gamma$ не будем указывать нижний индекс $\gamma$.

Негативной (позитивной) диаграммой $D_N(A_\nu)$ (соответственно $D_P(A_\nu)$) алгебры $A_\nu$ назовем множество всех упорядоченных пар замкнутых термов, таких что

$D_N(A_\nu) = \{\langle t_1, t_2\rangle | A_\nu \models t_1 \neq t_2; t_1, t_2 \in T\}$

$(D_P(A_\nu) = \{\langle t_1, t_2\rangle | A_\nu \models t_1 = t_2; t_1, t_2 \in T\})$. Очевидно, что негативность (позитивность) нумерации $\nu$ алгебры $A$ равносильна перечислимости негативной (позитивной) диаграммы алгебры $A_\nu$, а одновременная перечислимость как негативной, так и позитивной диаграмм означает разрешимость $\nu$.

# Диаграммы

С алгоритмической точки зрения сложность негативной (позитивной) диаграммы может быть какой угодно и потому нужно иметь в виду, что негативность диаграммы не имеет прямого отношения к алгоритмическим вопросам, хотя в теории вычислимости понятие негативности часто отождествляется с коперечислимостью. То же самое касается и позитивных диаграмм.

Пусть $\Theta(A_\nu)$ – решетка конгруэнций алгебры $A_\nu$ и $\mathfrak{D}_P = \{D_P(A_\nu/\theta) | \theta \in \Theta(A_\nu)\}$ – решетка ее позитивных диаграмм. Очевидно, что эти решетки изоморфны. Однако, если $\mathfrak{D}_N = \{D_N(A_\nu/\theta) | \theta \in \Theta(A_\nu)\}$ – решетка негативных диаграмм, то решетки $\Theta(A_\nu)$ и $\mathfrak{D}_N$ антиизоморфны, т.к. пересечению конгруэнций $\theta_0, \theta_1$ в $\Theta(A_\nu)$ соответствует в точности объединение $D_N(A_\nu)/\theta_0 \bigcup D_N(A_\nu)/\theta_1$ их негативных диаграмм, а их точной верхней грани $\theta_0 \vee \theta_1$ соответствует негативная диаграмма пересечения $D_N(A_\nu)/\theta_0 \bigcap D_N(A_\nu)/\theta_1$ за вычетом всех таких пар $\langle t_0, t_1 \rangle$, которые конгруэнтны посредством конечных цепей, порожденных конгруэнциями $\theta_0, \theta_1$.

Таким образом, имеет место

### Предложение 1

*Решетка конгруэнций алгебры $A_\nu$ изоморфна решетке ее позитивных диаграмм и антиизоморфна решетке негативных диаграмм.*

Если $\theta$ конгруэнция алгебры $A_\nu$, то трансверсалью позитивной диаграммы $D_P(A_\nu)/\theta$ (в обозначениях $tr(D_P(A_\nu)/\theta)$) будем называть множество $\{c_m | \forall c_n \in C[c_m = c_n \pmod{\theta} \Rightarrow m \leqslant n]\}$. Аналогично, трансверсаль негативной диаграммы этой же конгруэнции – также множество представителей таких константных символов из $C$, номера которых минимальны в содержащих их классах $\theta$-эквивалентности. Конгруэнция $\theta \in \Theta(A)$ называется негативной (позитивной, разрешимой) в нумерации $\nu$ алгебры $A$, если перечислимой является негативная диаграмма $D_N(A_\nu/\theta)$ (позитивная диаграмма $D_P(A_\nu/\theta)$, соответственно перечислима как $D_N(A_\nu/\theta)$, так и $D_P(A_\nu/\theta)$) фактор-алгебры алгебры $A_\nu$ по этой конгруэнции.

# Диаграммы

Таким образом, мы отождествляем всякую негативную (позитивную) конгруэнцию $\theta \in \Theta(A_\nu)$ с перечислимой негативной (соответственно, перечислимой позитивной) диаграммой $D_N(A_\nu/\theta)$ ($D_P(A_\nu/\theta)$) фактор-алгебры $A_\nu/\theta$.

Далее, для $\langle t_1, t_2\rangle \in D_P(A_\nu/\theta)$ ($\langle t_1, t_2\rangle \in D_N(A_\nu/\theta)$) будем иногда говорить, что $t_1, t_2$ равны (соответственно различны) по модулю позитивной диаграммы (по модулю негативной диаграммы), имея в виду конгруэнцию $\theta$.

В множестве $\mathfrak{D}_N$ выделим подмножество $\Theta_N(A_\nu)$ всех перечислимых негативных диаграмм (т.е. всех коперечислимых конгруэнций), а в множестве $\mathfrak{D}_P$ – подмножество $\Theta_P(A_\nu)$ всех перечислимых позитивных диаграмм (т.е. всех перечислимых конгруэнций). Пусть теперь $\Theta_0 \subseteq \Theta_N(A_\nu)$ – подмножество множества всех перечислимых негативных диаграмм алгебры $A_\nu$. Нумерацию $\mu : \omega \longrightarrow \Theta_0$ этого множества назовем вычислимой, если перечислимо множество $\{\langle n, t_1, t_2\rangle | \langle t_1, t_2\rangle \in \mu(n), t_1, t_2 \in T\}$. Подсемейство множества $\Theta_N(A_\nu)$ называвается вычислимым, если оно имеет вычислимую нумерацию.

Аналогично определяются понятия вычислимой нумерации и

# Диаграммы

Наконец, индексом негативной конгруэнции алгебры $A_\nu$ назовем перечислимый индекс ее негативной диаграммы, а под индексом позитивной конгруэнции будем понимать перечислимый индекс ее позитивной диаграммы.
Обозначим черех $W_N^\nu$ – совокупность всех перечислимых индексов перечислимых негативных диаграмм алгебры $A_\nu$. Тогда это множество является номерным для некоторой естественной нумерации $\mu_N^\nu$ верхней подполурешетки $\langle \Theta_N(A_\nu); \cup \rangle$ верхней полурешетки $\langle \mathfrak{D}_N; \cup \rangle$ всех негативных диаграмм алгебры $A_\nu$, частичная вычислимая полурешеточная операция $\sqcup$ которой определяется следующим образом: $\mu_N^\nu(m \sqcup n) = \mu_N^\nu(m) \cup \mu_N^\nu(n)$, т.е. взятие точной нижней грани в $\mathfrak{D}_N$ соответствует объединению негативных диаграмм (пересечению негативных конгруэнций). При этом, наибольшим элементом в $\mathfrak{D}_N$ будет пустая диаграмма (единичная конгруэнция), а наименьшим – негативная диаграмма диагонали $A_\nu$, т.е. $\{\langle t_1, t_2 \rangle | A_\nu \models t_1 \neq t_2\}$.

### Определение 3

*Равномерно вычислимо отделимая нумерованная алгебра называется эффективно расщепляемой, если существует эффективная процедура, сопоставляющая любому вычислимому семейству негативных конгруэнций перечислимый индекс такой конгруэнции, которая находится строго ниже пересечения всех конгруэнций данного семейства*

В частности, под единичной конгруэнцией (негативная диаграмма которой – пустое множество) всегда найдется негативная конгруэнция. Свойство эффективной расщепляемости вычислимого семейства негативных конгруэнций является аналогом продуктивности (эффективно неисчерпаемого семейства негативных конгруэнций), которое позволяет алгоритмически поддерживать бесконечные строго убывающие цепи конгруэнций (или, что равносильно, строго возрастающие цепи перечислимых негативных диаграмм).
Говоря об эффективной расщепляемости нумерованной алгебры будем полагать, что эта нумерация является равномерно вычислимо отделимой.

## Предложение 2

*Если алгебра имеет эффективно расщепляемую нумерацию, то решетка ее конгруэнций неартинова.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(A, \nu)$ – эффективно расщепляемая алгебра. Тогда негативная диаграмма $D_N(A_\nu)$ не является перечислимой, т.к. в противном случае для семейства, состоящего из одной этой конгруэнции строго меньшей не существовало бы. Возьмем любую нетривиальную негативную конгруэнцию $\theta_0$ алгебры $A_\nu$, которая существует в силу аппроксимируемости $A_\nu$ негативными алгебрами. Тогда негативная диаграмма фактор-алгебры $D_N(A_\nu/\theta_0)$ перечислима. Применив процедуру эффективного расщепления к $D_N(A_\nu/\theta_0)$ получим перечислимый индекс некоторой негативной диаграммы $D_N(A_\nu/\theta_1)$, которая строго расширяет $D_N(A_\nu/\theta_0)$ (или, что равносильно, $\theta_1 \subseteq \theta_0 \wedge \theta_0 \neq \theta_1$). Далее, повторяем те же рассуждения для $\theta_1$ и итерируем процедуру. Предложение доказано.

## Следствие 3

*Никакая алгебра с артиновой решеткой конгруэнций не имеет эффективно расщепляемую нумерацию.*

Другими словами, всякая алгебра, имеющая эффективно расщепляемую нумерацию довольно сложно устроена.

**Предложение 3** Никакая негативная алгебра не является эффективно расщепляемой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если допустить противное и нумерованная алгебра $(A, \nu)$ эффективно расщепляема и негативна, то рассматривая одноэлементное вычислимое семейство, состоящее из негативной диаграммы $D_N(A_\nu)$ получаем противоречие, т.к. конгруэнции строго ниже нулевой не существует. Предложение доказано.

**Следствие 4** Всякая равномерно вычислимо отделимая нумерация алгебры с артиновой решеткой конгруэнций является негативной.

**Следствие 5** Всякая равномерно вычислимо отделимая позитивная нумерация алгебры с артиновой решеткой конгруэнций является разрешимой.

# Диаграммы

**Замечание 2.** Пусть $W_0^2, W_1^2, \ldots$ – последовательность всех перечислимых множеств пар натуральных чисел. Если $A_\nu$ – стандартное $\nu$-обогащение эффективно расщепляемой нумерованной алгебры $(A, \nu)$ и $W_{n_0}^2 = \gamma^{-1}(D_N(A_\nu/\theta_0))$, где $\gamma$ – вычислимая нумерация перечислимых негативных диаграмм алгебры $A_\nu$, индуцированная геделевской нумерацией всех замкнутых термов сигнатуры $\Sigma \cup C$, а $\theta_0$ – любая негативная конгруэнция, то число $n_0$ будет одним из номеров негативной диаграммы $D_N(A_\nu/\theta_0)$. Определим вычислимую функцию $f : \omega \longrightarrow \omega$ так, что $f(0) = n_0$. Далее, применяя алгоритм из определения эффективной расщепляемости получим некоторую негативную перечислимую диаграмму $D_N(A_\nu/\theta_1)$, строго расширяющую предыдущую диаграмму, т.е. некоторый $\gamma$-номер $n_1$ этой диаграммы. Полагаем $f(1) = n_1$, т.е. по перечислимому индексу $n_k$ негативной диаграммы $D_N(A_\nu/\theta_k)$ эффективно вычисляется некоторый перечислимый индекс $f(k+1) = n_{k+1}$ негативной диаграммы $D_N(A_\nu/\theta_{k+1})$, такой что $\theta_{k+1} \subseteq \theta_k \wedge \theta_k \neq \theta_{k+1}$.

Рассмотрим теперь вычислимое семейство негативных конгруэнций с перечислимыми индексами $f(0), f(1), \dots$ и используя, опять-таки, эффективную расщепляемость получим некоторый перечислимый индекс такой негативной конгруэнции $\theta$, что $\theta \subseteq \bigcap_{n\in\omega} \theta_n$ или, что равносильно, $\bigcup_{n\in\omega} \gamma(W^2_{f(n)}) \subseteq D_N(A_\nu/\theta)$, причем диаграммное расширение объединения строгое. Можно как угодно эффективно продолжать расщепления конгруэнций (расширения негативных диаграмм), привлечь конструктивные ординалы, но достичь сверху $D_N(A_\nu)$ не удастся. Поэтому эффективная расщепляемость является аналогом понятия эффективно неисчерпаемого, т.е. продуктивного множества. Сразу отметим, что классическое понятие продуктивности не позволяет охарактеризовать понятие эффективной расщепляемости, хотя, как будет показано ниже, является достаточным условием для наличия последней.

# Условия типа продуктивности

Рассмотрим ряд последовательно расширяющихся свойств типа продуктивности для множеств, наличие которых у трансверсали равномерно вычислимо отделимой нумерации алгебры будет обеспечивать некоторые необходимые и некоторые достаточные условия для эффективной расщепляемости этой нумерации, а также взаимоотношения между этими свойствами.

Напомним, что множество $\alpha \subseteq \omega$ называется полупродуктивным, если существует такая вычислимая частичная функция $\psi$, что для всякого $W_x \subseteq \alpha$ значение $\psi(x)$ определено и $W_x \subseteq W_{\psi(x)} \subseteq \alpha \wedge W_{\psi(x)} \setminus W_x \neq \emptyset$.

Хорошо известно, что класс полупродуктивных множеств является собственным расширением класса продуктивных множеств.

Как обычно, через $W_x$ $(R_x, \Gamma_x)$ обозначается перечислимое множество (разрешимое множество, конечное множество) с номером $x$ в постовской нумерации перечислимых множеств (клиниевской нумерации частичных вычислимых функций, стандартной нумерации конечных множеств). Отметим, что далеко не для всякого $x$ функция $R_x$ является характеристической для некоторого множества.

**Определение 4**

*Множество $\alpha$ называется вычислимо продуктивным, если существует такая вычислимая частичная функция $\psi$, что для всякого разрешимого множества $R_x \subseteq \alpha$, заданного своим характеристическим индексом $x$, значение $\psi(x)$ определено и $\psi(x) \in \alpha \setminus R_x$.*

Функцию $\psi$ из определения 4 назовем вычислимо-продуктивной для $\alpha$. Во избежание громоздкой системы обозначений, затрудняющей восприятие текста, доказательства будем проводить с умеренной степенью детализации, не умаляющей их строгости.

**Предложение 5**

*Всякое полупродуктивное множество является вычислимо продуктивным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha$ – полупродуктивное множество с полупродуктивной функцией $\psi$ и разрешимое множество $R_x$, заданное своим характеристическим индексом $x$, является подмножеством $\alpha$.

Равномерно эффективно перейдем от $x$ к перечислимому индексу множества $R_x$, скажем $R_x = W_y$, и построим $W_{\psi(y)}$ такое, что $W_y \subseteq W_{\psi(y)} \subseteq \alpha$ (все включения собственные). Используя характеристический индекс $x$ множества $W_y$ найдем первое $z$ в перечислении множества $W_{\psi(y)}$ такое, что $z \in W_{\psi(y)} \setminus R_x$. Этот элемент $z$ объявляем значением вычислимо-продуктивной функции для $\alpha$. Предложение доказано.

**Предложение 6**

*Всякое вычислимо перечислимое невычислимое множество является вычислимо продуктивным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, если $\alpha$ вычислимо перечислимо и неразрешимо, то для всякого его разрешимого подмножества $R_x$, заданного характеристическим индексом $x$, верно $\alpha \setminus R_x \neq \emptyset$. Найдем первый элемент в пересчете $\alpha$, но вне $R_x$ и объявим этот элемент значением вычислимо-продуктивной функции множества $\alpha$. Предложение доказано.

**Следствие 7**

*Класс вычислимо продуктивных множеств является собственным расширением класса полупродуктивных множеств.*

Напомним, что множество называется эффективно бесконечным, если оно бесконечно и не иммунно.

**Следствие 8**

*Всякое вычислимо продуктивное множество является эффективно бесконечным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\alpha$ – вычислимо-продуктивное, то начав с любого его конечного подмножества, заданного своим характеристическим индексом, получим новый элемент из $\alpha$, но вне этого подмножества. Эффективная итерация этого процесса позволяет построить бесконечное перечислимое подмножество исходного множества $\alpha$. Предложение доказано.

**Предложение 9**

*Всякое бесконечное разрешимое множество эффективно бесконечно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

**Следствие 10**

*Класс эффективно бесконечных множеств является собственным расширением класса вычислимо-продуктивных множеств.*

Обозначим через Prod, Semi-Prod, Comp-Prod, Eff-Inf классы продуктивных, полупродуктивных, вычислимо-продуктивных и эффективно бесконечных множеств соответственно.

**Предложение 11**

$\mathit{Prod} \subset \mathit{Semi\text{-}Prod} \subset \mathit{Comp\text{-}Prod} \subset \mathit{Eff\text{-}Inf}$. *Все включения собственные.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из предыдущих предложений.

**Предложение 12**

*Существует равномерно вычислимо отделимая алгебра с вычислимо-продуктивной трансверсалью, не являющаяся эффективно расщепляемой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что над любой негативной эквивалентностью представима конгруэнц-простая алгебра. Зафиксируем негативную эквивалентность $\eta$ с неразрешимой трансверсалью и рассмотрим такую конгруэнц-простую алгебру $A$ эффективной сигнатуры, которая обладает нумерацией $\nu$ с ядром $\eta$. Тогда $(A, \nu)$ – негативная алгебра с вычислимо-продуктивной трансверсалью. Тогда эта алгебра не является эффективно расщепляемой. Предложение доказано.

# Условия типа продуктивности

Класс вычислимо-продуктивных множеств можно существенно расширить следующим образом. Назовем множество $\alpha \subseteq \omega$ канонически-продуктивным, если существует такая частичная вычислимая функция $\phi$, что для всякого конечного множества $\Gamma_x$, заданного своим каноническим индексом $x$, имеет место $\Gamma_x \subseteq \alpha \Rightarrow \phi(x)$ определена и $\phi(x) \in \alpha \setminus \Gamma_x$. Однако, оказалось, что в этом расширении нет нужды, т.к. понятия канонической продуктивности и эффективной бесконечности оказались равнообъемными.

**Предложение 13**

*Множество канонически-продуктивно тогда и только тогда, когда оно эффективно бесконечно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

# Критерий эффективной расщепляемости

## Предложение 14

*Для нумерованной равномерно вычислимо отделимой алгебры $(A,\nu)$ имеют место следующие соотношения:*
*1) если $\nu$ эффективно расщепляема, то $tr(D_N(A_\nu))$ вычислимо продуктивна;*
*2) если $\nu$ эффективно расщепляема, то $tr(D_N(A_\nu))$ эффективно бесконечна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\nu$ эффективно расщепляема. Зафиксируем произвольное разрешимое подмножество $R_x$ трансверсали $tr(D_N(A_\nu))$, заданное своим характеристическим индексом $x$. По теореме о равномерно вычислимой аппроксимируемости для любых различных $r, s \in R_x$ существует такой гомоморфизм $\varphi_{r,s}$ на негативную алгебру, по модулю ядра которого эти элементы различны. Обозначим соответствующую этому гомоморфизму негативную диаграмму $\varphi_{r,s}$-образа через $D_{r,s}$.

Равномерность означает наличие единообразной эффективной процедуры для всех различных $r, s \in R_x$, поэтому пересечение всех этих конгруэнций (объединение всех перечислимых негативных диаграмм) $D = \bigcup_{r,s \in R_x, r \neq s} D_{r,s}$ будет перечислимой негативной диаграммой, в которой все различные элементы из $R_x$ различны. Теперь используем эффективную расщепляемость $\nu$ следующим образом.

Применив алгоритм эффективного расщепления к семейству $\bigcup_{r,s \in R_x, r \neq s} \{D_{r,s}\}$ получим индекс такой перечислимой негативной диаграммы $D^*$, которая собственным образом расширяет $D$. Очевидно, что $tr(D) \subsetneqq tr(D^*)$ и $tr(D^*) \setminus R_x \neq \emptyset$ (даже если $tr(D) = R_x$, т.к. трансверсальные элементы при расщеплении остаются таковыми же). Следовательно, нами построен перечислимый индекс трансверсального множества $tr(D^*)$, которое содержит непустое множество элементов из $tr(D_N(A_\nu)) \setminus R_x$.

Положим $R^* = R_x \cup tr(D^*)$, тогда $R^*$ – такое перечислимое собственное расширение множества $R_x$, что $R^* \subseteq tr(D_N(A_\nu))$. Очевидно, что вычислимая функция, выбирающая первый элемент в перечислении $R^*$, не лежащий в $R_x$, и является вычислимо продуктивной для $tr(D_N(A_\nu))$ 2) Следует из предыдущего пункта и предложения 4.Предложение доказано.
Из предыдущих рассуждений следует, что свойство вычислимой продуктивности характеристической трансверсали равномерно вычислимо отделимой алгебры не является характеристическим для эффективной расщепляемости нумерации.

**Теорема 15**

*Нумерованная алгебра эффективно расщепляема тогда и только тогда, когда характеристическая трансверсаль ее ядра полупродуктивна.*

# Критерий эффективной расщепляемости

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(A, \nu)$ – равномерно вычислимо отделимая алгебра. Допустим, что $tr(D_N(A_\nu))$ полупродуктивна. Рассмотрим любое вычислимое семейство перечислимых негативных диаграмм $D_0, D_1, \ldots$ алгебры $A_\nu$ и положим $D = \bigcup_n D_n$. Тогда, как легко убедиться, $D$ – также негативная диаграмма (т.к. принадлежность пары термов к $D$ равносильна принадлежности этой пары какому-либо $D_n$ для подходящего $n \in \omega$), причем перечислимый индекс диаграммы $D$ равномерно вычисляется по номерам алгоритмов, задающих вычислимое семейство $D_0, D_1, \ldots$. Таким образом, у нас имеется алгоритм перечисления для $D$. Поскольку $tr(D) \subseteq tr(D_N(A_\nu))$, то используя полупродуктивность $tr(D_N(A_\nu))$ по перечислимому индексу $tr(D)$ эффективно вычисляется такое $z$, что $W_z \subseteq tr(D_N(A_\nu)) \wedge tr(D) \subseteq W_z \wedge W_z \setminus tr(D) \neq \emptyset$. Теперь, применяя алгоритм равномерной вычислимой отделимости, построим такую негативную диаграмму $D(W_z)$, по модулю которой все различные элементы из $W_z$ различны.

# Критерий эффективной расщепляемости

Пусть $D^* = D \cup D(W_z)$. Очевидно, что $D^*$ – собственное расширение $D$, т.е. $\nu$ эффективно расщепляема.
Обратно. Пусть $(A, \nu)$ – эффективно расщепляемая нумерованная алгебра. Для произвольного вычислимо перечислимого подмножества $W_z$ трансверсали $tr(D_N(A_\nu))$ по теореме о равномерно вычислимой аппроксимируемости существует равномерно эффективное по перечислимым индексам семейство негативных гомоморфизмов $\{\varphi_{r,s} | r, s \in W_z, r \neq s\}$, различающее все элементы из $W_z$. Пусть $D$ – объединение всех негативных диаграмм конгруэнций из этого семейства. Тогда $D$ перечислима и ее перечислимый индекс равномерно вычисляется по $z$. Применяя алгоритм эффективного расщепления к $D$ получим индекс такой перечислимой негативной диаграммы $D^*$, которая собственным образом расширяет $D$. Тогда $tr(D) \subsetneq tr(D^*) \subseteq tr(D_N(A_\nu)) \wedge tr(D^*) \setminus W_z \neq \emptyset$. Полагаем $W_{\psi(z)} = W_z \cup tr(D^*)$. Очевидно, что $\psi$ – полупродуктивная функция для множества $tr(D_N(A_\nu))$. Теорема доказана.

# Критерий эффективной расщепляемости

**Следствие 16** Если характеристическая трансверсаль нумерованной алгебры продуктивна, то она эффективно расщепляема.

В самом деле, из продуктивности характеристичекой трансверсали вытекает ее полупродуктивность, которой достаточно для эффективной расщепляемости.

В связи с теоремой 15 возникает принципиальный вопрос: можно ли в условиях этой теоремы заменить свойство полупродуктивности на продуктивность?

**Теорема 17**

*Существует эффективно расщепляемая позитивная алгебра, характеристическая трансверсаль ядра которой не продуктивна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим эквавалентность $\eta^{\alpha}$. Выше было отмечено, что она равномерно вычислимо отделима для произвольного $\alpha \subseteq \omega$. Пусть $\alpha$ – полукреативное, но не креативное и $\beta = \omega \setminus \alpha$. Покажем, что при этих условиях $tr(\eta^{\alpha})$ – полупродуктивное, но не продуктивное множество.

# Критерий эффективной расщепляемости

Пусть $\beta$ – полупродуктивное множество. Докажем, что трансверсаль $tr(\eta^\alpha)$ также полупродуктивна. Для этого заметим, что как $\beta_0$, так и $\beta_1$ полупродуктивны, т.к. они являются взаимно однозначными вычислимыми образами $\beta$, осуществляемыми отображениями $f = \lambda z.[2z]$ и $f = \lambda z.[2z+1]$ соответственно. Перечислимое расширение $\beta_1$ множеством $\{2x+1|x \in \omega\}$ таково, что объединение дополнения этого расширения (т.е. $\{2x|x \in \omega\}$) с $\beta_1$ является полупродуктивным, что легко проверить. Но $\beta_1 \cup \{2x|x \in \omega\}$ и есть $tr(\eta^\alpha)$, т.е. характеристичкская трансверсаль полупродуктивна. Обозначим через $\alpha_0 = \{2x|x \in \alpha\}, \alpha_1 = \{2x+1|x \in \alpha\}$ и $\beta_0 = \{2x|x \in \beta\}, \beta_1 = \{2x+1|x \in \beta\}$. Тогда $tr(\eta^\alpha) = \alpha_0 \cup \beta_0 \cup \beta_1$. Натуральные числа из $\beta_0 \cup \beta_1$ образуют одноэлементные классы $\eta^\alpha$-эквивалентности, а из $\alpha_0$ – минимальные числа из всех двухэлементных $\eta^\alpha$-классов.

# Критерий эффективной расщепляемости

Пусть $\beta$ – полупродуктивное множество. Докажем, что характеристическая трансверсаль $tr(\eta^{\alpha})$ также полупродуктивна. Для этого заметим, что как $\beta_0$, так и $\beta_1$ полупродуктивны, т.к. они являются взаимно однозначными вычислимыми образами $\beta$, осуществляемыми отображениями $f = \lambda z.[2z]$ и $f = \lambda z.[2z+1]$ соответственно. Перечислимое расширение $\beta_1$ множеством $\{2x+1|x \in \omega\}$ таково, что объединение дополнения этого расширения (т.е. $\{2x|x \in \omega\}$) с $\beta_1$ является полупродуктивным, что легко проверить. Но $\beta_1 \cup \{2x|x \in \omega\}$ и есть $tr(\eta^{\alpha})$, т.е. трансверсаль полупродуктивна.

Теперь покажем, что трансверсаль эквивалентности $\eta^{\alpha}$ не является продуктивной. Допустим обратное и $tr(\eta^{\alpha})$ продуктивна. Тогда, т.к. $\alpha_0$ перечислимо (что легко проверить), то $\beta_0 \cup \beta_1$ также продуктивно как разность продуктивного множества $tr(\eta^{\alpha})$ и его перечислимого подмножества $\alpha_0$ (заметим, что факт продуктивности разности продуктивного множества и его перечислимого подмножества в случае полупродуктивных множеств вообще говоря не имеет места).

# Критерий эффективной расщепляемости

Используя тот факт, что как $\beta_0$, так и $\beta_1$ являются эффективными биективными образами $\beta$ (при отображениях $\lambda z.[2z]$ и $\lambda z.[2z+1]$ соответственно), то для всякого перечислимого подмножества $W_x$ множества $\beta$ определим следующую процедуру:
перейдем к перечислимому индексу множества $\{2x|x \in \beta\} \cup \{2x+1|x \in \beta\}$, пусть этот индекс будет $z$, и для $W_z$ найдем с помощью продуктивной функции множества $\beta_0 \cup \beta_1$ соответствующее число $u \in (\beta_0 \cup \beta_1) \setminus W_z$. Далее, находим прообраз $u$ в $\beta$ (используя подходящую функцию в зависимости от четности или нечетности $u$), который, очевидно, лежит вне $W_x$ (т.к. нами было взято полное объединение образов $W_x$, так что эффективно полученный прообраз числа $u$ находится в $\beta \setminus W_x$).
Следовательно, $\beta$ – продуктивно, что противоречит выбору последнего.

# Критерий эффективной расщепляемости

Таким образом, $\eta^\alpha$ – равномерно вычислимо отделимая позитивная эквивалентность с полупродуктивной, но не продуктивной характеристической трансверсалью. Рассмотрим алгебру пустой сигнатуры с нумерацией $\nu : \omega \longrightarrow \omega/\eta^\alpha$, определенной правилом $\nu(n) = \{n\}/\eta^\alpha$. Тогда эта нумерованная алгебра эффективно расщепляема, что следует из теоремы 5.1 ввиду полупродуктивности ее трансверсали, но продуктивность последней не имеет места. Теорема доказана.

**Замечание 3.** Неформально, равносильность свойств полупродуктивности характеристической трансверсали и эффективной расщепляемости семейства негативных конгруэнций означает, что на каждом шаге расширения негативной диаграммы гарантированно получаются новые неравенства (в силу собственности расширений), но эффективно определить, какие же из неравенств являются новыми, нельзя.

# Литература

1. Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984, 568 с.
2. Гончаров С. С., Ершов Ю. Л. Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1999, 360 с.
3. Ершов Ю. Л. Теория нумераций. М.: Наука, 1977, 416 с.
4. Ершов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980, 415 с.
5. Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977, 614 с.
6. Кон П. М. Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968, 352 с.
7. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970, 392 с.
8. Мартин-Леф П. Очерки по конструктивной математике. М.: Мир, 1975, 136 с.
9. Соар И. Р. Вычислимо перечислимые множества и степени. Казань: Казанское математическое общество. Под редакцией М.М. Арсланова, 2000, 576 с.

*СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!!*