УДК 519.68

О ЗАДАЧЕ ТРАНСМИССИИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДИВЕРГЕНТНОГО ВИДА

М.М. Карчевский, Р.Р. Шагидуллин

Аннотация

Предложена постановка задачи трансмиссии для квазилинейных эллиптических уравнений дивергентного вида в ограниченной составной области в терминах усиленных соболевских пространств. Получены достаточные условия обобщенной разрешимости задачи при граничных условиях Дирихле. Указаны условия, при которых «потоки» определяются по решению задачи единственным образом. Отмечено, что результаты работы могут быть применены при исследовании задач нелинейной теории фильтрации в составных областях.

Ключевые слова: краевая задача, задача трансмиссии, условия обобщенной разрешимости.

Введение

Многие прикладные задачи приводят к необходимости решения эллиптических уравнений в составных областях. При этом свойства уравнений могут меняться при переходе от одной подобласти к другой. На границах раздела подобластей ставятся те или иные условия сопряжения (трансмиссии). Примеры постановок и исследования разрешимости такого сорта задач см., например, в [1–5]. В настоящей работе рассматривается квазилинейное эллиптическое уравнение второго порядка в дивергентной форме. В каждой из подобластей предполагается выполненным свое ограничение на порядок роста по нелинейности. При постановке и исследовании обобщенной разрешимости соответствующей граничной задачи оказывается естественным использовать так называемые усиленные пространства Соболева (см. [6–8]). В предлагаемой работе указаны достаточные условия разрешимости задачи Дирихле в составной области. Решение этой задачи, вообще говоря, неединственно, но при дополнительных условиях типа условий подчинения (см. [9]) доказано, что «потоки» определяются по данным задачи однозначно.

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n,\ n \geq 2,$ – ограниченная область, Предполагается, что

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{N} \overline{\Omega}_i, \tag{1}$$

$N \geq 1$. Область Ω и каждая из подобластей Ω_i, $i = 1, \ldots, N$, имеют липшицевы границы. Кроме того, предполагается, что $\Omega_i \bigcap \Omega_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Рассматривается задача трансмиссии при однородных граничных условиях Дирихле

$$-\operatorname{div} a(x, u, \nabla u) + a_0(x, u, \nabla u) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{3}$$

Γ – граница области Ω. На общих (внутренних) границах Γ_{ij} подобластей $\Omega_i \bigcap \Omega_j$ ставятся обычные условия сопряжения, то есть непрерывности функции u, и «потоков»

$$[u] = 0, \quad x \in \Gamma_{ij}, \tag{4}$$

$$[a(x, u, \nabla u) \cdot \nu] = 0, \quad x \in \Gamma_{ij}, \tag{5}$$

$i \neq j$ $i, j = 1, 2, \ldots, N$. Здесь ν – нормаль к Γ_{ij}, точка, как обычно, обозначает стандартное скалярное произведение в соответствующем арифметическом пространстве вещественных векторов, [ ] – скачок функции при переходе через поверхность Γ_{ij}.

Относительно функций $a_i(x, \xi_0, \xi)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $x \in \Omega$, $\xi_0 \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ предполагается, что они

$$\text{измеримы по } x \text{ на } \Omega \text{ при } \bar{\xi} = (\xi_0, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}, \tag{6}$$

$$\text{непрерывны по } \bar{\xi} \text{ на } \mathbb{R}^{n+1} \text{ при почти всех } x \in \Omega, \tag{7}$$

существуют постоянные $p_i \in (1, \infty)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, c_0, c_1, $c_2 > 0$ такие, что

$$\bar{a}(x, \bar{\xi}) \cdot \bar{\xi} \geq c_0 |\xi|^{p_i} - c_1, \qquad x \in \Omega_i, \quad \bar{\xi} \in \mathbb{R}^{n+1}, \tag{8}$$

$$|\bar{a}(x, \bar{\xi})| \leq c_2 (1 + |\bar{\xi}|)^{p_i - 1}, \quad x \in \Omega_i, \quad \bar{\xi} \in \mathbb{R}^{n+1}, \tag{9}$$

$i = 1, 2, \ldots, N$.

$$(\bar{a}(x, \bar{\xi}) - \bar{a}(x, \bar{\eta})) \cdot (\bar{\xi} - \bar{\eta}) \geq 0, \quad x \in \Omega, \quad \bar{\xi}, \bar{\eta} \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{10}$$

В качестве примера задачи, укладывающейся в описанную выше схему, приведем задачу фильтрации жидкости [10], когда в каждой из подобластей Ω_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, действует свой нелинейный закон фильтрации с предельным градиентом сдвига.

2. Исследование разрешимости

Условия (8), (9) приводят к необходимости считать (см., например, [11, § 25]), что обобщенное решение задачи (2)–(5) таково, что его сужение на Ω_i принадлежит $W^1_{p_i}(\Omega_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Хорошо известно (см., например, [12, с. 93]), что след любой функции u из $W^1_{p_i}(\Omega_i)$ принадлежит пространству $W^{1-1/p_i}_{p_i}(\Gamma_i)$. Поэтому выполнение условия сопряжения (4) естественным образом приводит к необходимости предполагать, что обобщенное решение задачи (2)–(5) принадлежит так называемому усиленному пространству Соболева (см. [6–8] и цитированную там литературу).

Приведем соответствующее определение (ср. с [7]) . Усиленным пространством Соболева $V^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$, согласованным с разбиением $\overline{\Omega} = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \overline{\Omega}_i$ и мультииндексом $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $p_i \in (1, \infty)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, назовем пополнение линейного пространства $C^\infty_0(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_{V^1_{\mathbf{p}}} = \sum_{i=1}^{N} \|u\|_{W^1_{p_i}} + \sum_{i \neq j} \Big(\|u\|_{W^{1-1/p_i}_{p_i}(\Gamma_{ij})} + \|u\|_{W^{1-1/p_j}_{p_j}(\Gamma_{ij})} \Big). \tag{11}$$

Непосредственно из [7, 8] вытекает, что $V^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$ – рефлексивное банахово пространство.

Функцию $u \in V^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$ назовем обобщенным решением задачи (2)–(5), если

$$\int\limits_{\Omega} (a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla\eta + a_0(x,u,\nabla u)\eta)\,dx = \int\limits_{\Omega} f\eta\,dx. \tag{12}$$

Понятно, что если обобщенное решение – достаточно гладкая функция на области Ω, то оно является решением в смысле определения (2)–(5).

При исследовании обобщенной разрешимости задачи (2)–(5) нам потребуются следующие вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ – ограниченная область с липшицевой границей Γ, часть границы $\Gamma_s \subset \Gamma$ имеет положительную $(n-1)$-меру, $p \in (1,\infty)$. Тогда нормы*

$$\|u\|_{W^1_p(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} (|u|^p + |\nabla u|^p)\,dx\right)^{1/p},$$

$$\|u\|'_{W^1_p(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^p)\,dx\right)^{1/p} + \left|\int\limits_{\Gamma_s} u(x)\,dx\right|$$

эквивалентны на $W^1_p(\Omega)$.

Справедливость этого утверждения очевидным образом следует из теоремы о следах функций из пространства $W^1_p(\Omega)$ и теоремы об эквивалентных нормировках пространств Соболева (см., например, [13, с. 444]).

Лемма 2. *Существует положительная постоянная c такая, что*

$$\sum_{i\neq j}\left(\|u\|_{W^{1-1/p_i}_{p_i}(\Gamma_{ij})} + \|u\|_{W^{1-1/p_j}_{p_j}(\Gamma_{ij})}\right) \leq c\sum_{i=1}^{N}\|\nabla u\|_{L_{p_i}(\Omega_i)} \quad \forall\, u \in V^1_{\mathbf{p}}(\Omega). \tag{13}$$

Доказательство. Фиксируем произвольным образом числа $i \neq j$ такие, что $\overline{\Omega}_i \bigcap \overline{\Omega}_j \neq \emptyset$. Предположим для определенности, что $p_i \leq p_j$. Тогда по теореме о следах [12, с. 93] для любой функции $u \in V^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$ имеем, что

$$\|u\|_{W^{1-1/p_i}_{p_i}(\Gamma_{ij})} + \|u\|_{W^{1-1/p_j}_{p_j}(\Gamma_{ij})} \leq c_{ij}\|u\|_{W^1_{p_j}(\Omega_j)},$$

где c_{ij} – постоянная[1], не зависящая от u. Пусть теперь Ω_j, Ω_{j+1}, …, Ω_k – совокупность подобластей разбиения (1) такая, что каждая последующая область имеет общий участок границы ненулевой $(n-1)$-меры с предыдущей, а пересечение границы области Ω_k с Γ имеет ненулевую $(n-1)$-меру. По лемме 1 имеем, что $\|u\|_{W^1_{p_j}(\Omega_j)} \leq c_{j,j+1}\big(\|\nabla u\|_{L_{p_j}(\Omega_j)} + \|u\|_{L_1(\Gamma_{j,j+1})}\big)$. Отсюда, вновь применяя теорему о следах и лемму 1, получаем, что

$$\|u\|_{W^1_{p_j}(\Omega_j)} \leq c_{j,j+2}\big(\|\nabla u\|_{L_{p_j}(\Omega_j)} + \|\nabla u\|_{L_{p_{j+1}}(\Omega_{j+1})} + \|u\|_{L_1(\Gamma_{j+1,j+2})}\big).$$

Продолжая этот процесс и учитывая то, что след функции u на Γ равен нулю, приходим к (13). □

[1] Здесь и далее буквой c, возможно с индексами, обозначаем положительные постоянные, не зависящие от функций, участвующих в соответствующих неравенствах.

Из определения пространства $V^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$ и леммы 2 непосредственно следуют

Лемма 3. *Существует положительная постоянная c такая, что*

$$\sum_{i=1}^{N} \|u\|_{L_{p_i}(\Omega_i)} \leq c \sum_{i=1}^{N} \|\nabla u\|_{L_{p_i}(\Omega_i)} \quad \forall\, u \in V^1_{\mathbf{p}}(\Omega). \tag{14}$$

Лемма 4. *Нормы на пространстве $V^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$, определенные равенствами* (11) *и*

$$\|u\|'_{V^1_{\mathbf{p}}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{N} \|\nabla u\|_{L_{p_i}(\Omega_i)},$$

эквивалентны.

Достаточные условия обобщенной разрешимости задачи (2)–(5) дает

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (8)–(10) *и*

$$\sum_{i=1}^{N} \|f\|_{L_{q_i}(\Omega_i)} < \infty, \tag{15}$$

где $q_i = p_i/(p_i - 1)$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Тогда задача (2)–(5) *имеет хотя бы одно обобщенное решение.*

Доказательство. Из условия (15) и леммы 3, очевидно, следует, что форма $\int\limits_{\Omega} fu\, dx$ при фиксированном f есть линейный ограниченный функционал над пространством $V^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$. Используя условия (6), (7), (9) и следуя [11, § 25], нетрудно убедиться, что

$$\int\limits_{\Omega} (a(x, u, \nabla u) \cdot \nabla \eta + a_0(x, u, \nabla u)\eta)\, dx = \langle Au, \eta \rangle \quad \forall\, u, \eta \in V^1_{\mathbf{p}}(\Omega), \tag{16}$$

где A – непрерывный оператор, действующий из $V^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$ в $(V^1_{\mathbf{p}}(\Omega))^*$. Вследствие условия (8) и леммы 4 оператор A коэрцитивен на пространстве $V^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$. Условие (10) обеспечивает монотонность оператора A на $V^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 18.2 из [11], и, следовательно, задача (2)–(5) имеет по крайней мере одно обобщенное решение. □

3. Свойства решений задачи (2)–(5)

Условие монотонности (10) заменим более сильным условием (условием подчинения)

$$\begin{gathered} |a(x, \bar{\xi}) - a(x, \bar{\eta})| \leq c_4((\bar{a}(x, \bar{\xi}) - \bar{a}(x, \bar{\eta})) \cdot (\bar{\xi} - \bar{\eta}))^{1/2}(1 + |\bar{\xi}|^{p_i} + |\bar{\eta}|^{p_i})^{1/2 - 1/r_i}, \\ r_i = \max\{p_i, 2\}, \quad x \in \Omega_i, \quad \bar{\xi}, \bar{\eta} \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \quad c_4 = \mathrm{const} > 0. \end{gathered} \tag{17}$$

Аналогичное условие было введено в [9] при исследовании гладкости решений квазилинейных эллиптических уравнений и использовано в [10] при изучении нелинейных задач теории фильтрации жидкости с предельным градиентом сдвига.

Задача (2)–(5) имеет, вообще говоря, неединственное решение, тем не менее справедлива

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (17)*. Тогда «поток»* $a(x,u,\nabla u)$ *и функция* $a_0(x,u,\nabla u)$ *определяются по исходным данным задачи* (2)–(5) *однозначно.*

Доказательство. Пусть $u,v \in V^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$, $i \in \{1,2,\dots,N\}$, $p_i \le 2$. Тогда вследствие (17)

$$|a(x,u,\nabla u) - a(x,v,\nabla v)|^2 \le c_4^2 (a(x,u,\nabla u) - a(x,v,\nabla v)) \cdot (\nabla u - \nabla u) + \\ + (a(x,u,\nabla u) - a(x,v,\nabla v))(u-v), \quad x \in \Omega_i, \quad (18)$$

поэтому

$$\int\limits_{\Omega_i} |a(x,u,\nabla u) - a(x,v,\nabla v)|^2\,dx \le c_4^2 \int\limits_{\Omega_i} ((a(x,u,\nabla u) - a(x,v,\nabla v)) \cdot (\nabla u - \nabla u) + \\ + (a(x,u,\nabla u) - a(x,v,\nabla v))(u-v))\,dx \le \int\limits_{\Omega} ((a(x,u,\nabla u) - a(x,v,\nabla v)) \cdot (\nabla u - \nabla u) + \\ + (a(x,u,\nabla u) - a(x,v,\nabla v))(u-v))\,dx. \quad (19)$$

Пусть теперь $p_i > 2$. Полагая $q_i = p_i/(p_i-1)$, получим

$$\int\limits_{\Omega_i} |a(x,u,\nabla u) - a(x,v,\nabla v)|^{q_i}\,dx \le c_4^{q_i} \int\limits_{\Omega_i} ((a(x,u,\nabla u) - a(x,v,\nabla v)) \cdot (\nabla u - \nabla u) + \\ + (a(x,u,\nabla u) - a(x,v,\nabla v))(u-v))^{q_i/2} \times \\ \times (1 + |u|^{p_i} + |v|^{p_i} + |\nabla u|^{p_i} + |\nabla v|^{p_i})^{(1/2-1/p_i)q_i}\,dx, \quad x \in \Omega_i. \quad (20)$$

Оценивая интеграл в правой части (20) при помощи неравенства Гельдера с показателями $s_i = 2/q_i$ и $s_i/(s_i-1)$ и выполняя элементарные преобразования, получим

$$\left(\int\limits_{\Omega_i} |a(x,u,\nabla u) - a(x,v,\nabla v)|^{q_i} dx \right)^{q_i/2} \le \\ \le c_4^{q_i} \int\limits_{\Omega_i} ((a(x,u,\nabla u) - a(x,v,\nabla v)) \cdot (\nabla u - \nabla u) + (a(x,u,\nabla u) - a(x,v,\nabla v))(u-v))\,dx \times \\ \times \left(\int\limits_{\Omega_i} (1 + |u|^{p_i} + |v|^{p_i} + |\nabla u|^{p_i} + |\nabla v|^{p_i})\,dx \right)^{(2-q_i)q_i/4} \le \\ \le c_4^{q_i} \int\limits_{\Omega} ((a(x,u,\nabla u) - a(x,v,\nabla v)) \cdot (\nabla u - \nabla u) + (a(x,u,\nabla u) - a(x,v,\nabla v))(u-v))\,dx \times \\ \times \left(\int\limits_{\Omega_i} (1 + |u|^{p_i} + |v|^{p_i} + |\nabla u|^{p_i} + |\nabla v|^{p_i})\,dx \right)^{(2-q_i)q_i/4} \quad (21)$$

Если u,v – обобщенные решения задачи (2)–(5), то из неравенств (20), (21) очевидным образом следует, что

$$a(x,u,\nabla u) = a(x,v,\nabla v), \quad x \in \Omega. \quad (22)$$

Далее, из (22) и определения обобщенного решения вытекает, что

$$\int\limits_{\Omega} (a_0(x, u, \nabla u) - a_0(x, v, \nabla v))\eta \, dx = 0 \quad \forall \, \eta \in V^1_{\mathbf{p}}(\Omega), \tag{23}$$

то есть $a_0(x, u, \nabla u) = a_0(x, v, \nabla v)$, $x \in \Omega$. □

При некоторых дополнительных ограничениях на функции a, a_0, f удается установить (см. [9]), что всякое обобщенное решение задачи (2)–(5) удовлетворяет уравнению (2) почти всюду строго внутри каждой из областей Ω_i, $i = 1, 2, \ldots, N$. Вопрос о выполнении уравнения (2) во внутренности объединения соседних областей $\overline{\Omega}_i$, $\overline{\Omega}_j$ требует отдельного рассмотрения.

Авторы благодарны Р.З. Даутову и М.Р. Тимербаеву за полезные советы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 15-01-05686, 15-41-02315, 15-41-02569).

Summary

M.M. Karchevsky, R.R. Shagidullin. On the Transmission Problem for Second-Order Quasilinear Elliptic Equations in Divergence Form.

A statement of the transmission problem for quasilinear elliptic equations in divergence form in bounded composed domains in terms of the strengthened Sobolev spaces is proposed. Some generalized sufficient solvability conditions for the Dirichlet boundary value problem are obtained. A condition for which the “flow” is uniquely determined by the solution of the problem is derived. It is noted that the results of this study can be applied for investigations of nonlinear seepage theory problems in composed domains.

Keywords: boundary value problem, transmission problem, generalized solvability conditions.

Литература

1. *Борсук М.В.* Априорные оценки разрешимость квазилинейных эллиптических уравнений 2-го порядка в составной области с нелинейным краевым условием и условием сопряжения // Труды Матем. ин-та АН СССР. – 1968. – Т. 103. – С. 15–50.

2. *Carstensen C., Funken S.A.* Coupling of nonconforming finite elements and boundary elements I: A priori estimates // Computing. – 1999. – V. 62, No 3. – P. 229–241.

3. *Carstensen C., Funken S.A.* Coupling of nonconforming finite elements and boundary elements II: A posteriori estimates and adaptive mesh-refinement // Computing. – 1999. – V. 62, No 3. – P. 243–259.

4. *Gatica G.N., Meddahi S.* A dual-dual mixed formulation for nonlinear exterior transmission problems // Math. Comp. – 2001. – V. 70, No 236. – P. 1461–1480.

5. *Gimperlein H., Maischak M., Schrohe E., Stephan E.P.* Adaptive FE–BE coupling for strongly nonlinear transmission problems with Coulomb friction // Numer. Math. – 2011. – V. 117, No 2. – P. 307–332.

6. *Дьяконов Е.Г.* Усиленные пространства Соболева и некоторые новые типы эллиптических краевых задач // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33, № 4. – С. 532–539.

7. *Тимербаев М.Р.* Пространства с нормой графика и усиленные пространства Соболева. I // Изв. вузов. Матем. – 2003. – № 5. – С. 55–65.

8. *Тимербаев М.Р.* Пространства с нормой графика и усиленные пространства Соболева. II // Изв. вузов. Матем. – 2003. – № 9. – С. 46–53.

9. *Яковлев Г.Н.* Свойства решений одного класса квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка в дивергентной форме// Труды Матем. ин-та АН СССР. – 1974. – Т. 131. – С. 232–242.

10. *Ляшко А.Д., Карчевский М.М.* О решении некоторых нелинейных задач теории фильтрации // Изв. вузов. Матем. – 1975. – № 6. – С. 73–81.

11. *Вайнберг М.М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов. – М.: Наука, 1972. – 416 с.

12. *Nečas J.* Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations. – Berlin; Heidelberg: Springer, 2012. – 388 p.

13. *Каторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.

Поступила в редакцию
16.01.15

Карчевский Михаил Миронович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *Mikhail.Karchevsky@kpfu.ru*

Шагидуллин Ростем Рифгатович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *Rostem.Shagidullin@kpfu.ru*