Известия вузов. Математика
2018, №12, с. 60–69

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Р.Ч. КУЛАЕВ, А.К. ПОГРЕБКОВ, А.Б. ШАБАТ

СИСТЕМА ДАРБУ КАК ТРЕХМЕРНЫЙ АНАЛОГ УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ

Аннотация. В работе обсуждаются вопросы о связях современной теории интегрируемости и соответствующих переопределенных линейных систем с работами геометров конца XIX-го столетия. Одним из этих вопросов является обобщение теории преобразований Дарбу–Лапласа для уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными на случай трехмерных линейных гиперболических уравнений третьего порядка. В данной статье построены примеры таких преобразований и рассмотрены их приложения к задаче об ортогональных криволинейных системах координат в $\mathbb{R}^3$.

Ключевые слова: система Дарбу, интегрируемая система, задача Гурса, гиперболическое уравнение третьего порядка.

УДК: 517.958

Введение

В работе изучается вопрос об обобщении известного уравнения Лиувилля на случай трех независимых переменных. В качестве отправной точки служит система шести дифференциальных уравнений:

$$\partial_j \Gamma_{ki} = \Gamma_{ki}\Gamma_{ij} + \Gamma_{kj}\Gamma_{ji} - \Gamma_{ki}\Gamma_{kj}, \quad i \neq j \neq k, \quad 1 \leq i, j, k \leq 3, \tag{1}$$

относительно функций $\Gamma_{ij}(x, y, z)$, где $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}$, $\partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}$. Система (1) (система Дарбу) возникает в дифференциальной геометрии в связи с задачей описания ортогональных криволинейных систем координат [1], [2]: она эквивалентна условию совместности линейной системы трех уравнений второго порядка [1]:

$$\partial_i \partial_j \varphi = (\Gamma_{ij}\partial_i + \Gamma_{ji}\partial_j)\,\varphi, \quad 1 \leq i < j \leq 3. \tag{2}$$

В качестве коэффициентов Γ_{ij} и Γ_{ji} в приведенных выше уравнениях использованы упрощенные обозначения для символов Кристоффеля Γ^j_{ki} при $j = k$ соответствующей диагональной метрики ([2], § 3.3.4). Современный интерес к этой классической проблеме вызван ее глубокой связью с методом обратной задачи рассеяния в теории интегрируемых систем [1], [3], [4].

Одной из целей данной работы является построение класса точных решений системы Дарбу. Для этого привлекаем динамическую систему двух линейных матричных уравнений

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \partial_1 \\ \partial_2 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_3 & 0 \end{pmatrix} \psi = \begin{pmatrix} u_{31} & 0 & 0 \\ 0 & u_{12} & 0 \\ 0 & 0 & u_{23} \end{pmatrix} \psi, \quad \begin{pmatrix} 0 & \partial_1 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \psi = \begin{pmatrix} u_{21} & 0 & 0 \\ 0 & u_{32} & 0 \\ 0 & 0 & u_{13} \end{pmatrix} \psi \tag{3}$$

Поступила 21.11.2017

на функцию $\psi = (\psi^1, \psi^2, \psi^3)^\top$ и, вытекающую из нее как условие совместности, систему шести нелинейных уравнений

$$\partial_i u_{jk} = u_{ji} u_{ik}, \quad i \neq j \neq k, \tag{4}$$

на коэффициенты u_{ij} (ср. [5], chap. XIV, § 188 или [4], [6]). Показываем, что существуют функции Φ_i, $i = 1, 2, 3$, которые явно выражаются через решения систем (3), (4), такие, что решения системы Дарбу представляются в виде

$$\Gamma_{ij} = \partial_j \ln \Phi_i, \quad i \neq j.$$

1. Трехмерная задача Гурса–Дарбу

Пусть

$$\mathbb{R}^3_+ = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0\right\},$$
$$S_1 = \mathbb{R}^3_+ \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}, \quad S_2 = \mathbb{R}^3_+ \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\},$$
$$S_3 = \mathbb{R}^3_+ \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\},$$
$$O_i = S_j \cap S_k, \quad i \neq j \neq k, \quad 1 \leq i, j, k \leq 3.$$

Рассмотрим систему трех линейных уравнений относительно функции $\varphi(x, y, z)$:

$$\partial_i \partial_j \varphi = (\Gamma_{ij} \partial_i + \Gamma_{ji} \partial_j)\, \varphi, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3_+, \quad 1 \leq i < j \leq 3. \tag{5}$$

Нас интересует вопрос об условиях однозначной разрешимости данной системы. Изучение этого вопроса, в свою очередь, приводит к задаче Гурса–Дарбу для уравнения третьего порядка с данными на координатных лучах.

Лемма 1 ([1])**.** *Условия совместности трех уравнений* (5) *эквивалентны шести уравнениям* (1) *на коэффициенты* Γ_{ij}.

Следствие 1. Пусть φ — решение системы (5). Тогда функция φ удовлетворяет уравнению третьего порядка $L\varphi = 0$, где

$$L = \partial_1 \partial_2 \partial_3 - (\widehat{\Gamma}_{12} + \widehat{\Gamma}_{13})\partial_1 - (\widehat{\Gamma}_{23} + \widehat{\Gamma}_{21})\partial_2 - (\widehat{\Gamma}_{31} + \widehat{\Gamma}_{32})\partial_3, \quad \widehat{\Gamma}_{ij} = \Gamma_{ik}\Gamma_{kj}. \tag{6}$$

Следствие 2. Пусть $\varphi(x, y, z)$ — решение системы (5). Тогда функции

$$\begin{aligned} F^1 &= \varphi_{yz} - \Gamma_{23}\varphi_y - \Gamma_{32}\varphi_z, \\ F^2 &= \varphi_{xz} - \Gamma_{13}\varphi_x - \Gamma_{31}\varphi_z, \\ F^3 &= \varphi_{xy} - \Gamma_{12}\varphi_x - \Gamma_{21}\varphi_y \end{aligned} \tag{7}$$

удовлетворяют системе уравнений первого порядка с $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_+$

$$F^1_x = -\Gamma_{23}F^3 - \Gamma_{32}F^2, \quad F^2_y = -\Gamma_{13}F^3 - \Gamma_{31}F^1, \quad F^3_z = -\Gamma_{12}F^2 - \Gamma_{21}F^1. \tag{8}$$

Далее усилим утверждение следствия 2 и покажем, что заданный формулой (6) дифференциальный оператор третьего порядка L, при условии, что Γ_{ij} удовлетворяют (1), однозначно определяет тройку дифференциальных операторов второго порядка

$$\widehat{F}^1 = \partial_2\partial_3 - A_1\partial_2 - B_1\partial_3, \quad \widehat{F}^2 = \partial_3\partial_1 - A_2\partial_1 - B_2\partial_3, \quad \widehat{F}^3 = \partial_1\partial_2 - A_3\partial_1 - B_3\partial_2$$

такую, что L можно представить одной из следующих трех форм:

$$L = \begin{cases} \partial_1 \widehat{F}^1 + \Gamma_{23}\widehat{F}^3 + \Gamma_{32}\widehat{F}^2, \\ \partial_2 \widehat{F}^2 + \Gamma_{13}\widehat{F}^3 + \Gamma_{31}\widehat{F}^1, \\ \partial_3 \widehat{F}^3 + \Gamma_{12}\widehat{F}^2 + \Gamma_{21}\widehat{F}^1. \end{cases} \tag{9}$$

Действительно, подставляя выражения для операторов $\widehat{F_i}$ в первую из формул (9) и приравнивая соответствующие коэффициенты, получим $A_1 = \Gamma_{23}$, $B_1 = \Gamma_{32}$. Аналогично, используя два других представления оператора L из (6), имеем $A_2 = \Gamma_{13}$, $B_2 = \Gamma_{31}$ и $A_3 = \Gamma_{23}$, $B_3 = \Gamma_{32}$. Отсюда следует $F^i(x,y,z) = \widehat{F}^i(\varphi)$.

Лемма 2. *Пусть функции* $F^i \in C^1\left(\mathbb{R}^3_+\right)$, $i = 1,2,3$, *удовлетворяют системе уравнений* (8) *и граничным условиям*

$$F^i(x,y,z) \equiv 0, \quad (x,y,z) \in S_i. \tag{10}$$

Тогда функции F^i *равны тождественно нулю на* S_j, $j \neq i$.

Доказательство. Ввиду аналогии рассуждений достаточно показать, что из (10) следует $F^1 = F^2 = 0$ на S_3. Рассмотрим систему (8) на S_3. В силу (10) имеем

$$F^2_y = -\Gamma_{31}F^1, \quad F^1_x = -\Gamma_{32}F^2, \quad (x,y,z) \in S_3. \tag{11}$$

Поскольку $F^1(0,y,0) = F^2(x,0,0) = 0$, то из (11) вытекает, что $F^1(x,0,0)$, $F^2(0,y,0)$ суть константы, а стало быть, $F^1(x,0,0) = F^2(0,y,0) = 0$.

Таким образом, сужения функций F^1 и F^2 на S_3 являются решениями однородных задач Гурса на S_3:

$$\begin{cases} F^1_{xy} = \Gamma_{31}\Gamma_{32}F^1 + (\log\Gamma_{32})_y F^1_x, \\ F^1(x,0,0) = F^1(0,y,0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} F^2_{yx} = \Gamma_{31}\Gamma_{32}F^2 + (\log\Gamma_{31})_x F^2_y, \\ F^2(x,0,0) = F^2(0,y,0) = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $F^1 = F^2 = F^3 = 0$ на S_3. □

Лемма 3 ([7], § 9)**.** *Задача* (8), (10) *однозначно разрешима.*

Резюмируем полученные результаты в виде следующей теоремы о параметризации пространства решений системы (5) значениями на ребрах O_i октанта $\mathbb{R}^3_+$.

Теорема 1. *Пусть функции* Γ_{ij} *удовлетворяют условиям* (1). *Тогда для любых функций* $\Phi_i \in C^1(O_i)$, $i = 1,2,3$, *существует единственное решение* φ *системы* (5), *удовлетворяющее условиям*

$$\varphi = \Phi_i, \quad (x,y,z) \in O_i. \tag{12}$$

Действительно, данные на ребрах O_i, $i = 1,2,3$, позволяют решить три задачи Гурса для каждого из уравнений системы (5) на гранях S_i, поэтому однозначно определяют следы функции φ на гранях S_i. Теперь утверждение теоремы 1 следует из леммы 3.

Следствие 3. Пусть L — дифференциальный оператор третьего порядка, определяемый равенством (6), коэффициенты которого удовлетворяют равенствам (1). Тогда существует решение уравнения $L\varphi = 0$, удовлетворяющее на ребрах O_i условиям (12).

2. Обобщенные уравнения Дарбу

Рассмотрим систему матричных уравнений (3). Для дальнейших выкладок будет удобно рассматривать ее в координатной записи:

$$\begin{cases} \psi^1_z = u_{13}\psi^3, \quad \psi^2_x = u_{21}\psi^1, \quad \psi^3_y = u_{32}\psi^2, \\ \psi^1_y = u_{12}\psi^2, \quad \psi^2_z = u_{23}\psi^3, \quad \psi^3_x = u_{31}\psi^1. \end{cases} \tag{13}$$

Известно (например, [6], [1]), что совместность системы (13) эквивалентна системе шести уравнений первого порядка

$$\partial_i u_{jk} = \widehat{u}_{jk}, \quad i \neq j \neq k, \quad \widehat{u}_{jk} \stackrel{\mathrm{def}}{=} u_{ji}u_{ik}. \tag{14}$$

Лемма 4. *Пусть выполнены условия* (14) *и* $\psi = (\psi^1, \psi^2, \psi^3)$ — *решение системы* (13). *Тогда смешанные производные второго порядка решения* ψ *определяются следующими уравнениями*:

$$\begin{cases}\psi^1_{xy} = u_{12}u_{21}\psi^1 + u_{12,x}\psi^2,\\ \psi^2_{xy} = u_{21,y}\psi^1 + u_{12}u_{21}\psi^2,\\ \psi^3_{xy} = \widehat{u}_{31}\psi^1 + \widehat{u}_{32}\psi^2,\end{cases} \quad \begin{cases}\psi^1_{yz} = \widehat{u}_{12}\psi^2 + \widehat{u}_{13}\psi^3,\\ \psi^2_{yz} = u_{23}u_{32}\psi^2 + u_{23,y}\psi^3,\\ \psi^3_{yz} = u_{32,z}\psi^2 + u_{32}u_{23}\psi^3,\end{cases} \quad \begin{cases}\psi^1_{xz} = u_{13}u_{31}\psi^1 + u_{13,x}\psi^3,\\ \psi^2_{xz} = \widehat{u}_{21}\psi^1 + \widehat{u}_{23}\psi^3,\\ \psi^3_{xz} = u_{31,z}\psi^1 + u_{13}u_{31}\psi^3.\end{cases} \tag{15}$$

Доказательство проводится прямым дифференцированием уравнений системы (13). Например, продифференцируем два уравнения системы из первого столбца (первое по y, а второе по z) и приравняем правые части:

$$u_{13,y}\psi^3 + u_{13}\psi^3_y = u_{12,z}\psi^2 + u_{12}\psi^2_z.$$

Тогда, привлекая оставшиеся уравнения, получим

$$u_{13,y}\psi^3 + u_{13}u_{32}\psi^2 = u_{12,z}\psi^2 + u_{12}u_{23}\psi^3.$$

Отсюда имеем $u_{13,y} = u_{12}u_{23} = \widehat{u}_{13}$ и $u_{12,z} = u_{13}u_{32} = \widehat{u}_{12}$.

Теперь, используя уже доказанные соотношения (14), можно установить (15). Так, например, продифференцируем первое уравнение из системы (13) по y и задействуем (13), (14):

$$\psi^1_{zy} = u_{13,y}\psi^3 + u_{13}u_{32}\psi^2 = \widehat{u}_{13}\psi^3 + \widehat{u}_{12}\psi^2.$$

Дифференцируя это же уравнение по x, получаем $\psi^1_{xz} = u_{13,x}\psi^3 + u_{13}u_{31}\psi^1$. Далее дифференцируя равенство $\psi^1_y = u_{12}\psi^2$ по x, получим оставшуюся производную функции ψ^1:

$$\psi^1_{xy} = u_{12,x}\psi^2 + u_{12}u_{21}\psi^1.$$

Соотношения для функций ψ^2, ψ^3 доказываются аналогично. □

Отметим, что исходную систему уравнений (13) следует трактовать как цепочку преобразований трех систем уравнений (15) друг в друга.

Всюду далее предполагается, что выполнены условия совместности системы (14).

Рассмотрим систему трех уравнений для смешанных производных второго порядка функции ψ^1 из соотношений (15)

$$\psi^1_{xy} = u_{12}u_{21}\psi^1 + u_{12,x}\psi^2, \quad \psi^1_{yz} = \widehat{u}_{12}\psi^2 + \widehat{u}_{13}\psi^3, \quad \psi^1_{xz} = u_{13}u_{31}\psi^1 + u_{13,x}\psi^3. \tag{16}$$

Покажем, что существует линейное преобразование, переводящее систему (16) в (5). Для этого, используя (13), исключим из (16) функции ψ^2, ψ^3:

$$\psi^1_{xy} - \frac{u_{12,x}}{u_{12}}\psi^1_y - u_{12}u_{21}\psi^1 = 0, \quad \psi^1_{yz} - \frac{u_{13,x}}{u_{13}}\psi^1_z - \frac{u_{31,z}}{u_{31}}\psi^1_y = 0, \quad \psi^1_{xz} - \frac{u_{13,x}}{u_{13}}\psi^1_z - u_{13}u_{31}\psi^1 = 0. \tag{17}$$

Пусть $\psi^1 = f\varphi$, тогда

$$\begin{aligned}&\varphi_{xy} + \frac{f_y}{f}\varphi_x + \left(\frac{f_x}{f} - \frac{u_{12,x}}{u_{12}}\right)\varphi_y + \left(\frac{f_{xy}}{f} - \frac{u_{13,x}}{u_{13}}\frac{f_y}{f} - u_{12}u_{21}\right)\varphi = 0,\\ &\varphi_{yz} + \left(\frac{f_y}{f} - \frac{u_{13,y}}{u_{13}}\right)\varphi_z + \left(\frac{f_z}{f} - \frac{u_{12,z}}{u_{12}}\right)\varphi_y + \left(\frac{f_{yz}}{f} - \frac{u_{13,y}}{u_{13}}\frac{f_z}{f} - \frac{u_{12,z}}{u_{12}}\frac{f_y}{f}\right)\varphi = 0,\\ &\varphi_{xz} + \frac{f_z}{f}\varphi_x + \left(\frac{f_x}{f} - \frac{u_{13,x}}{u_{13}}\right)\varphi_z + \left(\frac{f_{xz}}{f} - \frac{u_{13,x}}{u_{13}}\frac{f_z}{f} - u_{13}u_{31}\right)\varphi = 0.\end{aligned} \tag{18}$$

Для того чтобы система (18) не содержала членов с φ, необходимо и достаточно, чтобы функция f удовлетворяла системе

$$f_{xy}-\frac{u_{12,x}}{u_{12}}f_y-u_{12}u_{21}f=0,\quad f_{yz}-\frac{u_{13,x}}{u_{13}}f_z-\frac{u_{31,z}}{u_{31}}f=0,\quad f_{xz}-\frac{u_{13,x}}{u_{13}}f_z-u_{13}u_{31}f=0,\tag{19}$$

т. е. той же системе, что и ψ^1. Поскольку (17) разрешима, то такая функция f существует. Теперь отождествляя

$$\begin{gathered}\Gamma_{12}=-(\ln f)_y,\quad \Gamma_{21}=\left(\ln\frac{u_{12}}{f}\right)_x,\\ \Gamma_{23}=\left(\ln\frac{u_{12}}{f}\right)_z,\quad \Gamma_{32}=\left(\ln\frac{u_{13}}{f}\right)_y,\\ \Gamma_{13}=-(\ln f)_z,\quad \Gamma_{31}=-\left(\ln\frac{u_{13}}{f}\right)_x,\end{gathered}\tag{20}$$

приходим к системе вида (5). Остается лишь убедиться, что для полученных коэффициентов Γ_{ij} выполнены соотношения Дарбу (1). Так, например, для равенства $\partial_2\Gamma_{31}=\Gamma_{31}\Gamma_{12}+\Gamma_{32}\Gamma_{21}-\Gamma_{31}\Gamma_{32}$, используя (14), (20) и уравнение на f_{xy}, получаем

$$\partial_2\Gamma_{31}=-\left(\frac{u_{13,y}}{u_{13}}-\frac{f_y}{f}\right)_x=-\left(\frac{\widehat{u}_{12}}{u_{13}}-\frac{f_y}{f}\right)_x=-\frac{u_{12,x}u_{23}}{u_{13}}+\frac{u_{13,x}u_{12}u_{23}}{u_{13}^2}+\frac{f_xf_y}{f^2}-\frac{u_{12,x}}{u_{12}}\frac{f_y}{f}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}&\Gamma_{31}\Gamma_{12}+\Gamma_{32}\Gamma_{21}-\Gamma_{31}\Gamma_{32}=\\ &=\left(\frac{f_x}{f}-\frac{u_{13,x}}{u_{13}}\right)\frac{f_y}{f}+\left(\frac{f_y}{f}+\frac{u_{12}u_{23}}{u_{13}}\right)\left(\frac{f_x}{f}-\frac{u_{12,x}}{u_{12}}\right)-\left(\frac{f_x}{f}-\frac{u_{13,x}}{u_{13}}\right)\left(\frac{f_y}{f}+\frac{u_{12}u_{23}}{u_{13}}\right)=\\ &\qquad=-\frac{u_{12,x}u_{23}}{u_{13}}+\frac{u_{13,x}u_{12}u_{23}}{u_{13}^2}+\frac{f_xf_y}{f^2}-\frac{u_{12,x}}{u_{12}}\frac{f_y}{f}.\end{aligned}$$

Аналогичные рассуждения можно провести для двух других компонент ψ^2, ψ^3.

Рассмотрим теперь систему Дарбу (1). Покажем, что эту систему можно переписать в виде системы трех уравнений второго порядка. Для этого введем три новые функции v^1, v^2, v^3 переменных x,y,z так, чтобы выполнялись равенства

$$\Gamma_{ij}=\frac{\partial_jv^i}{v^j-v^i},\quad i\neq j.\tag{21}$$

Легко проверяется [1], что совместность системы (21) эквивалентна условиям (1). Более того, имеет место

Утверждение 1. *Система уравнений Дарбу* (1) *относительно* Γ_{ij} *эквивалентна следующей системе уравнений относительно функций* $u=v^1,\ v=v^2,\ w=v^3$*:*

$$\begin{aligned}w_{xy}&=w_x\frac{u_y-w_y}{u-w}+w_y\frac{v_x-w_x}{v-w}+\frac{w_yv_x-w_xu_y}{u-v},\\ u_{yz}&=u_y\frac{u_z-v_z}{u-v}+u_z\frac{u_y-w_y}{u-w}+\frac{u_zw_y-u_yv_z}{v-w},\\ v_{zx}&=v_z\frac{v_x-w_x}{v-w}+v_x\frac{u_z-v_z}{u-v}+\frac{v_xu_z-v_zw_x}{w-u}.\end{aligned}\tag{22}$$

Доказательство. Из (1) вытекает

$$\partial_i\Gamma_{kj}=\partial_j\Gamma_{ki},\quad i\neq j\neq k,\tag{23}$$

и поэтому [1]

$$-\partial_j\Gamma_{ki}+\Gamma_{ki}\Gamma_{ij}+\Gamma_{kj}\Gamma_{ji}-\Gamma_{ki}\Gamma_{kj}=\frac{v^j-v^k}{v^j-v^i}\left[\partial_i\left(\frac{\partial_j v^k}{v^j-v^k}\right)-\partial_j\left(\frac{\partial_i v^k}{v^i-v^k}\right)\right]. \qquad (24)$$

Далее непосредственно проверяется, что выражение в квадратной скобке в правой части (24) при подходящем выборе индексов сводится к одному из уравнений системы (22). Так, например,

$$\begin{aligned}
\partial_i\left(\frac{\partial_j v^k}{v^j-v^k}\right)-\partial_j\left(\frac{\partial_i v^k}{v^i-v^k}\right)&=\partial_x\left(\frac{w_y}{v-w}\right)-\partial_y\left(\frac{w_x}{u-w}\right)=\\
&=\frac{w_{xy}}{v-w}-\frac{w_y(v_x-w_x)}{(v-w)^2}-\frac{w_{xy}}{u-w}+\frac{w_x(u_y-w_y)}{(u-w)^2}=\\
&=w_{xy}\left(\frac{1}{v-w}-\frac{1}{u-w}\right)-\frac{w_y(v_x-w_x)}{(v-w)^2}+\frac{w_x(u_y-w_y)}{(u-w)^2}=\\
&=\frac{u-v}{(v-w)(u-w)}\left(w_{xy}-w_y\frac{(u-w)(v_x-w_x)}{(v-w)(u-v)}+w_x\frac{(v-w)(u_y-w_y)}{(u-w)(u-v)}\right)=\\
&=\frac{u-v}{(v-w)(u-w)}\Bigg(w_{xy}-w_y(v_x-w_x)\left[\frac{1}{v-w}+\frac{1}{u-v}\right]-\\
&\qquad -w_x(u_y-w_y)\left[\frac{1}{u-w}-\frac{1}{u-v}\right]\Bigg)=\\
&=\frac{u-v}{(v-w)(u-w)}\left(w_{xy}-w_x\frac{u_y-w_y}{u-w}-w_y\frac{v_x-w_x}{v-w}-\frac{w_yv_x-w_xu_y}{u-v}\right). \quad \square
\end{aligned}$$

Уравнения Дарбу в форме (22) допускают полную группу дробно-линейных преобразований вида

$$\widehat{v}^j=\frac{\alpha v^j+\beta}{\gamma v^j+\delta},\quad j=1,2,3,\quad \alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$$

и замены независимых переменных $x\leftrightarrow X(x)$, $y\leftrightarrow Y(y)$, $z\leftrightarrow Z(z)$. Доказательство инвариантности сводится к частному случаю $\widehat{v}^j=1/v^j$.

3. Плоские волны

Рассмотрим задачу о *плоских волнах* для системы (14), т. е. о решениях системы в виде функций от одной независимой переменной. Результаты раздела 1 позволяют рассмотреть замены независимых переменных ($t_1=x$, $t_2=y$, $t_3=z$):

$$\widetilde{t}_i=\tau_i(t_i) \qquad (25)$$

и соответствующие замены зависимых переменных в (13)

$$\widetilde{\psi}(t)=\psi(\widetilde{t}). \qquad (26)$$

Учитывая, что $\widetilde{\psi}_i(t)=\psi_i(\widetilde{t})\tau_i'(t_i)$, находим, что уравнения (13) инвариантны при замене переменных, т. е. уравнения на $\psi(t)$ и $u_{ij}(t)$ переходят в такие же уравнения на $\widetilde{\psi}(t)$ и $\widetilde{u}_{ij}(t)$. Действительно, записывая их в виде

$$\psi^i_j=u_{ij}\psi^j,\quad i\neq j,\quad i,j=1,2,3, \qquad (27)$$

при условии, что ψ меняется согласно (26), получаем, что u_{ij} меняется по закону

$$\widetilde{u}_{ij}(t)=u_{ij}(\widetilde{t})\tau_j'. \qquad (28)$$

При этом соотношения (20) дают $\widetilde{f}(t) = f(\widetilde{t})$.

С учетом инвариантности относительно замен независимых переменных x, y, z задача о плоских волнах сводится к задаче о решениях уравнений (14) в виде функций от одной независимой переменной $t = x + y + z$. Поэтому можем полагать $\partial_j = \frac{d}{dt} = {}'$ и переписать систему (13) в виде

$$u'_{ij} = u_{ik}u_{kj}, \quad i \neq j \neq k. \tag{29}$$

В симметричном случае $u_{jk} = u_{kj}$ эти уравнения переходят в уравнения, определяющие эллиптические функции Якоби,

$$u'_1 = u_2u_3, \quad u'_2 = u_1u_3,, \quad u'_3 = u_1u_2,$$

а в общем случае функции u_{jk} и u_{kj} совпадают, как будет показано ниже, с "собственными фунциями" спектральной задачи для уравнения Шредингера

$$\psi'' = U(t,\lambda)\psi, \quad U(t,\lambda) = 2\wp(t) + \lambda, \tag{30}$$

где $\wp(t) = \frac{1}{t^2} + \sum\limits_{\omega}\left(\frac{1}{(t-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса.

Введем обозначения

$$g_j = u_{ik}u_{ki}. \tag{31}$$

Тогда с использованием системы (29) легко показать, что

$$g'_1 = g'_2 = g'_3 = u_{12}u_{23}u_{31} + u_{13}u_{32}u_{21}, \tag{32}$$

$$g''_j = 2(g_1g_2 + g_2g_3 + g_3g_1).$$

Умножая обе части последнего равенства на g'_j и используя (32), после интегрирования приходим к эллиптическому интегралу

$$(g'_j)^2 = 4g_1g_2g_3 + \mathrm{const}, \quad g_j(t) = \wp(t) + c_j, \quad c_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1,2,3. \tag{33}$$

Выразим теперь исходные функции u_{ij} через $\wp$. Поскольку

$$\frac{u'_{ij}}{u_{ij}} = \frac{u_{ik}u_{kj}}{u_{ij}} = \frac{u_{ik}u_{ki}u_{jk}u_{kj}}{u_{ij}u_{jk}u_{ki}} = \frac{g_ig_j}{u_{ij}u_{jk}u_{ki}}, \tag{34}$$

то, обозначив $u_{12}u_{23}u_{31} = h_1$, $u_{13}u_{32}u_{21} = h_2$, для u_{12} и u_{21} получим, например, равенства

$$\frac{u'_{12}}{u_{12}} = \frac{g_1g_2}{h_1}, \quad \frac{u'_{21}}{u_{21}} = \frac{g_1g_2}{h_2},$$

которые остается только проинтегрировать. При этом ввиду (32) и (31) функции h_1, h_2 определяются как решения системы уравнений

$$h_1 + h_2 = \wp', \quad h_1h_2 = g_1g_2g_3. \tag{35}$$

Для доказательства того, что функции u_{ij} и u_{ji} являются "собственными фунциями" уравнения Шредингера (30), достаточно сравнить их логарифмические производные (34) с логарифмическими производными тех "собственных функций", которые получаются из уравнения третьего порядка (например, [8]) $\Phi''' = 2U'\Phi + 4U\Phi'$ ([9]). В рассматриваемом случае $U(t,\lambda) = 2\wp - \lambda$ непосредственно проверяется, что решением уравнения третьего порядка является функция $\Phi(t,\lambda) = \wp(t) - \lambda$. Поэтому, выбрав $\lambda = -c_j$, с учетом (33) получим $g_j = u_{ik}u_{ki} = \Phi$.

Замечание 1. Из (29) и (33) вытекает

$$u''_{ij} = u_{ij}(u_{jk}u_{kj} + u_{ik}u_{ki}) = (g_i + g_j)u_{ij} = (2\wp + c_i + c_j)u_{ij}.$$

Следовательно, функции u_{ij} и u_{ji} являются решениями уравнения Шредингера (30) при $\lambda = c_i + c_j$. Что касается линейной зависимости функций u_{ij} и u_{ji}, то можно заметить, что из (32) и (35) следует

$$(h_1 + h_2)^2 = 4h_1h_2 + \text{const} \Leftrightarrow (h_1 - h_2)^2 = \text{const}\,.$$

С другой стороны, с помощью (29) получаем

$$\langle u_{ji}, u_{ij}\rangle = u'_{ij}u_{ji} - u_{ij}u'_{ji} = u_{ik}u_{kj}u_{ji} - u_{ij}u_{jk}u_{ki} = h_1 - h_2.$$

Замечание 2. Легко проверить, что

$$\left(u'_{ij}/u_{ij}\right)' + \left(u'_{ij}/u_{ij}\right)^2 = g_i + g_j.$$

Рассмотрим теперь задачу о плоских волнах для системы Дарбу. Инвариантность относительно замен независимых переменных и утверждение 1 позволяют свести задачу о плоских волнах для системы Дарбу к задаче о решениях уравнений (22) в виде функций от одной независимой переменной $t = x + y + z$. Взяв первое из уравнений системы (22) и вводя обозначения $a = u - v$, $b = v - w$, $c = w - u$, имеем

$$w''/w' = c'/c + b'/b - a'/a \Leftrightarrow \left(\ln w'\right)' = \left(\ln \frac{bc}{a}\right)'.$$

Проводя аналогичные преобразования с другими уравнениями системы (22), получим

$$w' = \alpha_1 \frac{bc}{a}, \quad u' = \alpha_2 \frac{ac}{b}, \quad v' = \alpha_3 \frac{ab}{c}, \tag{36}$$

где α_j—константы интегрирования. Вычитая попарно полученные равенства (36), приходим к динамической системе

$$\frac{a'}{a^2} = \frac{1}{abc}(\alpha_3c^2 - \alpha_1b^2), \quad \frac{b'}{b^2} = \frac{1}{abc}(\alpha_2a^2 - \alpha_3c^2), \quad \frac{c'}{c^2} = \frac{1}{abc}(\alpha_1b^2 - \alpha_2a^2).$$

Поскольку $a + b + c = 0$, то полученная система преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
(1/a)' &= \alpha_3\left(1/a + 1/b\right) - \alpha_1\left(1/a + 1/c\right),\\
(1/b)' &= \alpha_2\left(1/b + 1/c\right) - \alpha_3\left(1/b + 1/a\right),\\
(1/c)' &= \alpha_1\left(1/c + 1/a\right) - \alpha_2\left(1/c + 1/b\right),
\end{aligned}$$

а дополнительный первый интеграл $1/a + 1/b + 1/c = \gamma$ позволяет переписать последнюю в виде линейной системы для обратных величин

$$(1/a)' = \alpha_1/b - \alpha_3c + (\alpha_1 - \alpha_3)\gamma, \quad (1/b)' = \alpha_3/c - \alpha_2/a + (\alpha_3 - \alpha_2)\gamma,$$
$$(1/c)' = \alpha_2/a - \alpha_1/b + (\alpha_2 - \alpha_1)\gamma$$

с постоянной матрицей, имеющей своими собственными значениями числа

$$\lambda = 0,\ \pm i\sqrt{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3}.$$

Заключение

Открытым остается вопрос о том, как устроено общее решение системы Дарбу и от функций скольких независимых переменных (одной или двух) оно зависит. Надеемся, что исследование краевой задачи Римана–Гильберта для соответствующей спектральной задачи Захарова–Шабата третьего порядка позволит в дальнейшем дать ответ на этот вопрос. Другой подход к этому вопросу развивается в работе [10], где установлена связь уравнений Дарбу с дискретным уравнением Хироты.

Литература

[1] Царев С.П. *Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **54** (5), 1048–1068 (1990).

[2] Rogers C., Schief W.K. *Bäcklund and Darboux transformations*: *geometry and modern application in soliton theory* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002).

[3] Дубровин Б.А., Новиков С.П. *Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток*, Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория. УМН **44**, 29–98 (1989).

[4] Zakharov V.E. *Description of the n-orthogonal curvilinear coordinate systems and hamiltonian integrable systems of hydrodynamic type*. Part 1. *Integration of the Lame equations*, Duke Math. J. **94** (1), 103–139 (1998).

[5] Eisenhart L.P. *A treatise on the differential geometry of curves and surfaces* (Kessinger Publ., LLC, 2010).

[6] Кричевер И.М. *Алгебро-геометрические n-ортогональные криволинейные системы координат и решения уравнений ассоциативности*, Функц. анализ и его прилож. **31** (1), 32–50 (1997).

[7] Жегалов В.И., Миронов А.И. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными* (Казань, 2001).

[8] Дубровин Б.А., Матвеев В.Б., Новиков С.П. *Нелинейные уравнения типа Кортевега–де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия*, УМН **31** (1), 55–136 (1976).

[9] Drach U. *Sur l'integration par quadratures de l'equation differentielle* $y'' = [\varphi(x) + h]y$, Compt. Rend. Acad. Sci. **168**, 337–340 (1919).

[10] Pogrebkov A.K. *Symmetries of the Hirota difference equation*, SIGMA **13** (2017), 053, 14 pages; https://doi.org/10.3842/SIGMA.2017.053

Руслан Черменович Кулаев

Северо-Осетинский государственный университет им. К.Л. Хетагурова,
ул. Ватутина, д. 44–46, г. Владикавказ, 362025, Россия;
Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук,
ул. К. Маркса, д. 22, г.Владикавказ, 362027, Россия,

`e-mail:` kulaevrch@mail.ru

Андрей Константинович Погребков

Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук,
ул. Губкина, д. 8, г. Москва, 119991, Россия,

`e-mail:` pogreb@mi.ras.ru

Алексей Борисович Шабат

Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук,
пр. Академика Семенова, д. 1а, г. Черноголовка, Московская область, 142432, Россия,

`e-mail:` shabatab@mail.ru

R.Ch. Kulaev, A.K. Pogrebkov, A.B. Shabat

Darboux system as three-dimensional analog of Liouville equation

Abstract. We discuss the problems of the connections of the modern theory of integrability and the corresponding overdetermined linear systems with works of geometers of the late nineteenth century. One of these questions is the generalization of the theory of Darboux–Laplace transforms for second-order equations with two independent variables to the case of three-dimensional linear hyperbolic equations of the third order. In this paper we construct examples of such transformations. We consider applications to the problem of orthogonal curvilinear coordinate systems in $\mathbb{R}^3$.

Keywords: Darboux system, integrable systems, Goursat problem, third-order hyperbolic equation.

Ruslan Chermenovich Kulaev

North-Ossetian State University named after K.L. Khetagurov,
44–46 Vatutin str., Vladikavkaz, 362025 Russia;
Southern Mathematical Institute,
Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,
22 Markus str., Vladikavkaz, 362027 Russia,

e-mail: kulaevrch@mail.ru

Andrei Konstantinovich Pogrebkov

V.A. Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences,
8 Gubkin str., Moscow, 119991 Russia,

e-mail: pogreb@mi.ras.ru

Aleksei Borisovich Shabat

L.D. Landau Institute of Theoretial Physics of Russian Academy of Sciences,
1a Academician Semenov Ave., Chernogolovka, Moscow Obl., 142432 Russia,

e-mail: shabatab@mail.ru