Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского,
Казань, 21 апреля 2019 г.
Вариант 4

5 класс

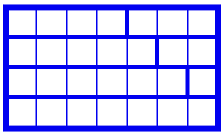
1. Две лестницы имеют одинаковую высоту, но разное число ступеней: у первой — 25 ступеней, у второй — 35 ступеней. У каждой лестницы ступеньки одинаковой высоты, но у первой лестницы каждая ступенька на 10 *см* выше каждой ступеньки второй лестницы. Найдите высоту лестниц.

Ответ: 8,75 *метров*.
Решение. 25 ступенек первой лестницы выше 25 ступенек второй на $25 \cdot 10 = 250$ *см*. Поскольку высота лестниц одна и та же, остальные 10 ступенек второй лестницы должны иметь высоту 250 *см*, и значит, высота каждой ступеньки второй лестницы $250 : 10 = 25$ *см*. Отсюда высота лестниц $35 \cdot 25 = 8{,}75$ *см*.
Критерии. Только ответ — 0 баллов.

2. В записи $4 * 5 * 6 * 7 * 14 * 15 * 16 * 17$ на месте каждой звездочки поставили знак + или – (по своему усмотрению) и подсчитали результат. Какое *наименьшее* натуральное число могло получиться в результате вычисления?

Ответ: 2.
Решение. Искомая сумма состоит из 4-х нечётных чисел 5, 7, 15, 17 и 4-х чётных. Поскольку сумма или разность *двух* нечётных чисел всегда чётна, при любой расстановке знаков у 4-х нечётных слагаемых получится чётная сумма. Таким образом, сумма S всех 8 чисел всегда будет чётной, и значит, не может быть равна 1, поэтому $S \geq 2$. Значение $S = 2$ получается, например, так: $(4 - 5 - 6 + 7) - 14 + 15 - 16 + 17 = 2$.
Критерии. Ответ без объяснений и примера — 0 баллов, только пример — 3 балла.

3. Можно ли разрезать клетчатый прямоугольник 4×7 по клеточкам на 7 прямоугольников *различной* площади? В ответе укажите все возможные значения этих площадей.



Ответ: *можно* (*см. рисунок*).
Решение. В прямоугольнике $4 \times 7 = 28$ клеток. Сумма 7 различных *наименьших* чисел $1 + 2 + 3 + \ldots + 7$ равна 28, поэтому разрезать можно только на прямоугольники с такими площадями.
Критерии. Ответ без объяснений и примера — 0 баллов, только пример — 4 балла.

4. Вася записал трёхзначное число. Петя прибавил к первой справа цифре этого числа 2, ко второй цифре — 3, к третьей — 4, а затем перемножил полученные суммы. У Пети получилось число 195. Какое число могло быть записано Васей? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 921 *или* 903.
Решение. Разложим 195 в произведение простых чисел: $195 = 3 \cdot 5 \cdot 13$. Наибольший сомножитель 13 можно получить только из 9 после операция добавления 4, значит, цифра сотен числа Васи равна 9. Сомножитель 3 можно получить только в двух случаях: $1 + 2$ или $0 + 3$. И значит, у Васи было число 921 или 903.
Критерии. За каждый правильный ответ без объяснений — 2 балла. Доказано, что цифра сотен только 9 — ещё 1 балл. Полное объяснение с упущенным вариантом — 5 баллов.

5. У Миши есть 20 гирек с массами 1, 2, 3, … , 20, и он хочет разложить их на несколько кучек разной массы так, чтобы выполнялось условие: чем тяжелее кучка, тем меньше в ней гирь. Сможет ли Миша разложить все гирьки *а*) на 4 кучки? *б*) на 5 кучек?

Ответ: *а*) *сможет*; *б*) *не сможет*.

Решение. *а*) Это можно сделать, например, так. Составим первую кучку из 8 гирек с общей массой $1+2+3+4+6+7+9+10=42$, вторую — из 5 гирек с общей массой $5+11+12+13+14=55$, третью кучку — из 4 гирек общей массой $8+15+16+17=56$, и, наконец, четвёртую — из 3 гирь с общей массой $18+19+20=57$.

б) Предположим, что можно разложить гирьки требуемым образом. Общая масса всех гирек равна $1+2+\ldots+20=210$. Значит, масса самой тяжёлой кучки будет не меньше $210:5=42$. Масса двух самых тяжёлых гирь $19+20<42$, поэтому в тяжёлой кучке не меньше трёх гирек. Тогда в следующей, более лёгкой, кучке не меньше 4 гирек, в следующей — не меньше 5 гирек, и так далее. Тогда общее количество гирек не меньше $3+4+5+6+7>20$, противоречие.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Правильный пример в пункте *а*) — 2 балла. В пункте *б*) отмечено, что масса самой тяжёлой кучки не меньше 42, — 2 балла. Доказано, что в самой тяжёлой кучке не менее трёх гирек, — ещё 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

6 класс

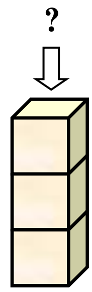
1. В записи $4 * 5 * 6 * 7 * 18 * 19 * 20 * 21$ на месте каждой звездочки поставили знак + или – (по своему усмотрению) и подсчитали результат. Какое *наименьшее* натуральное число могло получиться в результате вычисления?

Ответ: 2.
Решение. Искомая сумма состоит из 4-х нечётных чисел 5, 7, 19, 21 и 4-х чётных. Поскольку сумма или разность *двух* нечётных чисел всегда чётна, при любой расстановке знаков у 4-х нечётных слагаемых получится чётная сумма. Таким образом, сумма S всех 8 чисел всегда будет чётной, и значит, не может быть равна 1, поэтому $S \geq 2$. Значение $S = 2$ получается, например, так: $(4 - 5 - 6 + 7) - 18 + 19 - 20 + 21 = 2$.
Критерии. Ответ без объяснений и примера — 0 баллов, только пример — 3 балла.

2. Однажды мышки подружились с кошками, и каждая мышка послала по открытке каждой кошке, так что все кошки вместе получили 60 открыток. Сколько было кошек и мышек вместе, если известно, что их было не больше 18? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 16 *или* 17.
Решение. Пусть мышек было m, а кошек — k. Каждая мышка послала всем кошкам k открыток, поэтому общее число открыток равно $m \cdot k = 60$, и значит, m и k — делители числа 60, причём $m + k \leq 18$. Выпишем все разложения числа 60 на два множителя: $10 \cdot 6 = 12 \cdot 5 = 15 \cdot 4 = 20 \cdot 3 = 30 \cdot 2 = 60 \cdot 1$, и оставим из них первые два, для которых сумма делителей не более 18. Значит, кошек и мышек вместе было $10 + 6 = 16$ или $12 + 5 = 17$.
Критерии. Приведены (без объяснений) все варианты — 4 балла. Доказано, что других вариантов нет — ещё 3 балла.

3. У Пети есть несколько одинаковых игральных кубиков, у каждого кубика на каждой грани записано натуральное число, сумма чисел на противоположных гранях равна 11. Петя хочет склеить из них башню (см. рисунок) так, чтобы сумма чисел на каждой паре *склеенных* граней равнялась 9. Какой высоты башня у него может получиться? В ответе запишите количество кубиков в самой высокой башне и объясните, почему нельзя склеить более высокую башню.



Ответ: 3 *кубика.*
Решение. Пусть x — число на нижней грани нижнего кубика. Тогда на противоположной (верхней) грани этого кубика будет число $11 - x$. Сумма чисел на склеенных гранях равна 9, поэтому число на нижней грани второго снизу кубика равно $x - 2$. Тогда на противоположной (верхней) грани этого кубика будет число $13 - x$. Рассуждая таким образом, получим следующее распределение чисел на нижних и верхних гранях кубиков, считая от основания башни:

$$(x;\ 11 - x),\ (x - 2,\ 13 - x),\ (x - 4,\ 15 - x),\ (x - 6,\ 17 - x),\ \ldots\ .$$

У кубика всего три пары противоположных граней, поэтому в этой цепочке не может быть более трёх *различных* пар чисел. Если в башне есть четыре кубика, то $x - 6 \geq 1$, и значит, $x \geq 7$. Выпишем цепочки из 4 пар кубиков для всех допустимых значений x:

$$\begin{aligned}
x = 7:&\quad (7;\ 4),\ (5,\ 6),\ (3,\ 8),\ (1,\ 10);\\
x = 8:&\quad (8;\ 3),\ (6,\ 5),\ (4,\ 7),\ (2,\ 9);\\
x = 9:&\quad (9;\ 2),\ (7,\ 4),\ (5,\ 6),\ (3,\ 8);\\
x = 10:&\quad (10;\ 1),(8,\ 3),\ (6,\ 5),\ (4,\ 7).
\end{aligned}$$

Во всех случаях получаем более трёх различных пар, противоречие.
Критерии. Ответ без объяснений и примера — 0 баллов. Пример башни из 3 кубиков — 3 балла. Доказано, что в башне не может быть больше, чем 3 кубиков, — ещё 4 балла.

4. Найдите наибольшее четырёхзначное число, в записи которого нет девяток и нулей и которое делится на трёхзначное число, полученное стиранием его первой слева цифры.

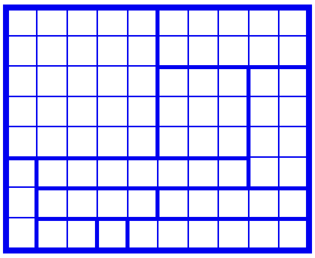
Ответ: 8125.

Решение. Если четырёхзначное число $\overline{abcd}$ делится на $\overline{bcd}$, полученное стиранием первой цифры a, то на $\overline{bcd}$ делится и число $\overline{abcd}-\overline{bcd} = 1000a$. Поскольку $a \neq 9$, исходное число будет наибольшим при $a = 8$. Значит, число $\overline{bcd}$ следует искать среди трёхзначных делителей числа $1000a = 2^6 \cdot 5^3$. Если $\overline{bcd}$ не содержит пятёрок в своём разложении, то $\overline{bcd} \leq 2^6$, что невозможно. Если же в его разложении есть пятёрки, то не должно быть двоек; иначе $\overline{bcd}$ делится на 10, и значит, в записи числа $\overline{abcd}$ есть нули. Итак, $\overline{bcd}$ — наибольший трёхзначный делитель числа 5^3, не содержащий девяток, то есть $\overline{bcd} = 125$.

Критерии. Примеры чисел, удовлетворяющих условию — 0 баллов. Доказано, что искомые числа обязательно будут делителями числа 8000, но неверно указан ответ — 3 балла. Правильный ответ без обоснования — 3 балла. Доказано, что это число наибольшее — 4 балла.

5. Можно ли разрезать клетчатый прямоугольник 10×8 по клеточкам на 11 прямоугольников *различной* площади? А на 12 таких прямоугольников?

Ответ: *на* 11 *можно* (*см. рисунок*); *на* 12 *нельзя*.



Решение. На рисунке приведён пример разрезания прямоугольника 10×8 на 11 прямоугольников с площадями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 25. Докажем, что такое разрезание на 12 прямоугольников невозможно. Отметим, что в разрезании не могут участвовать прямоугольники площади 11 и 13. В первом случае такой прямоугольник должен иметь размеры 1 и 11, во втором — 1 и 13, что невозможно в прямоугольнике 10×8.

Рассмотрим сумму 12 различных *наименьших* натуральных слагаемых, среди которых нет слагаемых 11 и 13: $1 + 2 + \ldots + 10 + 12 + 14 = 81$. Это больше площади прямоугольника 10×8, поэтому разрезать на 10 частей не удастся.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Пример для 11 прямоугольников — 3 балла.

7 класс

1. Однажды мышки подружились с кошками, и каждая мышка послала по открытке каждой кошке, так что все кошки вместе получили 60 открыток. Сколько было кошек и мышек *вместе*, если известно, что их было не больше 20? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 16, 17 *или* 19.
Решение. Пусть мышек было m, а кошек — k. Каждая мышка послала всем кошкам k открыток, поэтому общее число открыток равно $m \cdot k = 60$, и значит, m и k — делители числа 60, причём $m + k \leq 20$. Выпишем все разложения числа 60 на два множителя: $10 \cdot 6 = 12 \cdot 5 = 15 \cdot 4 = 20 \cdot 3 = 30 \cdot 2 = 60 \cdot 1$, и оставим из них первые три, для которых сумма делителей не более 20. Значит, кошек и мышек вместе было $10 + 6 = 16$, $12 + 5 = 17$ или $15 + 4 = 19$.
Критерии. Приведены (без объяснений) все варианты — 4 балла. Доказано, что других вариантов нет — ещё 3 балла.

2. Можно ли разрезать клетчатый прямоугольник 7×7 по клеточкам на семь прямоугольников, площади которых выражаются различными *нечётными* числами?

Ответ: *нельзя*.
Решение. Если разрезание возможно, общая площадь всех семи прямоугольников равна $7 \times 7 = 49$ и не меньше суммы первых семи нечётных чисел $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49$. Значит, эти площади равны 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13. Среди них есть прямоугольник площади 11, стороны которого могут выражаться *только* целыми числами 1 и 11. Сторона длины 11 больше стороны исходного квадрата, противоречие.
Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что площади выражаются семью нечётными числами от 1 до 13, — 3 балла.

3. В таблице 9×10 расставлены натуральные числа так, что числа в *соседних* клетках (имеющих общую сторону или общую вершину) различны. Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 215.
Решение. (*Оценка.*) В каждом квадрате 2×2 стоят *различные* натуральные числа, поэтому сумма чисел в квадрате 2×2 не меньше $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. В прямоугольнике 8×10 есть 20 таких квадратов 2×2. Значит, сумма чисел в прямоугольнике 8×10 не меньше $20 \cdot 10 = 200$. Оставшиеся 10 клеток прямоугольника 1×10 можно разбить на 5 прямоугольников 1×2 («доминошки»), в каждом из них сумма чисел не меньше, чем $1 + 2 = 3$, поэтому сумма чисел во всей таблице не меньше $200 + 5 \cdot 3 = 215$. На рисунке приведён *пример* таблицы, в которой сумма чисел равна 215.

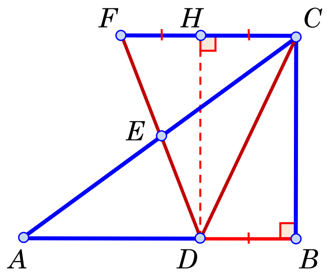
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2

Критерии. Приведён правильный пример без объяснений — 3 балла. Доказано, что в любом квадрате 2×2 сумма чисел не меньше 10, — 2 балла. Баллы не снижаются, если отмечено без объяснений, что в оставшиеся клетки надо расставить чередующиеся пары чисел 1 и 2.

4. Малыш и Карлсон обожают конфеты. Каждый день Малыш съедает на одну конфету больше, чем в предыдущий день, а Карлсон — на две конфеты больше, чем в предыдущий день. В первый день Малыш съел не менее одной конфеты, причём Карлсон в этот день съел на одну конфету больше, чем Малыш. Известно, что оба съели одинаковое число конфет, причём Карлсон съел свои конфеты за 6 дней. Сколько конфет съел Малыш? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 60 *или* 126.
Решение. Пусть Малыш съел в первый день x конфет, а Карлсон — $(x + 1)$ конфет. Во второй день они съели $x + 1$ и $x + 3$ конфет соответственно, и значит, за эти два дня Карлсон съел на $1 + 2 = 3$ конфеты больше, чем Малыш. Рассуждая таким образом, получим, что за 6 дней Карлсон съел на $1 + 2 + \ldots + 6 = 21$ конфету больше. Поскольку обжоры съели конфет поровну, в следующие дни Малыш съел ровно 21 конфету, причём за 7-ой день он съедает $x + 6 \geq 7$ конфет, за 8-ой день — не менее 8 конфет, и так далее. Число 21 можно представить в виде суммы последовательных слагаемых (из которых первое не меньше 7) только двумя способами: 10 + 11 и 21. Другими словами, Малыш съел свои конфеты за 8 или 7 дней. В первом случае, $x + 6 = 10$, $x = 4$, и он всего съел $4 + 5 + \ldots + 10 + 11 = 60$ конфет. Во втором случае, $x + 6 = 21$, $x = 15$, и значит, он съел $15 + 16 + \ldots + 21 = 126$ конфет.
Критерии. За правильный пример без объяснений — 3 балла. Указаны все примеры без объяснения, что других вариантов нет, — 5 баллов.

5. В треугольнике ABC угол ABC равен 90°, точка E — середина гипотенузы AC. На стороне AB отмечена точка D так, что $CD = 2DE$. Известно, что $AD = 2$. Найдите BD.



Ответ: 1.
Решение. Продолжим отрезок DE за точку E и отложим отрезок $EF = DE$. Треугольник CDF — равнобедренный, так как $DF = 2DE = CD$. Треугольники AED и CEF равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $CF = AD = 2$. В треугольнике CDF проведём высоту DH, и, поскольку DH будет и медианой, $FC = 2CH$. В четырёхугольнике $CBDH$ все углы прямые, то есть $CBDH$ — прямоугольник, и значит, $BD = CH = FC / 2 = 1$.
Критерии. Указано правильное дополнительное построение (продолжить отрезок DE или DB) — 2 балла.