ЗАДАЧИ
студенческой олимпиады им. Н. И. Лобачевского

1 декабря 2017 г.

1. Доказать, что при $a \in [0, \pi/2]$, $b \in [0, 1]$ выполняется неравенство $\int\limits_0^a \sin x\,dx + \int\limits_0^b \arcsin x\,dx \geqslant ab$.

2. Все вершины многогранника пронумерованы числами от 1 до N в некотором порядке. Пусть A – матрица размера $N \times N$, состоящая из 0 и 1, причём её элементы $a_{km} = a_{mk} = 1$, если вершины с номерами k и m лежат на одном ребре, и $a_{km} = 0$ в противном случае (в частности $a_{kk} = 0$). Показать, что $\det(A)$ не зависит от порядка нумерации вершин. Вычислить $\det(A)$ для тетраэдра и октаэдра.

3. Решить матричное уравнение $AX + X + A = 0$, где квадратная матрица A нильпотентна (некоторая степень A является нулевой матрицей).

4. К десятичной записи любого ли натурального числа можно приписать конечный набор цифр так, чтоб получившееся число представляло собой полный квадрат?

5. План города представляет собой квадрат, разделённый на 25 одинаковых кварталов квадратной формы. Из левого верхнего угла в противоположный угол вышел Антон, одновременно с ним с той же скоростью навстречу ему вышел Борис. С какой вероятностью они встретятся? На перекрестках направление выбирается произвольным образом, но так, чтобы длина пути была минимальна, т.е. Антон движется вниз или вправо, Борис вверх или влево.

6. Сколько существует последовательностей длины n из чисел “1” и “2” таких, что их сумма делится на 3?

7. Доказать, что число $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$ иррациональное.

8. Доказать, что площадь проекции единичного куба на плоскость численно равна длине его проекции на ортогональную плоскости прямую.

9. Из скольких компонент связности состоит дополнение конуса $C = \{(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 : x^2 + y^2 - z^2 - w^2 = 0\}$ в пространстве $\mathbf{R}^4$?

10. Конечная система множеств $\mathcal{L}$ замкнута относительно операции взятия симметрической разности: если $A \in \mathcal{L}$ и $B \in \mathcal{L}$, то множество $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ также принадлежит $\mathcal{L}$. Может ли $\mathcal{L}$ состоять в точности из 2017 множеств?

11. Билет называется счастливым по-питерски, если сумма его цифр, стоящих на чётных местах, совпадает с суммой цифр, стоящих на нечётных местах. Назовем билет счастливым по-казански, если все его цифры можно разбить на две непересекающиеся группы с одинаковыми суммами цифр. На совместном заседании руководителей транспортных управлений Петербурга и Казани было принято решение не ограничивать число цифр в номере билета.
а) Пусть $P_{\Pi}(n)$ — вероятность того, что случайно взятый n-значный билет является счастливым по-питерски. Найти $\lim_{n\to\infty} P_{\Pi}(n)$.
б) Пусть $P_{\mathrm{K}}(n)$ вероятность того, что случайно взятый n-значный билет является счастливым по-казански. Найти $\lim_{n\to\infty} P_{\mathrm{K}}(n)$.

Адрес в интернете: `lobachevolymp.kpfu.ru`
Электронная почта: `lobachevolymp@mail.ru`