

УДК 535.1+535.4

## ВОЛНОВОДНЫЕ МОДЫ РЕЗОНАТОРА, ЗАПОЛНЕННОГО СЛОИСТЫМ МАТЕРИАЛОМ С ЧЕРЕДУЮЩИМСЯ ЗНАКОМ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

*Д.О. Сапарина, А.П. Сухоружков*

### Аннотация

Рассматривается распространение волновых пучков в открытом резонаторе, заполненном слоистой структурой, содержащей метаматериал с отрицательным показателем преломления. Аналитически получены соотношения между параметрами резонатора (толщинами слоев, их показателями преломления и радиусами кривизны зеркал), при которых возможно возбуждение локализованных пространственных волноводных мод в виде гауссовых пучков. Показано, что в отличие от обычных резонаторов, такие моды могут существовать в резонаторе с плоскими зеркалами (резонаторе Фабри – Перо). Более того, возможно возбуждение волноводных пучков с произвольных поперечным распределением амплитуды.

**Ключевые слова:** резонатор, волноводные моды, метаматериал.

### Введение

Если диэлектрическая и магнитная проницаемость среды одновременно отрицательны, то показатель преломления среды  $n = \sqrt{\epsilon\mu}$  также отрицателен [1]. В таких средах направления распространения волны и потока энергии противоположны, а вектора напряженностей электрического и магнитного поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  и волновой вектор  $\vec{k}$  составляют не правую, а левую тройку, поэтому часто такие среды называют «левыми» средами (left-handed materials). При наклонном падении волны из воздуха возникает отрицательная рефракция, вследствие чего плоскопараллельная пластина, изготовленная из «левого» метаматериала, может фокусировать расходящийся пучок лучей подобно линзе. В последнее время интерес к материалам с отрицательным показателем преломления сильно возрастает. Это обусловлено созданием таких материалов в микроволновом и оптическом диапазонах частот [2–4].

Метаматериалы с отрицательными диэлектрической и магнитной проницаемостями представляют собой искусственные периодические структуры, составленные из резонансных элементов, размеры которых меньше длины волны. В настоящее время получены метаматериалы с отрицательными диэлектрической и магнитной проницаемостями, обладающие сравнительно низким поглощением. Изменение знака показателя преломления дает возможность создания принципиально новых микроволновых и оптических устройств. Например, в слоистых структурах за счет периодической фокусировки, происходящей на границах раздела сред с разными знаками показателями преломления, возможно волноводное распространение пучков, как в линзовой линии [5]. Слой метаматериала с отрицательным показателем преломления может существенно изменить свойства открытого резонатора [6].

В данной работе исследуются свойства пространственно локализованных волноводных мод в резонаторе, содержащем слой метаматериала с отрицательным показателем преломления.

**1. Распространение гауссова пучка в резонаторе, заполненном двумя слоями среды с положительным и отрицательным показателем преломления**

Рассмотрим открытый резонатор, между зеркалами которого находятся два слоя различных сред длины  $l_+$  и  $l_-$ , обладающих показателями преломления  $n_+ > 0$  и  $n_- < 0$ . Граница раздела сред – плоская и проходит перпендикулярно оси резонатора (см. рис. 1). Будем считать, что френелевского отражения на границе раздела сред нет (волновые сопротивления сред одинаковы), а также будем пренебрегать поглощением в обеих средах.

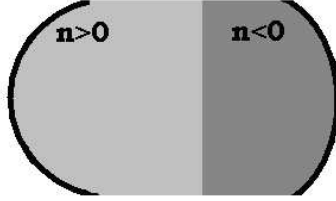


Рис. 1. Резонатор, содержащий два слоя с разными по знаку показателями преломления

В одномерном случае уравнение для огибающей пучка имеет вид

$$\frac{\partial A}{\partial z} + iD(z)\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = 0. \quad (1)$$

Коэффициент дифракции  $D$  меняет знак в зависимости от показателя преломления среды:  $D = D_0/n$ , где  $D_0 = 1/(2k_0)$  – коэффициент дифракции в среде с показателем преломления, равным единице. Рассмотрим дифракцию пучка с гауссовым начальным распределением амплитуды на левом вогнутом зеркале с радиусом кривизны  $R_1$ :

$$A = A_0 \exp\left(-\frac{x^2}{a^2} - i\frac{k_0 n_+ x^2}{2R_1}\right) = A_0 \exp(-x^2 \gamma_0^2),$$

где  $\gamma_0^2 = \frac{1}{a^2} + i\frac{k_0 n_+}{2R_1}$ .

После одного прохода резонатора амплитуда пучка равна

$$A = A_0 c_{cyc} \cdot \exp(-x^2 \gamma_{cyc}^2),$$

где коэффициенты имеют вид:

$$c_{cyc} = \sqrt{\frac{1}{(1 - 4iD_0\gamma_0\Delta_l) \left(1 - 4iD_0\Delta_l \sqrt{\frac{\gamma_0^2}{1 - 4iD_0\gamma_0\Delta_l} + i\frac{k_0 n_-}{R_2}}\right)}},$$

$$\gamma_{cyc}^2 = \frac{\frac{\gamma_0^2}{1 - 4iD_0\gamma_0\Delta_l} + i\frac{k_0 n_-}{R_2}}{1 - 4iD_0\Delta_l \sqrt{\frac{\gamma_0^2}{1 - 4iD_0\gamma_0\Delta_l} + i\frac{k_0 n_+}{R_1}}} + i\frac{k_0 n_+}{R_1},$$

$$\Delta_l = \frac{l_+}{n_+} - \frac{l_-}{|n_-|}.$$

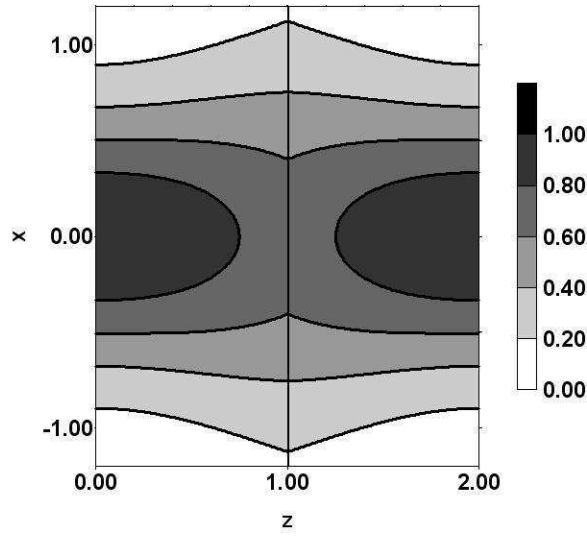


Рис. 2. Распространение пучка в симметричном двухслойном резонаторе Фабри – Перо

Из условия периодичности (начальная амплитуда  $A_0$  должна быть равна амплитуде после одного прохода  $A_{cyc}$ ) получим, что:

$$c_{cyc} = 1, \quad \gamma_0^2 = \gamma_{cyc}^2,$$

откуда следует, что параметры резонатора должны удовлетворять соотношениям:

$$\sqrt{\frac{1}{(1 - 4iD_0\gamma_0\Delta_l) \left(1 - 4iD_0\Delta_l \sqrt{\frac{\gamma_0^2}{1 - 4iD_0\gamma_0\Delta_l} + i\frac{k_0 n_-}{R_2}}\right)}} = 1,$$

$$\frac{\frac{\gamma_0^2}{1 - 4iD_0\gamma_0\Delta_l} + i\frac{k_0 n_-}{R_2}}{1 - 4iD_0\Delta_l \sqrt{\frac{\gamma_0^2}{1 - 4iD_0\gamma_0\Delta_l} + i\frac{k_0 n_+}{R_1}}} + i\frac{k_0 n_+}{R_1} = \gamma_0^2.$$

В случае  $\Delta_l = 0$  (то есть  $\frac{l_+}{n_+} = \frac{l_-}{|n_-|}$ ) формирование пространственно локализованной моды происходит при выполнении условия:  $\frac{n_+}{R_1} = \frac{|n_-|}{R_2}$

Выполнение условия повторяемости было проверено численно для гауссова пучка. На рис. 2 представлены результаты численного моделирования распространения гауссова пучка в резонаторе с толщиной слоев  $l_+ = 1$ ,  $l_- = 1$  и показателями преломления  $n_+ = 1$ ,  $n_- = -1$ . На представленном графике продольная координата  $z$  нормирована на дифракционную длину, поперечная координата  $x$  – на ширину пучка.

## 2. Условия существования волноводных мод произвольного профиля

**2.1. Резонатор Фабри – Перо.** Пусть на выходе первого зеркала резонатора Фабри – Перо пучок имеет произвольное поперечное распределение амплитуды

и плоский волновой фронт. Тогда из уравнения распространения пучка (1) для каждой из его Фурье-компонент получим уравнение:

$$\frac{\partial A_k}{\partial z} - iD(z)\lambda_k^2 A_k = 0. \quad (2)$$

Его решением является функция:

$$A_k(z) = A_k(z=0) \cdot \exp\left(i\lambda_k^2 \int_0^z D(z) dz\right). \quad (3)$$

Таким образом, на входе второго зеркала комплексная амплитуда пучка равна

$$A(z=l_+ + l_-) = \sum A_k(z=0) \cdot \exp(iD\lambda_k^2 \Delta_l). \quad (4)$$

Непосредственно из выражения (4) следует, что при выполнении условия

$$\Delta_l = \frac{l_+}{n_+} - \frac{l_-}{|n_-|} = 0 \quad (5)$$

распределение амплитуды на втором зеркале повторяет начальное распределение амплитуды, и пучок имеет плоский волновой фронт. После отражения пучок идет в обратном направлении, так что в каждом сечении амплитудные профили встречных волн совпадают друг с другом, в том числе и на первом зеркале. Кроме того, из-за смены знака показателя преломления будет скомпенсирован и фазовый набег, приобретаемый в результате дифракции. Для компенсации суммарного фазового набега необходимо, чтобы оптическая длина проходимого пучком пути была кратна целому числу длин волн, то есть:

$$2(l_+ \cdot n_+ - l_- \cdot |n_-|) = m\lambda, \quad (6)$$

где  $m$  – любое целое число. Объединяя условия (5) и (6), получим, что длины слоев должны быть связаны соотношением

$$l_+ \cdot \left(n_+ - \frac{n_-^2}{n_+}\right) = \frac{m\lambda}{2}. \quad (7)$$

Рассмотрим резонатор, заполненный слоистым метаматериалом с произвольным числом слоев с положительным и отрицательным показателями преломления. Из вида решения (3) следует, что в плоском резонаторе порядок слоев и длина каждого из них могут быть любыми. Если суммарные длины отрицательных и положительных слоев  $\sum_i l_{+i}$  и  $\sum_i l_{-i}$  удовлетворяют условию, аналогичному (5):

$$\frac{\sum_i l_{+i}}{n_+} - \frac{\sum_i l_{-i}}{|n_-|} = 0, \quad (8)$$

то в резонаторе формируется стационарная волноводная мода.

Нами было проведено численное моделирование распространения пучка с начальным поперечным распределением амплитуды  $A_0(x) = \text{sech}(x)$  в четырехслойном несимметричном резонаторе, параметры которого удовлетворяют условию (8). Результаты численного эксперимента представлены на рис. 3.

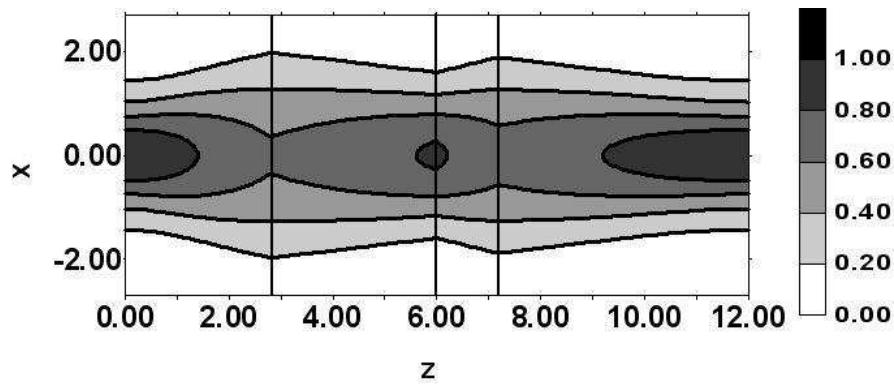


Рис. 3. Распространение пучка в четырехслойном резонаторе Фабри – Перо (вертикальными линиями обозначены границы раздела сред)

**2.2. Резонатор с зеркалами произвольной кривизны.** Рассмотрим распространение пучка, имеющего на выходе первого зеркала произвольное поперечное распределение амплитуды и кривизну волнового фронта, совпадающую с кривизной первого зеркала. Если резонатор заполнен слоистым метаматериалом, суммарные длины слоев которого удовлетворяют соотношению (8), то, как было показано выше, распределение амплитуды на входе второго зеркала в точности повторяет распределение амплитуды на выходе первого, а радиус кривизны пучка вследствие изменения знака показателя преломления равен  $R_{\text{beam2}} = \frac{n_-}{n_+} R_{\text{beam1}}$ . После отражения от зеркала пучок в точности повторяет свою траекторию в том случае, если его радиус кривизны совпадает с радиусом кривизны зеркала. Для выполнения этого условия необходимо, чтобы радиусы кривизны зеркал резонатора были связаны между собой соотношением:

$$\frac{n_+}{R_1} - \frac{|n_-|}{|R_2|} = 0. \quad (9)$$

Таким образом, в резонаторе с вогнутыми зеркалами также возможно возбуждение локализованной пространственной моды произвольного профиля при выполнении условий (8), (9).

### Заключение

Если открытый резонатор заполнить слоистой структурой с чередующимися знаками показателя преломления, то свойства его мод существенно трансформируются. Изменение знака показателя преломления дает возможность управления дифракцией.

Отметим некоторые принципиально новые свойства, которыми обладает такой резонатор. В резонаторе с плоскими зеркалами становится возможным возбуждение локализованных пространственных мод (в отличие от обычного резонатора Фабри–Перо). Нами получены условия, при которых возможно возбуждение мод с произвольным поперечным распределением амплитуды в резонаторах как с плоскими, так и выпуклыми зеркалами. Полученные условия можно обобщить на резонатор с произвольным числом слоев в заполняющей его структуре. В этом случае условия накладываются на суммарные длины слоев; их количество, взаимное расположение и длина каждого слоя могут быть произвольными. Полученные результаты были подтверждены численным моделированием. В дальнейшем планируется

исследовать устойчивость волноводных мод в открытом резонаторе, содержащем слой из метаматериала.

Работа выполнена при поддержке проектов РФФИ (проекты № 06-02-16801, 08-02-00717), гранта президента РФ НШ-671.2008.2 и Фонда «Династия».

### Summary

*D.O. Saparina, A.P. Sukhorukov.* Waveguide Modes in Cavity Containing Layered Structure with Alternating Sign of Refractive Index.

The article regards beam propagation in open cavity containing a layered structure with left-handed metamaterial. Formation conditions for the gaussian eigenmodes are obtained analytically. In contrast to ordinary cavities, such modes can exist in Fabri-Perrot cavities. The possibility of waveguide eigenmodes with an arbitrary transverse field distribution is investigated, which is also a particular feature of such a cavity.

**Key words:** cavity, eigenmodes, metamaterial.

### Литература

1. *Веселаго В.Г.* Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями  $\epsilon$  и  $\mu$  // Усп. физ. наук. – 1967. – Т. 92, № 3. – С. 517–526.
2. *Parimi P.V., Lu W.T., Vodo P. et al.* Negative Refraction and Left-Handed Electromagnetism in Microwave Photonic Crystals // Phys. Rev. Lett. – 2004. – V. 92, No 12. – P. 127401-1–127401-4.
3. *Parazzoli C.G., Greegor R.B., Li K. et al.* Experimental Verification and Simulation of Negative Index of Refraction Using Snell's Law // Phys. Rev. Lett. – 2003. – V. 90, No 10. – P. 107401-1–107401-4.
4. *Shalaev V.M.* Optical negative-index metamaterials // Nature Photonics. – 2007. – V. 1. – P. 41–48.
5. *Панфилова Н.О., Сапарина Д.О., Сухоруков А.П.* Распространение волновых пучков в структурах, составленных из слоев с положительными и отрицательными показателями преломления // Изв. РАН. Сер. физ. – 2006. – Т. 70, № 10. – P. 1722–1725.
6. *Engheta N.* An Idea for Thin Subwavelength Cavity Resonators Using Metamaterials With Negative Permittivity and Permeability // IEEE, Antennas and Wireless Propagation Letters. – 2002. – V. 1. – P. 9–13.

Поступила в редакцию  
20.03.08

---

**Сапарина Дарья Олеговна** – студент кафедры фотоники и физики микроволн Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

E-mail: [saparina@mail.ru](mailto:saparina@mail.ru)

**Сухоруков Анатолий Петрович** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фотоники и физики микроволн Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

E-mail: [apsmsu@gmail.com](mailto:apsmsu@gmail.com)