III. ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Лекция 21. ПОНЯТИЕ ГЛАДКОГО МНОГООБРАЗИЯ

21.1. Определение гладкого многообразия.

Многообразия являются широким многомерным обобщением понятия поверхности, в частности, ее внутренней геометрии.

Определение. *Связное топологическое пространство* M *называется* m*-мерным вещественным многообразием, если для всякой его точки* $\boldsymbol{x} \in M$ *существует окрестность* U *, гомеоморфная области вещественного пространства* $\mathbb{R}^m$.

Замечание. Если вместо $\mathbb{R}^m$ взять комплексное пространство $\mathbb{C}^m$, то получим m-мерное *комплексное многообразие.*

Итак, m-мерное многообразие локально устроено как область в $\mathbb{R}^m$. Пусть $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ указанный гомеоморфизм. Пара (U, φ) называется *картой.* Всякой точке $\mathbf{x} \in (U, \varphi)$ соответствует набор вещественных чисел $\varphi(x) = (x^1, \dots, x^m)$, которые называются *координатами этой точки* в заданной карте. Изменяя только одну координату, мы получим на многообразии *координатные линии*, образующие в совокупности *координатную сеть* карты. Все многообразие покрывается набором таких карт — *атласом* $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha\}$.

Данное выше определение многообразия является слишком общим. Рассмотрим более специальный класс *гладких* многообразий , которые определяются следующим образом. Всякая точка попадает, вообще говоря, в зону действия нескольких карт и если сравнивать ее координаты x^i и $x^{i'}$ в двух разных картах (U, φ) и (V, ψ) , то возникает преобразование в $\mathbb{R}^m$: $f = \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$, которое в общем случае является гомеоморфным и называется *переходной функцией.* Она задает преобразование координат и имеет вид $x^{i'} = f^{i'}(x^j)$.

Определение. *Многообразие называется гладким, если существует такой атлас, что для каждой пары карт этого атласа переходные функции являются гладкими.*

Определение. *Гладкое многообразие называется ориентируемым, если на нем существует атлас, для которого все функции перехода имеют положительный якобиан*

$$J = \det\Big(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\Big) > 0.$$

Отсюда следует, что на ориентируемом многообразии может существовать лишь две ориентации. Если выбрана одна из них, то многообразие называется *ориентированным.*

Определение. *Гладкое многообразие* N *называется подмногообразием (или поверхностью) в* M *, если задано гладкое отображение* $F : N \to M$ *, которое является вложением.*

Это значит, что это отображение является 1) регулярным и 2) гомеоморфизмом на свой образ (лекц. 1). Локально, в координатах подмногообразие задается уравнениями

$$x^i = F^i(u^1, \dots, u^n) \quad n < m.$$

При этом первое условие означает, что ранг якобиевой матрицы $J = (\frac{\partial x^i}{\partial u^a})$ равен n на подмногообразии, а второе — атлас подмногообразия эквивалентен *индуцированному* атласу, образованному картами $(U_\alpha \cap N, \varphi_\alpha \circ F)$. При $n = m - 1$ подмногообразие называется гиперповерхностью.

Примеры.

1) Арифметическое $\mathbb{R}^m$, евклидово $\mathbb{E}^m$ и аффинные пространства A^m являются тривиальными примерами ориентируемых гладких многообразий. Выбрав репер $\{O, \mathbf{e}_i\}$, мы можем покрыть их одной картой с координатами $(x^1, \ldots, x^m)$: $x = x^i \mathbf{e}_i$. Выбор репера задает и определенную ориентацию пространства. Ту же ориентацию задают все реперы $\mathbf{e}_{i'} = f^i_{i'} \mathbf{e}_i$, для которых $\det(f^i_{i'}) > 0$. Таким образом, множество всех реперов разбивается на два класса — правые и левые.

2) Сферы $S^m \subset E^{m+1}$ являются нетривиальными примерами гладких ориентируемых многообразий. Они покрываются минимум двумя картами. В качестве координатных окрестностей можно выбрать две области, получаемые выкалыванием сначала одной точки, а затем ей диаметрально противоположной — северным и южным полюсами, а в качестве координатных гомеоморфизмов φ и ψ — стереографические проекции с полюсами в этих точках на экваториальную плоскость (при $m = 2$ см. п. 14.1). В этом случае преобразование координат представляет собой инверсию. Она является гладким преобразованием с положительным якобианом.

3) Конечно, существуют и неориентируемые многообразия. Примерами могут служить лист Мебиуса, проективные пространства четной размерности. Доказательство этих свойств непросто.

4) В приложениях часто возникают подмногообразия, заданные системой неявных уравнений

$$F^1(x^1, \ldots, x^m) = 0, \ldots, F^n(x^1, \ldots, x^m) = 0, \quad m > n. \tag{1}$$

Здесь функции $F^i(x)$ предполагаются гладкими и независимыми. Это значит, что в окрестности каждой точки подмногообразия ранг якобиевой матрицы $(\partial_i F^\alpha)$ максимален и равен n. Другими словами, подмногообразие задается как полный прообраз нуля при отображении $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, регулярном в нуле: $M = F^{-1}(0)$ (лекц. 1, теор. 3). Пусть в окрестности какой-либо точки отличен от нуля минор, образованный столбцами с номерами $i_1, \ldots, i_k$. Тогда по теореме о неявных функциях эту систему можно локально разрешить относительно переменных $x^{i_1}, \ldots, x^{i_n}$, а остальные $m-n$ переменных принять в качестве криволинейных координат. В итоге такими координатными окрестностями можно покрыть все многообразие и описать его локальными приведенными уравнениями. Его размерность равна $m - n$.

В аналитической механике уравнения (1), задающие многообразие, обычно появляются как уравнения связей, наложенные на лагранжевы переменные.

21.2. Касательное и кокасательное пространства.

Понятие касательного векторного пространства поверхности, которое мы рассмотрели в лекции 11, обобщается следующим образом. Рассмотрим на многообразии M гладкий путь $\Gamma : I = (a, b) \to M$, проходящий через точку $x = \Gamma(t_0)$. В карте (U, φ) он имеет параметрические уравнения $x^i = x^i(t)$. Набор первых производных $a^i = \frac{dx^i}{dt}\Big|_{t=0}$, вычисленных в заданной точке, дает нам m чисел. При преобразовании координат они изменяются по векторному закону

$$a^{i'} = f^{i'}_i(x) \frac{dx^i}{dt}\Big|_{t=t_0} = f^{i'}_i(x) a^i, \quad f^{i'}_i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}. \tag{2}$$

Это свойство дает основание называть эти числа компонентами *касательного вектора* $\mathbf{a}_x$ пути в точке x.

Рассмотрим множество T_xM всех касательных векторов в этой точке. Определив на этом множестве обычным образом операции сложения $\mathbf{a}_x + \mathbf{b}_x = (a^i + b^i)$ и умножения на число $\lambda \mathbf{a}_x = (\lambda a^i)$, получим векторное пространство, которое называется *касательным векторным пространством* многообразия в точке x. Можно доказать, что оно имеет ту же размерность, что и данное многообразие.

Отождествим вектор с линейным дифференциальным оператором, который обозначим той же буквой

$$\mathbf{a}_x = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} := a^i \partial_i \,. \tag{3}$$

При этом оператор ∂_i имеет компоненты $(0, \dots, 1_i, \dots, 0)$ и поэтому отождествляется с касательным вектором к i-ой координатной линии. В совокупности они образуют базис касательного пространства $\{\partial_i\}$, а вместе с точкой x — репер $\{x, \partial_i\}$ в этой точке x. Этот репер однозначно связан с выбранной картой и в отличие от других называется *натуральным репером.*

Построим сопряженное с ним векторное пространство. Для этого в точке x рассмотрим дифференциал гладкой функции $F : U \to \mathbb{R}$, определенной в окрестности этой точки

$$dF_x = \frac{\partial F(x)}{\partial x^i} \, dx^i. \tag{4}$$

Это линейная форма в точке x, определяющая линейное отображение $T_xM \to \mathbb{R}$: всякому вектору $\mathbf{a}_x$ в этой точке она ставит в соответствие число

$$dF_x(\mathbf{a}_x) = a^i \partial_i F = \mathbf{a}_x(F). \tag{5}$$

Множество всех таких линейных форм образует сопряженное векторное пространство с линейными операциями

$$dF_x + dG_x = d(F+G)_x \,, \quad \lambda dF_x = d(\lambda F)_x, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Оно называется *кокасательным векторным пространством* в точке x и обозначается T_x^*M. Элементы пространства T_x^*M называются ковариантными векторами или, короче, *ковекторами* в точке x. Основанием для этого является ковекторный закон преобразования их компонент — значений градиента $a_i = (\partial_i F)_x$, вычисленных в точке x. В самом деле, при переходе к другой карте мы имеем

$$a_{i'} = f^i_{i'}(x) \, a_i, \quad f^i_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \,. \tag{6}$$

Это закон преобразования ковектора.

Из (4) следует, что дифференциалы координатных функций dx^i образуют базис кокасательного пространства. Совокупность $\{x, dx^i\}$ называют *натуральным корепером* в точке x. Легко видеть, что натуральные репер и корепер сопряжены. Действительно, вследствие формулы (5) $dx^i(\partial_j) = \partial_j x^i = \delta^i_j$.

21.3. Векторные поля и их интегральные пути. Коммутатор векторных полей.

Пусть M — гладкое многообразие.

Определение. *Векторным полем на многообразии называется отображение, которое каждой точке $x \in M$ ставит в соответствие вектор $\mathbf{a}_x \in T_xM$ в этой точке.*

В координатах векторное поле имеет вид $\mathbf{a} = a^i(x)\partial_i$ и, следовательно, задается m функциями $a^i(x^1, \dots, x^m)$. Векторное поле называется *гладким*, если эти функции гладкие.

Определение. *Интегральным путем или траекторией векторного поля называется параметризованная кривая* $\Gamma : x = x(t)$ *, касательные векторы которой в точках пути совпадают с векторами этого поля*:

$$\frac{dx^i}{dt} = a^i(x^k(t))\,. \tag{7}$$

Таким образом, нахождение интегральных путей сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). В силу теоремы Коши через каждую точку $x \in M$ многообразия проходит единственный интегральный путь векторного поля, определенный в некотором интервале. Векторное поле называется *полным*, если решение определено на всей вещественной прямой $\mathbb{R}$. В дальнейшем для простоты будем рассматривать только полные векторные поля.

На практике способом отыскания решений часто является нахождение первых интегралов системы (7), т. е. таких функций $F(x)$, которые постоянны вдоль интегральных линий: $F(x(t)) = \mathrm{const}$. Это значит, что интегральные пути лежат на гиперповерхностях $F(x) = \mathrm{const}$. Поэтому знание интеграла позволяет понизить число уравнений системы (7) на единицу, поскольку сводит дело к отысканию искомых путей на гиперповерхностях $F(x^1, \ldots, x^m) = \mathrm{const}$ — многообразиях на единицу меньшей размерности. Если удалось найти $m-1$ независимых интегралов, то система $F_1(x) = c_1, \ldots F_{m-1}(x) = c_{m-1}$ дает нам неявные уравнения искомых интегральных путей. Следующая теорема хорошо известна

Теорема. *Функция* $F(x)$ *является первым интегралом системы (7) тогда и только тогда, когда* $\mathbf{a}(F) = a^i(x)\partial_i F = 0$.

С векторным полем связано такое важное понятие как *поток*. Пусть $x \in M$ — произвольная точка многообразия и $x(t) = \varphi_t(x)$ — проходящий через нее интегральный путь векторного поля — решение системы (7).

Определение. *1-параметрическое семейство преобразований* $\varphi_t : M \to M$ *, определяемое формулой*

$$\varphi_t : x \to \varphi_t(x), \quad t \in \mathbb{R} \tag{8}$$

называется потоком векторного поля.

Теорема 1. *Пусть* $\boldsymbol{a}$ *— векторное поле и* φ_t *— соответствующий поток. Тогда*

1) $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$,

2) *Отображения* φ_t *являются диффеоморфизмами.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем некоторое значение s и рассмотрим решение системы (7) с начальным условием $x(s) : \varphi_t(x(s)) = \varphi_t \circ \varphi_s(x)$. С другой стороны, $x(t) = \varphi_{t+s}(x)$ также является, очевидно, решением системы (7) с начальным условием $x(0) = \varphi_s(x)$. Тогда первое свойство следует из единственности решения при заданном начальном условии. Так как, кроме того, $\varphi_0 = \mathrm{Id}$, то положив $t + s = 0$, получим $\varphi^{-1}(t) = \varphi(-t)$ и, следовательно, обратные преобразования существуют и также гладкие. $\square$

Обратно, если на многообразии задан поток своими преобразованиями $x(t) = \varphi_t(x)$, то находя касательные векторы к его траекториям $a^i(x) = \frac{dx^i}{dt}\big|_{t=0}$, мы получим векторное поле, порождающее этот поток. Таким образом, между гладкими векторными полями и их потоками существует биективное соответствие.

Указанные в теореме свойства потока говорят о том, что семейство $\varphi_t(x)$ образует группу. Ее называют *1-параметрической группой*, порожденной векторным полем.

Пример. Пусть в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ в прямоугольных координатах задано векторное поле $\mathbf{a}(x,y,z) = (-y, x, 1)$. Интегрируя систему

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x, \quad \frac{dz}{dt} = 1\,,$$

при начальном условии $x(0) = x$, $y(0) = y$, $z(0) = z$, получим преобразования

$$x(t) = x\cos t - y\sin t, \quad y(t) = x\sin t + y\cos t, \quad z(t) = z + t\,.$$

Интегральные пути этого потока образуют 2-параметрическое семейство винтовых линий.

Рассмотрим множество $\mathfrak{X}(M)$ всех гладких векторных полей на многообразии M с операциями сложения $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ и умножения на функции $F(x)\mathbf{a}$ (в частности, на числа). Эти операции выполняются поточечно. Определим на множестве $\mathfrak{X}(M)$ еще одну операцию. Для этого рассмотрим сначала понятие *композиции* векторных полей. Будем рассматривать векторные поля как линейные дифференциальные операторы. Если $F(x)$ — гладкая функция на M, то $\mathbf{a}(F) = a^i(x)\partial_i F$ есть также гладкая функция на M. Другими словами, всякое векторное поле определяет преобразование $\mathbf{a} : \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ в кольце гладких функций. Следовательно, если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — два векторных поля, то можно построить композицию $\mathbf{a}\circ\mathbf{b}(F) = \mathbf{a}(\mathbf{b}(F))$ соответствующих преобразований

$$\mathbf{a}\circ\mathbf{b}(F) = (a^i\partial_i b^j)\partial_j F + a^i b^j \partial_i\partial_j F\,.$$

Отсюда видно, что композиция не является векторным полем. Но *коммутатор (или скобка)* векторных полей

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \mathbf{a}\circ\mathbf{b} - \mathbf{b}\circ\mathbf{a} \tag{9}$$

есть снова векторное поле. Действительно, его координатное выражение имеет вид

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}]F = (a^i\partial_i b^j - b^i\partial_i a^j)\partial_j F. \tag{10}$$

Следовательно, это векторное поле имеет компоненты

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}]^j = a^i\partial_i b^j - b^i\partial_i a^j.$$

Теорема 2. *Коммутатор обладает следующими свойствами:*
1) Он кососимметричен: $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] = -[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}]$ *;*
2) Он $\mathbb{R}$ *-линеен по каждому сомножителю, например:* $[\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}] = \lambda[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}]+\mu[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$ *;*
3) Выполняется тождество Якоби: $[[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\boldsymbol{c}] + [[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}],\boldsymbol{b}] + [[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}],\boldsymbol{a}] = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первые два свойства очевидны. Третье проверяется непосредственными вычислениями с использованием формулы (10) . □

Выполнение этих свойств означает, что $\mathfrak{F}$-модуль $\mathfrak{X}(M)$ как векторное пространство является (бесконечномерной) *алгеброй Ли.*

Пример. Векторные поля на плоскости $\mathbf{a} = \partial_x$ (поток — переносы нраралелльно оси X) и $\mathbf{b} = -y\partial_x + x\partial_y$ (поток — вращения вокруг начала координат) имеют коммутатор $[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \partial_y$. Его поток — переносы параллельно оси Y.

Задача. Докажите, что если $f(x), g(x)$ — гладкие функции, то

$$[f\mathbf{a}, g\mathbf{b}] = fg[\mathbf{a},\mathbf{b}] + f\mathbf{a}(g)\mathbf{b} - g\mathbf{b}(f)\mathbf{a}\,.$$

Лекция 22. КОВАРИАНТНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НА МНОГООБРАЗИЯХ

22.1. Тензорные поля на многообразии.

Теперь уже несложно понять, что такое тензорное поле на гладком многообразии. В каждой точке мы имеем касательное и сопряженное ему кокасательное векторные пространства. Следовательно, естественным является следующее

Определение. *Тензорное поле валентности* (p, q) *в области* $Q \subset M$ *гладкого многообразия есть отображение, которое всякой точке многообразия ставит в соответствие тензор* $x \to F_x(\alpha^1, \dots, \alpha^p, \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_q,)$ *с аргументами из касательного и кокасательного пространств.*

В координатах тензорное поле задается своими компонентами. Это набор m^{p+q} функций, которые в каждой точке являются значениями тензора на базисных векторах и ковекторах касательного и кокасательного пространств

$$F^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}(x) = F_x(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_p}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_q}).$$

Тензорное поле называется гладким, если эти функции гладкие. Из результатов лекции 9 следует, что при переходе к другой карте $(U', x^{i'})$ компоненты тензорного поля изменяются по закону

$$F^{i'_1 \dots i'_p}_{j'_1 \dots j'_q}(x') = f^{i'_1}_{i_1} \dots f^{i'_p}_{i_p} F^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}(x) f^{j_1}_{j'_1} \dots f^{j_q}_{j'_q}\,, \tag{11}$$

где $f^{i'}_i(x) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$ и $f^i_{i'}(x') = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$ — элементы якобивой матрицы преобразования и обратной к ней. Из этой формулы следует, что обращение тензорного поля в нуль не зависит от выбора координат.

Для тензорных полей выполнимы все те алгебраические операции, которые мы рассмотрели ранее. Рассмотрим примеры тензорных полей.

Скалярное поле на многообразии — это отображение $F : M \to \mathbb{R}$. По определению оно считается тензорным полем нулевой валентности. В координатах скалярное поле задается функцией $F(x^1, \dots, x^m)$. Точки многообразия, в которых градиент $\mathrm{grad} F = 0$, называются *особыми точками скалярного поля.* Точки многообразия, в которых скалярное поле принимает постоянное значение $F(x) = \mathrm{const}$, образуют *гиперповерхности уровня.* Эти поверхности образуют 1-параметрическое семейство.

В предыдущей лекции мы уже рассматривали *векторные поля.* Напомним, что если задано векторное поле $\mathbf{a}$ и скалярное поле, то поле $\mathbf{a}$ действует на него как дифференциальный оператор по формуле

$$\mathbf{a}(F) = a^i \partial_i F(x)\,,$$

так что в результате получаем новое скалярное поле. Нетрудно проверить рассматривая законы преобразования, что эта функция определена инвариантно, независимо от выбора координат.

Ковекторное поле $\xi(x) : x \to T^*_x M$ задается ковектором в каждой точке многообразия. Для того, чтобы выяснить его геометрический смысл, рассмотрим в какой-либо точке x множество векторов, которые обращают в нуль линейную форму ξ_x :

$$\xi(\mathbf{a}) = \xi_1 a^1 + \dots + \xi_m a^m = 0.$$

Это уравнение гиперплоскости $\Pi_x^{m-1} \subset T_x M$ в касательном пространстве этой точки. Следовательно, ковекторное поле в каждой точке многообразия задает гиперплоскость. В итоге мы получаем на многообразии $(m-1)$-мерное *распределение* — поле гиперплоскостей.

22.2. Ковариантное дифференцирование и связность.

В лекции 18 было введено понятие ковариантной производной векторного поля на поверхности и затем с ее помощью определено понятие параллельного перенесения вектора вдоль заданного пути на поверхности. При этом существенно использовалось то обстоятельство, что поверхность расположена в евклидовом пространстве. Рассматривая теперь гладкое многообразие M как самостоятельный объект, мы не имеем этой возможности. Поэтому установленные ранее свойства ковариантной производной мы возьмем в качестве ее определения.

Пусть $\mathfrak{X}(M)$ — алгебра Ли гладких векторных полей на многообразии M и $\mathbf{h}$ — заданное векторное поле.

Определение. *Ковариантной производной в направлении $\boldsymbol{h}$ называется дифференциальный оператор $\nabla_{\boldsymbol{h}}$, который всякому векторному полю $\boldsymbol{a} \in \mathfrak{X}(M)$ ставит в соответствие векторное поле $\nabla_{\boldsymbol{h}}\boldsymbol{a}$ и удовлетворяет условиям:*

$$1)\nabla_{\mathbf{h}}(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}) = \lambda\nabla_{\mathbf{h}}\mathbf{a}+\mu\nabla_{\mathbf{h}}\mathbf{b}\,, \quad \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}; \tag{12}$$

$$2)\ \nabla_{\mathbf{h}}(f\mathbf{a}) = f\nabla_{\mathbf{h}}\mathbf{a}+(\mathbf{h}f)\mathbf{a}\,, \quad \forall f\in\mathfrak{F}(M); \tag{13}$$

$$3)\ \nabla_{f\mathbf{h}_1+g\mathbf{h}_2}\mathbf{a} = f\nabla_{\mathbf{h}_1}\mathbf{a}+g\nabla_{\mathbf{h}_2}\mathbf{a} \quad \forall f,g\in\mathfrak{F}(M). \tag{14}$$

Многообразие, на котором задана операция ковариантного дифференцирования, обозначается (M,∇).

Пусть (U,x^i) — карта на (M,∇) и $\{\partial_i\}$ — натуральный репер. Введем для упрощения записи обозначение $\nabla_{\partial_i} = \nabla_i$ и положим

$$\nabla_i\,\partial_j = \Gamma_{ij}^k(x)\partial_k\,. \tag{15}$$

Это *деривационные уравнения поля натуральных реперов*. С помощью этой формулы ковариантную производную можно вычислить в координатах. Пусть $\mathbf{a} = a^j(x)\partial_j$. Тогда, учитывая свойства (12) – (14), получим векторное поле $\nabla_{\mathbf{h}}\mathbf{a}$ с компонентами

$$\nabla_{\mathbf{h}}\mathbf{a}^k = h^i(\partial_i a^k + \Gamma_{ij}^k a^j)\,. \tag{16}$$

В частности, при ковариантном дифференцировании в направлении координатных линий

$$\nabla_i a^k = \partial_i a^k + \Gamma_{ij}^k a^j\,. \tag{17}$$

Эти формулы знакомы нам по лекции 18. Таким образом, задание операции ковариантного дифференцирования эквивалентно заданию в каждой карте совокупности функций $\Gamma_{ij}^k(x)$. Эти функций называются *компонентами линейной связности* относительно заданной карты.

Следует, однако, иметь ввиду, что при переходе к другим координатам компоненты связности, как это видно непосредственно из формулы (15), изменятся. Выясним, как эти компоненты преобразуются при замене координат $x^i = f^i(x^{i'})$ на пересечении $(U,x^i)\cap(U',x^{i'})$ двух карт.

Теорема 3. *При переходе от одних координат к другим компоненты линейной связности преобразуются по следующему закону*

$$\Gamma_{i'j'}^{k'}(x') = f_k^{k'}(\Gamma_{ij}^k(x)f_{i'}^i f_{j'}^j + f_{i'j'}^k), \tag{18}$$

где
$$f^i_{i'}(x') = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\,,\; f^k_{i'j'}(x') = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\,,\; f^{k'}_k(x) = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно определению (**??**), в карте $(U', x^{i'})$ имеем формулу $\nabla_{i'}\partial_{j'} = \Gamma^{k'}_{i'j'}(x')\partial_{k'}$, в которой нужно сделать замену $\partial_{i'} = f^i_{i'}(x')\partial_i$. Используя свойства ковариантной производной, после некоторой цепочки вычислений получим
$$\nabla_{i'}\partial_{j'} = \Gamma^{k'}_{i'j'} f^k_{k'}\partial_k = \nabla_{\partial_{i'}}(f^j_{j'}\partial_j) = f^j_{j'}\nabla_{i'}\partial_j + \partial_{i'} f^j_{j'}\partial_j = f^j_{j'}\nabla_{(f^i_{i'}\partial_i)}\partial_j + f^k_{i'j'}\partial_k =$$
$$f^i_{i'} f^j_{j'}\nabla_{\partial_i}\partial_j + f^k_{i'j'}\partial_k = (f^i_{i'} f^j_{j'}\Gamma^k_{ij} + f^k_{i'j'})\partial_k,$$
откуда после свертывания с $f^{m'}_k$ приходим к утверждению теоремы. $\square$

Формула (18) показывает, что *компоненты связности не образуют тензорного поля*. В частности, их обращение в нуль не имеет инвариантного характера. В дальнейшем нам будет нужен только случай, когда компоненты связности симметричны по нижним индексам: $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

Операция ковариантного дифференцирования может быть применена и к тензорным полям любой валентности. Для этого в дополнение к условиям (12), (13) и (14) введем еще три:

1) Ковариантная производная скалярного поля совпадает с обычной производной этого поля в заданном направлении:
$$\nabla_{\mathbf{h}} F = \mathbf{h}(F);$$
2) Для любой пары тензорных полей T, S
$$\nabla_{\mathbf{h}}(T\otimes S) = \nabla_{\mathbf{h}} T\otimes S + T\otimes\nabla_{\mathbf{h}} S\,.$$
3) Ковариантное дифференцирование перестановочно со свертыванием:
$$\nabla_{\mathbf{h}}\circ \mathrm{tr} = \mathrm{tr}\circ\nabla_{\mathbf{h}}.$$

Нам понадобятся также деривационные уравнения поля натуральных кореперов $\{dx^i\}$, двойственные уравнениям (15). Покажем, что они имеют вид
$$\nabla_i dx^k = -\Gamma^k_{ij} dx^j\,. \tag{19}$$
В самом деле, дифференцируя ковариантно условие сопряженности базисов $dx^k(\partial_j) = \delta^k_j$, получим $\nabla_i dx^k(\partial_j) + dx^k\nabla_i\partial_j = 0$. Учитывая (15), отсюда найдем $\nabla_i dx^k(\partial_j) = -\Gamma^k_{ij}$, откуда и следует формула (19).

Рассмотрим теперь ковекторное поле $\xi = \xi_k(x)dx^k$. Принимая во внимание свойства (12) и (13), будем иметь
$$(\nabla_i\xi) = (\partial_i\xi_k)dx^k + \xi_k\nabla_i dx^k = (\partial_i\xi_k)dx^k - \xi_k\Gamma^k_{ij}dx^j$$
и, следовательно, имеем следующий аналог формулы (16)
$$\nabla_i\xi_j = \partial_i\xi_j - \Gamma^k_{ij}\xi_k\,. \tag{20}$$

Рассмотрим теперь тензорное поле валентности $(1,2)$. Пусть $T = T^i_{jk}(x)\partial_i\otimes dx^j\otimes dx^k$ — разложение этого тензора по векторам натуральных репера и корепера. Учитывая деривационные уравнения (15) и (19), получим
$$\nabla_k T = (\partial_k T^i_{jm})\partial_i\otimes dx^j\otimes dx^m + T^i_{jm}(\nabla_k\partial_i\otimes dx^j\otimes dx^m + \partial_i\otimes\nabla_k dx^j\otimes dx^m + \partial_i\otimes dx^j\otimes\nabla_k dx^m) =$$
$$(\partial_k T^i_{jk})\partial_i\otimes dx^j\otimes dx^m + T^i_{jm}(\Gamma^s_{ki}\partial_s\otimes dx^j\otimes dx^m - \partial_i\otimes\Gamma^j_{ks}dx^s\otimes dx^m - \partial_i\otimes\partial_j\otimes\Gamma^m_{ks}dx^s)\,,$$

так что в итоге имеем тензорное поле с компонентами

$$\nabla_k T^i_{jm} = \partial_k T^i_{jm} + T^s_{jm}\Gamma^i_{ks} - T^i_{sm}\Gamma^s_{kj} - T^i_{js}\Gamma^s_{km}\,. \tag{21}$$

Для тензорных полей произвольной валентности формула получается аналогично.

22.3. Параллельное перенесение и геодезические линии.

Параллельное перенесение вектора вдоль заданного пути $\Gamma : x = x(t)$ на многообразии (M, ∇), снабженном ковариантным дифференцированием, мы можем определить так же, как и на поверхности. Для этого используем формулу для ковариантной производной (16), ограничив ее на точки заданного пути с касательным вектором $\mathbf{h} = (\frac{dx^i}{dt})$. Тогда она принимает вид

$$\frac{\nabla a^k}{dt} = \Big(\frac{da^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}(x(t))\frac{dx^i}{dt}a^j(x)\Big)\partial_k\,.$$

Определение. *Векторное поле $\boldsymbol{a}(x)$ называется параллельным вдоль заданного пути, если его ковариантная производная вдоль этого пути равна нулю*:

$$\frac{da^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}(x(t))\frac{dx^i}{dt}a^j(t) = 0\,. \tag{22}$$

Имеют место свойства параллельного перенесения, доказательство которых аналогично тем, которые были даны в лекции 19:

Теорема 4. *Пусть в начальной точке $A(t = 0)$ кусочно гладкого пути $\Gamma : x = x(t)$ задан вектор $\boldsymbol{a} \in T_A M$. Тогда во всякой точке этого пути существует единственный вектор, параллельный данному.*

Теорема 5. *Параллельное перенесение $P(0, t) : T_0 M \to T_t M$ есть линейный изоморфизм касательных пространств.*

Заметим, что вместе с этим определен линейный изоморфизм кокасательных пространства $P^*(0, t) : T^*_t M \to T^*_0 M$. Вследствие этого становится возможным параллельное перенесение тензорных полей любой валентности. Условием этого является обращение в нуль ковариантной производной вдоль заданной кривой $x = x(t)$, когда $\mathbf{h} = (\frac{dx^i}{dt})$. Например, из формулы (21) следует, что для тензорного поля валентности $(1, 2)$

$$\frac{\nabla T^i_{jm}}{dt} = \frac{dT^i_{jm}}{dt} + (T^s_{jm}\Gamma^i_{ks} - T^i_{sm}\Gamma^s_{kj} - T^i_{js}\Gamma^s_{km})\frac{dx^k}{dt} = 0.$$

Определение. *Гладкий путь Γ на многообразии называется геодезическим, если при некотором каноническом выборе параметра его касательное векторное поле $\boldsymbol{h} = (\frac{dx^k}{dt})$ параллельно вдоль Γ.*

Из (22) сразу вытекает, что функции $x^k = x^k(t)$ должны удовлетворять системе ОДУ 2-го порядка

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij}(x(t))\,\frac{dx^i}{dt}\,\frac{dx^j}{dt} = 0\,. \tag{23}$$

Теорема 6. *Для всякой точки $x \in M$ и всякого вектора $\boldsymbol{a}_x \in T_x M$ в этой точке существует единственный геодезический путь $\Gamma : x = x(t)$ такой, что $x(0) = x$, $\frac{dx}{dt}(0) = \boldsymbol{a}_x$.*

Доказательство такое же, как и в теории поверхностей (лекция 19).

Лекция 23. ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ

23.1. Тензор кривизны.

Как мы видели в лекции 15, гауссова кривизна поверхности $K(u,v)$, характеризующая отклонение ее внутренней геометрии от геометрии плоскости, задается одной функцией. Следует ожидать, что отклонение геометрии m-мерного риманова многообразия (M,g) от геометрии евклидова пространства характеризуется некоторым множеством функций. В этой лекции мы покажем, что эти функции являются компонентами 4-валентного тензора, называемого тензором кривизны. Мы получим его компоненты сначала формально, а затем выясним геометрический смысл этого тензора.

Для этого рассмотрим деривационные уравнения многообразия (M,∇), полученные в лекции 23

$$\nabla_j\,\partial_m = \Gamma^k_{jm}(x)\partial_k \tag{24}$$

и вычислим вторую ковариантную производную. Принимая во внимание свойства ковариантных производных, получим

$$\nabla_i(\nabla_j\partial_m) = \partial_i\Gamma^k_{jm}\partial_k + \Gamma^k_{jm}\nabla_i\partial_k = (\partial_i\Gamma^k_{jm} + \Gamma^k_{is}\Gamma^s_{jm})\partial_k\,.$$

Поменяв местами индексы i и j, получим аналогичное выражение

$$\nabla_j(\nabla_i\partial_m) = \partial_j\Gamma^k_{im}\partial_k + \Gamma^k_{im}\nabla_j\partial_k = (\partial_j\Gamma^k_{im} + \Gamma^k_{js}\Gamma^s_{im})\partial_k\,.$$

Рассмотрим их разность

$$(\nabla_i\nabla_j - \nabla_j\nabla_i)\partial_m = R^k_{mij}(x)\partial_k\,, \tag{25}$$

где

$$R^k_{mij}(x) = \partial_i\Gamma^k_{jm} - \partial_j\Gamma^k_{im} + \Gamma^k_{is}\Gamma^s_{jm} - \Gamma^k_{js}\Gamma^s_{im} \tag{26}$$

являются компонентами тензора валентности $(1,3)$, который называется *тензором кривизны пространства* (M,∇). Таким образом, с формальной точки зрения тензор кривизны характеризует неперестановочность ковариантных производных.

Теорема 7. *Компоненты тензора кривизны обладают следующими свойствами симметрии*

$$R^k_{mij} = -R^k_{mji}, \quad R^k_{mij} + R^k_{ijm} + R^k_{jmi} = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Косая симметрия компонент тензора кривизны по последней паре индексов следует непосредственно из их определения (25). Менее очевидно второе свойство. Для его доказательства запишем равенство (25) трижды, делая циклическую перестановку нижних индексов $i \to j \to m \to i$

$$\nabla_i\nabla_j\partial_m - \nabla_j\nabla_i\partial_m = R^k_{mij}(x)\partial_k,$$

$$\nabla_j\nabla_m\partial_i - \nabla_m\nabla_j\partial_i = R^k_{ijm}(x)\partial_k,$$

$$\nabla_m\nabla_i\partial_j - \nabla_i\nabla_m\partial_j = R^k_{jmi}(x)\partial_k\,.$$

Сложим эти равенства, учитывая, что для симметричных компонент связности вследствие (24) $\nabla_i\partial_j = \nabla_j\partial_i$. Тогда в левой части все члены сократятся и мы получим второе свойство. □

С тензором кривизны связан *оператор кривизны*, который определяется следующим образом. Выберем в многообразии (M,∇) два линейно независимых векторных поля $\mathbf{p}(x)$ и $\mathbf{q}(x)$, определяющих в каждой точке 2-мерную плоскость.

Определение. *Оператором кривизны* $R(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ *называется отображение, которое при заданных векторных полях* $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ *всякому векторному полю* $\boldsymbol{a}(x)\in\mathfrak{X}M$ *ставит в соответствие векторное поле* $R(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\boldsymbol{a}$ *по формуле*

$$R(\mathbf{p},\mathbf{q})\mathbf{a}=\nabla_{\mathbf{p}}\nabla_{\mathbf{q}}\mathbf{a}-\nabla_{\mathbf{q}}\nabla_{\mathbf{p}}\mathbf{a}-\nabla_{[\mathbf{p},\mathbf{q}]}\mathbf{a}. \tag{27}$$

Покажем, что этот оператор определяется тензором кривизны. Для этого запишем его в координатах. Пусть $\mathbf{p}=p^i\partial_i$, $\mathbf{q}=q^j\partial_j$ и $\mathbf{a}=a^k\partial_k$. Начнем с первого слагаемого:

$$\nabla_{\mathbf{p}}\nabla_{\mathbf{q}}a^k=p^i\{\partial_i(\nabla_{\mathbf{q}}\mathbf{a})^k+\Gamma^k_{im}(\nabla_{\mathbf{q}}\mathbf{a})^m\}=p^i\{\partial_i[q^j(\nabla_ja^k)+\Gamma^k_{im}[q^j(\partial_ja^m+\Gamma^m_{js}a^s)]\}=$$
$$p^i\partial_iq^j(\nabla_ja^k)+p^iq^j(\partial_i\partial_ja^k+\partial_i\Gamma^k_{js}a^s+\Gamma^k_{js}\partial_ia^s+\Gamma^k_{im}\partial_ja^m+\Gamma^k_{im}\Gamma^m_{js}a^s).$$

Второе слагаемое имеет аналогичное выражение, надо лишь поменять местами поля $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$. После вычитания сократятся вторые члены в силу симметрии вторых частных производных, а также четвертый с пятым и пятый с четвертым членами соответственно. В результате, учитывая формулу (39) для тензора кривизны, а также формулу для коммутатора векторных полей (лекция 22), получим

$$\nabla_{\mathbf{p}}\nabla_{\mathbf{q}}a^k-\nabla_{\mathbf{q}}\nabla_{\mathbf{p}}a^k=R^k_{sij}a^sp^iq^j+[\mathbf{p},\mathbf{q}]^j\nabla_ja^k.$$

Учитывая, что последний член этого выражения есть $\nabla_{[\mathbf{p},\mathbf{q}]}\mathbf{a}^k$, получим в итоге следующее выражение для оператора кривизны

$$R(\mathbf{p},\mathbf{q})\mathbf{a}=R^k_{sij}a^sp^iq^j\partial_k. \tag{28}$$

В частности, для векторов натурального репера $\mathbf{p}=\partial_i$, $\mathbf{q}=\partial_j$ будем иметь

$$R(\partial_i,\partial_j)\mathbf{a}=R^k_{sij}a^s\partial_k\,,\quad(\nabla_i\nabla_j-\nabla_j\nabla_i)a^k=R^k_{sij}a^s\,.$$

23.2. Геометрический смысл тензора кривизны.

Как мы видели в лекции 23, параллельное перенесение определяет линейный изоморфизм касательных пространства $P(x,t):T_xM\to T_{x(t)}M$ вдоль пути перенесения. Для выяснения геометрического смысла тензора кривизны нам понадобится

Лемма. *Компоненты оператора параллельного перенесения* $P(x,t):T_xM\to T_{x(t)}M$ *вдоль пути* $x(t)$ *с начальной точкой* $x(0)=x$ *и с начальным касательным вектором* $\boldsymbol{p}=(\frac{dx^i}{dt}(0))$ *с точностью до малых первого порядка относительно параметра* t *равны*

$$P^k_j(x,t)=\delta^k_j-t\Gamma^k_{ij}(x)p^i. \tag{29}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условием параллельного перенесения вектора $\mathbf{a}$ вдоль пути $x=x(t)$ с начальной точкой $x=x(0)$ является равенство (лекция 23)

$$\frac{da^k}{dt}+\Gamma^k_{ij}(x(t))\frac{dx^i}{dt}a^j(t)=0\,. \tag{30}$$

Будем искать решение этой системы ОДУ в виде степенного ряда по параметру t с начальным значением $a^k(0)=a^k$. Ограничиваясь учетом малых лишь первого порядка, имеем

$$a^k(t)=a^k+t\frac{da^k(t)}{dt}(0)+\ldots$$

Значение производной в начальной точке из условия параллельного перенесения равно $\frac{da^k(t)}{dt}(0)=-\Gamma^k_{ij}(x)p^ia^j$, откуда

$$a^k(t)=(\delta^k_j-\Gamma^k_{ij}(x)p^i)a^j\,,$$

что доказывает лемму. $\square$

Для того, чтобы выяснить геометрический смысл тензора кривизны, рассмотрим некоторую точку $x \in (M, \nabla)$ и проходящую через нее 2-мерную поверхность с параметрическими уравнениями $x^k = x^k(u,v)$. Векторы с координатами $p^i(x) = \partial_u x^i$ и $q^i(x) = \partial_v x^i$ образуют в этой точке натуральный репер этой поверхности и определяют ее касательную 2-плоскость $L \in T_x M$. Рассмотрим на этой поверхности петлю γ с началом и концом в точке $x = x(0) = x(1)$. При параллельном перенесении вдоль петли мы получим линейно изоморфное отображение исходного касательного пространства на себя, т. е. невырожденный линейный оператор $P(\gamma) : T_x M \to T_x M$. Оказывается, что в главной своей части он определяется оператором кривизны $R(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ и, конечно, выбранной петлей.

Однако, для упрощения вычислений лучше поступить следующим образом. В качестве петли рассмотрим принадлежащий поверхности малый криволинейный параллелограм, образованный координатными линиями, вершины которого имеют координаты $x(u,v)$, $x_1(u+t,v)$, $x_2(u,v+t)$, $x_3(u+t,v+t)$. Паралельное перенесение вектора $\mathbf{a}$ вдоль пути $\gamma_1 = xx_1x_3$ порождает линейный изоморфизм $P(\gamma_1) : T_x M \to T_{x_3} M$ касательных пространств. Аналогичное отображение $P(\gamma_2)$ возникает при его перенесении вдоль пути $\gamma_2 = xx_2x_3$. В результате в точке x_3 получим два вектора: $\mathbf{a}'_3$ и $\mathbf{a}''_3$. Оказывается, что разность $\Delta\mathbf{a} = \mathbf{a}''_3 - \mathbf{a}'_3$ в главной своей части определяется тензором кривизны и, естественно, выбранным параллелограмом. Точнее, с точностью до малых второго порядка справедлива формула

$$\Delta\mathbf{a}^k = t^2 R^k_{mij}(x) F^{ij}(x) a^m\,, \tag{31}$$

где $F^{ij} = p^i q^j - p^j q^i$ — кососимметричный тензор, называемый *бивектором.*

Докажем эту формулу. Согласно лемме, в точке x_1 мы получим вектор $\mathbf{a}_1 = P(x,t)\mathbf{a}$. Аналогичным образом, перенося начальный вектор по v-линии, получим в точке x_2 вектор $\mathbf{a}_2 = Q(x,t)\mathbf{a}$, где оператор $Q(x,t)$ аналогичен (29), но определяется вектором $\mathbf{q}$

$$Q^k_j(x,t) = \delta^k_j - t\Gamma^k_{ij}(x) q^i. \tag{32}$$

Далее, перенося параллельно вектор $\mathbf{a}_1$ из точки x в точку x_3 вдоль координатной v-линии, получим вектор $\mathbf{a}'_3 = Q(x_1,t)\mathbf{a}_1$. Аналогично, перенося параллельно вдоль u-линии вектор $\mathbf{a}_2$ из точки x_2 в ту же точку x_3, получим вектор $\mathbf{a}''_3 = P(x_2,t)\mathbf{a}_2$. Их разность равна

$$\Delta\mathbf{a} = \mathbf{a}''_3 - \mathbf{a}'_3 = (P(x_2,t)Q(x,t) - Q(x_1,t)P(x,t))\mathbf{a}.$$

Учитывая, что в первом приближении $x_1^i = x^i + p^i(x)t$ и $x_2^i = x^i + q^i(x)t$, получаем

$$P(x_2,t) = P(x,t) + tq^s\partial_s P(x,t), \quad Q(x_1,t) = Q(x,t) + tp^s\partial_s Q(x,t).$$

Поэтому выражение в скобках равно

$$P(x,t)Q(x,t) - Q(x,t)P(x,t) + t(q^i(x)\partial_i P(x,t)Q(x,t) - p^i(x)\partial_i Q(x,t)P(x,t)).$$

Вычислим его в координатах. Имеем

$$P^k_s Q^s_m = (\delta^k_s - t\Gamma^k_{is}p^i)(\delta^s_m - t\Gamma^s_{jm}q^j) = \delta^k_m - t(\Gamma^k_{im}p^i + \Gamma^k_{jm}q^j) + t^2(\Gamma^k_{is}\Gamma^s_{jm}p^i q^j)$$

и аналогично

$$Q^k_s P^s_m = (\delta^k_s - t\Gamma^k_{is}q^i)(\delta^s_m - t\Gamma^s_{jm}p^j) = \delta^k_m - t(\Gamma^k_{im}q^i + \Gamma^k_{jm}p^j) + t^2(\Gamma^k_{is}\Gamma^s_{jm}q^i p^j).$$

Следовательно, после очевидных сокращений

$$P^k_s Q^s_m - Q^k_s P^s_m = t^2(\Gamma^k_{is}\Gamma^s_{jm} - \Gamma^k_{js}\Gamma^s_{im})p^i q^j.$$

Далее
$$\partial_i P^k_s = -t(\partial_i \Gamma^k_{js} p^j + \Gamma^k_{js}\partial_i p^j), \quad \partial_i Q^s_m = -t(\partial_i \Gamma^s_{jm} q^j + \Gamma^s_{jm}\partial_i q^j).$$
Поэтому, пренебрегая членами, содержащими t^3, получим
$$t(q^i(x)\partial_i P^k_s Q^s_m = -t^2 q^i(\partial_i \Gamma^k_{jm} p^j + \Gamma^k_{jm}\partial_i p^j)$$
и аналогично
$$t(p^i(x)\partial_i Q^k_s P^s_m = -t^2 p^i(\partial_i \Gamma^k_{jm} q^j + \Gamma^k_{im}\partial_i q^j).$$
Вычисляя разность этих двух выражений, следует иметь ввиду, что векторные поля $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, являясь операторами частных производных, коммутируют друг с другом, т. е. (лекция 22)
$$[\mathbf{p},\mathbf{q}]^j = p^i\partial_i q^j - q^i\partial_i p^j = 0.$$
Следовательно, заменяя индексы суммирования во втором члене, получим
$$t((q^i(x)\partial_i P^k_s Q^s_m - p^i(x)\partial_i Q^k_s P^s_m) = t^2(\partial_i \Gamma^k_{jm} - \partial_j \Gamma^k_{im})p^i q^j.$$
В итоге мы приходим к формуле
$$\Delta \mathbf{a}^k = t^2 R^k_{mij}(x) p^i q^j(x) a^m,$$
которая вследствие косой симметрии тензора кривизны по индексам i, j эквивалентна формуле (31). $\square$

Лекция 24. РИМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ.

24.1. Риманова метрика и риманова связность.

Теория гладких многообразий есть многомерное обобщение теории поверхностей, точнее ее внутренней геометрии. Но мы пока не имеем способа измерения рассматриваемых величин, т. е *метрики.* В теории поверхностей она в виде первой фундаментальной формы возникала естественным образом из евклидова пространства. В теории многомерных многообразий ее определил Б.Риман в 1854 г.

Определение. *Римановой метрикой на многообразии* M *называется симметричное тензорное поле* g *валентности (0,2) такое, что квадратичная форма* $\boldsymbol{a}^2 = g(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})$ *является положительно определенной.* Многообразие, снабженное римановой метрикой называется римановым и обозначается (M,g).

Итак, мы определили полную аналогию первой фундаментальной формы поверхности и многие понятия римановой геометрии представляют собой просто многомерное обобщение ее внутренней геометрии.

Поле g называется *метрическим тензором* пространства, а его значение на паре векторных полей $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = g(\mathbf{a},\mathbf{b})$ их *скалярным произведением.* Таким образом, если многообразие риманово, то касательное векторное пространство каждой его точки является евклидовым. Если заменить условие положительной определенности поля g более слабым условием невырожденности, то касательные пространства станут псевдоевклидовыми и мы придем к понятию псевдоримановой метрики и псевдориманова многообразия. Интерес к таким многообразиям возник в связи с общей теорией относительности: физическое пространство-время этой теории 4-мерно и имеет псевдориманову метрику сигнатуры $(+++-)$.

Пусть (U,φ) — некоторая карта на многообразии и $\{\partial_i\}$ — соответствующее поле натуральных реперов. Тогда метрический тензор имеет компоненты $g_{ij}(x) = (\partial_i,\partial_j)$, а скалярное произведение имеет вид $(\mathbf{a},\mathbf{b})(x) = g_{ij}(x)a^i(x)b^j(x)$. Отметим, что в силу условия положительной определенности определитель матрицы метрического тензора $\det(g_{ij}) > 0$. Так как он невырожденный, то в каждой точке определен линейный изоморфизм $T_AM \to T_A^*M$ касательных пространств на кокасательные, который векторному полю $\mathbf{a}(x)$ ставит в соответствие ковекторное поле в той же точке $\xi_{\mathbf{a}}(x)$ по формуле (7) лекц. 10: $\xi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = (\mathbf{a},\mathbf{b})$. При координатной записи удобно вектор и соответствующий ему ковектор обозначать одной и той же буквой, различая их лишь положением индекса. Благодаря этому соглашению в координатах это отображение выражается простой формулой $a_i(x) = g_{ij}(x)a^j(x)$ и называется *опусканием индекса.* Более того, этот изоморфизм является изометрией, если определить скалярное произведение ковекторных полей формулой $(\xi_{\mathbf{a}},\eta_{\mathbf{b}}) = (\mathbf{a},\mathbf{b})$. Обратное отображение имеет вид $a^i(x) = g^{ij}(x)a_j(x)$ и называется *поднятием индекса.* По этой причине в римановой геометрии векторы и ковекторы часто отождествляют и говорят, например, о векторном поле с ковариантными компонентами.

Имея метрический тензор, мы так же, как на поверхности, можем определить угол между векторными полями, модуль векторного поля, а также ориентированную длину дуги пути $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ формулой $s = \int |\mathbf{x}'(t)|dt$ или в координатах

$$s = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}(x(t))x'^i(t)x'^j(t)}\, dt.$$

Определим еще понятие объема. Пусть в римановом пространстве задан компакт $Q \in (M, g)$, ограниченный кусочно-гладкой гиперповерхностью. Предположим сначала, что Q покрывается одной картой.

Определение. *Ориентируемым объемом области* $Q \in (M, g)$ *называется число*

$$V(Q) = \int \cdots \int_Q \sqrt{g(x)}\, dx^1 \cdots dx^n .$$

Эта формула является многомерным обобщением той формулы, которая была получена в лекции 13 для вычисления площади на поверхности евклидова пространства, и выводится она аналогичным образом. Заметим, что под знаком интеграла стоит существенная компонента $\varepsilon_{12\dots n} = \sqrt{g(x)}$ дискриминантного тензора (п. 10.2). В силу компактности Q можно покрыть конечным числом карт. В этом случае дело сведется к суммированию конечного числа интегралов. Поробнее вопрос об интегрировании мы рассмотрим в разделе IV.

Как ведет себя метрика риманова пространства при параллельном перенесении? Это зависит от того, какую связность мы зададим на многообразии. Оказывается, справедлива

Теорема 8. (Риччи) *Существует единственная симметричная связность такая, что при параллельном перенесении векторов по любому пути сохраняется их скалярное произведение.*

Это условие означает, что линейный изоморфизм касательных пространств при параллельном перенесении является *изометрией*. Такая связность называется *римановой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, пусть при параллельном перенесении векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ вдоль любого пути $x = x(t)$, т. е. при условиях

$$\frac{da^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}(x(t))\frac{dx^i}{dt}a^j(t) = 0, \qquad \frac{db^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}(x(t))\frac{dx^i}{dt}b^j(t) = 0$$

сохраняется скалярное произведение этих векторов — функция $f(t) = g_{ij}(t)a^i(t)b^j(t)$ и, следовательно, $\frac{df}{dt} = 0$. Дифференцируя это тождество и учитывая условие параллельного перенесения, после несложных выкладок получим

$$\frac{df}{dt} = (\partial_k g_{ij} - \Gamma^s_{ki}g_{sj} - \Gamma^s_{kj})a^i b^j \frac{dx^k}{dt} = 0.$$

Заметим, что выражения в скобках есть ковариантные производные метрического тензора. Принимая во внимание произвольность в выборе векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и пути, отсюда получим систему алгебраических уравнений

$$\nabla_k g_{ij} = \partial_k\, g_{ij} - \Gamma^s_{ki}\, g_{sj} - \Gamma^s_{kj}\, g_{is} = 0$$

для компонент связности. Эта система знакома нам по лекции 18. Как там показано, она имеет единственное решение — символы Кристоффеля

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{ks}(\partial_i g_{js} + \partial_j g_{is} - \partial_s g_{ij}). \quad \square \tag{33}$$

Следствие. *Если связность риманова, то при параллельном перенесении сохраняется угол между векторами и длина вектора.*

В частности, при параллельном перенесении вектора вдоль геодезического пути сохраняется угол между вектором и единичным касательным вектором геодезической. Действительно, последний переносится параллельно по определению.

24.2. Дифференциальные операторы в теории поля.

Наличие метрического тензора в римановом многообразии (M, g) вносит некоторые особенности при работе с тензорными полями, рассмотренными в лекц. 22. Как мы уже отмечали, в (M, g) существует изометрия $T_x(M) \to T_x^*(M)$ между касательными и кокасательными пространствами в каждой точке, которая осуществляется с помощью опускания и поднятия индекса. Аналогичную операцию можно делать и с тензорными полями произвольной валентности (п. 10.1).

Рассмотрим некоторые тензорные поля в римановом пространстве, образуемые с помощью ковариантных производных. Пусть задано скалярное поле $F(x)$. Его ковариантные производные совпадают с частными: $\nabla_i F = \partial_i F$. В итоге, судя по закону преобразования, получили ковекторное поле $\xi = \mathrm{grad} F$, называемое *градиентом поля* F. При этом поле $F(x)$ называется его *потенциалом*. Подняв индекс, получим векторное поле $\mathbf{a}^i = g^{ij}\nabla_j F$ — контравариантные компоненты градиента. Возникает вопрос, всякое ли ковекторное поле является градиентом некоторого скалярного поля? Ответ оказывается отрицательным. Имеет место

Теорема 9. *Для того, чтобы ковекторное поле* ξ, *заданное в области* $U \subset (M, g)$ *было потенциальным, необходимо, а в односвязной области и достаточно, чтобы выполялось условие*

$$\nabla_i \xi_j - \nabla_j \xi_i = 0. \tag{34}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть задано ковекторное поле ξ. Если оно потенциально, то должна существовать функция $F(x)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению (**??**)

$$\frac{\partial F}{\partial x^j} = \xi_j(x^1, \dots, x^m).$$

Найдем условие, при котором решение F существует (условие интегрируемости). Подставив его в уравнение, получим тождество. Дифференцируя его ковариантно, получим $\nabla_i \partial_j F \equiv \nabla_i \xi_j$ или подробнее

$$\partial_i \partial_j F - \Gamma_{ij}^k \partial_k F \equiv \nabla_i \xi_j$$

Здесь левая часть симметрична относительно индексов i, j. Поэтому должна быть симметрична и правая. Отсюда получаем условие (34). Пусть теперь это условие выпонено. Тогда $dF = \xi_i dx^i$ есть полный дифференциал. Выберем некоторую точку и путь $\Gamma : x = x(t)$, соединяющий ее с произвольной точкой x заданной области. Тогда, как известно из анализа, если область односвязна, функция

$$F(x) = \int_\Gamma \xi_i(x) dx^i$$

не зависит от пути интегрирования и, следовательно, определяется однозначно. □

Пусть, далее, задано векторное поле $\mathbf{a}$ с компонентами $a^i(x)$. Ковариантные производные $\nabla_j a^i$ образуют тензорное поле валентности $(1, 1)$. Его след есть скалярное поле

$$\mathrm{Div}\mathbf{a} = \nabla_i a^i\,, \tag{35}$$

которое называется *дивергенцией векторного поля* $\mathbf{a}$.

Нетрудно проверить следующие свойства этого дифференциального оператора:

$$1)\, \mathrm{Div}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathrm{Div}\mathbf{a} + \mathrm{Div}\mathbf{b}; \quad 2)\, \mathrm{Div}(f(x)\mathbf{a}) = f(x)\mathrm{Div}\mathbf{a} + (\mathrm{grad} f(x), \mathbf{a}).$$

В частности, если $\lambda \in \mathbb{R}$, то это число можно вынести за знак дивергенции.

Если поле $\mathbf{a}$ потенциально, т.е. $\mathbf{a}^i = g^{ij}\nabla_j F$, то вследствие ковариантного постоянства метрического тензора его дивергенция принимае следующий вид

$$\triangle = g^{ij}\nabla_i\nabla_j F.$$

Это *оператор Лапласа.*

Определение. *Если дивергенция векторного поля равна нулю, то оно называется соленоидальным.*

Найдем развернутое выражение формулы (35) в координатах, позволяющее не находить символы Кристоффеля и поэтому удобное при вычислениях. Из формулы для ковариантных производных имеем

$$\mathrm{Div}\mathbf{a} = \partial_i a^i + \Gamma^i_{ik} a^k .$$

Вычислим величины Γ^i_{ik}. Для этого рассмотрим объем параллелепипеда $V(x) = \varepsilon(\partial_1, \ldots, \partial_n) = \sqrt{g}$, где $g = \det(g_{ij})$, построенного на векторах натурального репера. Он равен компоненте $\varepsilon_{12\ldots n}$ дискриминантного тензора. Изменение этого объема при смещении точки x характеризуется частными производными

$$\partial_k V = \varepsilon(\partial_k\partial_1, \ldots, \partial_n) + \cdots + \varepsilon(\partial_1, \ldots, \partial_k\partial_n).$$

Используя деривационные уравнения, получим $\partial_k V = \Gamma^i_{ik} V$ и, следовательно, $\Gamma^i_{ik} = \partial_k \ln\sqrt{g}$, . Таким образом, в итоге имеем

$$\mathrm{Div}\mathbf{a} = \partial_i a^i + a^k \partial_k \ln\sqrt{g} .$$

Пример. Вычислим дивергенцию векторного поля на плоскости в полярных координатах: $\mathbf{r} = r\mathbf{e}(\varphi)$. Так как $g_{11} = 1,\ g_{12} = 0,\ g_{22} = r^2$, то $g = r^2$. Получим

$$\mathrm{Div}\mathbf{a} = \partial_1 a^1 + \partial_2 a^2 + \frac{1}{r}a^1.$$

Рассмотрим теперь ковариантные компоненты a_j векторного поля и ковариантные производные $\nabla_i a_j$. Это тензорное поле валентности $(0,2)$. Разложим его на симметричный и кососимметричный тензоры: $\nabla_i a_j = \nabla_{(i}a_{j)} + \nabla_{[i}a_{j]}$. Первый из них называется *тензором деформации.* Что касается кососимметричного тензора $w_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i a_j - \nabla_j a_i)$, то силу симметрии по нижним индексам символов Кристоффеля его можно выразить только через частные производные

$$w_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i a_j - \partial_j a_i). \tag{36}$$

Он называется *тензором вращения* векторного поля. Это выражение нам уже встречалось в формуле (34). С помощью этого тензора теорему (8) можно сформулировать следующим образом: *Для того, чтобы векторное поле* $\boldsymbol{a}$ *было потенциально, необходимо, а в случае односвязной области и достаточно, чтобы его тензор вращения был равен нулю.*

Рассмотрим этот тензор в 3-мерном пространстве. Заметим, что в этом случае он имеет только три существенные компоненты: w_{23}, w_{31}, w_{12}. Но столько же компонент имеет и векторное поле. Биективное соответствие между ними мы запишем с помощью дискриминантного тензора

$$w^k = \varepsilon^{ijk} w_{ij} = \varepsilon^{ijk}\partial_i a_j. \tag{37}$$

При $n = 3$, как мы знаем из лекц. 11, он имеет единственную существенную компоненту $\varepsilon^{123} = \frac{1}{\sqrt{g}}$. Итак, мы получили векторное поле, присоединенное к полю $\mathbf{a}$, которое называется *ротацией* поля $\mathbf{a}$ и обозначается $\mathbf{w} = \operatorname{rot} \mathbf{a}$. Согласно (37) координаты ротации равны равны

$$w^1 = \frac{1}{\sqrt{g}}(\partial_2 a_3 - \partial_3 a_2), \quad w^2 = \frac{1}{\sqrt{g}}(\partial_3 a_1 - \partial_1 a_3), \quad w^3 = \frac{1}{\sqrt{g}}(\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1).$$

Если к тому же пространство евклидово, а координаты прямоугольные, то $g = 1$ и мы получаем формулу

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}. \tag{38}$$

Из (37) вытекают следующие свойства ротации:

$$1) \operatorname{rot}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \operatorname{rot} \mathbf{a} + \operatorname{rot} \mathbf{b}; \quad 2) \operatorname{rot}(f(x)\mathbf{a}) = f(x)\operatorname{rot} \mathbf{a} + [\operatorname{grad} f(x), \mathbf{a}].$$

В частности, если $\lambda \in \mathbb{R}$, то этот числовой множитель можно выносить за знак ротации.

Лекция 25. ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

25.1. Свойства тензора кривизны римановых пространств.

Если многообразие риманово, то его тензор кривизны обладает рядом дополнительных свойств.

Теорема 10. *Тензор кривизны риманова пространства полностью определяется его метрическим тензором.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формулы

$$R^k_{mij}(x) = \partial_i \Gamma^k_{jm} - \partial_j \Gamma^k_{im} + \Gamma^k_{is}\Gamma^s_{jm} - \Gamma^k_{js}\Gamma^s_{im} \tag{39}$$

следует, что компоненты тензора кривизны вычисляются через компоненты связности и их частные производные. Но в случае риманова пространства эти компоненты суть символы Кристоффеля, которые определяются через компоненты метрического тензора и их частные производные первого порядка

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{ks}(\partial_i g_{js} + \partial_j g_{is} - \partial_s g_{ij}). \tag{40}$$

Отсюда следует, что компоненты тензора кривизны есть некоторые функции компонент метрического тензора и их частных производных до второго порядка. □

Как мы уже отмечали в предыдущей лекции, в силу (39) компоненты тензора кривизны кососимметричны по последней паре индексов. Покажем, что в случае риманова пространства он обладает дополнительными свойствами симметрии. Для этого, опустив верхний индекс с помощью метрического тензора, рассмотрим ковариантные компоненты этого тензора $R_{kmij} = g_{ks} R^s_{mij}$.

Теорема 11. *В римановом пространстве ковариантные компоненты тензора кривизны не изменяются при перестановке первой и второй пары индексов и кососимметричны по первой паре*

$$R_{kmij} = R_{ijkm}, \quad R_{kmij} = -R_{mkij}\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала первое из этих свойств. Для этого обратимся к формуле (39), из которой имеем

$$R_{kmij} = g_{kr}(\partial_i \Gamma^r_{jm} - \partial_j \Gamma^r_{im} + \Gamma^r_{is}\Gamma^s_{jm} - \Gamma^r_{js}\Gamma^s_{im})\,.$$

Введем компоненты

$$\Gamma_{kjm} = g_{kr}\Gamma^r_{jm} = \frac{1}{2}(\partial_j g_{mk} + \partial_m g_{jk} - \partial_k g_{jm}), \tag{41}$$

полученные из символов Кристоффеля опусканием верхнего индекса. Дифференцируя их, получим

$$g_{kr}\partial_i \Gamma^r_{jm} = \partial_i \Gamma_{kjm} - \partial_i g_{ks}\Gamma^s_{jm}\,.$$

Но для римановой связности $\nabla_i g_{ks} = 0$ и поэтому $\partial_i g_{ks} = g_{rs}\Gamma^r_{ik} + g_{kr}\Gamma^r_{is}$. Следовательно,

$$g_{kr}\partial_i \Gamma^r_{jm} = \partial_i \Gamma_{kjm} - (g_{rs}\Gamma^r_{ik} + g_{kr}\Gamma^r_{is})\Gamma^s_{jm}\,,$$

что с учетом (41) дает

$$g_{kr}\partial_i \Gamma^r_{jm} = \frac{1}{2}(\partial^2_{ij} g_{km} + \partial^2_{im} g_{jk} - \partial^2_{ik} g_{jm}) - (g_{rs}\Gamma^r_{ik} + g_{kr}\Gamma^r_{is})\Gamma^s_{jm}\,.$$

Меняя местами индексы i, j, получим аналогичное соотношение. В результате их подстановки в ковариантные компоненты тензора кривизны после очевидных сокращений получим

$$R_{kmij} = \frac{1}{2}(\partial^2_{im} g_{jk} - \partial^2_{ik} g_{jm} - \partial^2_{jm} g_{ik} + \partial^2_{jk} g_{im}) - g_{rs}(\Gamma^r_{ik}\Gamma^s_{jm} - \Gamma^r_{im}\Gamma^s_{jk}) \qquad (42)$$

(здесь в последнем члене мы поменяли местами индексы суммирования r, s). Из этой формулы непосредственно видны искомые свойства симметрии компонент тензора кривизны. Впрочем, второе свойство является простым следствием первого. □

Свойства симметрии тензора кривизны значительно уменьшают число его существенных компонент. Можно показать, что их число равно $N = \frac{m^2(m^2-1)}{12}$. Это более, чем в 12 раз меньше числа компонент 4-валентного тензора, не обладающего симметриями. Это обстоятельство имеет важное практическое значение, существенно сокращая вычисления.

25.2. Пространства нулевой кривизны.

Для того, чтобы прояснить роль тензора кривизны в геометрии многообразий со связностью, рассмотрим многообразия, в которых он равен нулю.

Теорема 12. *Для того, чтобы многообразие (M, ∇) с симметричной связностью было локально аффинным, необходимо и достаточно, чтобы его тензор кривизны был равен нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть многообразие аффинное или является областью аффинного пространства. Введем в нем декартовы координаты $(O, \mathbf{e}_i)$. Здесь $\partial_i = \mathbf{e}_i = \mathrm{const}$ и поэтому, как следует из деривационных уравнений, в этой системе координат $\Gamma^k_{ij} = 0$. Тогда тензор кривизны $R^k_{mij} = 0$. Заметим, что это равенство, в отличие от предыдущего, имеет тензорный характер и поэтому имеет место в любой системе координат этого пространства.

Докажем достаточность этого условия. Пусть (M, ∇) — многообразие нулевой кривизны. Покажем, что тогда в области $U \subset M$ с координатами (x^i) можно ввести декартовы координаты $(x^{i'})$. Это значит, что существуют гладкие функции $x^{i'} = f^{i'}(x)$, определяющие преобразование к искомым координатам. При этом преобразовании компоненты связности преобразуются по формуле (нам удобно выразить данные компоненты через штрихованные)

$$\Gamma^k_{ij}(x) = f^k_{k'}(\Gamma^{k'}_{i'j'} f^{i'}_i f^{j'}_j + \partial_i f^{k'}_j)\,.$$

Но в декартовых координатах, если они существуют, должно быть $\Gamma^{k'}_{i'j'} = 0$ и, следовательно, искомые функции должны удовлетворять условию $\Gamma^k_{ij}(x) = f^k_{k'}\partial_i f^{k'}_j$. Таким образом, мы получаем для них следующую систему дифференциальных уравнений

$$a)\, \frac{\partial f^{i'}(x)}{\partial x^i} = f^{i'}_i(x), \qquad b)\, \frac{\partial f^{i'}_i(x)}{\partial x^j} = f^{i'}_k(x)\Gamma^k_{ij}(x) \qquad (43)$$

относительно $m^2 + m$ неизвестных функций $f^{i'}(x), f^{i'}_i(x)$, где $\det(f^{i'}_i) \neq 0$.

Эта система имеет решение лишь тогда, когда выполняются условия интегрируемости: так как левые части уравнений есть градиенты искомых функций, то градинтными должны быть и правые части. Рассмотрим сначала уравнения (a) и вычислим вторые частные производные $\partial^2_{ij} f^{i'} = \partial_j f^{i'}_i = f^{i'}_k(x)\Gamma^k_{ij}$. Здесь симетричны по индексам дифференцирования как левые, так и правые части, т. е. условия интегрируемости удовлетворяются. Рассмотрим уравнения (b). Для каждого номера i' набор функций $f_i^{i'}(x) = \partial_i f^{i'}(x)$ будем рассматривать как компоненты ковектора-градиента и поэтому эти уравнения можно записать в виде $\nabla_j f_i^{i'} = 0$. Дифференцируя их ковариантно еще раз, получим $\nabla_k \nabla_j f_i^{i'} = 0$, откуда $(\nabla_k \nabla_j - \nabla_j \nabla_k) f_i^{i'} = R^s_{ikj} f_s^{i'} = 0$. В силу невырожденности якобиевой матрицы $f_s^{i'}$ получим $R^s_{ikj} = 0$. Значит, поскольку это условие предполагается выполненным, рассматриваемая система имеет решение. Тем самым существование декартовых координат в рассматриваемой области доказано. □

Следствие. *Параллельное перенесение в односвязном многообразии* (M, ∇) *не зависит от пути перенесения тогда и только тогда, когда это многообразие локально аффинное.*

Это утверждение вытекает из формулы $\Delta a^k = t^2 R^k_{sij}(x) F^{ij}(x) a^s$ (лекция 25) и доказанной теоремы. Пояснения требует лишь необходимость условия. Если при любом выборе исходной точки, 2-мерной поверхности и путей перенесения $\Delta a^k = 0$, то в силу произвольности в выборе исходного вектора $\mathbf{a}$, бивектора F^{ij} и параметра t получим, что тензор кривизны равен нулю. Следует лишь проследить, чтобы пути охватывали односвязную область.

Все сказанное относится, конечно и к римановым пространствам. В этом случае доказанная теорема может быть уточнена следующим образом.

Теорема 13. *Для того, чтобы риманово многообразие* (M, g) *было локально евклидовым, необходимо и достаточно, чтобы его тензор кривизны был равен нулю.*

Для доказательства следует лишь заметить, что в декартовых координатах компоненты метрического тензора пространства $g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \mathrm{const}$ и обращение в нуль символов Кристоффеля $\Gamma^k_{ij} = 0$ является следствием этого свойства.

Лекция 26. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В этой лекции мы приводим интегральные теоремы теории векторного поля в 3-мерном евклидовом пространстве и их механическую и гидродинамическую интерпретацию. Общая теория интегрирования на гладких многообразиях будет рассмотрена в следующем разделе.

26.1. Работа и циркуляция векторного поля.

Пусть $A(\mathbf{r}_1)$, $B(\mathbf{r}_2)$ — две точки 3-мерного евклидова пространства $\mathbf{a}$ — вектор силы. Из элементарной механики известно, что его работа на отрезке $[A,B]$ вычисляется с помощью скалярного произведения $W = (\mathbf{a}, \vec{AB}) = (\mathbf{a}, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$. Рассмотрим теперь кусочно гладкую параметризованную кривую $\Gamma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$ и разобьем ее на n малых дуг точками $\mathbf{r}(t_\alpha)$, отвечающими значениям параметра $a = t_\circ < t_1 < \cdots < t_n = b$. Рассмотрим векторы-хорды $\triangle\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_{\alpha-1}$, $(\alpha = 1, \dots n)$ и векторы $\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{a}(\xi_\alpha)$, равные значению поля в произвольно выбранной точке $\xi_\alpha \in [t_{\alpha-1}, t_\alpha]$. Тогда элементарная работа вектора $\mathbf{a}_\alpha$ на отрезке $[\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_{\alpha-1}]$ выражается числом $W_\alpha = (\mathbf{a}_\alpha, \triangle\mathbf{r}_\alpha)$, а на всей ломаной числом $W_n = \sum_{\alpha=1}^n W_\alpha$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, когда $\max|\triangle\mathbf{r}_\alpha| \to 0$, получим криволинейный интеграл

$$W(\Gamma) = \int_\Gamma (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_\Gamma a_i du^i. \tag{44}$$

Например, в прямоугольных координатах общепринятых обозначениях $\mathbf{a} = (P, Q, R)$

$$W(\Gamma) = \int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz\,.$$

Интеграл (44) называется *работой* поля $\mathbf{a}$ вдоль кривой Γ. Если учесть, что $u^i = u^i(t)$, то дело сведется к вычислению интеграла Римана

$$W(\Gamma) = \int_a^b (\mathbf{a}(t), \mathbf{r}'(t))dt\,.$$

При вычислении работы следует учитывать, что:
1) При изменении направления параметризации кривой работа изменяет свой знак на противоположный: $W(-\Gamma) = -W(\Gamma)$;
2) При разбиении кривой $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ $W(\Gamma_1 + \Gamma_2) = W(\Gamma_1) + W(\Gamma_2)$;
3) Работа поля не зависит от параметризации кривой.

Пример. Вычислим работу поля $\mathbf{a} = (-y, x, 0)$, заданного в прямоугольных координатах, вдоль одного витка винтовой линии $\mathbf{r} = R\mathbf{e}(t) + bt\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$. Вдоль нее поле имеет компоненты $\mathbf{a} = (-R\sin t, R\cos t, 0)$, то есть $\mathbf{a} = R\mathbf{g}(t)$. С другой стороны, $\mathbf{r}' = R\mathbf{g}(t) + b\mathbf{k}$, так что $(\mathbf{a}, \mathbf{r}') = R^2$. Интегрируя, получим $W(\Gamma) = 2\pi R^2$.

Определение. *Работа векторного поля вдоль замкнутой кривой C (по контуру) называется циркуляцией*

$$W(C) = \oint_C (\mathbf{a}, d\mathbf{r}). \tag{45}$$

С помощью циркуляции можно дать следующую характеристику потенциальным векторным полям. Пусть область задания поля односвязна.

Теорема 14. *Векторное поле в односвязной области потенциально тогда и только тогда, когда его циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если поле потенциально, то его ковариантные компоненты $a_i = \partial_i F$. Тогда $(\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \partial_i F dx^i = dF$ есть полный дифференциал и в случае, когда контур охватывает односвязную область, $\oint_C dF = 0$. Обратно, если интеграл (45) по любому замкнутому контуру равен нулю, то подинтегральное выражение есть дифференциал некоторой функции F и, следовательно, $a_i = \partial_i F$. $\square$

Теорема 15. *Векторное поле в односвязной области потенциально тогда и только тогда, когда его работа вдоль пути, соединяющего две данные точки A и B, не зависит от выбора этого пути.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Γ_1 и Γ_2 — два пути, соединяющие A с B. Рассмотрим замкнутый контур $C = \Gamma_1 - \Gamma_2$. По предыдущей теореме равенство нулю циркуляции поля по контуру C есть необходимое и достаточное условие его потенциальности. Тогда имеем

$$W(C) = W(\Gamma_1 - \Gamma_2) = W(\Gamma_1) - W(\Gamma_2) = 0. \quad \square$$

По доказанному, число

$$W(A, B) = \int_\Gamma dF = F(B) - F(A)$$

зависит только от выбора точек и называется *разностью потенциалов*.

Пример. Рассмотрим векторное поле $\mathbf{a} = -\frac{e}{r^3}\mathbf{r}$, $r \neq 0$, заданное в сферических координатах (r, θ, φ). Такое поле создается электрическим зарядом величины e, помещенным в полюс этих координат. Так как $\mathbf{r} = r(\cos\theta\mathbf{e}(\varphi) + \sin\theta\mathbf{k})$, то $\mathbf{a} = -\frac{e}{r^2}(\cos\theta\mathbf{e}(\varphi) + \sin\theta\mathbf{k})$ и, как нетрудно видеть, имеет компоненты $\mathbf{a} = (-\frac{e}{r^2}, 0, 0)$. Оно потенциально с потенциалом $F = \frac{e}{r}$. Следовательно, работа этого поля определяется лишь положением точек и равна разности потенциалов $W(A_\circ, A) = e(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_\circ})$.

26.2. Поток векторного поля.

Понятие потока векторного поля возникает из следующего гидродинамического примера. Рассмотрим в 3-мерном пространстве параллелограмм, построенный на паре не параллельных векторов $\mathbf{p}, \mathbf{q}$. Тогда количество жидкости, протекающее через эту площадку за единицу времени со скоростью $\mathbf{a}$ равно ориентированному объему паралллелепипеда, построенного на этих векторах, т. е. смешанному произведению $Q = (\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$. Если σ — площадь параллелограмма, а $\mathbf{m}$ — единичный вектор его нормали такой, что тройка $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{m}$ правая, то $[\mathbf{p}, \mathbf{q}] = \sigma\mathbf{m}$ и смешанное произведение можно записать в виде $Q = (\mathbf{a}, \mathbf{m})\sigma$.

Пусть теперь $K \subset M$ — область ориентированной поверхности с параметрическим уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, ограниченная кусочно гладкой замкнутой кривой. Сетью координатных линий $u_\alpha = c_\alpha$, $v_\beta = c_\beta$ разобьем ее на малые криволинейные 4-угольники и обозначим через $\mathbf{a}_{\alpha\beta}$ значение вектора скорости в произвольно выбранной его точке. Каждый из 4-угольников, отбрасывая малые второго порядка, заменим параллелограммом в касательной плоскости точки (u_α, v_β), построенном на векторах $\mathbf{r}_1(u_\alpha, v_\beta)\Delta u_\alpha$ и $\mathbf{r}_2(u_\alpha, v_\beta)\Delta v_\beta$ (см. лекцию 11). Его площадь обозначим через $\triangle\sigma_{\alpha\beta}$, а орт нормального вектора через $\mathbf{m}_{\alpha\beta}$. Тогда, согласно сказанному выше, элементарный поток жидкости через площадку $\triangle\sigma_{\alpha\beta}$ равен $\triangle Q_{\alpha\beta} = (\mathbf{a}_{\alpha\beta}, \mathbf{m}_{\alpha\beta})\triangle\sigma_{\alpha\beta}$. Суммируя их по всей области и переходя к пределу, получим интеграл

$$Q(U) = \iint_K (\mathbf{a}, \mathbf{m}) d\sigma. \tag{46}$$

Он называется *потоком* векторного поля через область K. Если поверхность замкнута, то вектор нормали направляют обычно во внешнюю сторону.

Имеют место следующие свойства потока:
1) Изменение ориентации области $(K \to -K)$ равносильно изменению направлению вектора $\mathbf{m}$. Поэтому поток изменяет свой знак на противоположный;
2) Если $K = K_1 + K_2$ есть разбиение области, то $Q(K_1 + K_2) = Q(K_1) + Q(K_2)$;
3) Поток не зависит от выбора параметризации поверхности.

В прямоугольных координатах формула (46) упрощается. Рассмотрим направляющие косинусы нормали $\mathbf{m} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Тогда

$$Q = \int\int_K (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma\,.$$

Если принять во внимание, что $d\sigma\cos\alpha = dydz, \quad d\sigma\cos\beta = dzdx, \quad d\sigma\cos\gamma = dxdy$, то поток запишется в следующем виде

$$Q = \int\int_K Pdydz + Qdzdx + Rdxdy\,.$$

Пример. Подсчитаем в прямоугольных координатах поток поля $\mathbf{a} = \mathbf{r}$ радиусов-векторов через полную поверхность кругового цилиндра радиуса R и высоты h. Пусть ось цилиндра совпадает с осью Z и $0 \le z \le h$. Разобьем поверхность на три области: нижнее и верхнее основания K_1, K_2 и на боковую поверхность K_3.

1) На нижнем основании, лежащем в плоскости XY, $\mathbf{a} = (x, y, 0)$. Вектор нормали $\mathbf{m} = -\mathbf{k}$. Поэтому $(\mathbf{a}, \mathbf{m}) = 0$ и $Q_1 = 0$.

2) На верхнем основании $\mathbf{r} = (x, y, h)$, $\mathbf{m} = \mathbf{k}$. Следовательно, $(\mathbf{r}, \mathbf{m}) = h$ и $Q_2 = \int\int_{K_3} hd\sigma = \pi R^2 h$.

3) Уравнение боковой поверхности $\mathbf{r} = R\mathbf{e}(\varphi) + z\mathbf{k}$. Единичный вектор нормали $\mathbf{m} = \mathbf{e}(\varphi)$. Поэтому $(\mathbf{a}, \mathbf{m}) = (\mathbf{r}, \mathbf{m}) = R$. Учитывая, что $g_{11} = R^2, g_{12} = 0, g_{22} = 1$, и значит $g = R^2$ имеем $d\sigma = Rd\varphi dz$. Следовательно, $Q_3 = \int_0^{2\pi}\int_0^h R^2 d\varphi dz = 2\pi R^2 h$. В итоге получим $Q = 3\pi R^2 h$.

26.3. Соленоидальные векторные поля.

Напомним (лекция 24), что векторное поле называется *соленоидальным*, если его дивергенция равна нулю.

Теорема 16. *Векторное поле соленоидально тогда и только тогда, когда его поток через любую замкнутую поверхность, ограничивающую односвязную область, равен нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость сразу следует из теоремы Гаусса-Остроградского. Для того, чтобы доказать достаточность, рассмотрим некоторую точку A в области определения поля и односвязную окрестность этой точки, ограниченную поверхностью M (например, сферой). Рассмотрим формулу Гаусса-Остроградского и применим к ее правой части теорему о среднем значении. Получим

$$\iint_M (\mathbf{a}, \mathbf{m})d\sigma = (\mathrm{Div}\,\mathbf{a})_B V\,,$$

где B — некоторая точка из рассматриваемой окрестности. $\square$

Разделив на объем V окрестности и переходя к пределу при $V \to 0$ (и тогда $B \to A$), т. е. стягивая эту окрестность к точке A, получим

$$\mathrm{Div}_A(\mathbf{a}) = \lim_{V\to 0} \frac{\iint_M (\mathbf{a},\mathbf{m})d\sigma}{V}\,. \tag{47}$$

Эта формула (47) выясняет смысл значения дивергенции в данной точке. С точки зрения теории сплошных сред дивергенцию в зависимости от ее знака можно трактовать как меру увеличения или уменьшения объема среды в оерестности данной точки. Если $\mathrm{Div}\mathbf{a} = 0$, среда называется несжимаемой.

Другое отличительное свойство соленоидального поля состоит в следующем. Рассмотрим замкнутый контур Γ, трансверсальный к траекториям поля. Это означает, что он ни в одной точке не касается траекторий. Для простоты контур выберем плоским. Проведем через его точки траектории поля. Образованная этими кривыми фигура называется *векторной трубкой.* Тогда имеет место

Теорема 17. *Поток соленоидального поля через любое сечение векторной трубки постоянен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим часть векторной трубки, ограниченную двумя плоскими сечениями. Получилась замкнутая поверхность M, состоящая из трех частей: двух оснований K_1, K_2 (в порядке возрастания параметра) и боковой поверхности K_3. По предыдущей теореме поток $\iint_K (\mathbf{a},\mathbf{m})d\sigma = 0$, причем нормальный вектор $\mathbf{m}$ всюду направлен во внешнюю сторону поверхности. Тогда

$$\iint_{K_1} (\mathbf{a},\mathbf{m})d\sigma + \iint_{K_2} (\mathbf{a},\mathbf{m})d\sigma + \iint_{K_3} (\mathbf{a},\mathbf{m})d\sigma = 0.$$

Так как векторы поля касаются траекторий, на боковой поверхности $\mathbf{a}\perp\mathbf{m}$ и поэтому последний интеграл равен нулю. Что касается первого интеграла, заменим вектор $\mathbf{m}$ на $-\mathbf{m}$, изменив ориентацию сечения K_1. Тогда

$$I = \iint_{-K_1} (\mathbf{a},\mathbf{m})d\sigma = \iint_{K_2} (\mathbf{a},\mathbf{m})d\sigma.$$

Это равенство доказывает утверждение. $\square$

Величина I называется *мощностью* трубки.

Теорема 18. *Для того чтобы векторное поле было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы оно являлось ротацией некоторого векторного поля:* $\mathbf{a} = \mathrm{rot}\mathbf{b}$.

Поле $\mathbf{b}$ называется *векторным потенциалом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность этого утверждения следует из простой проверки того, что $\mathrm{Divrot}\,\mathbf{a} \equiv 0$. Действительно, в прямоугольных координатах

$$\partial_1(\partial_2 a_3 - \partial_3 a_2) + \partial_2(\partial_3 a_1 - \partial_1 a_3) + \partial_3(\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1) \equiv 0.$$

Обратно, пусть $\mathrm{Div}\mathbf{a} = 0$. Докажем существование векторного потенциала $\mathbf{b}$. Для этого выберем в области V прямоугольные координаты. Тогда компоненты искомого поля должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\partial_2 b_3 - \partial_3 b_2 = a^1, \quad \partial_3 b_1 - \partial_1 b_3 = a^2, \quad \partial_1 b_2 - \partial_2 b_1 = a^3.$$

Будем искать частное решение этой системы, наложив на искомые функции дополнительное ограничение, например $b^3 = 0$. Это можно сделать в силу того, что если $\mathbf{b}$ и $\mathbf{b}'$ — два решения и, следовательно, $\mathrm{rot}\,\mathbf{b} = \mathbf{a}$ и $\mathrm{rot}\,\mathbf{b}' = \mathbf{a}$, то $\mathrm{rot}\,(\mathbf{b}' - \mathbf{b}) = 0$

и, значит, поле $\mathbf{b}' - \mathbf{b}$ потенциально: $\mathbf{b}' - \mathbf{b} = \mathrm{grad} F$. Другими словами, векторный потенциал определяется с точностью до градиентного слагаемого: $\mathbf{b}' = \mathbf{b} + \mathrm{grad} F$.

Вследствие этого условия система уравнений упрощается и примет вид (мы заменяем индексные обозначения прямоугольных координат обычными)

$$\partial_z b^2 = -a^1, \quad \partial_z b^1 = a^2, \quad \partial_x b^2 - \partial_y b^1 = a^3.$$

Интегрируя первые два уравнения, получим

$$b^1 = \int a^2 dz + c^1(x,y), \quad b^2 = -\int a^1 dz + c^2(x,y)\,,$$

где $c^1(x,y)$, $c^2(x,y)$ — произвольные функции. Подставим это в третье уравнение

$$-\partial_x \int a^1 dz - \partial_y \int a^2 dz + \partial_x c^2 - \partial_y c^1 = a^3.$$

Так как интегрирование ведется по переменной z, то дифференцирование по x и y можно провести под знаком интеграла

$$-\int (\partial_x a^1 + \partial_y a^2) dz + \partial_x c^2 - \partial_y c^1 = a^3.$$

Так как поле $\mathbf{a}$ соленоидально, то это можно записать так $\int \partial_z a^3 dz + \partial_x c^2 - \partial_y c^1 = a^3$. Проинтегрировав первое слагаемое, получим

$$\int \partial_z a^3 dz = a^3 + \varphi(x,y),$$

где $\varphi(x,y)$ — произвольная гладкая функция. В итоге

$$\partial_y c^1 - \partial_x c^2 = \varphi(x,y).$$

Таким образом, мы свели дело к одному дифференциальному уравнению с двумя переменными. Оно всегда имеет решение. Достаточно, например, взять $c^2(y)$ и тогда $c^1 = \int \varphi(x,y) dy + \psi(x)$. Тем самым существование поля $\mathbf{b}$ доказано. $\square$

Задача. Докажите, что в области, не содержащей особых точек, потенциальное векторное поле не имеет замкнутых траекторий.