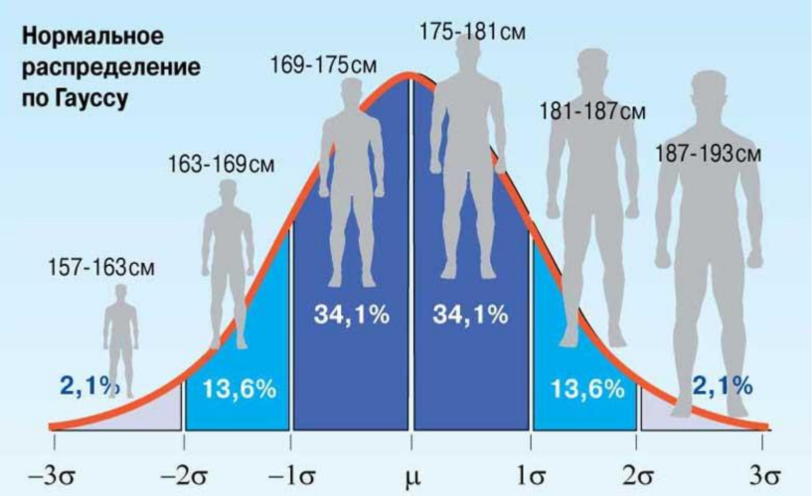
Занятие 5

Непараметрические критерии.

С точки зрения анализа данных их удобнее разбить на 3 группы.

I. Количественные признаки с нормальным распределением



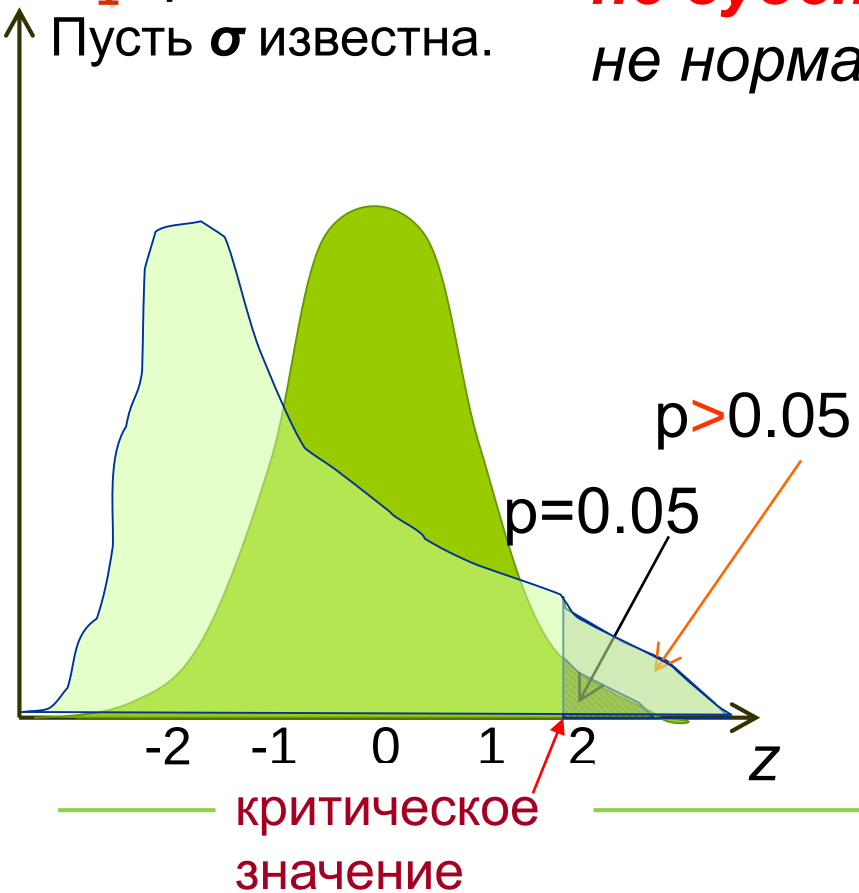
Используются для анализа **параметрические** тесты

Они задействуют в расчётах ***параметры*** известных распределений, главным образом — параметры нормального распределения (математическое ожидаемое ***μ*** «мю» и стандартное отклонение ***σ*** «сигма»).

Почему при проведении параметрических тестов важно соблюдать условие нормальности распределения?

H_0: $\mu \leq 90$ г;
H_1 : $\mu > 90$ г
Пусть σ известна.

Распределение ***статистики критерия не будет нормальным****, если в выборке не нормальное распределение.*



Вероятность, что среднее в выборке попадёт в критическую область (рассчитанную для нормального распределения), будет выше, чем 0.05 – увеличится ошибка 1-го рода

Основной вывод:
пренебрежения условиями использования параметрических тестов может **увеличивать ошибку 1-го рода.**

ОШИБКА 1 рода: *вероятность найти различия, где их нет.*

Примечание: слабые отклонения от нормального распределения не очень страшны (в силу Центральной предельной теоремы), а **для больших выборок ими можно пренебречь** (кроме регрессионного анализа).

ANOVA устойчива к отклонениям от нормального распределения, особенно если выборки одинаковы по размеру.

II. Количественные признаки с ненормальным распределением и порядковые признаки

Если нет уверенности в нормальности распределения признака или распределение неизвестно анализ данных можно провести 3-мя способами:

1) ***нормализовать данные*** с помощью преобразований шкалы (логарифмирование, преобразование арксинуса, Бокса — Кокса и др.) и использовать далее параметрические методы;

2) использовать ***непараметрические методы.*** Способ традиционен и популярен (медианы и квартили, корреляция Спирмена, критерии Уилкоксона — Манна — Уитни, Краскела — Уоллиса, Фридмана и др.).

3) работать с исходными непреобразованными данными методами, устойчивыми к отклонениям от нормальности.

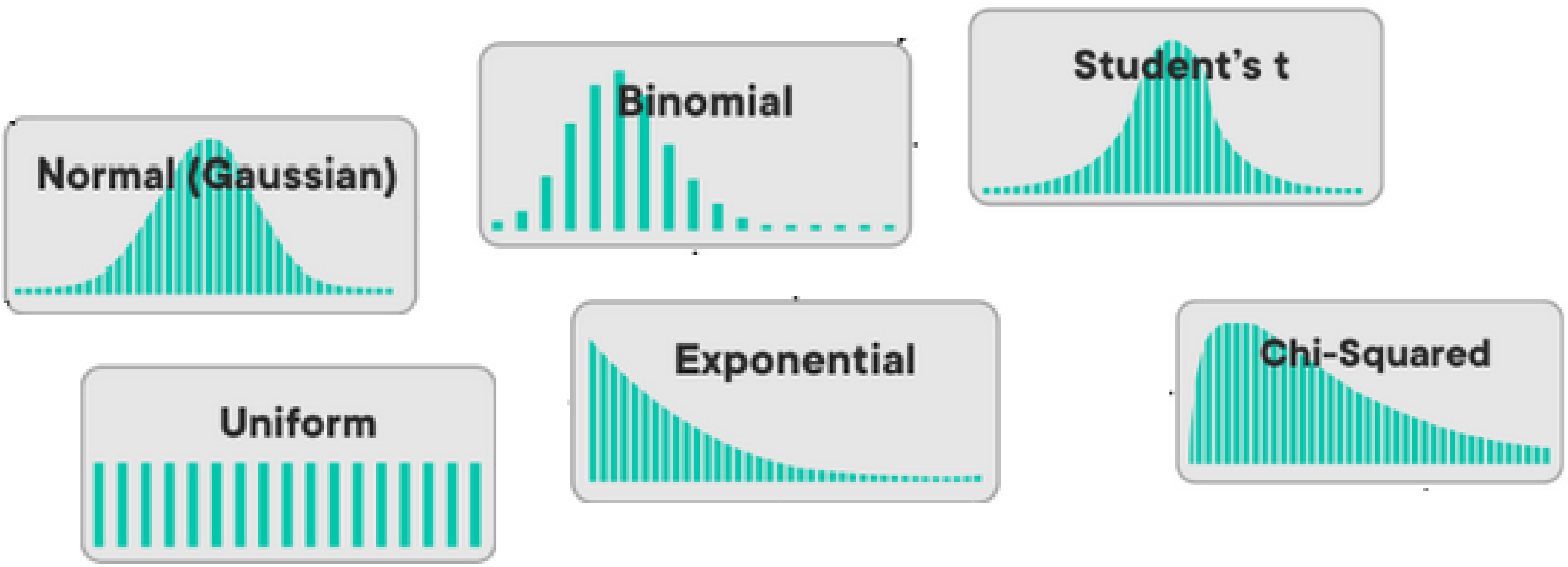
Это ***методы робастной статистики*** (усечённые средние или отличные от среднего М-оценки, средние абсолютные отклонения вместо среднеквадратичных и т. д.), или современные ***ресэмплинг-техники***, основанные на вычислительных возможностях компьютеров (складной нож, бутстреп, рандомизационные методы Монте-Карло).

III. Качественные признаки (см. далее лекцию «Анализ качественных»)

Распределения бывают

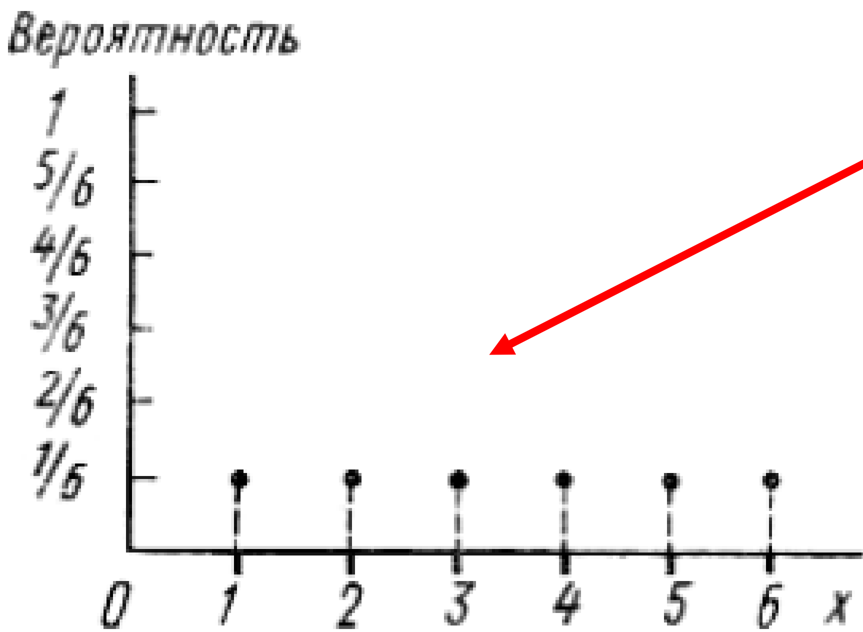
Природные (нормальное, биномиальное, Пуассона, экспоненциальное, лог-нормальное и пр.)

Распределения статистик критериев (t, F, U ...)



Равномерное (uniform)

Случайная величина имеет **дискретное равномерное распределение**, если она принимает конечное ***число значений с равными вероятностями***.



Распределение вероятностей дискретного равномерного распределения (n=6).

Может быть и дискретным, и непрерывным

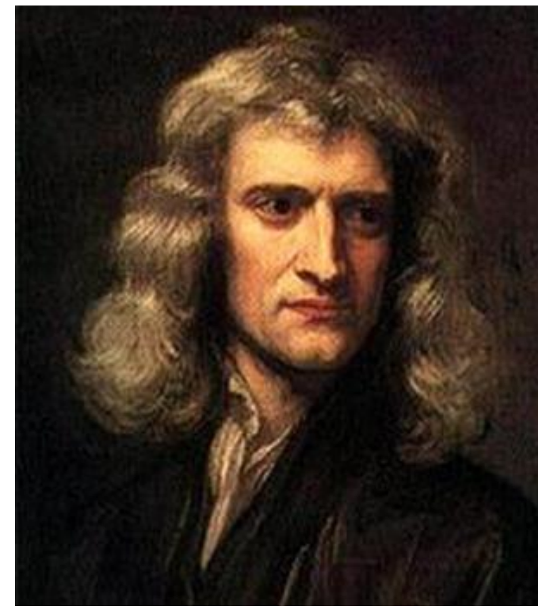
Биномиальное распределение

Одно из важнейших распределений вероятностей дискретно изменяющейся случайной величины. Введено в науку швейцарским математиком и одним из основателей теории вероятностей - ***Якобом Бернулли*** и опубликовано в ***1713 году.***

Якоб Бернулли
(*Jakob Bernoulli* 1655–1705)

Вероятности представляют собой ***члены бинома Ньютона***, благодаря чему распределение и получило своё название.

Биномиальному распределению обычно соответствуют доли, частоты, пропорции



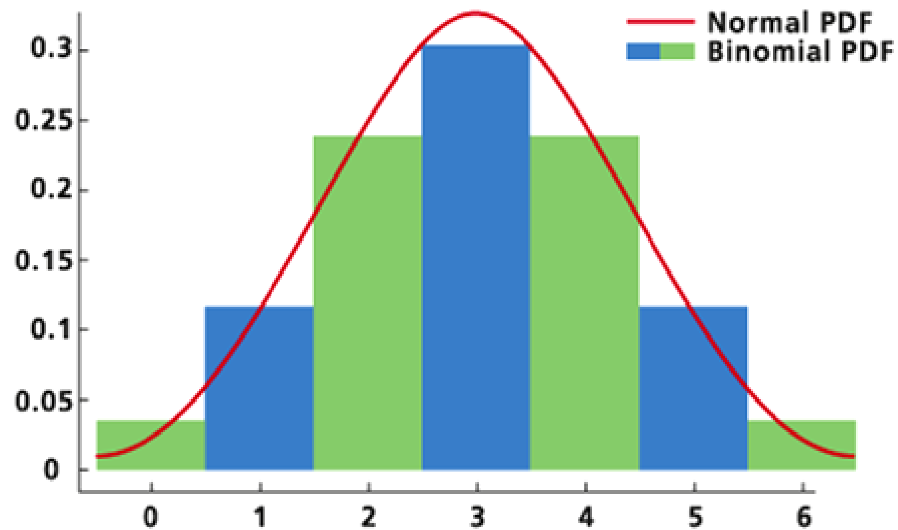
Исаак Ньютон
(Isaac Newton 1643-1727)

Пример: рассмотрим выводки из 6 детёнышей каждый. Возможное соотношение самцов и самок в выводке:

6:0; 5:1; 4:2; 3:3;
2:4; 1:5; 0:6

Распределение количества самцов в N выводков (независимых случайных экспериментов) из n = 6 зверьков, таких что вероятность рождения самца постоянна и равна p, а вероятность рождения самки $q = 1 - p$.

Вероятность такого выводка



Количество самцов в выводке из 6 зверьков

Если p мало, ситуация лучше описывается распределением Пуассона

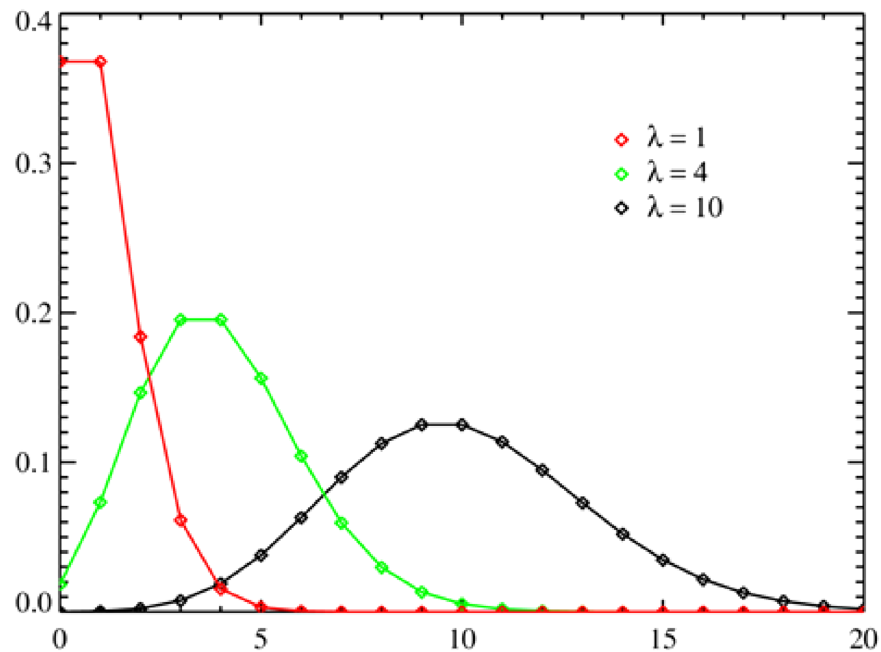
Распределение Пуассона

Показывает вероятность того или иного количества независимых друг от друга редких и случайных событий (особей и пр.) на заданном интервале времени (участке пространства, объёме...).

Симеон Дени Пуассон

(Siméon Denis Poisson 1781-1840)

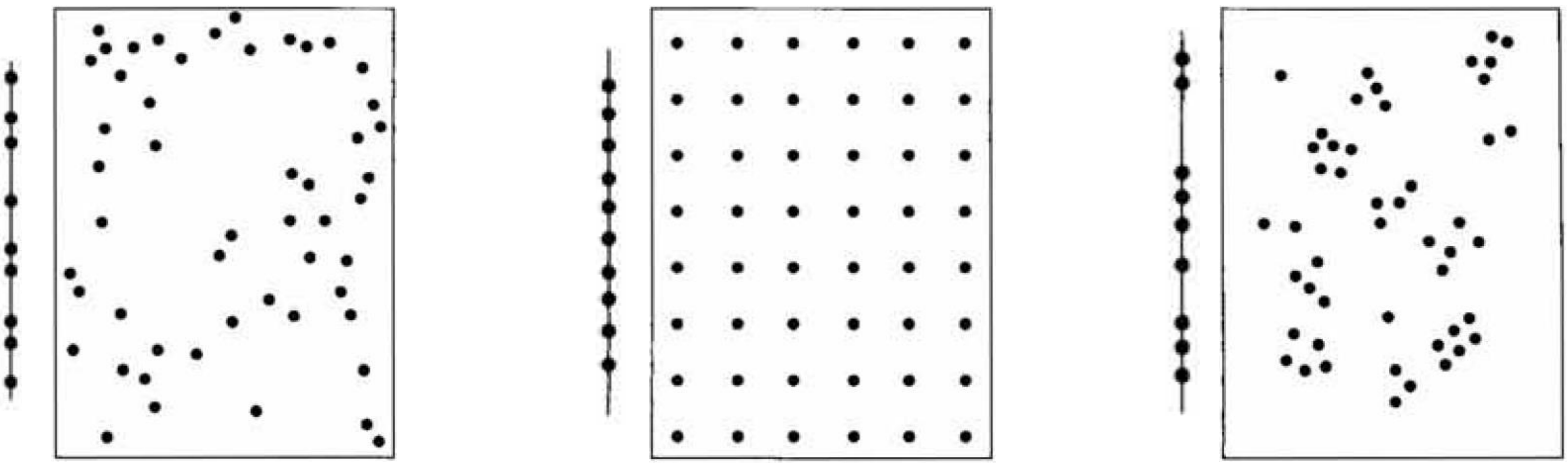
$$\mu = \sigma^2$$



Распределение имеет один ***параметр λ*** (греческая буква «лямбда») – ***среднее количество успешных испытаний в заданной области возможных исходов***.

Распределению Пуассона соответствуют частоты, количества случайно распределённых объектов

Сравнение распределения объектов во времени и пространстве со случайным распределением (testing for randomness)



случайное ***равномерное*** ***групповое***

$\sigma^2 = \mu$ $\sigma^2 < \mu$ $\sigma^2 > \mu$

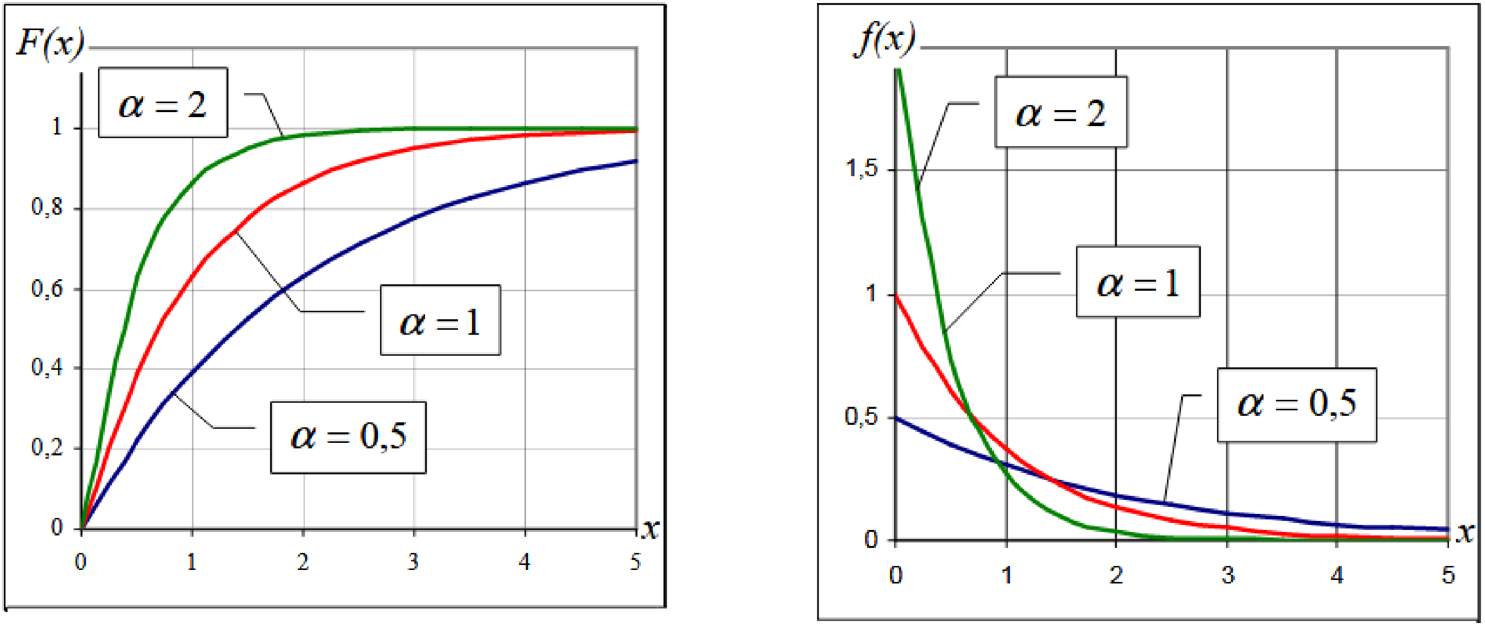
Важно: следует задавать размер элементарной единицы пространства (времени и пр.), напр., квадрата, так, чтобы $\mu \approx 1$

Экспоненциальное распределение

Хорошо описывает распределение промежутков времени (расстояний) между случайными событиями с заданной средней частотой событий.

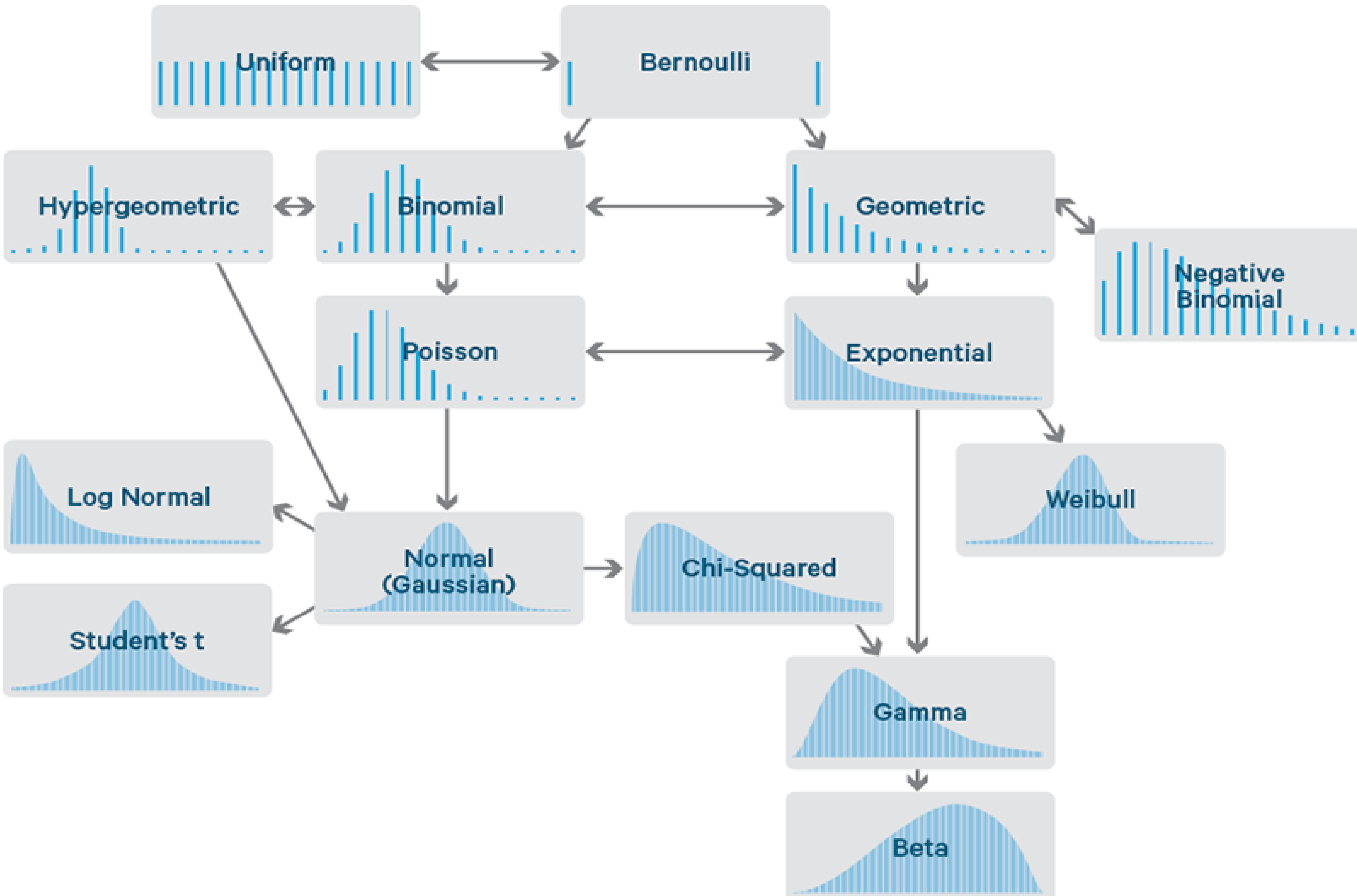
$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x}, \qquad f(x) = \alpha e^{-\alpha x},$$

где α>0 – параметр распределения; x≥0 – непрерывная случайная величина.



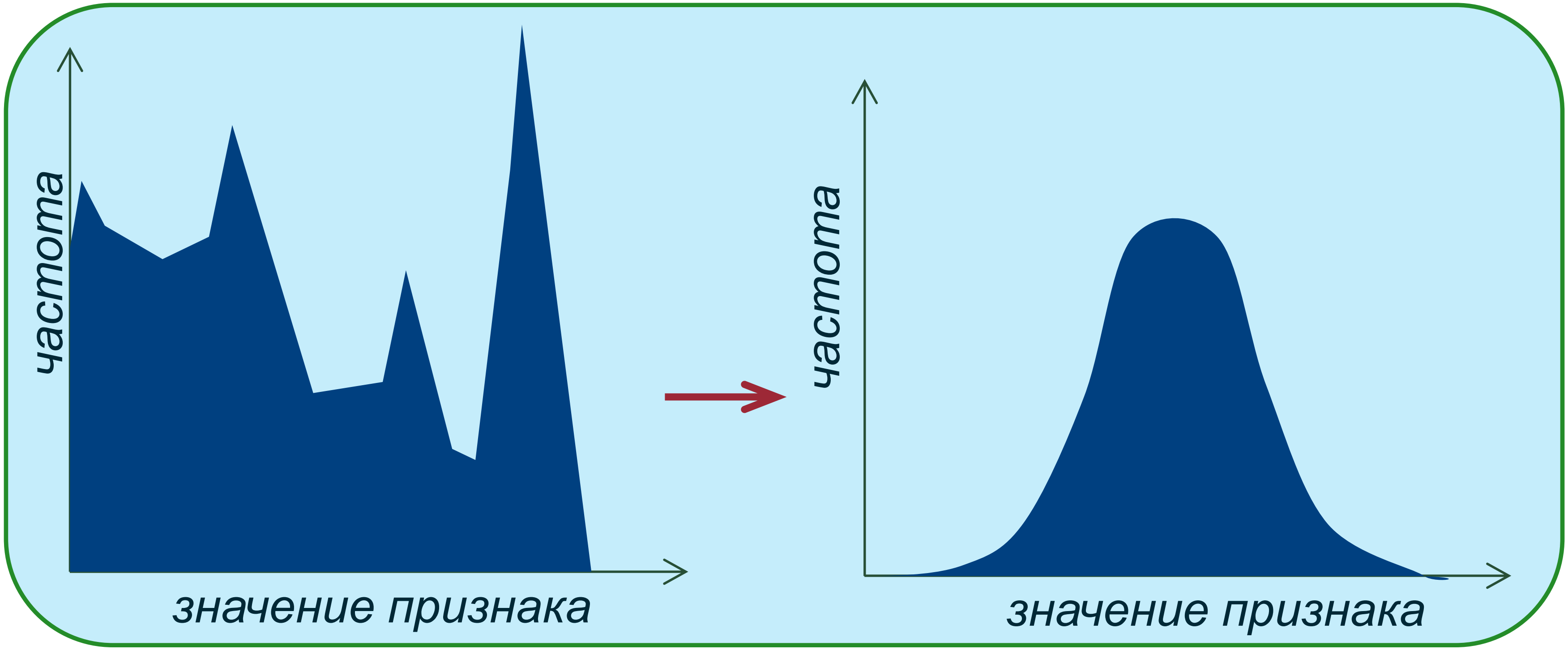
Функция и плотность экспоненциального распределения для трех значений параметра: α=5,0 ; α=1 ; α=2

Типы распределений



Трансформация данных

Если распределение отлично от нормального, выборки не гомогенны, факторы мультипликативны, можно **ТРАНСФОРМИРОВАТЬ данные**



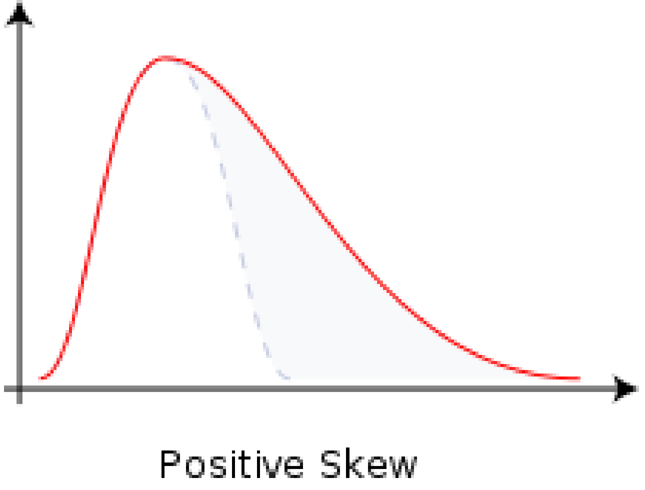
Прекрасное свойство: часто трансформация данных приводит одновременно к нормальному распределению, гомогенности и аддитивности

1. Логарифмическая трансформация *(logarithmic transformation):*

•Делает симметричным скошенное вправо (positively skewed) распределение.
•Используется в случае, когда среднее значение в группе прямо пропорционально стандартному отклонению.

$$X_i' = \lg X_i$$

$$X_i' = \lg\left(X_i + 1\right)$$



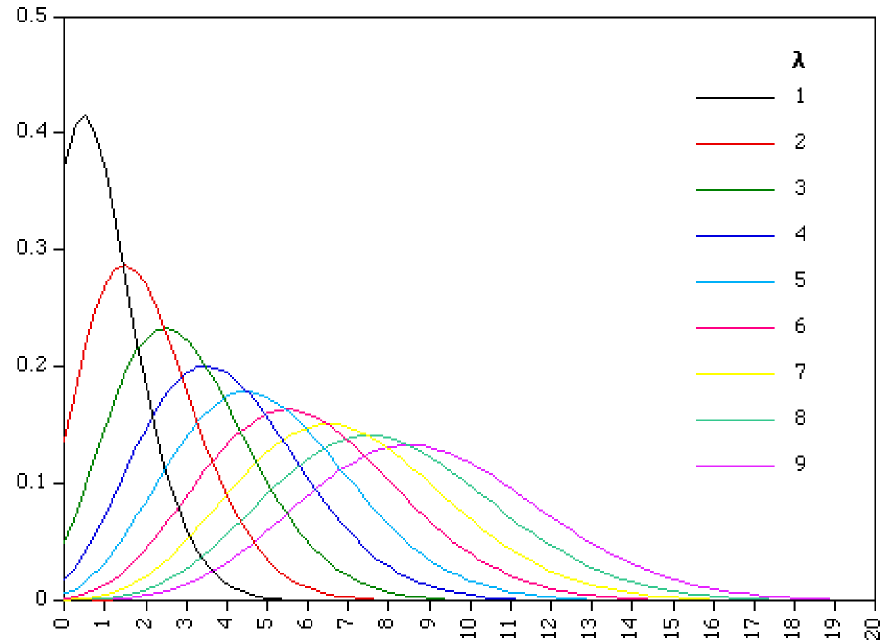
Если в результате логарифмирования получилось нормальное распределение, исходное распределение было ***логнормальным***.

2. Извлечение квадратного корня *(square root transformation)*

- Используется, когда среднее значение в группе прямо пропорционально дисперсии.
- обычно такое явление свойственно выборкам из распределения Пуассона (т.е., данные представляют собой количества случайных событий, объектов…)

$$X_i' = \sqrt{X_i}$$

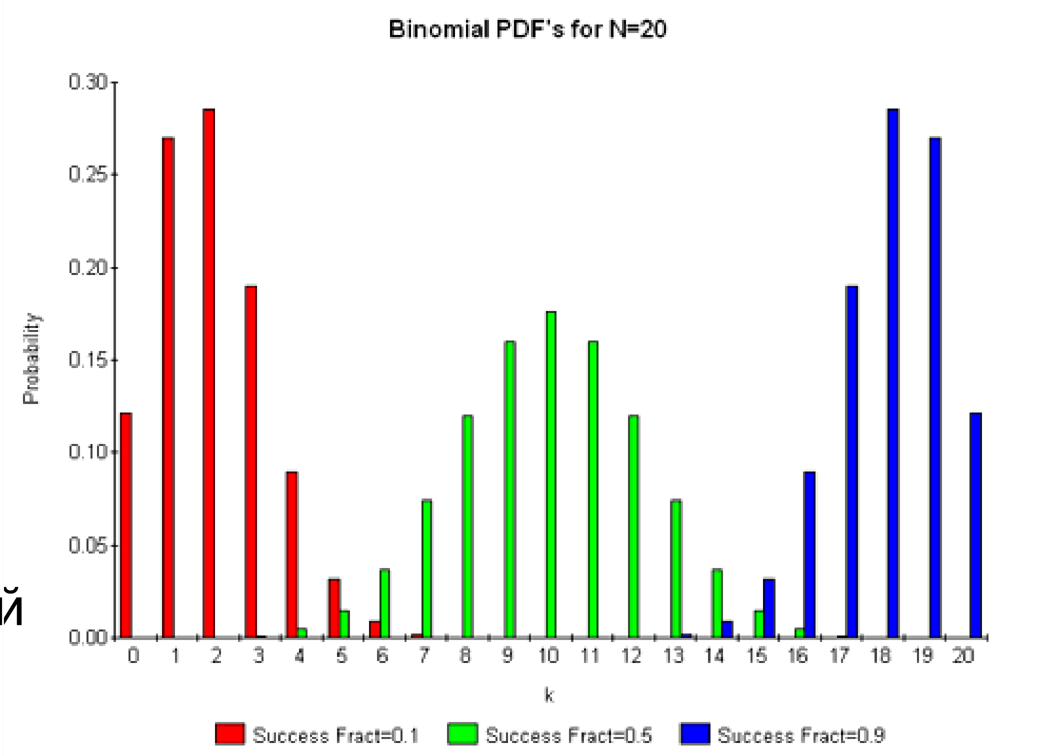
$$X_i' = \sqrt{X_i + 0{,}5}$$



3. Арксинусная трансформация (*arcsine transformation*)

применяется для процентов и долей ($X_i \leq 1$), которые обычно формируют биномиальное распределение.

$$X_i' = \arcsin \sqrt{X_i}$$

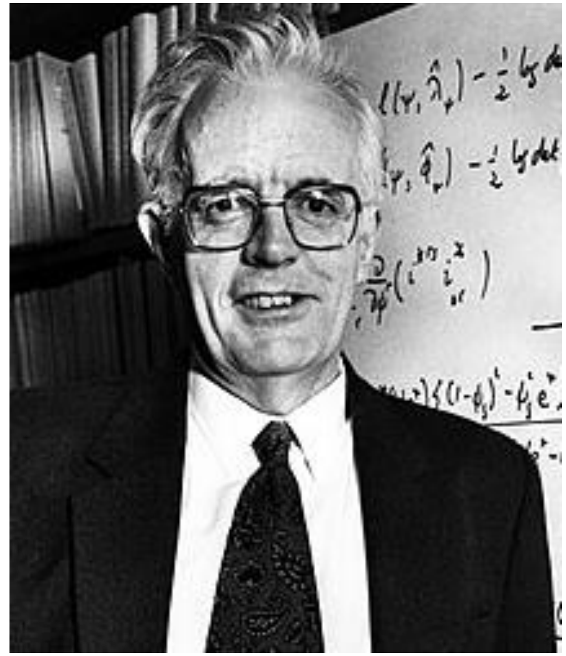


Например, мы исследуем долю самцов или долю переживших зиму детёнышей в выводках сурков.

4. Бокс-Кокс преобразование (*Box-Cox transformation*)

Среди множества методов преобразований одним из лучших (при неизвестном типе распределения) считается Бокс-Кокс преобразование.

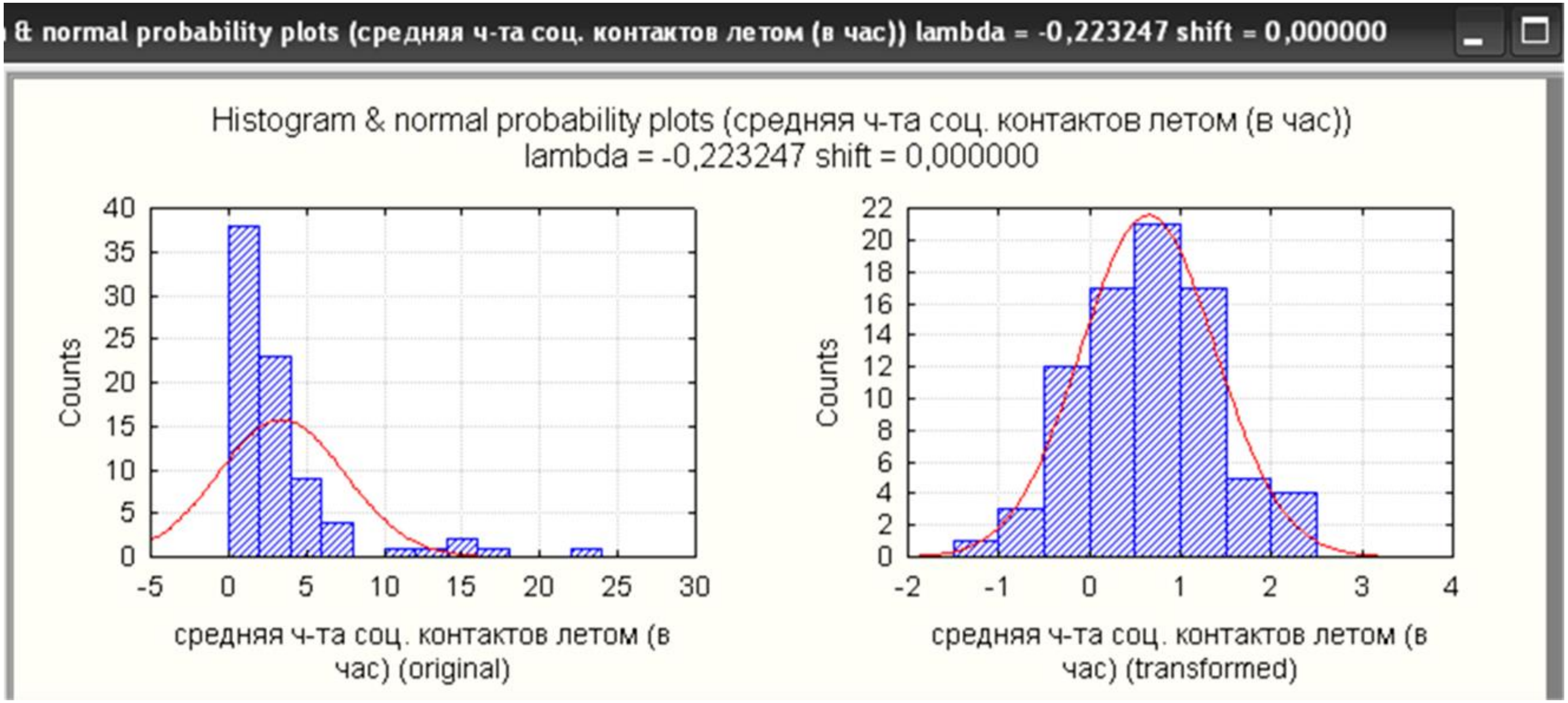
Сущность метода впервые была изложена в **1964 году**, в Журнале Королевского статистического общества, известными статистиками – Джорджем Боксом и сэром Дэвидом Коксом



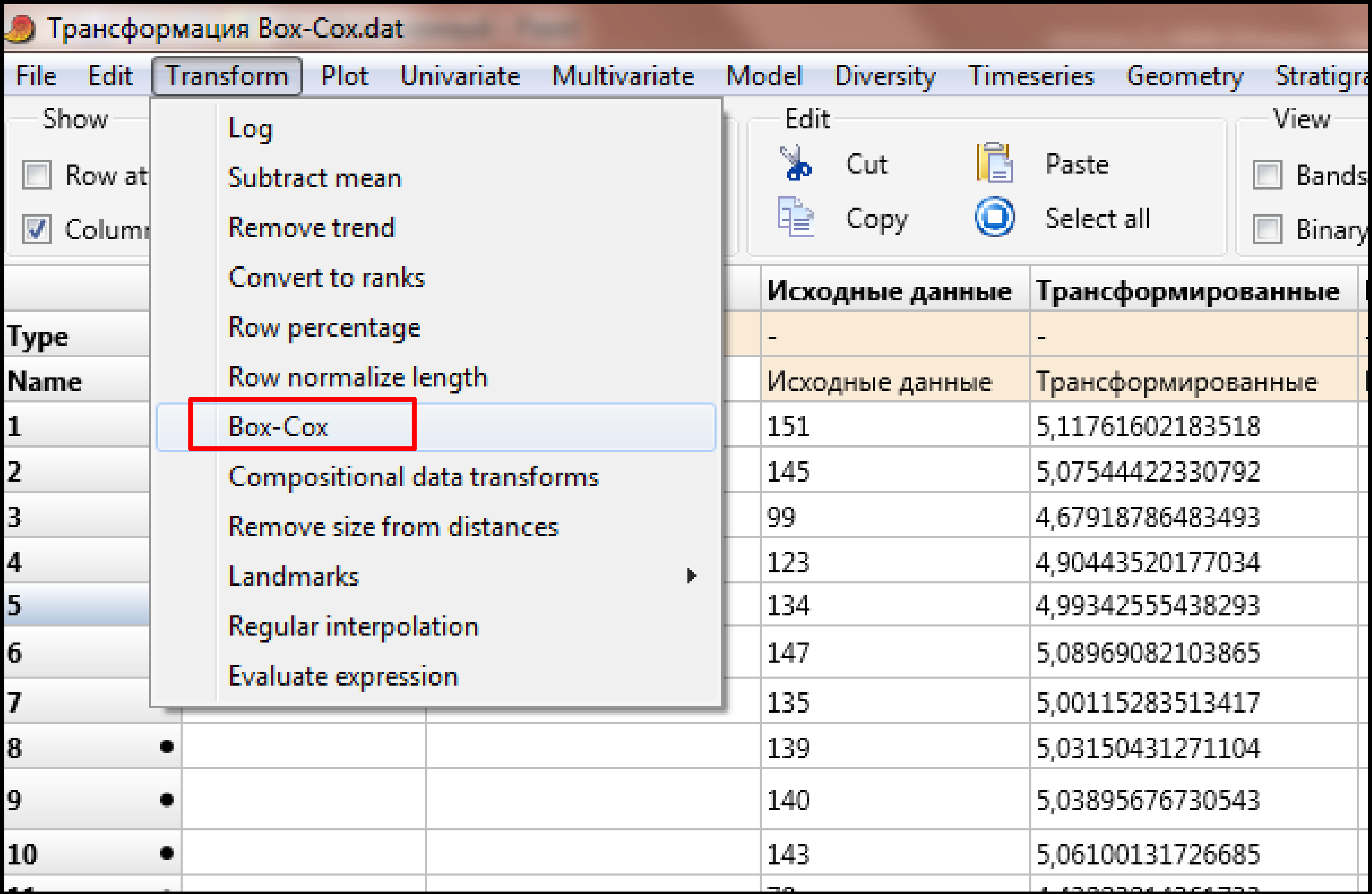
Джордж Бокс
(*George E. P. Box 1919-2013*)

Дэвид Кокс
(*David Roxbee Cox 1927*)

Универсальная трансформация данных, в которой программа методом проб подбирает наилучшие параметры и способ трансформации для конкретных данных (ищется особый параметр λ)



Box-Cox transformation



Если распределение не удовлетворяет условиям параметрических тестов и трансформация не помогает или невозможна, спользуем

Непараметрические методы (nonparametric methods)

= “distribution-free” tests

✓Свойства распределения неизвестны, и параметры распределения (среднее, дисперсию и т. п.) мы использовать не можем

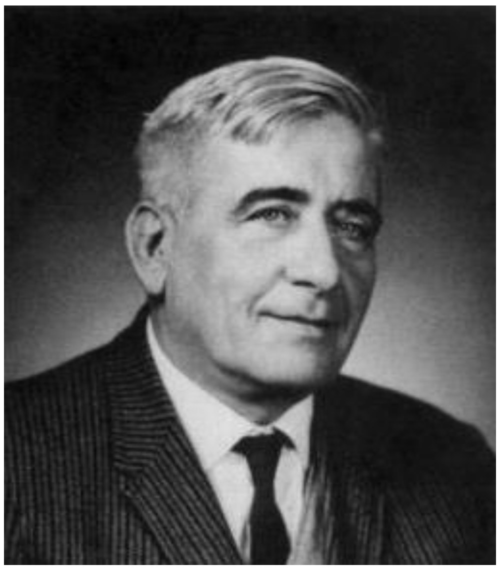
✓Основной подход – ранжирование (*ranking*) наблюдений (выстраиваем их по порядку от самого маленького значения к наибольшему).

✓ подразумевается, что сравниваемые распределения имеют одинаковую форму и дисперсию.

Сравнение 2-х независимых групп

Манн-Уитни тест (*Mann-Whitney U-test*)

*В **1947 году** двумя американскими математиками – **Манном** и **Уитни** для сравнения 2-х независимых выборок был предложен не параметрический тест.*



Непараметрический аналог теста Стьюдента.

Является развитием идей Франка Уилкоксона изложенных в 1945 году. Поэтому в ряде случаев называется – тест ***Уилкоксона-Манна-Уитни***

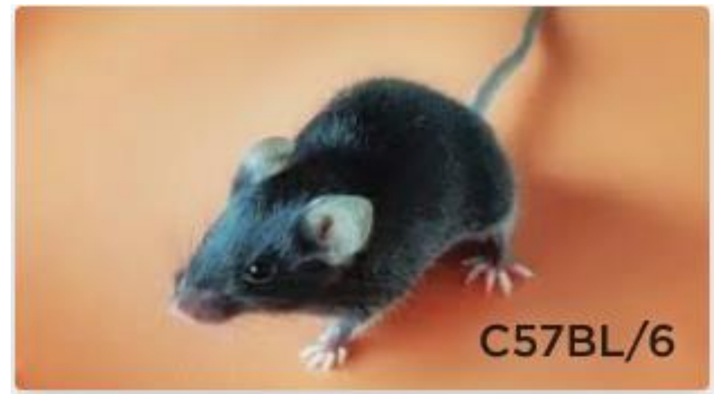
Генри Манн
(*Henry Berthold Mann 19005-2000)*

Дональд Рэнсом Уитни
(Donald Ransom Whitney
1915—2001

Пример. Мы исследуем две линии лабораторных мышей. Хотим сравнить размеры выводков у этих зверей.

Фактор – линия: 1. белые (BaLB/C); 2. черные (C57BL/6)
Зависимая переменная – размер выводка

белые



черные

H_0: размер выводка у белые мышей такой же, как и у черных.
H_1: размер выводка не одинаков у этих линий.

Мы ничего не говорим про параметры распределений!

Тест Манна-Уитни можно использовать и для ранговых, и для непрерывных переменных.

белые		черные	
размер	ранг	размер	ранг
8	15.5	4	5
7	13	7	13
4	5	5	8.5
7	13	8	15.5
9	17.5	3	2
3	2	3	2
5	8.5	5	8.5
6	11	4	5
9	17.5		
5	8.5		
	111.5		59.5

Ранжируем данные от меньшего к большему (игнорируя деление на группы).

Число 3 встретилось трижды (это называется ***связанные ранги***, *tied ranks*): ранги у них будут одинаковы (1+2+3)/3=2

Статистика критерия:

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1$$

$$U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - R_2$$

n_1 и n_2 – размер выборок,
R_1 и R_2 – суммы рангов в выборках.

Статистикой критерия U_{obs} будет **меньшее** из этих двух значений. Причём H_0 мы отвергнем в случае, если оно будет МЕНЬШЕ критического значения U_{cv}. (т.е., это исключение среди прочих критериев).

Подставим наши данные в формулы:

$$U_1 = 10 \times 8 + \frac{10(8+1)}{2} - 115{,}5 = 135 - 115{,}5 = 23{,}5$$

$$U_2 = 10 \times 8 + \frac{8(8+1)}{2} - 59{,}5 = 116 - 59{,}5 = 56{,}5$$

U_{cv} = ***20***, при *p=0,05*

n_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n_2										p=0,05
3	-	0								
4	-	0	1							
5	0	1	2	4						
6	0	2	3	5	7					
7	0	2	4	6	8	11				
8	1	3	5	8	10	13	15			
9	1	4	6	9	12	15	18	21		
10	1	4	7	11	14	17	20	24	27	
11	1	5	8	12	16	19	23	27	31	34

U_{obs} =*23,5*

$\boldsymbol{U_{obs} > U_{cv}}$

Следовательно статистически значимых различий в величине выводка у разных линий мышей не наблюдается (U=23,5, p<0,05)

Тест Колмогорова-Смирнова

(*Kolmogorov-Smirnov two-sample test*).

Отличается от М-У теста тем, что М-У более чувствителен к различиям средних значений, медианы и т.п., а К-С тест более чувствителен к <u>различиям</u> распределений <u>по форме.</u>

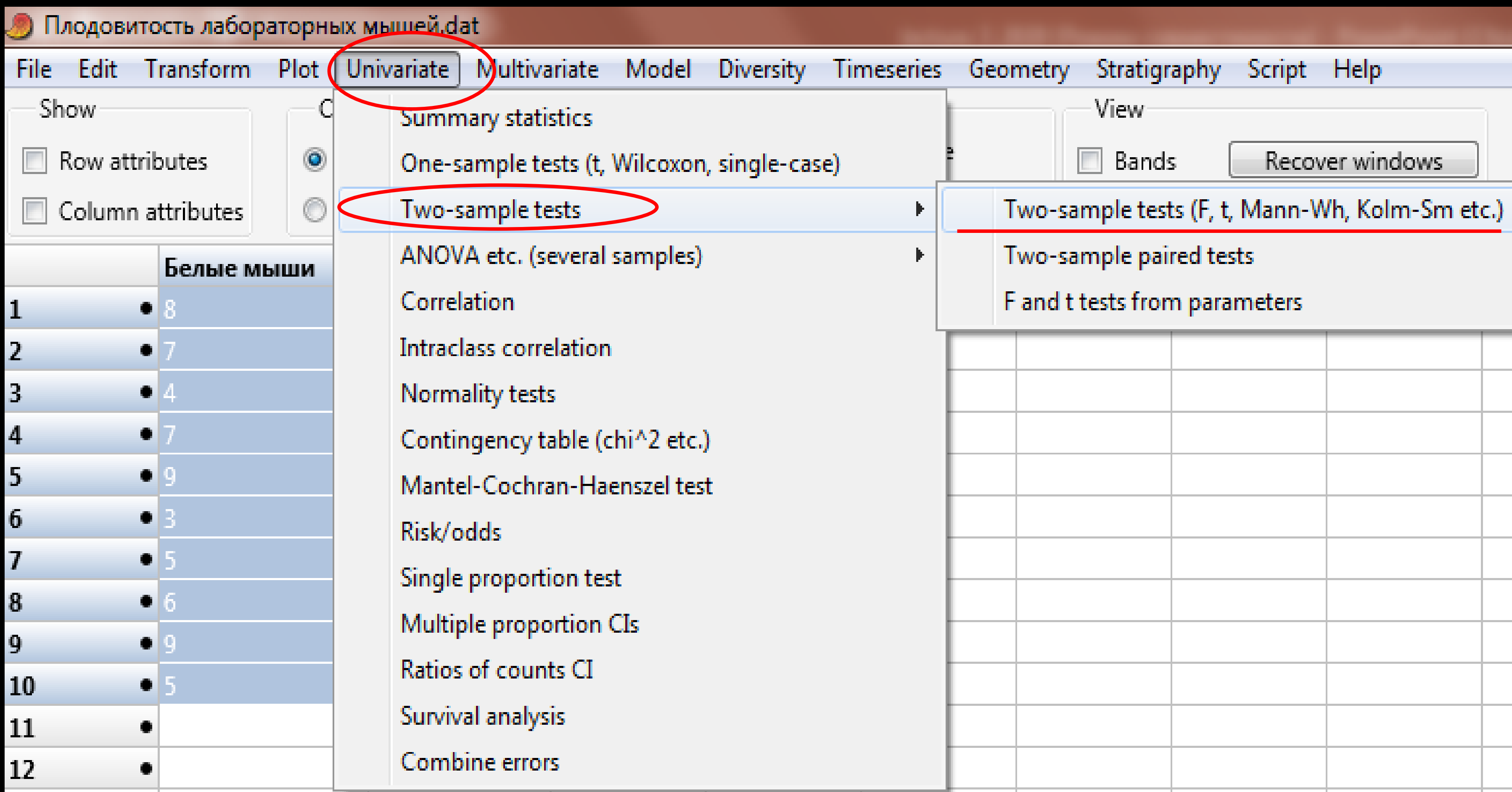
Колмогоров
Андрей Николаевич
(1903-1987)

Смирнов
Николай Васильевич
(1900-1966)

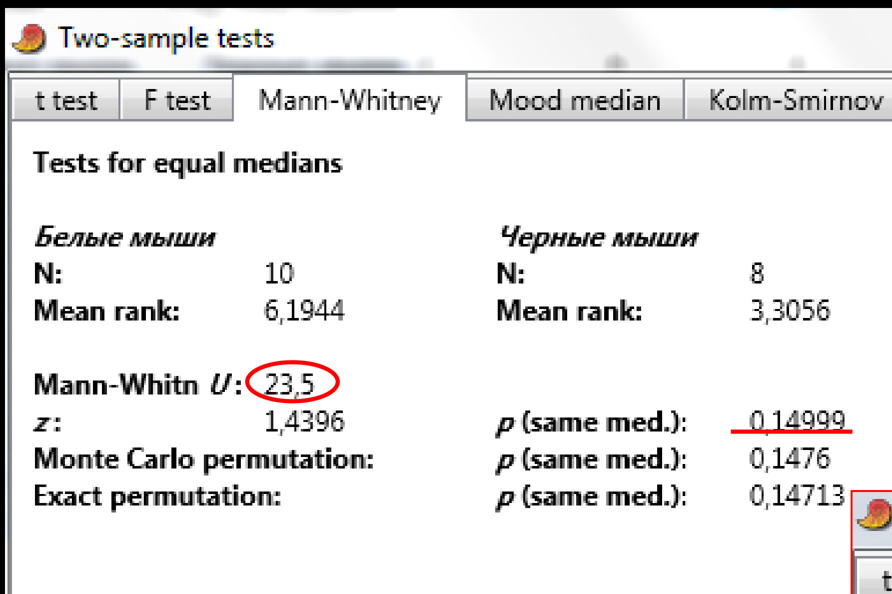
Манн-Уитни тест более мощный, чем этот тест.

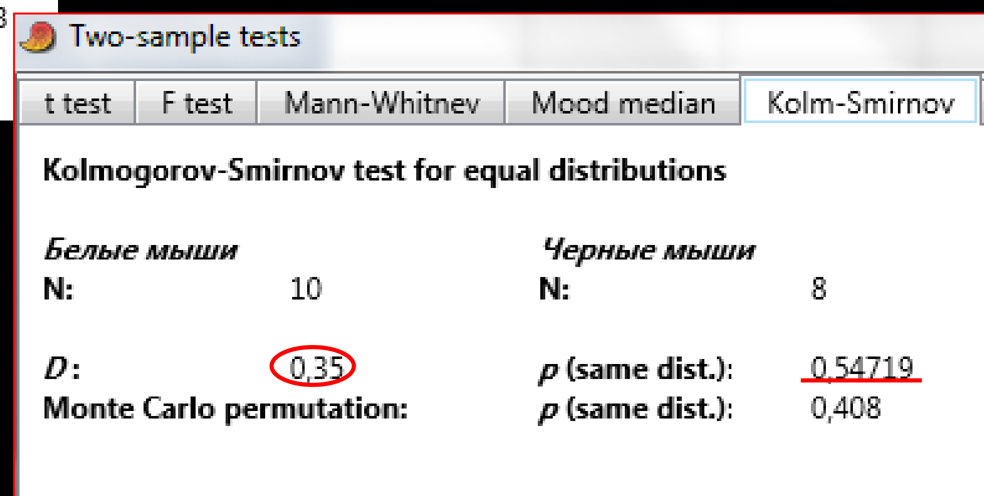
Mann-Whitney U-test
Kolmogorov-Smirnov two-sample test

В пакете PAST



Не отвергаем H_0: М-У тест показал, что размеры выводков у разных линий одинаковые

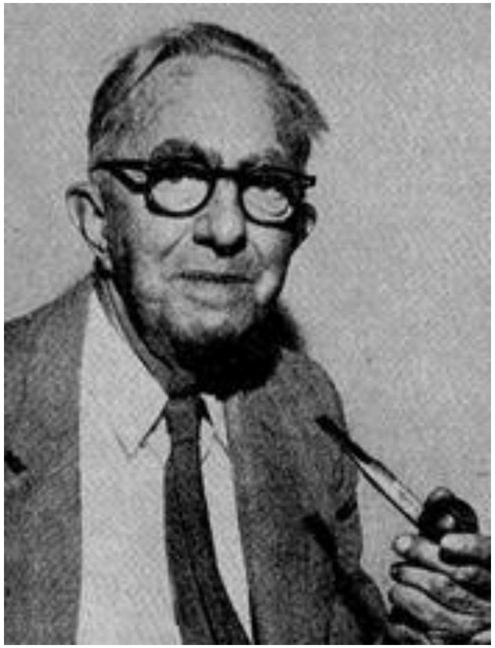




Сравнение 2-х связанных групп

Критерий Уилкоксона (*Wilcoxon matched pairs test*)

W критерий Уилкоксона - это непараметрический аналог парного критерия Стьюдента (t-критерия).



Фрэнк Уилкоксон
(Frank Wilcoxon 1892-1965)

Предложен ***в 1945 году*** американским химиком и статистиком ***Френком Уилкоксоном*** (создатель первого университетского курса по непараметрической статистике и первой научной школы непараметрической статистики).

Мощность – около 95% мощности t-теста.
При числе пар >100 T аппроксимируется нормальным распределением.

Пример. Сравниваем 2 метода определения тестостерона в пробах, и хотим знать – различается ли <u>его содержание в зависимости от метода определения</u>

H_0: количество тестостерона при определении первым методом, такое же, как и вторым.
H_1: количество тестостерона не одинаково.

Фактор – метод определения. (Метод 1; Метод 2)
Зависимая переменная – содержание тестостерона в пробе.

№ пробы	Метод 1	Метод 2	$D_i = X_{i1} - X_{i2}$	Ранг
1	0,49	0,40	0,09	5
2	0,71	0,61	0,10	6
3	0,96	0,84	0,12	8
4	0,41	0,35	0,06	3,5
5	0,48	0,51	-0,03	-2
6	0,71	0,60	0,11	7
7	0,41	0,42	-0,01	-1
8	0,52	0,52	0,00	
9	0,63	0,57	0,06	3,5

1.Считают разности между значениями в парах;

2. исключают нулевые разности;

3.присуждают абсолютным значениям (по модулю) разностей ранги;

4. суммируют отдельно **ранги** положительных и отрицательных разностей;

5.Наименьшая из этих сумм - статистика $\mathbf{T_{эмп}}$.

6. Отвергаем H_0, если $\mathbf{T_{эмп}}$ меньше $\mathbf{T_{кр}}$.

$\boldsymbol{T_{эмп}= |-1|+|-2|=3}$

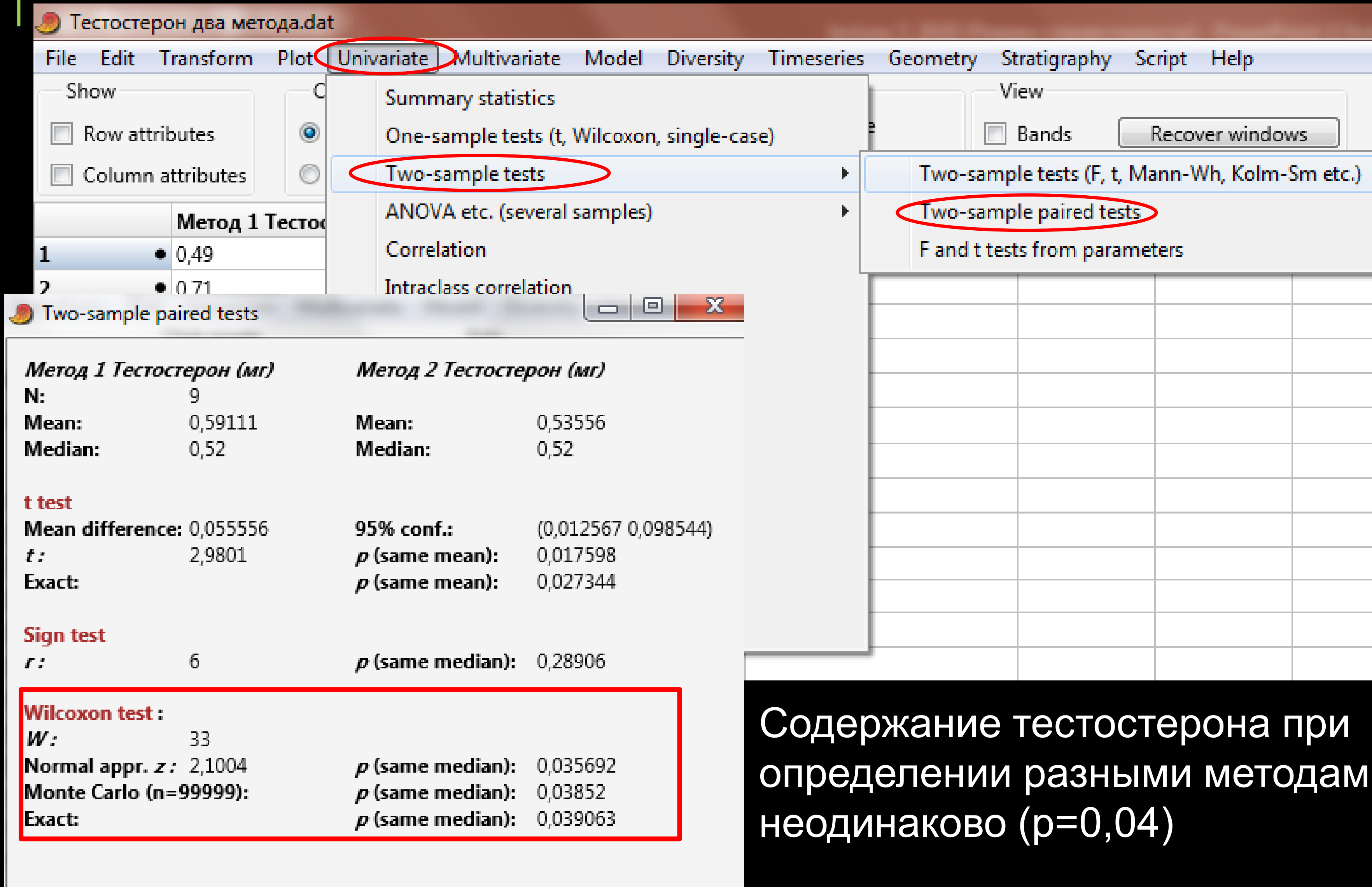
По таблице критических значений критерия Вилкоксона определяем, что при n=9

$\boldsymbol{T_{кр}=8}$***, для p≤0,05***

$\mathbf{T_{эмп} < T_{кр(0,05)}}$

Различия статистически значимы (p<0,05)

Wilcoxon matched pair test



Содержание тестостерона при определении разными методами неодинаково (p=0,04)

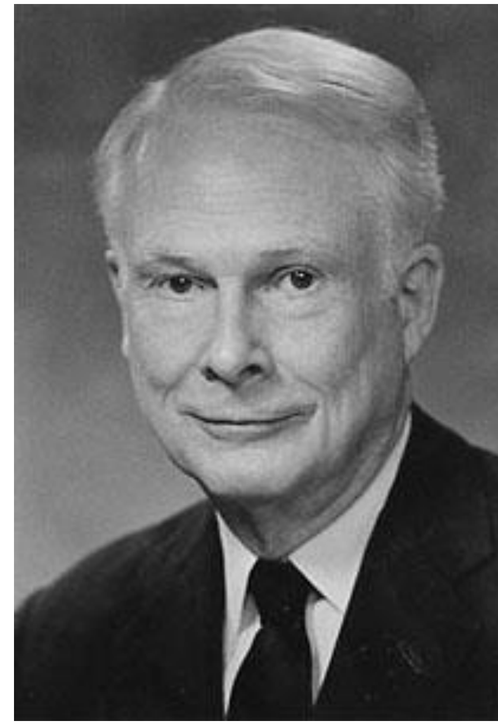
Сравнение ≥3-х независимых групп

Тест Крускала-Уоллиса (*Kruskal-Wallis test*)

Уильям Крускал
(*William Kruskal*
1919-2005)

Непараметрический аналог однофакторного дисперсионного анализа и предназначен для проверки равенства медиан нескольких выборок.

Предложенный в ***1952 году*** американскими учеными – математиком ***Уильямом Крускалом*** и экономистом ***Алленом Уоллесом***



Уилсон Аллен Уоллис
(Wilson Allen Wallis
1912-1998)

- ✓ Непараметрический аналог One-way ANOVA
- ✓ на 95% настолько же мощный, как и ANOVA;
- ✓ для 2-х групп идентичен Манн-Уитни тесту;
- ✓ подразумевает сходство форм распределений и равенство дисперсий в группах (хотя бы на глаз)

Пример. Нас интересует, различается ли <u>масса тела</u> студентов, из разных групп разбитых по росту.

Фактор – рост. Группы: 1. 161-165 см.; 2. 166-170 см; 3. 171-175 см.; 4. 176-180 см.

Зависимая переменная – масса тела, кг.

H_0: распределение в разных группах, из которых мы получили выборки, одинаковое.
H_1: распределения не одинаковые.

1. все значения ранжируются от меньшего к большему (игнорируя деление на группы);
2. Считается сумма рангов в каждой группе;

Рост 161-165 см		Рост 166-170 см		Рост 171-175 см		Рост 176-180 см	
масса, кг	ранг	масса, кг	ранг	масса, кг	ранг	масса, кг	ранг
59	4,5	63	9	67	11	73	17
53	1	61	7	68	12,5	79	20
60	6	68	12,5	74	18	71	15
54	2	62	8	72	16	75	19
57	3	64	10	69	14		
59	4,5						
∑	21		46,5		71,5		71

3. считается статистика Н(*df*, *N*).

сумма рангов в каждой группе

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum \frac{R_j^2}{n_j} - 3(N+1)$$

общий размер выборки

размер группы

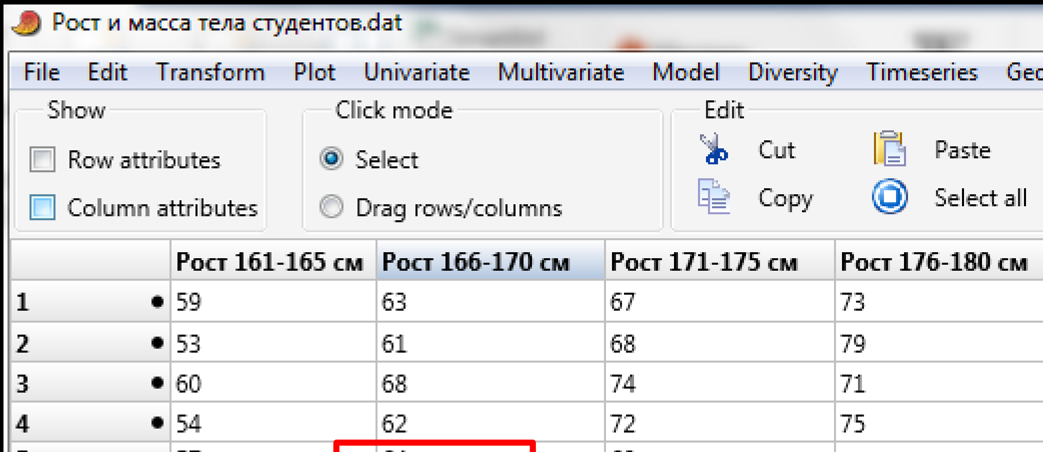
$$H = \frac{12}{20 \times (20+1)} \left[\frac{21^2}{6} + \frac{46{,}5^2}{5} + \frac{71{,}5^2}{5} + \frac{71^2}{4} \right] - 3(20+1) = 16{,}676$$

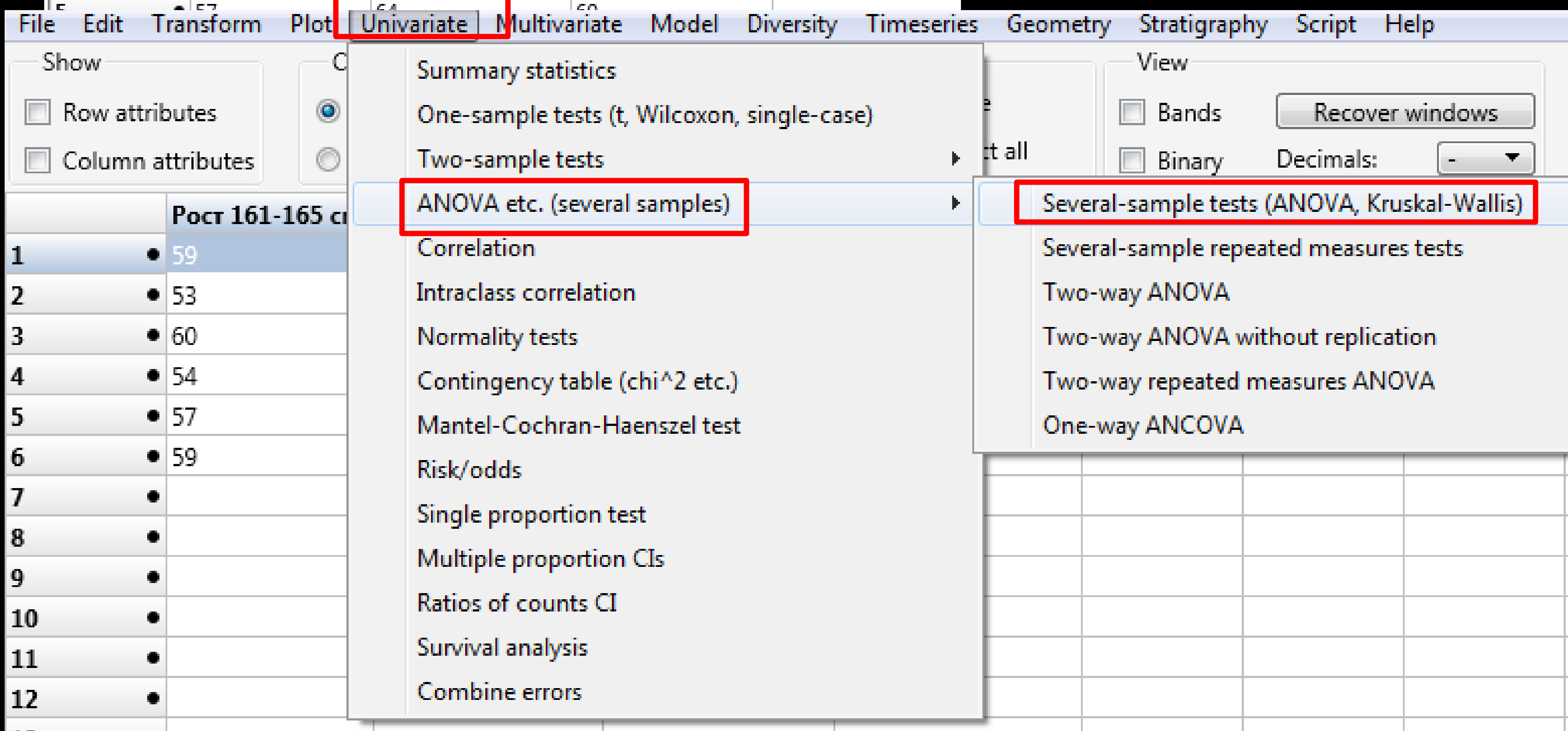
При уровне значимости α= 0,01 и числе степеней свободы *df* = *k*-1 = 4-1 = 3, где *k* – число групп; $\chi^2_{кр} =$ 11,34

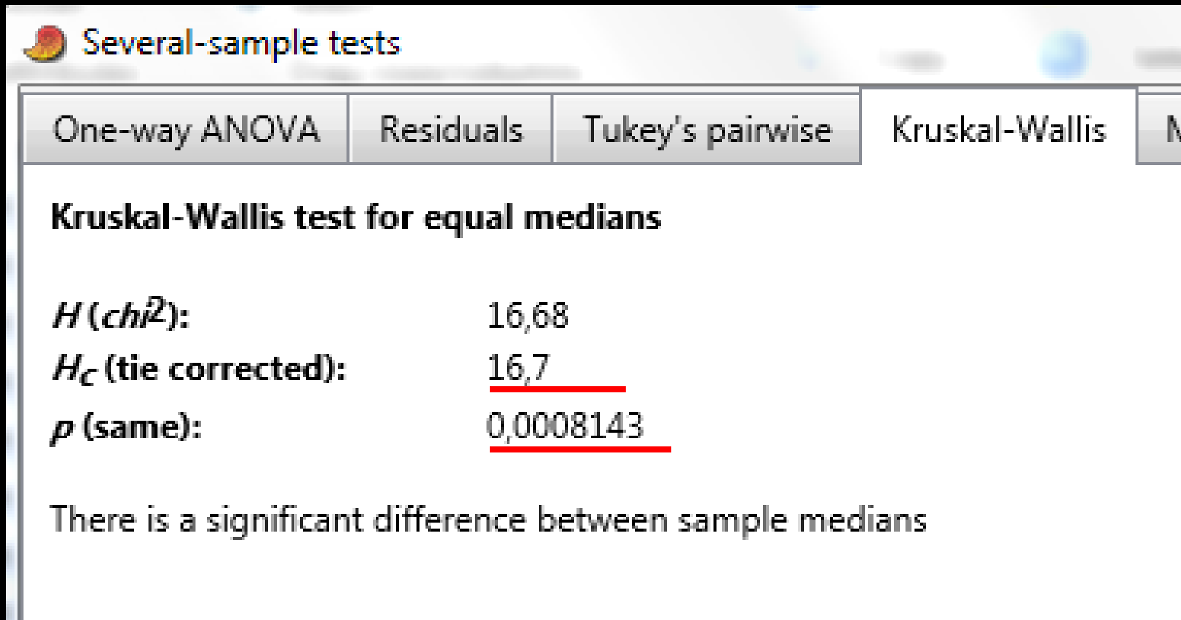
Н > $\chi^2_{кр}$

Следовательно масса тела не одинакова в разных группах.

Kruskal-Wallis test







H_c (*tie corrected*) - *H*-критерия *с поправкой на связанные значения* (одинаковые значения в разных группах)

Масса тела студентов статистически значимо отличается в разных по росту группах ($H_{(2)} = 6{,}70$; $P < 0{,}001$).

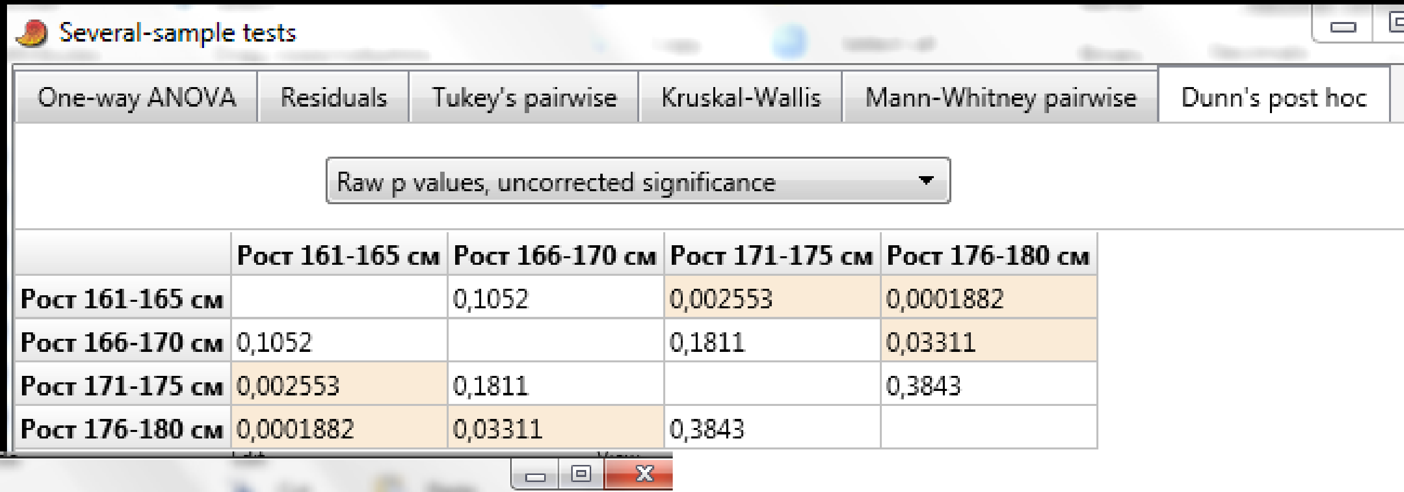
Критерий Крускал-Уоллиса (*Kruskal-Wallis test*)

Как и в ANOVA, после сравнения нескольких групп имеет смысл провести ***множественные апостериорные сравнения (post-hoc comparisons)*,** по аналогии с тестом Тьюки, чтобы выяснить какие же группы различаются.

Такие тесты существуют – ***Данна*** (*Dunn’s test*), ***Манн-Уитни*** (*Mann-Whitney pairwise*)**, *Неменьи*** (*Nemenyi test*).

В ходе решения нашего примера далее для парного сравнения используем непараметрический ***критерий Данна*** (*Bonferroni–Dunn post hoc test, Dunn’s multiple comparison post – test*).

Критерий применим для независимых групп как равной, так и различной численности.

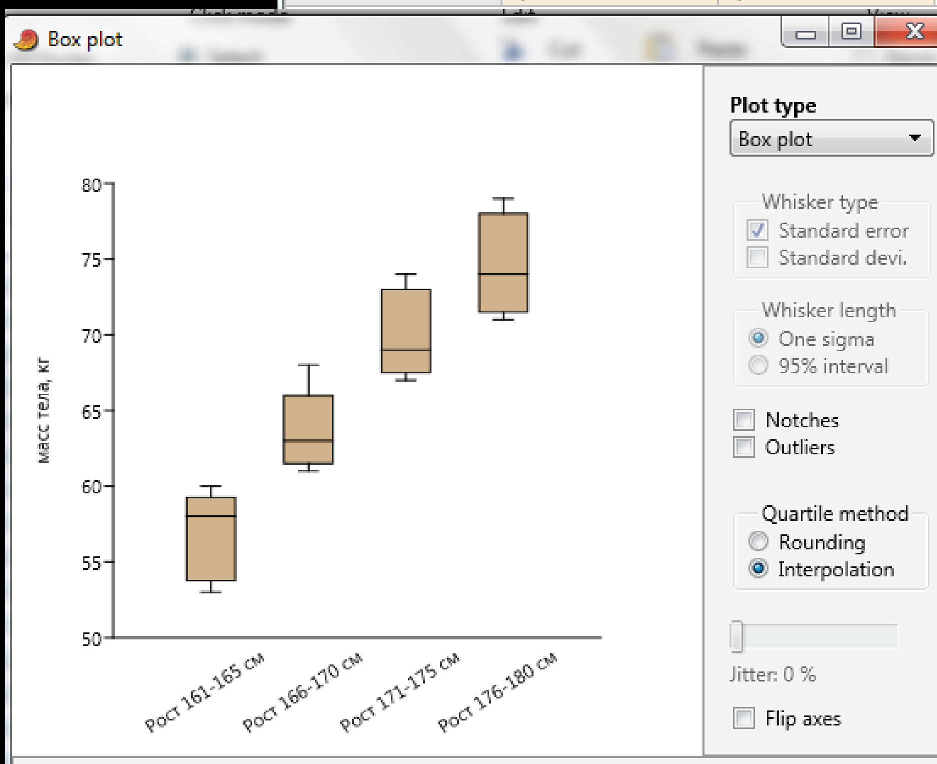


Several-sample tests

One-way ANOVA | Residuals | Tukey's pairwise | Kruskal-Wallis | Mann-Whitney pairwise | Dunn's post hoc

Raw p values, uncorrected significance

	Рост 161-165 см	Рост 166-170 см	Рост 171-175 см	Рост 176-180 см
Рост 161-165 см		0,1052	0,002553	0,0001882
Рост 166-170 см	0,1052		0,1811	0,03311
Рост 171-175 см	0,002553	0,1811		0,3843
Рост 176-180 см	0,0001882	0,03311	0,3843	



Пост-хок тест для непараметрической ANOVA

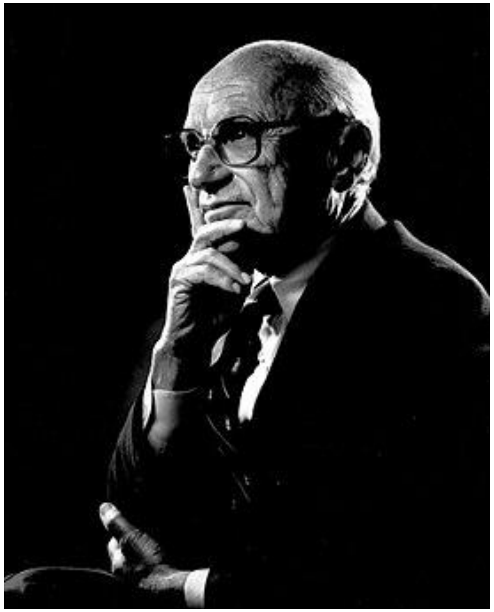
Сравнение ≥3 связанных групп

Критерий Фридмана (*Friedman ANOVA*)

Непараметрический статистический тест, аналог дисперсионного анализа с повторными измерениями ANOVA.

Разработанный американским экономистом, нобелевским лауреатом по экономике Милтоном Фридманом.

Является обобщением критерия Уилкоксона на большее, чем 2, количество условий измерения.



Милтон Фридман (*Milton Friedman 1912-2006*)

По сравнению с аналогичными параметрическими тестами, для 2-х групп имеет всего 64% мощности, для 3-х – 72%, для 100 стремится к 95%.

Пример. Группа из шести человек, желающих отказаться от курения. Проводилось измерение жизненной емкости легких (ЖЕЛ) в динамике:

1. На момент включения в группу;
2. Через 1 месяц после отказа от курения;
3. Через 2 месяца после отказа от курения

1. Значения ранжируются меньшего к большему внутри каждой **строки**.

2. Суммируют ранги для каждого столбца и считают статистику χ^2_r, которая имеет распределение χ^2.

Группа наблюдения	На момент обследования		Через 1 месяц		Через 2 месяц	
	ЖЕЛ	ранг	ЖЕЛ	ранг	ЖЕЛ	ранг
1	2	1,5	2	1,5	3	3
2	2,1	1	3,1	2	4	3
3	2,4	2	2,1	1	3,5	3
4	2,5	1	3,5	2	4	3
5	2,3	1	3	2,5	3	2,5
6	2,6	1,5	2,6	1,5	4	3
Сумма рангов		8		10,5		17,5

$$\chi^2 = \frac{12}{nk(k+1)} \sum_{j=1}^{k} T_j^2 - 3n(k+1),$$

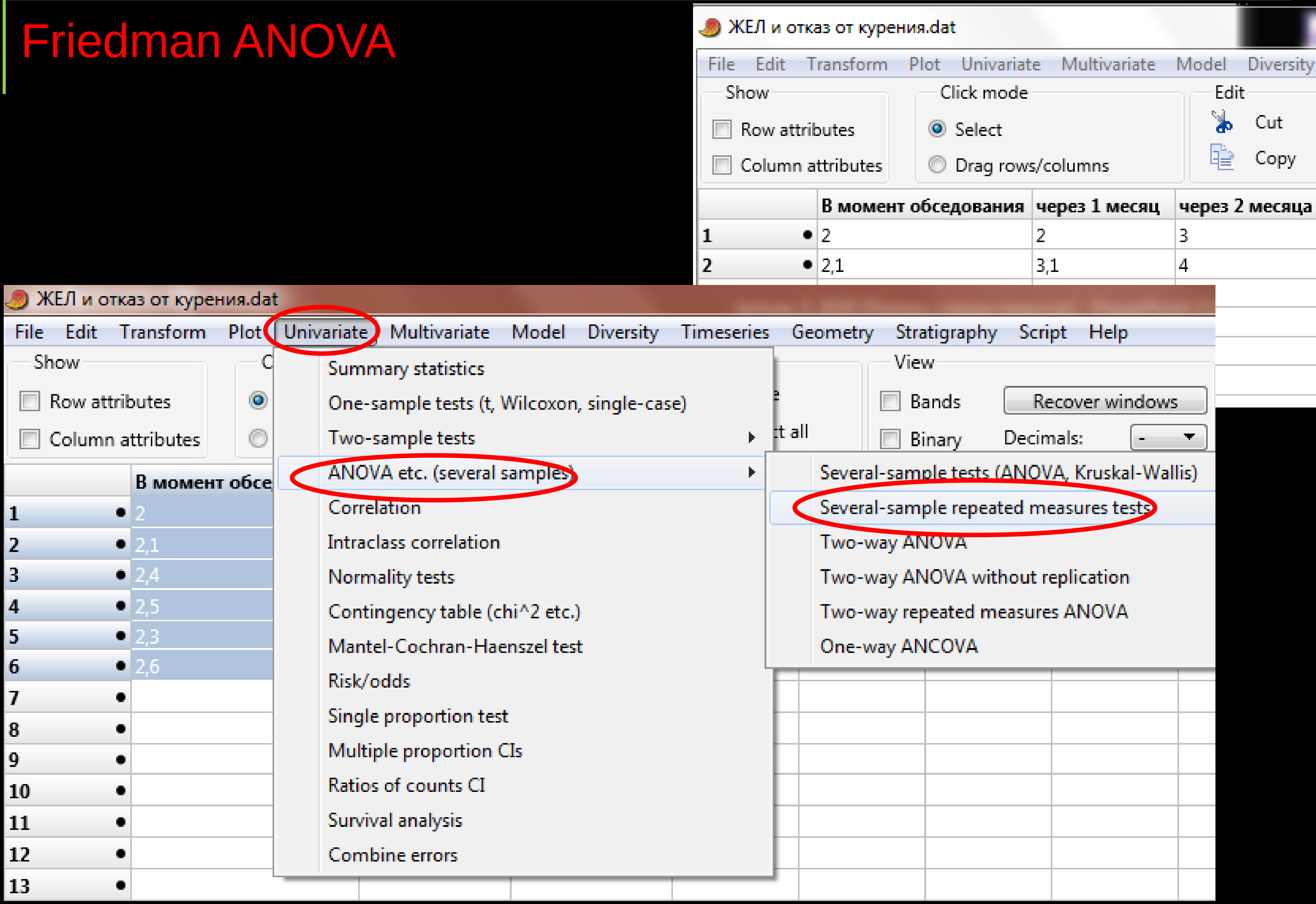
где n – число наблюдений; k – количество повторных измерений; T_j – сумма рангов для повторных измерений j

$$\chi 2 = \left[\frac{12}{6 \times 3 \times (3+1)} \times (8^2 + 10{,}5^2 + 17{,}5^2)\right] - 3 \times 6 \times (3+1)$$
$$= 80{,}8 - 72 = \boxed{8{,}08}$$

3. Полученное значение сравнивается с критическим. При уровне значимости $\boxed{\alpha = 0{,}05}$ и числе степеней свободы *df* = *k*-1 = 3-1 = 2, где *k* – число групп; $\boxed{\chi^2_{кр} = 5{,}991}$
Наша статистика больше, поэтому нулевая гипотеза отвергается.

H_0 и H_1 - по аналогии с предыдущими тестами, о сходстве выборок.

Friedman ANOVA



Several-sample repeated measures tests

Repeated-measures ANOVA | Tukey's pairwise | Friedman test | Wilcoxon pairwise

Test for equal medians

chi2:	8.0833	**Degrees of freedom:**	2
chi2, tie corrected:	9.2381		
chi2, continuity corrected:	8.8031		
***p* (same), asymptotic:**	0.012258		
***p* (same), exact:**	0.0062241		

Отвергаем H_0 – ЖЭЛ изменилась

$\chi^2_{(2)} = 9{,}24$; $P <<0{,}012$

Several-sample repeated measures tests

Repeated-measures ANOVA | Tukey's pairwise | Friedman test | Wilcoxon pairwise

Raw p values, uncorrected significance

	В момент обсед	**через 1 месяц**	**через 2 месяца**
В момент обсед		0.2941	0.04615
через 1 месяц	0.2941		0.09091
через 2 месяца	0.04615	0.09091	

Далее попарные сравнения групп методом Вилкоксона

КОРРЕЛЯЦИИ (correlation)

До сих пор нас в выборках интересовала только одна зависимая переменная.

Мы изучали, отличается ли распределение этой переменной в одних условиях от распределения той же переменной в других условиях.

Обратимся к ситуации, когда зависимых переменных будет ДВЕ и более.

Нас интересует вопрос, в какой степени эти переменные связаны между собой.

Это могут быть измерения одной особи или связанных пар.

Оценкой *линейной зависимости (связи)* между 2-мя непрерывными переменными, служит *коэффициент корреляции Пирсона* (см. лекцию – **«Корреляционный и регрессионный анализ»**).

Однако существуют ***ограничения*** для его ***применения***.

Значения Y и X должны быть распределены нормально - *двумерное нормальное распределение* (bivariate normal distribution)

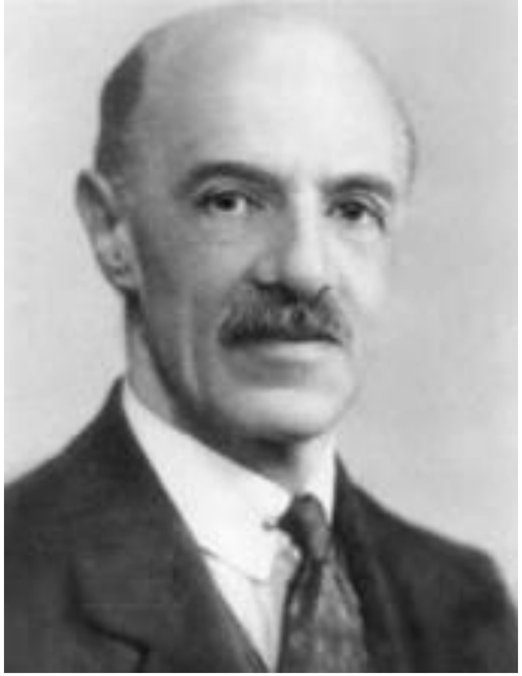
Если хотя бы одна переменная имеет не нормальное распределение или она порядковая, то для оценки зависимости используют *непараметрические коэффициенты корреляции*.

Коэффициент корреляции **Спирмана** (*Spearman rank order correlation*)

Коэффициент ранговой корреляции Спирмена - непараметрический аналог коэффициента корреляции Пирсона.

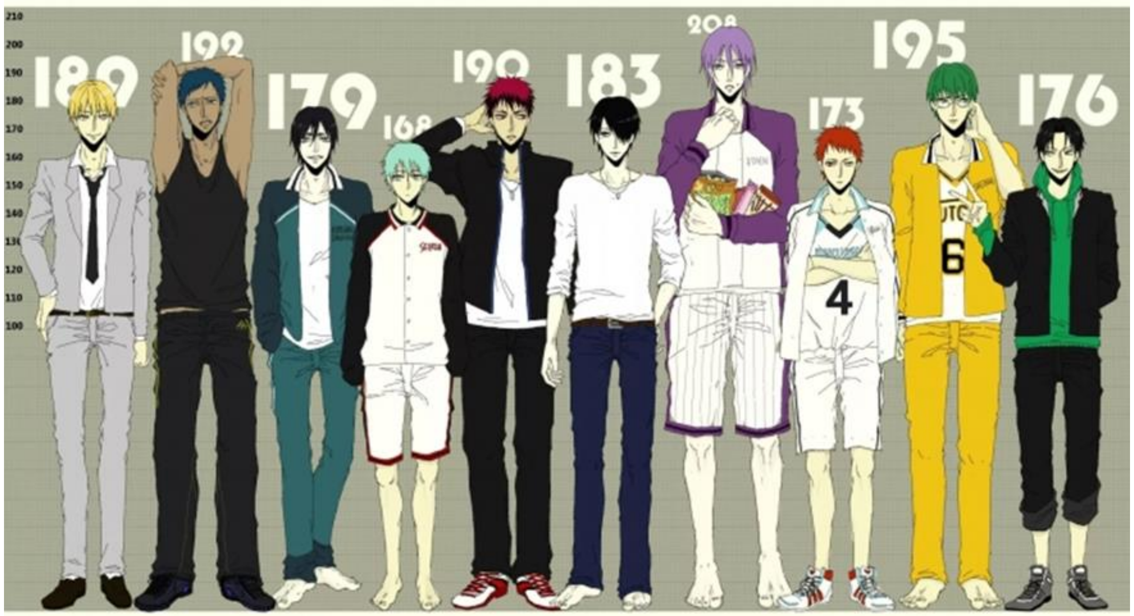
Определяется не по величинам переменных признаков, а по рангам - номерам в порядке возрастания величин признаков.

Критерий ***разработан и предложен*** для проведения корреляционного анализа в ***1904 году*** Чарльзом Эдвардом Спирменом, английским психологом, профессором Лондонского и Честерфилдского университетов.



Чарльз Эдвард Спирмен
(*Charles Edward Spearman 1863-1945*)

Необходимо узнать существует ли зависимость роста сына от роста отца?



Переменные:
1.рост сына (Y);
2.рост отца (X)

1. Ранжируем данные для **каждой переменной** от меньшего к большему;
2. Если встретились одинаковые значения (***tied ranks***), присваиваем им средние ранги;
3. Считаем разности рангов в каждой паре данных;

Рост отца		Рост сына		d_i	d_i^2
Значение, см	ранг	Значение, см	ранг		
167	1	169	2	-1	1
169	2	171	3	-1	1
170	1,5	166	1	2,5	6,25
170	1,5	172	4	-0,5	0,25
172	5	180	7	-2	4
173	6	176	5	1	1
174	7	177	6	1	1
175	8	182	8,5	-0,5	0,25
179	9	182	8,5	0,5	0,25
180	10	186	10	0	0
					$\sum d_i^2=15$

4. Считаем коэффициент r_s

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)}$$

разности рангов

число строк
(размер выборки)

r_s=1- $\frac{6\times15}{10^3-10} \approx 0,9091$

При α=0,001 значение $r_{кр}$=0,903

$r_s > r_{кр}$, таким образном нулевая гипотеза должна быть отвергнута и наблюдается зависимость роста взрослого сына от роста его отца

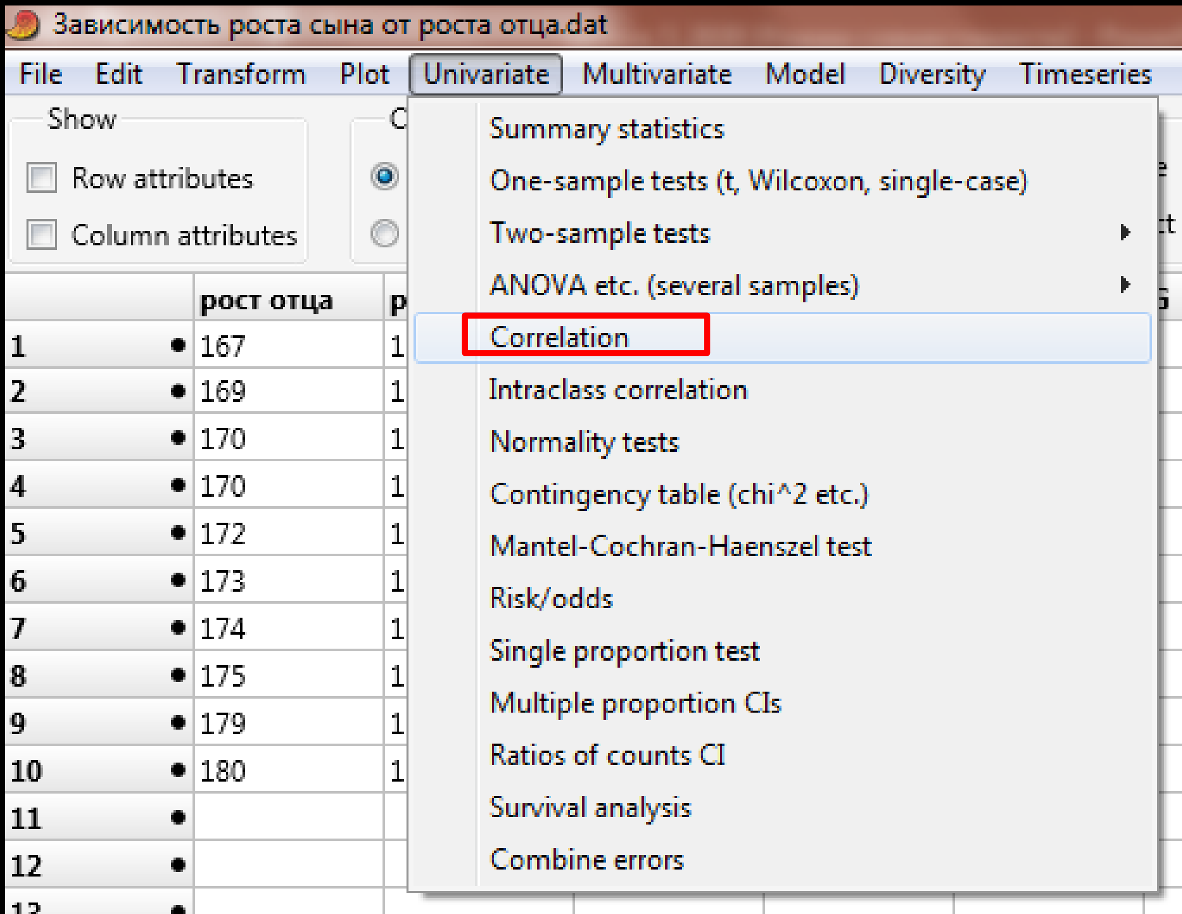
$H_0 : \rho_s = 0$
$H_1 : \rho_s \neq 0$

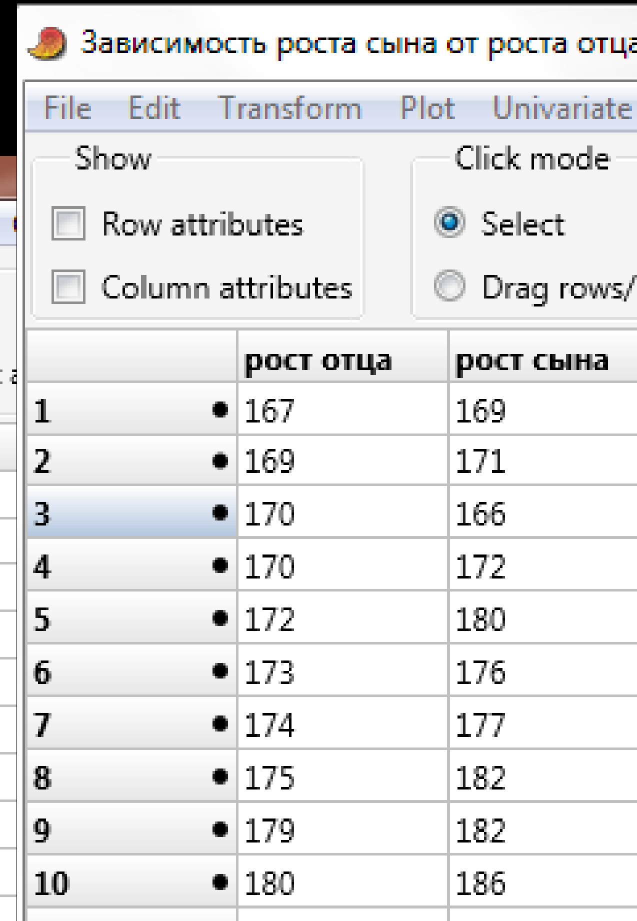
Статистика критерия – сам коэффициент корреляции Спирмана (имеет t-распределение)

Коэффициент **Спирмана** – аналог коэффициента корреляции **Пирсона**, стремится к нему в больших выборках. Мощность – около 91% коэффициента Пирсона.

Лучший для дробных количественных признаков. Размер выборки ≥ 10.

Spearman Rank Order Correlations





Spearman Rank Order Correlations

Correlation

Table | Plot

	рост отца	рост сына
рост отца		0,00027383
рост сына	0,90854	

Correlation statistic

- Linear r (Pearson)
- Spearman's D
- Spearman's rs
- Kendall's tau
- Polyserial rho
- Partial linear

Table format

- Statistic \ p(uncorr)
- Statistic
- p(uncorr)
- Permutation p

Bonferroni correction

Отвергаем H_0:

Оказалось, что рост сына положительно связан с ростом его отца.

Коэффициент корреляции **Кендалла** (*Kendall's coefficient of rank correlation, Kendall-*τ)

В ***1937 году*** вышла статья ***Мориса Кендалла*** где описан новый коэффициент ранговой корреляции - τ («тау»).

Оценивает разность между вероятностью того, что порядок данных в обеих переменных одинаков, и вероятностью того, что порядки разные.

Морис Кендалл
(*Sir Maurice George Kendall 1907-1983*)

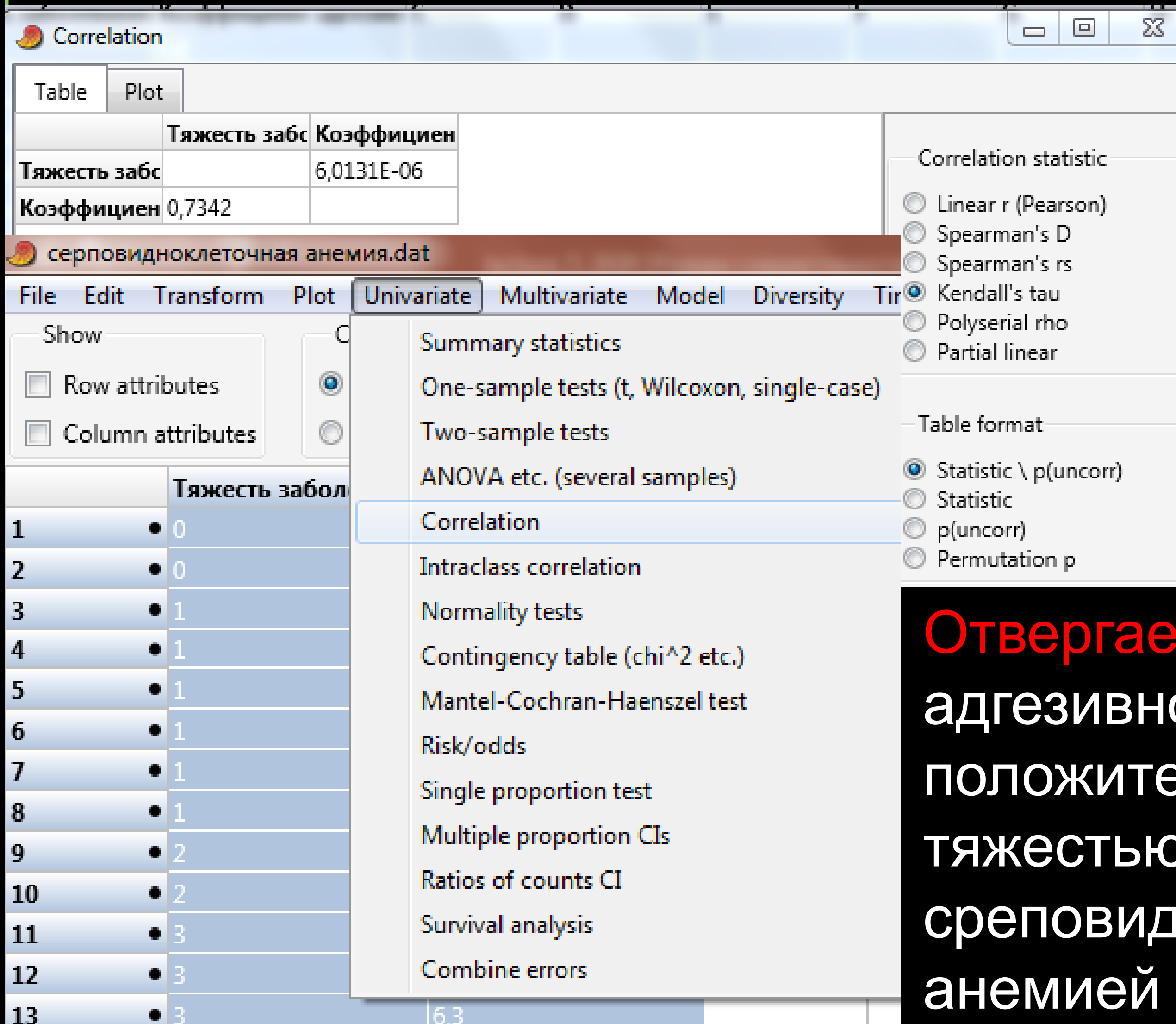
Только для ранговых переменных! Для количественных лучше коэффициент Спирмана, особенно для больших выборок.

Пример.
Обследовано 20 больных серповидноклеточной анемией.

Оценены:
тяжесть (в баллах) и коэффициент адгезии эритроцитов.

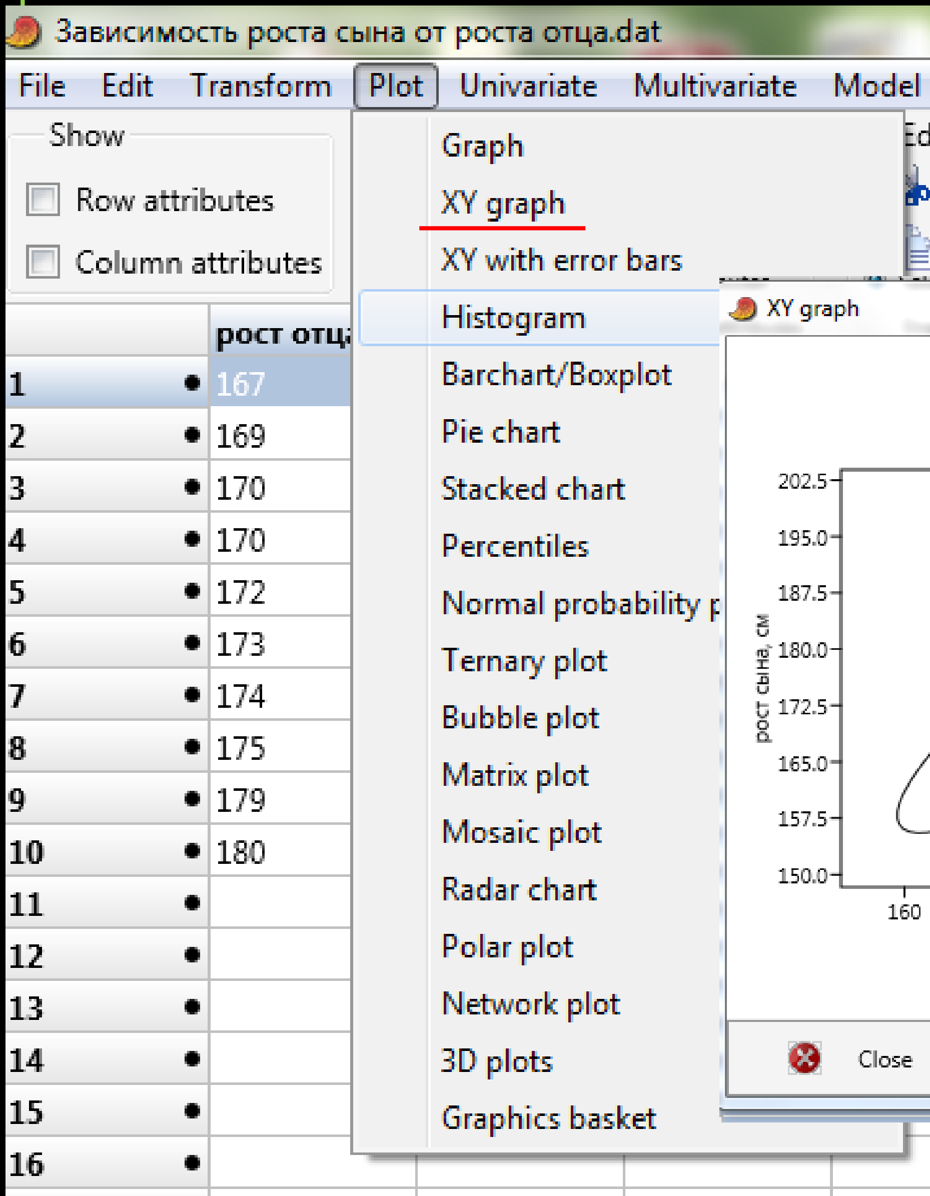
Необходимо ответить на вопрос:
Связана ли адгезивность эритроцитов и тяжестью среповидноклеточной анемии?

Kendall's coefficient of rank correlation, Kendall-τ

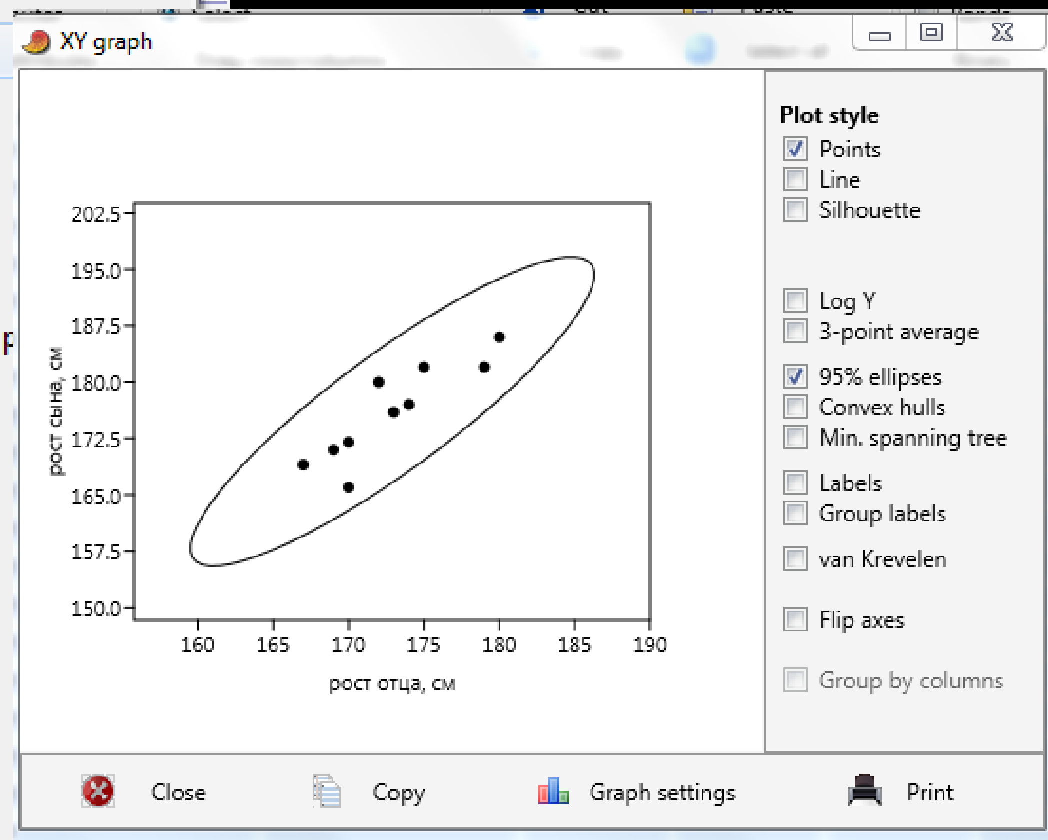


Отвергаем H_0: адгезивность эритроцитов положительно связана тяжестью среповидноклеточной анемией

Kendall's coefficient of rank correlation, Kendall-τ



графика — диаграммы рассеяния (scattergram)



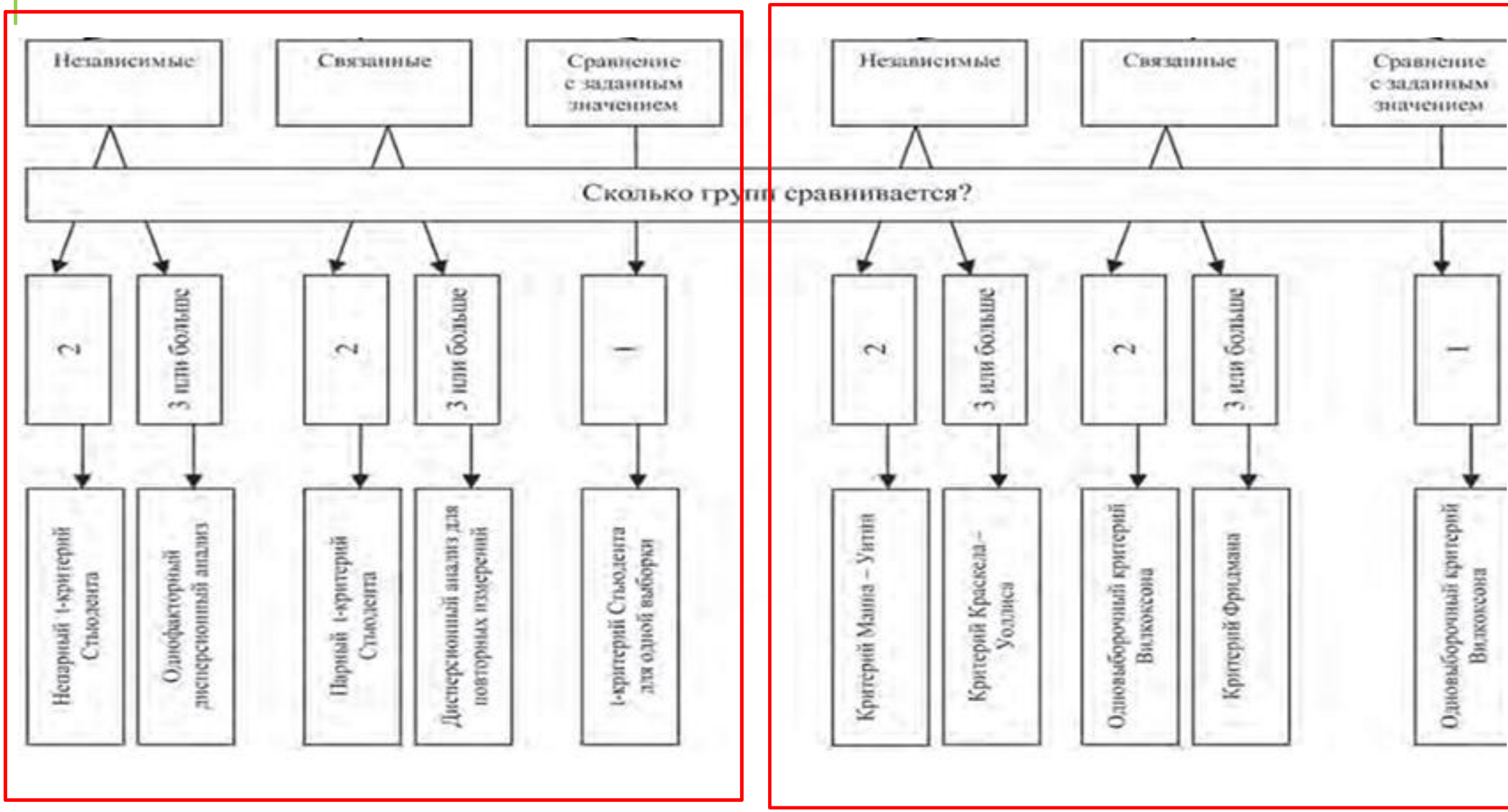
Корреляционный анализ: (линейные) соотношения между двумя непрерывными переменными

- ***Коэффициент корреляции Пирсона r***, который используется для выявления взаимосвязи *между двумя* приблизительно *нормально распределенными* непрерывными переменными. В действительности переменные должны удовлетворять совместно «двумерному нормальному распределению».
- ***Коэффициент ранговой корреляции Спирмена, ро (ρ)***, применяемый для выявления взаимосвязи *между двумя* непрерывными переменными, по крайней мере *одна из которых распределена не по нормальному закону*.
- ***Коэффициент ранговой корреляции Кендалла, тау*** **(τ)** применяемый для выявления взаимосвязи *между двумя порядковыми переменными* или между *одной порядковой и одной непрерывной*.

В итоге, при выборе теста важно, что:

1. Параметрические тесты более <u>мощные,</u> чем непараметрические;
2. Непараметрические <u>безопаснее</u> в плане ошибки 1-го рода;
3. Чем больше <u>размер</u> выборки, тем <u>менее критичны</u> требования к распределению (по Центральной предельной теореме); для выборок N **≥ 100** используют параметрические тесты даже при больших отклонениях от нормального распределения (кроме регрессий).
4. АНОВА не очень чувствительна к отклонениям от нормального распределения (для одинаковых по размеру групп).

Алгоритм выбора статистического критерия для сравнения ***количественных данных***


Независимые
Связанные
Сравнение с заданным значением
Сколько групп сравнивается?
2
3 или больше
2
3 или больше
1
Непарный t-критерий Стьюдента
Однофакторный дисперсионный анализ
Парный t-критерий Стьюдента
Дисперсионный анализ для повторных измерений
t-критерий Стьюдента для одной выборки
Независимые
Связанные
Сравнение с заданным значением
2
3 или больше
2
3 или больше
1
Критерий Манна – Уитни
Критерий Краскела – Уоллиса
Одновыборочный критерий Вилкоксона
Критерий Фридмана
Одновыборочный критерий Вилкоксона

Спасибо за внимание!