

УДК 519.6:532:533:539.3

РАСЧЕТ ВОЛН В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ТЕЛЕ

А.А. Аганин, Н.А. Хисматуллина

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, г. Казань, 420111, Россия

Аннотация

Изучена возможность повышения эффективности расчета упруго-пластических волн в теле за счет применения TVD- и UNO-модификаций классического метода С.К. Годунова. TVD-модификация имеет второй порядок точности, за исключением точек экстремума, тогда как UNO-модификация обладает вторым порядком всюду. Оценка эффективности рассматриваемых модификаций осуществлена путем сравнения результатов их применения для расчета ряда одномерных задач о распространении волн в упруго-пластическом теле в результате различного вида воздействия на его поверхность с точными решениями и результатами расчетов методом С.К. Годунова. Показано, что на аналогичных сетках рассматриваемые модификации дают намного лучшие результаты. В частности, ширина размазывания скачкообразных фронтов как упругих, так и пластических волн при их использовании значительно меньше. При этом UNO-модификация несколько предпочтительнее TVD-модификации, что проявляется, например, в том, что последняя сглаживает экстремумы решения в большей степени при использовании грубых сеток.

Ключевые слова: схема TVD, схема UNO, схема С.К. Годунова, эффективность разностных схем, упруго-пластическое тело

Введение

При изучении эрозии поверхностей тел при ударном воздействии каплей, струй жидкости, локализованных импульсов давления и др. возникает необходимость в численных исследованиях распространения и взаимодействия волн в теле в упруго-пластическом приближении. С этой целью широко применяется классический метод С.К. Годунова [1, 2]. Примеры использования этого метода для различных задач газовой динамики можно найти в [3, 4], динамики упругих тел в [5–7] и упруго-пластических тел в [8–10]. Используемая в этом методе схема является устойчивой и монотонной при удовлетворении условию Куранта [11]. Однако в силу первого порядка аппроксимации она может приводить к сильному размазыванию скачков, контактных разрывов и других особенностей решения в областях с большими градиентами.

В настоящей работе изучается возможность повышения эффективности расчета упругих и пластических волн в теле за счет применения двух модификаций классического метода С.К. Годунова, основанных на UNO- и TVD-схемах (UNO – Uniformly Non Oscillatory, равномерно безосцилляционная; TVD – Total Variation Diminishing, уменьшающая полную вариацию). Идеология построения таких схем изложена в [12]. Реализация одной из них для исследования волновых задач газовой динамики и динамики жидкости представлена в [13–15], а для расчета волн в упругом теле – в [16]. Сравнение экономичности применяемых схем при расчете упругих возмущений в теле приведено в [17, 18]. Оценка работоспособности и эффективности рассматриваемых модификаций осуществляется путем сравнения

результатов их применения для расчета ряда одномерных задач о распространении упруго-пластических волн в теле с результатами расчетов этих задач классическим методом С.К. Годунова, а также с точными аналитическими решениями.

1. Постановка задачи

Изучается возможность повышения эффективности расчета упруго-пластических волн в теле по сравнению с классическим методом С.К. Годунова за счет применения его TVD- и UNO-модификаций, обладающих соответственно условно вторым и вторым порядками точности. Рассмотрение ограничивается одномерными плоскими продольными волнами. С учетом этого для описания динамики тела используются следующие уравнения:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial (S_{yy} - P)}{\partial y}, \quad \frac{\partial S_{yy}}{\partial t} = \frac{4}{3} \mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial t} = -K \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(S_{xx} + \frac{1}{2} S_{yy} \right) = 0, \quad (1)$$

где t – время; y – пространственная координата; ρ – плотность, v – скорость; S_{xx} , S_{yy} – компоненты дивергента S тензора напряжений σ ; P – всестороннее (гидростатическое) давление; $\sigma = S - PE$; E – тензорная единица; $K = \lambda + 2/3\mu$ – коэффициент объемного расширения; $\lambda = \rho(c_1^2 - 2c_2^2)$, $\mu = \rho c_2^2$ – параметры Ламе; c_1 и c_2 – продольная и сдвиговая скорости звука.

Считается, что в начальный момент времени деформации и напряжения в теле отсутствуют. В таком случае последнее уравнение системы (1) сводится к равенству

$$S_{xx} + \frac{1}{2} S_{yy} = 0. \quad (2)$$

В пластических зонах выполняется условие текучести Мизеса [19] $\sigma_i = Y_0$, где Y_0 – предел текучести материала тела, σ_i – интенсивность напряжений, которая при нулевых начальных значениях компонент тензора S имеет вид

$$\sigma_i = \sqrt{3} \sqrt{S_{xx}^2 + S_{xx} S_{yy} + S_{yy}^2}.$$

Используя равенство (2), выражение для σ_i можно привести к виду $\sigma_i = 3 |S_{yy}|/2$.

На большом удалении от места приложения нагрузки параметры тела остаются невозмущенными.

Считается, что материалом тела является никелевый сплав со следующими механическими характеристиками: модуль Юнга $E = 196$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, плотность $\rho = 8000$ кг/м³, предел текучести $Y_0 = 125$ МПа.

2. Методика расчета

Расчетная область представляет собой отрезок $[0, R]$. Она покрывается равномерной сеткой с шагом h . Краями расчетной области могут быть жесткая стенка, свободная поверхность или искусственная граница. В случае жесткой стенки задается ее скорость, в случае свободной поверхности – нормальное напряжение. Искусственная граница вводится для ограничения расчетной области и отделяет часть тела, которая представляет наибольший интерес для конкретного исследования, от остальных областей. На ней ставятся неотражающие условия [20]. При использовании как метода С.К. Годунова, так и его TVD- и UNO-модификаций для реализации условия текучести используется подход, предложенный в [19]. Согласно этому подходу на каждом шаге по времени напряжения в теле рассчитываются сначала без учета его пластичности. Далее, если в некоторой точке условие текучести нарушается, то есть если интенсивность напряжений в этой точке оказывается

больше предела текучести, то тензор S корректируется в ней по формуле $S^{\text{corr}} = Y_0 S / \sigma_i$. При нулевых начальных значениях компонент тензора S коррекции подвергается только S_{yy} , то есть $S_{yy}^{\text{corr}} = Y_0 S_{yy} / \sigma_i = \text{sgn}(S_{yy}) 2Y_0 / 3$. Подробное описание изучаемых в настоящей работе TVD- и UNO-модификаций метода С.К. Годунова и их эффективности при описании распространения чисто упругих возмущений в теле можно найти в [16–18].

3. Расчет волн, обусловленных изменением давления на поверхности тела

Рассматривается распространение внутрь невозмущенного ненапряженного тела одномерных плоских волн, обусловленных импульсным воздействием на его свободную поверхность $y = 0$, в результате чего давление $p_\Gamma(t)$ на свободной поверхности изменяется следующим образом:

$$p_\Gamma(t) = \begin{cases} p^* > 0, & \text{если } 0 \leq t \leq t^*, \\ 0, & \text{если } t > t^*, \end{cases}$$

где p^* , t^* – параметры воздействия.

Анализируются волны при $t^* = 3 \cdot 10^{-5}$ с и трех значениях p^* : 210, 435 и 630 МПа. При принятых механических характеристиках никелевого сплава возмущения в теле остаются упругими, пока значение p^* не превышает p_{pl} , равное 225 МПа. При более высоких значениях p^* в теле возникают пластические деформации. Трём принятым значениям p^* соответствуют три значения отношения p^*/p_{pl} : 0.93, 1.93 и 2.8.

Особенности возникающих в теле импульсов и их распространения внутрь тела при рассматриваемых значениях p^* иллюстрирует рис. 1.

При $p^*/p_{pl} = 0.93$ (рис. 1, а) предел текучести материала тела не достигается, так что в теле возникает лишь чисто упругий импульс. Его форма по мере продвижения внутрь тела не изменяется. Поэтому на рис. 1, а показаны лишь два момента времени. При $p^*/p_{pl} = 0.93$ (рис. 1, б) в теле возникают напряжения, превышающие предел текучести материала тела. Передний фронт возникающего в теле импульса расщепляется на упругий предвестник и пластическую волну, тогда как задний фронт представляет собой чисто упругую волну (момент t_1). Напряжение σ_{yy}/p_{pl} за фронтом упругого предвестника равно 1, а за фронтом пластической волны – давлению на границе, равному 1.93. Так как скорость упругих волн c_1 больше скорости пластических c_* , расстояние между фронтом упругого предвестника и фронтом пластической волны со временем увеличивается. По той же причине сокращается расстояние между задним фронтом импульса и фронтом пластической волны (момент t_2). В промежутке (t_2 , t_3) эти фронты взаимодействуют. В результате этого конфигурация импульса существенно изменяется. Пластическая составляющая большой амплитуды в импульсе исчезает, в области заднего фронта импульса возникает распространяющаяся к поверхности тела волна относительно небольшой амплитуды. К моменту t_4 эта волна достигает поверхности тела. Отметим, что взаимодействие упругой и пластической волн имеет нелинейный характер, так что взаимодействие этих двух скачкообразных волн приводит к возникновению волны с довольно пологим непрерывным фронтом. При $p^*/p_{pl} = 2.8$ (рис. 1, в) воздействие на поверхность тела настолько значительно, что предел текучести превышает не только на стадии ее нагружения, но и на стадии ее разгрузки. В результате на упругий предвестник и пластическую волну расщепляются и передний, и задний фронты возникающего в теле импульса (момент t_1). Со временем (момент t_2) в силу того, что $c_1 > c_*$, расстояния между фронтами как передних, так и

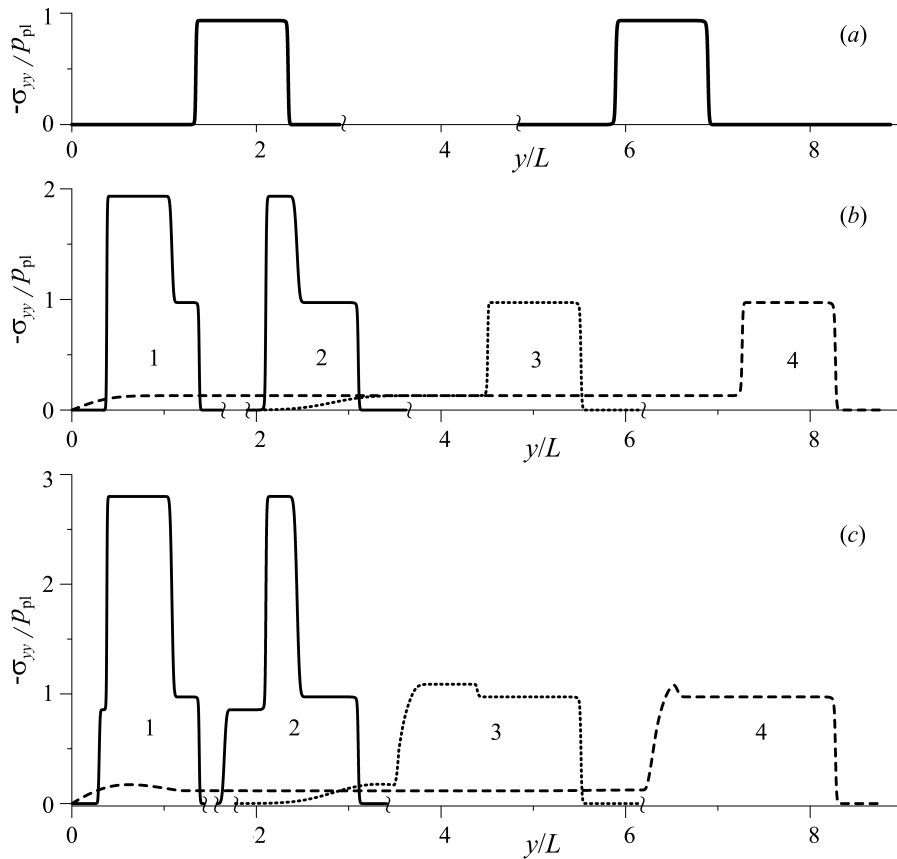


Рис. 1. Распространение импульсов в теле при $p^*/p_{pl} = 0.93$ (a), 1.93 (b) и 2.8 (c) (по результатам расчетов по схеме UNO на равномерной сетке из 6400 ячеек). Кривые 1–4 соответствуют моментам времени t_{1-4}/t^* : 1.4, 3.1, 5.7, 8.3. Здесь $p_{pl} = 225$ МПа, $t^* = 3 \cdot 10^{-5}$ с, $L = c_1 t^*$

задних упругих предвестников и пластических волн увеличиваются, а расстояние между передней пластической волной и задним упругим предвестником сокращается. В интервале (t_2, t_3) сначала фронт заднего упругого предвестника нагоняет фронт передней пластической волны. В результате взаимодействия этих фронтов в промежутке между фронтом задней пластической волны и фронтом переднего упругого предвестника возникает конфигурация (подобная той, что соответствует моменту t_3 на рис. 1, b) с распространяющейся к поверхности тела волной относительно небольшой амплитуды. Последующее взаимодействие этой волны с фронтом задней пластической волны приводит к волновой структуре, соответствующей моменту t_3 . Отметим наличие в этой структуре распространяющейся к поверхности тела волны относительно небольшой амплитуды. В момент t_4 эта волна находится в процессе отражения от поверхности тела. Следует отметить, что представленные на рис. 1, a импульсы, а также импульсы, приведенные на рис. 1, b, c для моментов t_1 и t_2 , были сопоставлены с соответствующими точными решениями, найденными в терминах инвариантов Римана [5]. Установлено удовлетворительное согласование указанных импульсов с точными решениями (визуально они практически совпадают). Сходимости численных решений, полученных по классической схеме С.К. Годунова и ее TVD- и UNO-модификациям для трех рассмотренных

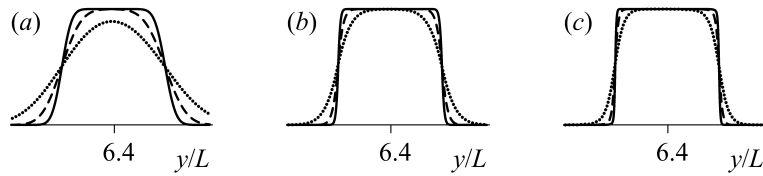


Рис. 2. Численные решения в момент t_2 случая $p^*/p_{pl} = 0.93$ (рис. 1, *a*), рассчитанные по схемам С.К. Годунова (*a*), TVD (*b*) и UNO (*c*) на равномерных сетках из 400 (пунктирные линии), 1600 (штриховые) и 6400 (сплошные) ячеек

значений p^* , демонстрируют рис. 2–4. На этих рисунках приведены результаты расчетов на трех равномерных сетках, шаги которых последовательно уменьшаются в 4 раза.

На рис. 2 видно, что в случае чисто упругих волн (рис. 1, *a*) TVD- и UNO-модификации на одной и той же расчетной сетке позволяют получить заметно лучшее решение, чем классический метод С.К. Годунова. При этом существенно выше и скорость их сходимости. По сравнению с этим преимущество UNO-модификации, имеющей второй порядок точности всюду, над TVD-модификацией, имеющей условно второй порядок точности в силу потери второго порядка в экстремальных точках решения, выглядит незначительным.

На рис. 3 видно, что в случае проявления пластичности материала в переднем фронте возникающего в теле импульса (рис. 1, *b*) соотношение между результатами классического метода С.К. Годунова и его TVD- и UNO-модификаций в основном аналогично тому, что реализуется для чисто упругих волн (рис. 2). Вместе с тем заметно, что на грубой сетке схема TVD сглаживает решение в области его экстремума несколько больше, чем схема UNO.

На рис. 4 видно, что в случае проявления пластичности материала как в переднем, так и в заднем фронтах возникающего в теле импульса (рис. 1, *c*) соотношение между результатами, полученными с помощью классического метода С.К. Годунова и его TVD- и UNO-модификаций, практически аналогично тому, что имеет место в случае проявления пластичности лишь в переднем фронте импульса (рис. 3). Интересно также отметить, что во всех трех представленных на рис. 4 численных решениях фронты пластических волн «размазаны» заметно сильнее, чем фронты близких им по амплитуде упругих волн. Объясняется это следующим.

При использовании метода С.К. Годунова, как и его TVD- и UNO-модификаций, шаг по времени обычно выбирается из условия Куранта [11] $\Delta t = \delta h/c$, где c – максимум скорости рассчитываемых волн, $\delta < 1$ – параметр, зависящий от уравнений, но не зависящий от шага сетки h . При расчете рассматриваемых задач $c = c_1$, $\delta = 0.95$. При таком определении c и δ шаг по времени оказывается близким к оптимальному для расчета продольных упругих волн. В то время как для расчета пластических волн близким к оптимальному является шаг, выбираемый при $c = c_*$, $\delta = 0.95$. Однако такой шаг нельзя использовать при расчете продольных упругих волн. Поэтому выбирается $\Delta t = \delta h/c_1$. При таком выборе пластические волны рассчитываются с шагом $\Delta t = \delta(c_*/c_1)h/c_*$, который фактически в $c_1/c_* = 1.3$ раз меньше, чем шаг $\Delta t = \delta h/c_*$, являющийся близким к оптимальному для расчета пластических волн. Это и приводит к более сильному размазыванию пластических волн по сравнению с упругими.

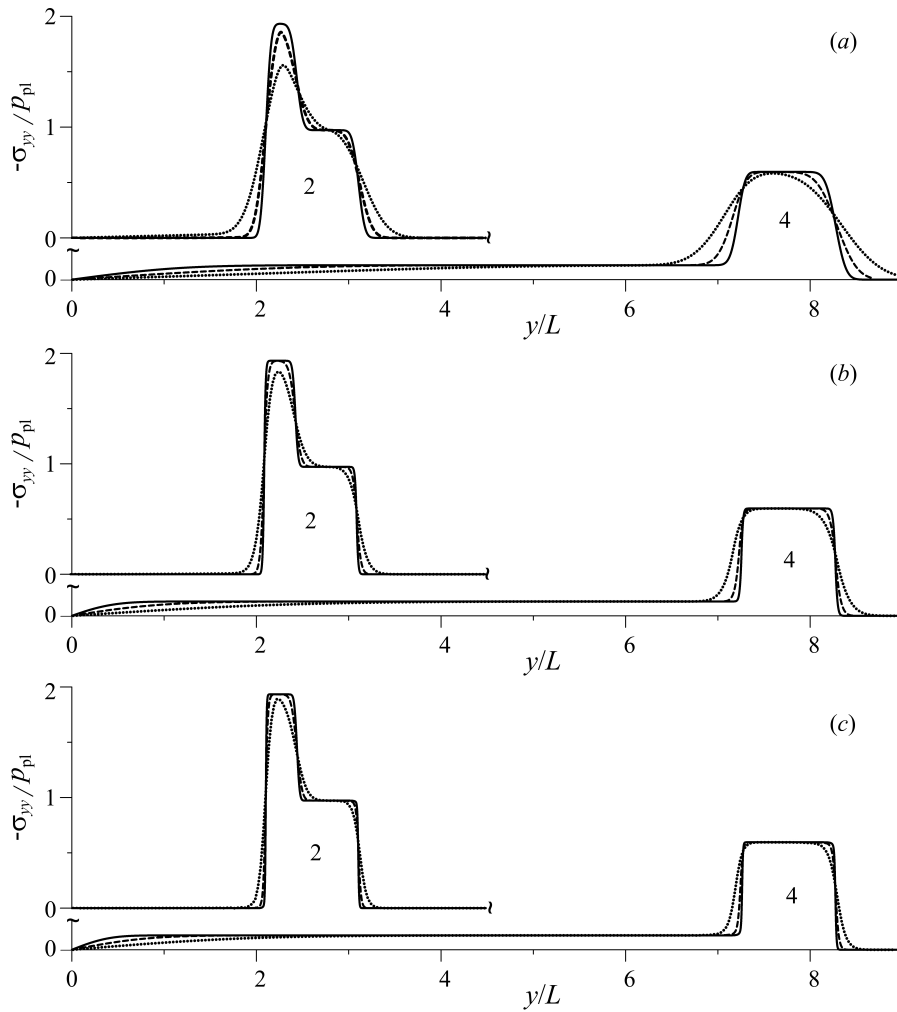


Рис. 3. Численные решения в моменты $t_{2,4}$ случая $p_*/p_{pl} = 1.93$ (рис. 1, *b*), рассчитанные по схемам С.К. Годунова (*a*), TVD (*b*) и UNO (*c*) на сетках из 400 (пунктирные линии), 1600 (штриховые) и 6400 (сплошные) ячеек

4. Расчет волн, обусловленных перемещением поверхности тела

Рассматривается распространение внутрь невозмущенного ненапряженного тела одномерных плоских волн, обусловленных импульсным воздействием на его поверхность $y = 0$, в результате чего поверхность испытывает перемещение со скоростью

$$v_{\Gamma}(t) = \begin{cases} V > 0, & \text{если } 0 \leq t \leq t^*, \\ 0, & \text{если } t > t^*, \end{cases}$$

где V , t^* – параметры воздействия. Рассматривается случай $t^* = 3 \cdot 10^{-5}$ с, $V = 10$ м/с. При принятых механических характеристиках никелевого сплава возмущения в теле остаются упругими, пока скорость V не превышает $V_{pl} = 4.76$ м/с. При более высоких значениях V в теле возникают пластические деформации.

Рис. 5 иллюстрирует особенности возникающего в теле импульса и его трансформацию по мере распространения внутрь тела при смещении поверхности тела

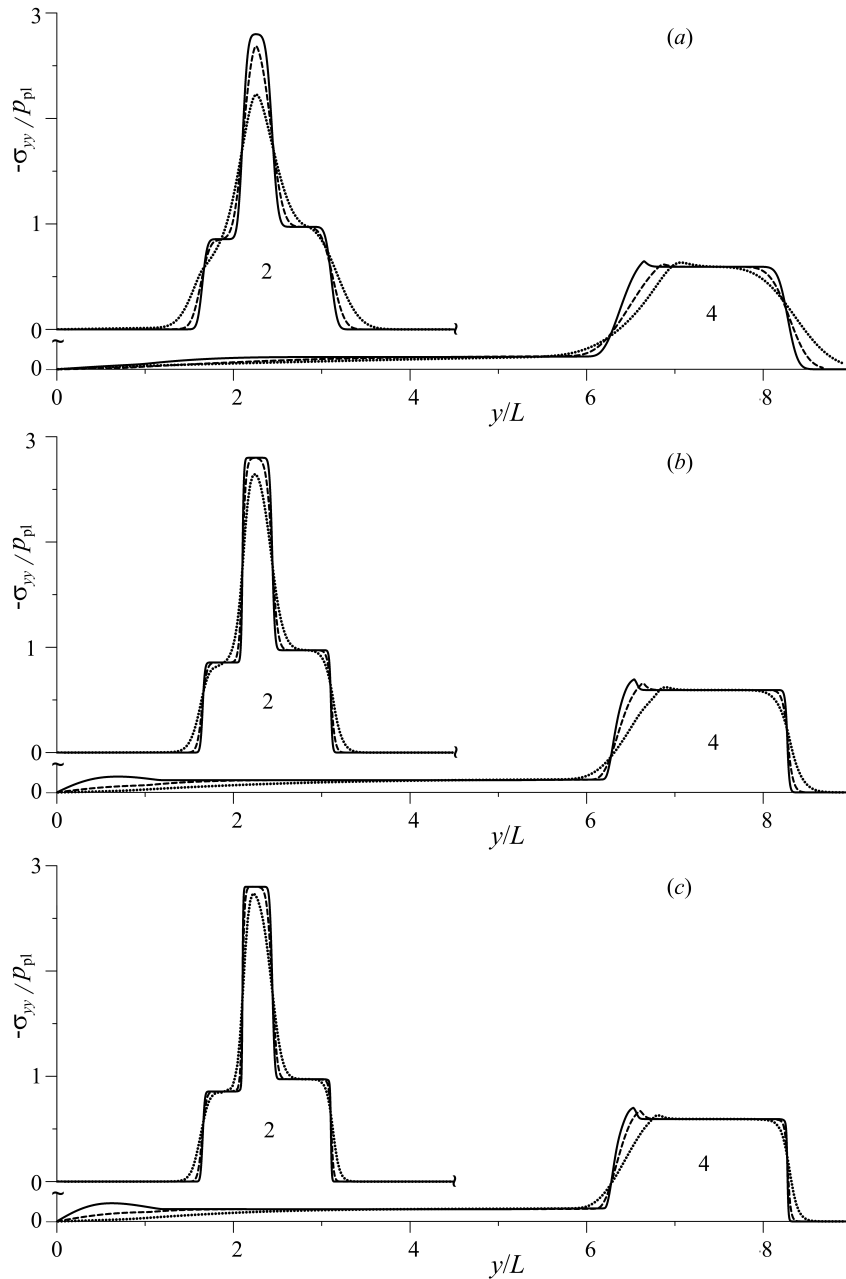


Рис. 4. Численные решения в моменты $t_{2,4}$ для случая $p^*/p_{pl} = 2.8$ (рис. 1, *c*), рассчитанные по схемам С.К. Годунова (*a*), TVD (*b*) и UNO (*c*) на сетках из 400 (пунктирные линии), 1600 (штриховые) и 6400 (сплошные) ячеек

со скоростью $V/V_{pl} = 2.1$. Видно, что эти особенности во многом аналогичны особенностям импульса, возникающего при нагружении свободной поверхности тела при $p^*/p_{pl} = 2.8$ (рис. 1, *c*), где задний фронт импульса так же, как и передний, расщепляется на упругий предвестник и пластическую волну. Однако здесь амплитуда задней пластической волны намного меньше, чем у других волн. Кроме того, продольные напряжения за фронтом задних упругой и пластической волн здесь

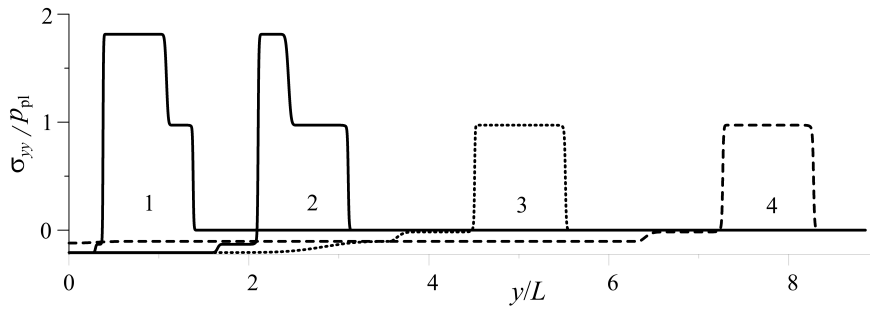


Рис. 5. Распространение импульса в теле при $V/V_{pl} = 2.1$ (по результатам расчетов схемой UNO на равномерной сетке из 6400 ячеек). Кривые 1–4 соответствуют моментам времени t_{1-4}/t^* : 1.4, 3.1, 5.7, 8.3. Здесь $V_{pl} = 4.76$ м/с, $t^* = 3 \cdot 10^{-5}$ с, $L = c_1 t^*$

являются не сжимающими, как при $p^*/p_{pl} = 2.8$ (рис. 1, *c*), а растягивающими. К моменту t_3 упругий предвестник заднего фронта догнал пластическую волну переднего фронта. В результате их взаимодействия образовалась распространяющаяся к поверхности тела волна относительно небольшой амплитуды. До момента t_3 и она успела вступить во взаимодействие с задней пластической волной, в результате чего задний фронт импульса преобразовался в трехволновую структуру (момент t_3). К моменту t_4 задняя составляющая импульса, распространяющаяся противоположно передней, достигла поверхности тела, так что в момент t_4 она находится в процессе отражения от этой поверхности.

Численная сходимость решений, полученных в этом случае по классической схеме С.К. Годунова и ее TVD- и UNO-модификациям, продемонстрирована на рис. 6, где приведены расчеты на тех же сетках, что и в предыдущей задаче. Видно, что, как и выше, во всех случаях на одной и той же расчетной сетке TVD- и UNO-модификации позволяют получить лучшее решение, чем схема классического метода С.К. Годунова, а точность их вычислений существенно выше. Результаты расчетов по схемам TVD и UNO на мелких сетках практически совпадают, тогда как на грубой сетке схема TVD сглаживает экстремум решения несколько больше, чем схема UNO.

Заключение

Представлены результаты исследования эффективности расчетов упруго-пластических возмущений в теле с помощью TVD- и UNO-модификаций метода С.К. Годунова по сравнению с его классическим вариантом. UNO-модификация имеет второй порядок точности, тогда как TVD-модификация – условно второй, поскольку теряет его в экстремальных точках решения. Рассмотрены задачи о распространении плоских одномерных упруго-пластических волн, образующихся в теле результате воздействия на его плоскую поверхность с заданной скоростью. Для оценки эффективности рассматриваемых модификаций применялось сравнение с точными решениями и с результатами расчетов классическим методом С.К. Годунова. Показано, что на одних и тех же сетках рассматриваемые модификации дают намного лучшие результаты. В частности, ширина размазывания фронтов как упругих, так и пластических волн при их использовании намного меньше. При этом UNO-модификация несколько предпочтительнее TVD-модификации, что проявляется, например, в меньшем сглаживании экстремумов решения при использовании грубых сеток.

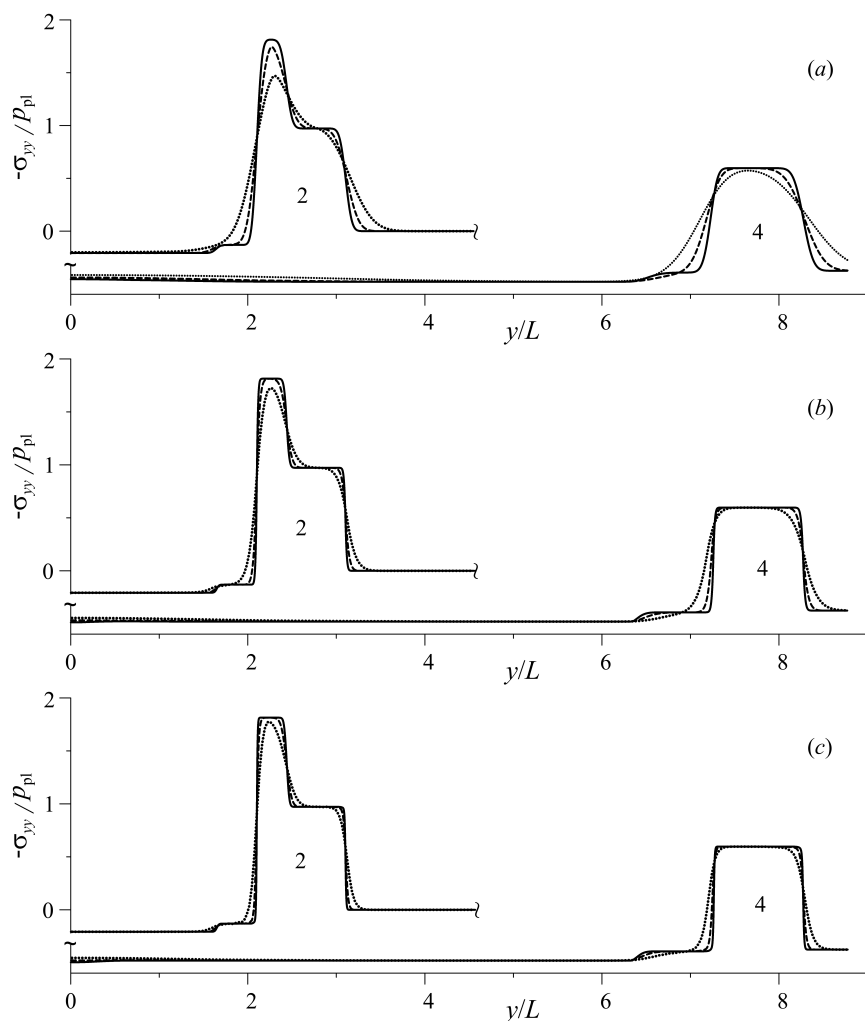


Рис. 6. Численные решения в моменты $t_{2,4}$ случая $V/V_{pl} = 2.1$ (рис. 5), рассчитанные по схемам С.К. Годунова (а), TVD (б) и UNO (с) на сетках из 400 (пунктирные линии), 1600 (штриховые) и 6400 (сплошные) ячеек

Литература

1. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. – М.: Наука, 1973. – 400 с.
2. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
3. Aganin A.A. Dynamics of a small bubble in a compressible fluid // Int. J. Numer. Methods Fluids – 2000. – V. 33. – P. 157–174. – doi: 10.1002/(SICI)1097-0363(20000530)33:2<157::AID-FLD6>3.0.CO;2-A.
4. Аганин А.А., Ильгамов М.А., Топорков Д.Ю. Зависимость сжатия пара в кавитационных пузырьках в воде и бензоле от давления жидкости // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 2. – С. 231–242.
5. Чебан В.Г., Навал И.К., Сабодаш П.Ф., Чередниченко Р.А. Численные методы решения задач динамической теории упругости. – Кишинев: Изд-во Штиинца, 1976. – 226 с.

6. Малахов В.Г., Хисматуллина Н.А. Динамика упругого тела под действием нагрузки, характерной для удара струи жидкости // Вестн. Нижегород. ун-та. – 2011. – № 4, ч. 4. – С. 1597–1599.
7. Аганин А.А., Ильгамов М.А., Малахов В.Г., Халитова Т.Ф., Хисматуллина Н.А. Ударное воздействие кавитационного пузырька на упругое тело // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-матем. науки. – 2011. – Т. 153, кн. 1. – С. 131–146.
8. Аганин А.А., Ильгамов М.А., Хисматуллина Н.А. Упруго-пластические деформации в теле при ударном воздействии кавитационного пузырька // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-матем. науки. – 2013. – Т. 155, кн. 2. – С. 131–143.
9. Аганин А.А., Хисматуллина Н.А. Ударное воздействие струи жидкости на упруго-пластическое тело // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-матем. науки. – 2014. – Т. 156, кн. 2. – С. 72–86.
10. Аганин А.А., Гусева Т.С., Хисматуллина Н.А. Численное моделирование ударного воздействия высокоскоростной струи на твердое тело // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-матем. науки. – 2015. – Т. 157, кн. 1. – С. 75–90.
11. Курант Р., Фридрихс К., Леви Г. О разностных уравнениях математической физики // Усп. матем. наук. – 1941. – Вып. 8. – С. 125–160.
12. Harten A., Engquist B., Osher S. and Chakravarthy S.R. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes III // J. Comp. Phys. – 1987. – V. 71. – P. 231–303.
13. Аганин А.А., Халитова Т.Ф., Хисматуллина Н.А. Расчет сильного сжатия сферического пароголового пузырька в жидкости // Вычисл. технологии. – 2008. – Т. 13, № 6. – С. 54–64.
14. Аганин А.А., Халитова Т.Ф. Деформация ударной волны при сильном сжатии несферических пузырьков // Теплофизика высоких температур. – 2015. – Т. 53, № 6. – С. 923–927.
15. Аганин А.А., Ильгамов М.А., Халитова Т.Ф., Топорков Д.Ю. Деформация пузырька, образованного в результате слияния кавитационных включений, и ударной волны в нем при его сильном расширении и сжатии // Теплофизика и аэромеханика. – 2017. – Т. 24, № 1. – С. 73–82.
16. Аганин А.А., Хисматуллина Н.А. Расчет двумерных возмущений в упругом теле // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-матем. науки – 2017. – Т. 159, кн 2. – С. 143–160.
17. Аганин А.А., Хисматуллина Н.А. Модификации метода С.К. Годунова для расчета распространения возмущений в упругом теле // Труды Ин-та механики им. Р.Р. Мавлютова УфНЦ РАН. – 2016. – Т. 11, № 1. – С. 119–126.
18. Аганин А.А., Хисматуллина Н.А. Схемы второго порядка точности для расчета динамики возмущений в упругом теле // Труды Ин-та механики им. Р.Р. Мавлютова УфНЦ РАН. – 2017. – Т. 12, № 1. – С. 44–50.
19. Уилкинс М.Л. Расчет упруго-пластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике – М.: Мир, 1967. – С. 212–263.
20. Ильгамов М.А., Гильманов А.Н. Неотражающие условия на границах расчетной области. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 240 с.

Поступила в редакцию
07.03.18

Аганин Александр Алексеевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН
ул. Лобачевского, д. 2/31, г. Казань, 420111, Россия
E-mail: *aganin@kfti.knc.ru*

Хисматуллина Наиля Абдулхаевна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН
ул. Лобачевского, д. 2/31, г. Казань, 420111, Россия
E-mail: *nailya_hism@mail.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2018, vol. 160, no. 3, pp. 435–447

Computation of Waves in Elastic-Plastic Body

*A.A. Aganin**, *N.A. Khismatullina***

*Institute of Mechanics and Engineering,
Kazan Science Center, Russian Academy of Sciences, Kazan, 420111 Russia
E-mail: *aganin@kfti.knc.ru, **nailya_hism@mail.ru*

Received March 7, 2018

Abstract

To study wave propagation in continuous media, the classical Godunov method, which is stable and monotonic, is widely used. However, due to the first order of accuracy, it can lead to strong smearing of jumps, contact discontinuities, and other features of the solution in regions with large gradients. The possibility of increasing the computational efficiency of the elastic-plastic waves in a body in comparison with the Godunov method by applying its TVD- and UNO-modifications has been investigated in this paper. The UNO-modification is strictly second-order accurate, whereas the TVD-modification loses that accuracy at the solution extrema due to exactly satisfying the condition of total variation diminishing, while the UNO-modification meets it approximately. The plastic state of the body has been described by the Mises condition. Estimation of the efficiency of the considered modifications has been carried out by comparing the results of their application to a number of problems with the results obtained by the Godunov method. Problems of the propagation of 1D plane elastic-plastic waves have been considered. Those waves result in a body from the action of a pressure pulse on its surface or the given impulsive displacement of the surface. It has been shown that on the same computational grids the results of the considered modifications are much better than those obtained by the Godunov method. In particular, the width of smearing the jump-like fronts of both the elastic and plastic waves is significantly less. At that, the UNO-modification is more preferable because the TVD-modification tends to “cut” the solution extrema.

Keywords: TVD scheme, UNO scheme, Godunov scheme, efficiency of difference schemes, elastic-plastic body

Figure Captions

Fig. 1. Propagation of impulses in the body at $p^*/p_{pl} = 0.93$ (a), 1.93 (b) and 2.8 (c) (obtained by the UNO-scheme on a uniform grid of 6400 cells). Curves 1–4 correspond to time moments $t_{1-4}/t^* = 1.4, 3.1, 5.7, 8.3$. Here $p_{pl} = 225$ MPa, $t^* = 3 \cdot 10^{-5}$ s, $L = c_1 t^*$.

Fig. 2. Numerical solutions at the moment t_2 in the case $p^*/p_{pl} = 0.93$ (Fig. 1 (a)), computed by the Godunov (a), TVD (b), and UNO (c) schemes on uniform grids of 400 (dotted lines), 1600 (dashed lines), and 6400 (solid lines) cells.

Fig. 3. Numerical solutions at the moment t_2 in the case $p^*/p_{pl} = 1.93$ (Fig. 1, b), computed by the Godunov (a), TVD (b), and UNO (c) schemes on uniform grids of 400 (dotted lines), 1600 (dashed lines), and 6400 (solid lines) cells.

Fig. 4. Numerical solutions at the moments $t_{2,4}$ in the case $p^*/p_{pl} = 2.8$ (Fig. 1, c), computed by the Godunov (a), TVD (b), and UNO schemes (c) on grids of 400 (dotted lines), 1600 (dashed lines), and 6400 (solid lines) cells.

Fig. 5. Propagation of the impulse in the body at $V/V_{pl} = 2.1$ (obtained by the UNO-scheme on a uniform grid of 6400 cells). Curves 1–4 correspond to the moments $t_{1-4}/t^* = 1.4, 3.1, 5.7, 8.3$. Here $V_{pl} = 4.76$ m/s, $t^* = 3 \cdot 10^{-5}$ s, $L = c_1 t^*$.

Fig. 6. Numerical solutions at the moments $t_{2,4}$ in the case $V/V_{pl} = 2.1$ (Fig. 5), computed by the Godunov (a), TVD (b), and UNO schemes (c) on grids of 400 (dotted lines), 1600 (dashed lines), and 6400 (solid lines) cells.

References

1. Godunov S.K., Ryaben'kii V.S. *Raznostnye skhemy* [Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1973. 400 p. (In Russian)
2. Godunov S.K., Zabrodin A.V., Ivanov M.Y., Krayko A.N., Prokopov G.P. *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoi dinamiki* [Numerical Solving of Multidimensional Problems in Gas Dynamics]. Moscow, Nauka, 1976. 400 p. (In Russian)
3. Aganin A.A. Dynamics of a small bubble in a compressible fluid. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 2000, vol. 33, pp. 157–174. doi: 10.1002/(SICI)1097-0363(20000530)33:2<157::AID-FLD6>3.0.CO;2-A.
4. Aganin A.A., Ilgamov M.A., Toporkov D.Yu. Dependence of vapor compression in cavitation bubbles in water and benzol on liquid pressure. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 2, pp. 231–242. (In Russian)
5. Cheban V.G., Naval I.K., Sabodash P.F., Cherednichenko R.A. *Chislennyye metody resheniya zadach dinamicheskoi teorii uprugosti* [Numerical Methods for Solving Problems of the Dynamic Theory of Elasticity]. Kishinev, Izd. Shtiints, 1976. 226 p. (In Russian)
6. Malakhov V.G., Khismatullina N.A. Dynamics of an elastic body under the action of a load characteristic of a jet of a liquid impact. *Vestn. Nizhegorod. Univ.*, 2011, no. 4, pt. 4, pp. 1597–1599. (In Russian)
7. Aganin A.A., Ilgamov M.A., Malakhov V.G., Khalitova T.F., Khismatullina N.A. Shock impact of a cavitation bubble on an elastic body. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2011, vol. 153, no. 1, pp. 131–146. (In Russian)
8. Aganin A.A., Ilgamov M.A., Khismatullina N.A. Elastic-plastic deformations in a body under the impact of a cavitation bubble. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2013, vol. 155, no. 2, pp. 131–143. (In Russian)
9. Aganin A.A., Khismatullina N.A. Liquid jet impact on an elastic-plastic body. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2014, vol. 156, no. 2, pp. 72–86. (In Russian)

10. Aganin A.A., Guseva T.S., Khismatullina N.A. Numerical simulation of high-speed jet impact on a rigid body. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2015, vol. 157, no. 1, pp. 75–90. (In Russian)
11. Courant R., Friedrichs K., Lewy H. Über die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. *Math. Ann.*, 1928, vol. 100, no. 1, pp. 32–74. doi: 10.1007/BF01448839. (In German)
12. Harten A., Engquist B., Osher S., Chakravarthy S.R. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes III. *J. Comp. Phys.*, 1987, vol. 71, pp. 231–303.
13. Aganin A.A., Khalitova T.F., Khismatullina N.A. Computation of a strong compression of a spherical gas bubble in a liquid. *Vychisl. Tekhnol.*, 2008, vol. 13, no. 6, pp. 54–64. (In Russian)
14. Aganin A.A., Khalitova T.F. Deformation of a shock wave under strong compression of nonspherical bubbles. *High Temp.*, 2015, vol. 53, no. 6, pp. 877–881. doi: 10.1134/S0018151X15050016.
15. Aganin A.A., Ilgamov M.A., Khalitova T.F., Toporkov D.Yu. Deformation of a bubble formed by coalescence of cavitation inclusions and shock wave inside it at strong expansion and compression. *Thermophys. Aeromech.*, 2017, vol. 24, no. 1, pp. 73–81. doi: 10.1134/S0869864317010085.
16. Aganin A.A., Khismatullina N.A. Computation of two-dimensional disturbances in an elastic body. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 2, pp. 143–160. (In Russian)
17. Aganin A.A., Khismatullina N.A. Modifications of the Godunov method for computing disturbance propagation in an elastic body. *Tr. Inst. Mekh. im. R. R. Mavlyutova UfNTs RAN*, 2016, vol. 11, no. 1, pp. 119–126. (In Russian)
18. Aganin A.A., Khismatullina N.A. Schemes of the second order accuracy for computing the dynamics of disturbances in an elastic body. *Tr. Inst. Mekh. im. R.R. Mavlyutova UfNTs RAN*, 2017, vol. 12, no. 1, pp. 44–50. (In Russian)
19. Wilkins M.L. Calculation of elastic-plastic flow. In: *Methods in Computational Physics*. Vol. 3: Fundamental Methods in Hydrodynamics. New York, Acad. Press, 1964, pp. 211–263.
20. Ilgamov M.A., Gilmanov A.N. *Neotrazhayushchie usloviya na granitsakh raschetnoi oblast'* [Nonreflecting Conditions on the Boundary of Computational Domain]. Moscow, FIZMATLIT, 2003. 240 p. (In Russian)

⟨ **Для цитирования:** Аганин А.А., Хисматуллина Н.А. Расчет волн в упруго-пластическом теле // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2018. – Т. 160, кн. 3. – С. 435-447. ⟩

⟨ **For citation:** Aganin A.A., Khismatullina N.A. Computation of waves in elastic-plastic body. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2018, vol. 160, no. 3, pp. 435-447. (In Russian) ⟩