

УДК 514.76

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МАКСИМАЛЬНО ПОДВИЖНЫХ ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

H.A. Тяпин

Аннотация

В статье исследуется специальный класс максимально подвижных почти контактных метрических многообразий $M^{2n+1}(\eta, \xi, \Phi, g)$. В специальной системе координат выписаны компоненты структурных объектов, найдены базисные поля алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов данной структуры.

Ключевые слова: почти контактное метрическое многообразие, алгебра Ли, инфинитезимальный автоморфизм.

Введение

Пусть M – гладкое многообразие размерности $2n + 1$, η – дифференциальная 1-форма. Форма η определяет на M контактную структуру, если выполняется следующее условие [1]:

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0,$$

то есть $\Omega = \eta \wedge (d\eta)^n$ является формой объема. Естественным обобщением контактных структур являются почти контактные структуры.

Почти контактная метрическая структура на гладком многообразии M^{2n+1} определяется четверкой тензорных полей: векторным полем ξ , называемым характеристическим; дифференциальной 1-формой η ; тензорным полем Φ типа $(1, 1)$, называемым структурным эндоморфизмом; римановым метрическим тензором g . Эти объекты должны удовлетворять следующим условиям [1]:

$$\eta(\xi) = 1, \quad \Phi\xi = 0, \quad \eta(\Phi X) = 0, \quad \Phi\Phi X = -X + \eta(X)\xi, \quad (1)$$

$$g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

для любых векторных полей X, Y на M .

Векторное поле v называется инфинитезимальным автоморфизмом почти контактной метрической структуры, если выполняются следующие условия:

$$L_v\xi = 0, \quad L_v\eta = 0, \quad L_v\Phi = 0, \quad L_vg = 0, \quad (2)$$

где L_v – производная Ли вдоль векторного поля v .

Вопрос о максимальной подвижности почти контактных метрических структур решен С. Танно [2]:

Теорема 1. Пусть M^{2n+1} – связное почти контактное риманово многообразие. Тогда максимальная размерность группы автоморфизмов почти контактной метрической структуры равна $(n+1)^2$. Максимум будет достигаться, если

и только если секционная кривизна в направлении двумерных площадок, содержащих вектор ξ , будет постоянной, равной C , и M является одним из следующих пространств:

- 1) $C > 0$: однородное Сасакиево многообразие (или его ε -деформация) постоянной φ -аналитической кривизны H ;
- 2) $C = 0$: 6 глобальных римановых произведений: $T \times CP^n$, $T \times CE^n$, $T \times CD^n$, $L \times CP^n$, $L \times CE^n$, $L \times CD^n$;
- 3) $C < 0$: прямое произведение $L \times {}_{ct}CE^n$ с метрикой $g_{(t,x)} = (dt)_{(t)}^2 + e^{2ct}G_{(x)}$

В принятых обозначениях L – прямая, T – окружность, CP^n – комплексное проективное пространство с метрикой Фубини–Штуди, CE^n – унитарное пространство, CD^n – открытый шар с однородной кэлеровой структурой отрицательной постоянной голоморфной секционной кривизны.

В дальнейшем будем полагать, что индексы меняются следующим образом:

$$i, j, k, \dots = 1, \dots, n, \quad a, b, s, \dots = 1, \dots, 2n, \quad A, B, S, \dots = 1, \dots, 2n + 1.$$

Рассмотрим 3-й класс максимально подвижных почти контактных метрических структур теоремы Танно [2]. На многообразии $L \times {}_{ct}CE^n$ введем локальные координаты $x = \{x^1, \dots, x^{2n}\}$, $t = x^{2n+1}$. Координаты $\{x^1, \dots, x^{2n}\}$ выберем естественным для унитарного пространства CE^n образом. Тогда $\Phi|_{CE^n} = \delta_j^i \partial_{i+n} \otimes dx^j - \delta_j^i \partial_i \otimes dx^{j+n}$, $G = \delta_{ab} dx^a dx^b$. Пусть \mathbb{L} и \mathbb{M} – распределения, соответствующие слоям CE^n и L . Из доказательства теоремы [2] следует, что они являются соответственно первым и вторым фундаментальными распределениями почти контактной метрической структуры. Распределение \mathbb{L} натянуто на векторные поля $\partial_1, \dots, \partial_{2n}$, а \mathbb{M} – на векторное поле ∂_{2n+1} . Так как $\mathbb{L} = \ker(\eta)$ и \mathbb{M} – линейная оболочка ξ , учитывая первое условие из (1), получим что $\eta = \lambda dx^{2n+1}$, $\xi = \frac{1}{\lambda} \partial_{2n+1}$. Используя вид g и пятое условие (1), находим $\lambda = 1$. Отсюда следует, что в выбранной нами локальной системе координат структурные объекты имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \xi &= \partial_{2n+1}, & \eta &= dx^{2n+1}, \\ g &= e^{2cx^{2n+1}} \delta_{ab} dx^a dx^b + dx^{2n+1}^2, \\ \Phi &= \delta_j^i \partial_{i+n} \otimes dx^j - \delta_j^i \partial_i \otimes dx^{j+n}. \end{aligned} \tag{3}$$

Нетрудно проверить, что условия (1) выполняются.

1. Система дифференциальных уравнений

Найдем векторное поле инфинитезимального автоморфизма v структуры (3). Условия (2) представляют собой систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно неизвестных функций $v^A = v^A(x^1, \dots, x^{2n}, x^{2n+1})$. Запишем эти условия для структурных объектов (η, ξ, Φ, g) :

Для векторного поля ξ имеем:

$$L_v \xi \equiv v^S \partial_S \xi^A - \xi^S \partial_S v^A = 0 \Leftrightarrow \partial_{2n+1} v^A = 0. \tag{4}$$

Для дифференциальной 1-формы η находим:

$$L_v \eta \equiv v^S \partial_s \eta_B + \eta_S \partial_B v^S = 0 \Leftrightarrow \partial_B v^{2n+1} = 0. \tag{5}$$

Для структурного эндоморфизма Φ имеем:

$$L_v \Phi \equiv v^S \partial_S \Phi_B^A - \Phi_B^S \partial_S v^A + \Phi_S^A \partial_B v^S = 0.$$

Запишем последнее равенство для различных серий индексов:

$$\begin{aligned} 1. \partial_{j+n}v^i + \partial_j v^{i+n} &= 0, & 2. -\partial_{j+n}v^{i+n} + \partial_j v^i &= 0, \\ 3. -\partial_j v^i + \partial_{j+n}v^{i+n} &= 0, & 4. \partial_j v^{i+n} + \partial_{j+n}v^i &= 0, \\ 5. \partial_{2n+1}v^a &= 0, & 6. \partial_b v^{2n+1} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Для метрического тензора g из системы (2) находим:

$$L_v g \equiv v^s \partial_S g_{AB} + g_{AS} \partial_B v^s + g_{SB} \partial_A v^s = 0.$$

Запишем данное равенство для различных серий индексов:

$$1. \begin{cases} cv^{2n+1} + \partial_a v^a = 0, \\ \partial_b v^a + \partial_a v^b = 0 \quad (a > b), \end{cases} \quad (7)$$

$$2. e^{2cx^{2n+1}} \partial_{2n+1} v^a + \partial_a v^{2n+1} = 0, \quad (8)$$

$$3. \partial_{2n+1} v^{2n+1} = 0. \quad (9)$$

Исключая из уравнений (4)–(9) одинаковые, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \partial_{2n+1} v^A = 0, \\ \partial_B v^{2n+1} = 0, \\ \partial_{j+n} v^i + \partial_j v^{i+n} = 0, \\ -\partial_{j+n} v^{i+n} + \partial_j v^i = 0, \\ cv^{2n+1} + \partial_a v^a = 0, \\ \partial_b v^a + \partial_a v^b = 0, \quad a > b. \end{cases} \quad (10)$$

2. Решение СДУ

Из первой серии уравнений (10) следует, что функции $v^A = v^A(x^1, \dots, x^{2n}, x^{2n+1})$ не зависят от переменной x^{2n+1} . Из второй серии уравнений (10) следует, что функция $v^{2n+1} = v^{2n+1}(x^1, \dots, x^{2n}, x^{2n+1})$ не зависит ни от одной из переменных, то есть является константой, которую мы обозначим C_0^{2n+1} :

$$v^a = v^a(x^1, \dots, x^{2n}), \quad v^{2n+1} = C_0^{2n+1}. \quad (11)$$

С учетом (11) система дифференциальных уравнений (10) примет вид:

$$\begin{cases} \partial_{j+n} v^i + \partial_j v^{i+n} = 0, \\ -\partial_{j+n} v^{i+n} + \partial_j v^i = 0, \\ cC_0^{2n+1} + \partial_a v^a = 0, \\ \partial_b v^a + \partial_a v^b = 0, \quad a > b. \end{cases} \quad (12)$$

Дифференцируя третье уравнение системы (12) по x^c , получим, что

$$\partial_{ac} v^a = 0. \quad (13)$$

Рассмотрим четвертое уравнение системы (12). Для простоты будем считать, что индексы удовлетворяют лишь условиям $a \neq b \neq c$. Дифференцируя его по x^c , получим

$$\partial_{ac} v^b + \partial_{bc} v^a = 0, \quad a \neq b \neq c. \quad (14)$$

Аналогично, дифференцируя равенство $\partial_c v^b + \partial_b v^c = 0$ по x^a , имеем

$$\partial_{ac} v^b + \partial_{ab} v^c = 0, \quad a \neq b \neq c. \quad (15)$$

В силу того, что $\partial_a v^b = -\partial_b v^a$, перепишем (15) в виде

$$\partial_{ac} v^b - \partial_{bc} v^a = 0, \quad a \neq b \neq c. \quad (16)$$

Складывая (14) и (16) и учитывая (13), получим, что:

$$\partial_{ab} v^c = 0.$$

Мы получили, что все вторые частные производные функций (11) равны нулю. Отсюда следует, что они линейны по всем своим аргументам и могут быть записаны в виде

$$v^a = C_b^a x^b + C_0^a, \quad v^{2n+1} = C_0^{2n+1}. \quad (17)$$

Компоненты векторного поля инфинитезимального автоморфизма зависят от $4n^2 + 2n + 1$ постоянных, которые не являются независимыми. Используя систему (12), найдем алгебраические зависимости, накладываемые на постоянные C_b^a , C_0^a , C_0^{2n+1} .

Подставив (17) в (12), получим:

$$\begin{cases} C_{j+n}^i + C_j^{i+n} = 0, \\ C_j^i - C_{j+n}^{i+n} = 0, \\ cC_0^{2n+1} + C_a^a = 0, \\ C_b^a + C_a^b = 0, \quad a > b. \end{cases} \quad (18)$$

Используя условия (18), можно выразить коэффициенты C_b^a через C_j^i , $i < j$, и C_{j+n}^i , $i \leq j$. Получим:

$$\begin{aligned} C_i^j &= -C_j^i, \quad C_{j+n}^{i+n} = C_j^i, \quad C_{i+n}^{j+n} = C_i^j = -C_j^i, \quad C_a^a = -cC_0^{2n+1}, \\ C_i^{j+n} &= -C_{j+n}^i, \quad C_j^{i+n} = -C_{j+n}^i, \quad C_{i+n}^j = -C_j^{i+n} = C_{j+n}^i, \end{aligned} \quad (19)$$

где $i < j$.

Таким образом, из (19) следует, что среди всех $4n^2$ коэффициентов C_b^a независимыми являются только n^2 . Примем в качестве независимых переменных C_j^i ($i < j$) и C_{j+n}^i ($i \leq j$). Тогда общее решение системы (10) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} v^i &= -cC_0^{2n+1}x^i + \sum_{j>i} C_j^i x^j - \sum_{j<i} C_j^i x^j + \sum_{j \geq i} C_{j+n}^i x^{j+n} + \sum_{j < i} C_{j+n}^i x^{j+n}, \\ v^{i+n} &= -\sum_{j \geq i} C_{j+n}^i x^j - \sum_{j < i} C_{j+n}^i x^j + \sum_{j > i} C_j^i x^{j+n} - \sum_{j < i} C_j^i x^{j+n} - cC_0^{2n+1}x^{i+n}, \\ v^{2n+1} &= C_0^{2n+1}. \end{aligned}$$

Базисные операторы алгебры инфинитезимальных автоморфизмов максимально подвижной почти контактной метрической структуры, определяемой равенствами (3), имеют вид:

$$\begin{cases} C_j^i \ (i < j) : & x^j \partial_i - x^i \partial_j + x^{j+n} \partial_{i+n} - x^{i+n} \partial_{j+n}, \\ C_{j+n}^i \ (i < j) : & x^{j+n} \partial_i + x^{i+n} \partial_j - x^j \partial_{i+n} - x^i \partial_{j+n}, \\ C_{i+n}^i : & x^{i+n} \partial_i - x^i \partial_{i+n}, \\ C_0^a : & \partial_a, \\ C_0^{2n+1} : & cx^a \partial_a - \partial_{2n+1}. \end{cases} \quad (20)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Существует система координат, в которой структурные объекты и базисные операторы алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов максимально подвижных почти контактных метрических многообразий третьего класса Танно имеют вид (3) и (20).*

Summary

N.A. Tyapin. On a Class of Almost Contact Metric Manifolds of Maximal Mobility.

A special class of almost contact metric manifolds $M^{2n+1}(\eta, \xi, \Phi, g)$ of maximal mobility is studied. In terms of a special coordinate system, we calculate the components of the structure objects of M^{2n+1} and find basis vector fields of the Lie algebra of infinitesimal automorphisms of M^{2n+1} .

Key words: almost contact metric manifold, Lie algebra, infinitesimal automorphism.

Литература

1. *Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях.* – М.: МПГУ, 2003. – 495 с.
2. *Tanno Shukichi* The automorphism groups of almost contact riemannian manifolds // Tohoku Math. J. – 1969. – V. 21, No 1. – P. 21-38.

Поступила в редакцию
04.06.09

Тяпин Никита Александрович – ассистент кафедры геометрии Пензенского государственного педагогического университета имени В.Г. Белинского.

E-mail: *tyapin_nikita@mail.ru*