КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

МЕТОДИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ КУРСА ЛЕКЦИЙ

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

(пространства Соболева)

КАЗАНЬ – 2000

Утверждено
на заседании кафедры
дифференциальных
уравнений.
Протокол №4 от 19.11.98.

Составители:
доценты Салехов Л.Г., Бикчантаев И.А.

Данные разработки сложились на основе спецкурсов, прочитанных студентам, специализирующихся по кафедре дифференциальных уравнений, а также слушателям инженерного потока и ФПК. В них рассматриваются элементы пространств Соболева и теоремы вложения.

Сохраняется символика предыдущих изданий 1986, 1987 и 1999 годов.

Разработки могут служить основой курса лекций «Уравнения математической физики», спецкурса или спецсеминара для второй ступени университетского образования (магистры). Они могут быть полезны при работе над курсовыми и дипломными работами, как для студентов, так и для слушателей ФПК.

Пространства Соболева.

В наши цели не входит изложение теории пространств Соболева во всей ее полноте. Введем основные понятия и предложения, которых будет достаточно для исследования некоторых задач. Некоторые предложения будут доказаны, другие примем без доказательства, ограничившись ссылками на известную литературу.

В дальнейшем для краткости письма и языка не будем делать различия между функцией и классом функций, к которому она принадлежит.

I. Пространства $H^\lambda(\Omega)$, где $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Пусть Ω — открытое множество из $\mathbb{R}^n$, где n — натуральное число. Перечислим основные свойства пространств $H^\lambda(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{Z}$.

1^0). **Пространства $H^k(\Omega)$, где k — целое неотрицательное число**.

a) Определение .

Через $H^k(\Omega)$ обозначают множество функций, определенных на Ω, частные производные которых (в смысле обобщенных функций) порядков не выше k являются функциями, интегрируемыми с квадратом модуля (по мере Лебега) на Ω.

N.B. Такие функции называют еще *функциями, имеющими обобщенные производные в смысле Соболева порядка не выше k.*

Очевидно, что $H^k(\Omega)$ есть подпространство векторного пространства $L^2(\Omega)$.

b) Гильбертова структура.

Векторное пространство $H^k(\Omega)$ можно снабдить скалярным произведением

$$(u|v)_k := \sum_{|\alpha| \leqslant k} (D^\alpha u | D^\alpha v),$$

где символ $(.|.)$ обозначает скалярное произведение в $L^2(\Omega)$. Далее $H^k(\Omega)$ снабжают нормой, порождаемой введенным скалярным произведением: $\|u\|_k^2 := (u|u)_k$. Снабженное скалярным произведением и нормой пространство $H^k(\Omega)$ становится предгильбертовым пространством.

Теорема. *Снабженное указанной предгильбертовой структурой пространство $H^k(\Omega)$ является полным, то есть гильбертовым пространством.*

Доказательство. Пусть $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ — последовательность Коши по топологии $H^k(\Omega)$. Тогда для любого мультииндекса $\alpha \in \mathbb{N}$, такого, что $|\alpha| \leqslant k$, последовательность

$$(D^\alpha u_j)_{j\in\mathbb{N}}$$

есть последовательность Коши по топологии $L^2(\Omega)$. Но пространство $L^2(\Omega)$, по известной теореме Рисса-Фишера, является полным, поэтому последовательность $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ сходится к элементу $u \in L^2(\Omega)$ по топологии $L^2(\Omega)$. Аналогично, для любого $\alpha \in \mathbb{N}^n$, такого, что $|\alpha| \leqslant k$, последовательность $(D^\alpha u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ сходится к элементу $W_\alpha \in L^2(\Omega)$ по топологии $L^2(\Omega)$.

Далее, известно, что топология пространства $L^2(\Omega)$ более тонкая (сильнее), чем слабая дуальная топология, индуцируемая на $L^2(\Omega)$ из $\mathcal{D}'(\Omega)$. Поэтому последовательность $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ сходится к u и по топологии $\mathcal{D}'_\sigma(\Omega)$. Напомним, что $\mathcal{D}'_\sigma(\Omega)$ означает пространство $\mathcal{D}'(\Omega)$, снабженное слабой дуальной топологией. Далее, оператор D^α является непрерывным из $\mathcal{D}'_\sigma(\Omega)$ в $\mathcal{D}'_\sigma(\Omega)$, поэтому $(D^\alpha u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ сходится к $D^\alpha u$ по топологии $\mathcal{D}'_\sigma(\Omega)$. Но, так как топология в $\mathcal{D}'_\sigma(\Omega)$ является отделимой (хаусдорфовой), то отсюда вытекает, что $W = D^\alpha u,\ \alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| \leqslant k$. Итак, окончательно, для любого $\alpha \in \mathbb{N}^n$ такого, что $|\alpha| \leqslant k$, последовательность $(D^\alpha u_j)_{\mathrm{j}\in\mathbb{N}}$ сходится к $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ по топологии $L^2(\Omega)$; иначе говоря, последовательность $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ сходится к u по топологии пространства $H^k(\Omega)$.

c) Плотность $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ в $H^k(\mathbb{R}^n)$.

Теорема. *Пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, рассматриваемое как подпространство $H^k(\mathbb{R}^n)$, является плотным в $H^k(\mathbb{R}^n)$, то есть $\forall u \in H^k(\mathbb{R}^n)$ и $\forall \varepsilon > 0$ существует $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ такое, что $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon \subset (\operatorname{supp} u)_\varepsilon$ и $\|\varphi_\varepsilon - u\|_k \leqslant \varepsilon$, где $(\operatorname{supp} u)_\varepsilon$ есть ε-окрестность для $\operatorname{supp} u$.*

Доказательство. Оно проводится с помощью срезки и регуляризации.

1) Срезка. Покажем, что $H^k(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ плотно в $H^k(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим *усекающую последовательность* $(\psi_j) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, то есть $0 \leqslant \psi_j(x) \leqslant 1,\ x \in \mathbb{R}^n,\ \psi_j = 1$ на окрестности $\overline{\Omega}_j$, где семейство (Ω_j) исчерпывает $\mathbb{R}^n$. Такая последовательность существует в силу леммы об отделимости типа Урысона. Тогда $\forall u \in H^k(\mathbb{R}^n)$ и $\forall j \in \mathbb{N}$ функция $u_j = u\psi_j$ является элементом из $H^k(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, причем $\operatorname{supp} u_j \subset \operatorname{supp} u$. Покажем, что u есть предел последовательности $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ по топологии

$H^k(\mathbb{R}^n)$. Действительно, в силу теоремы Лебега о доминирующей сходимости, последовательность $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ сходится к u по топологии $L^2(\mathbb{R}^n)$. Далее,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u_j) = u\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i}\psi_j,\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

и та же теорема Лебега влечет сходимость последовательности $(\partial u_j/\partial x_i)_{j\in\mathbb{N}}$ к $\partial u/\partial x_i$ по топологии $L^2(\mathbb{R}^n)$. Аналогично доказывается, что для любого $\alpha \in \mathbb{N}^n$, такого, что $|\alpha| \leqslant k$, последовательность $(D^\alpha u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ сходится к $D^\alpha u$ по топологии $L^2(\mathbb{R}^n)$.

2) Регуляризация. Покажем, что $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ плотно в $H^k(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Пусть $(\theta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ — регуляризующая последовательность в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Тогда для всякой $u \in H^k(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим последовательность ее регуляризаций $(u_j = \theta_j * u)$. В силу теоремы о регуляризации, $u_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{supp} u_j \subset (\operatorname{supp} u)_{\varepsilon_j}$, причем последовательность $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ сходится к u по топологии $L^2(\mathbb{R}^n)$. А так как $D^\alpha u_j = \theta_j * D^\alpha u$ $(|\lambda| \leqslant k)$, то последовательность $D^\alpha(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ сходится к $D^\alpha u$ по топологии $L^2(\mathbb{R}^n)$.

2^0) **Пространства $H_0^k(\Omega)$.**

a) Определение. *Пространством $H_0^k(\Omega)$ называется замыкание $\mathcal{D}(\Omega)$ в гильбертовом пространстве $H^k(\Omega)$.*

Снабженное предгильбертовой структурой, индуцированной из $H^k(\Omega)$, пространство $H_0^k(\Omega)$ становится, очевидно, *гильбертовым.*

b) Ортогональное дополнение для $H_0^k(\Omega)$ в $H^k(\Omega)$.

Теорема. *Ортогональное дополнение для $H_0^k(\Omega)$ в $H^k(\Omega)$ есть множество таких функций из $H^k(\Omega)$, которые удовлетворяют следующему уравнению в частных производных:*

$$\sum_{|\alpha|\leqslant k} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} u = 0.$$

Доказательство. Элемент $u \in H^k(\Omega)$ ортогонален к $H_0^k(\Omega)$, если и только если u ортогонален к $\mathcal{D}(\Omega)$, в силу плотности $\mathcal{D}(\Omega)$ в $H_0^k(\Omega)$. Но для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ и любого $u \in H^k(\Omega)$ имеем:

$$(u|\varphi)_k = 0 \iff \sum_{|\alpha|\leqslant k} (D^\alpha u | D^\alpha \varphi) = 0 \iff \sum_{|\alpha|\leqslant k} \left\langle (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} u, \overline{\varphi} \right\rangle = 0$$

$$\iff \sum_{|\alpha|\leqslant k} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} u = 0.$$

N.B. Из доказанного, в частности, следует, что ортогональное дополнение для $H_0^0(\Omega)$ в $H^0(\Omega)$ есть нуль; иначе говоря, $\mathcal{D}(\Omega)$ плотно в $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

3^0). **Пространства $H^{-k}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$.**

a) Определение. *Дуальное (сопряженное) пространство к пространству $H_0^k(\Omega)$ называют пространством $H^{-k}(\Omega)$.*

Известно, что когда пространство X нормировано, то сопряженное (дуальное) к нему пространство X' полно. Подчеркнем, что это утверждение справедливо независимо от того, полно или нет пространство X (см. [2], стр. 172 – 173).

Теперь снабдим пространство $H^{-k}(\Omega)$ нормой. Пусть $L \in H^{-k}(\Omega)$. Тогда норма $\|L\|_{-k} := \sup\{|\langle L, u\rangle|$, где $u \in H_0^k(\Omega)$ такая, что $\|u\|_k \leqslant 1\}$. Поэтому $H^{-k}(\Omega)$ становится полным нормированным пространством, то есть *банаховым пространством.*

Так как вложение $\mathcal{D}(\Omega)$ в $H_0^k(\Omega)$ непрерывно и плотно, то в силу теоремы о каноническом вложении дуальных пространств [4], $H^{-k}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Напомним также, что для того, чтобы обобщенная функция T была элементом из $H^{-k}(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна на $\mathcal{D}(\Omega)$ по топологии, индуцированной из $H^k(\Omega)$.

b) Теорема об изоморфизме. *Оператор*

$$\sum_{|\alpha|\leqslant k} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha}$$

отображает $H_0^k(\Omega)$ на $H^{-k}(\Omega)$ и является изометрическим изоморфизмом (говорят еще *каноническим*) *$H_0^k(\Omega)$ на $H^{-k}(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть $g \in H^k(\Omega)$. Положим

$$T = \sum_{|\alpha|\leqslant k} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} g.$$

Покажем, что T есть элемент из $H^{-k}(\Omega)$. Для любого φ из $\mathcal{D}(\Omega)$ имеем:

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{|\alpha|\leqslant k} (D^\alpha\varphi | D^\alpha\overline{g}) = (\varphi|\overline{g})_k.$$

Следовательно, линейный функционал T непрерывен на $\mathcal{D}(\Omega)$, снабженном топологией из $H^k(\Omega)$. А тогда $T \in H^{-k}(\Omega)$ и, кроме того, $\langle T, u\rangle = (u|\overline{g})_k$, $\forall u \in H_0^k(\Omega)$, то есть $\|T\|_{-k} = \|g\|_k$, если $g \in H_0^k(\Omega)$.

Остается показать, что образ $H_0^k(\Omega)$ при отображении

$$\sum_{|\alpha|\leqslant k}(-1)^{|\alpha|}D^{2\alpha}$$

совпадает с $H^{-k}(\Omega)$.

Пусть L — линейный функционал, непрерывный на $H_0^k(\Omega)$. Согласно теореме Рисса о представлении непрерывного линейного функционала, существует единственный элемент $g \in H_0^k(\Omega)$ такой, что

$$\langle L, u\rangle = (u|g)_k,\ u \in H_0^k(\Omega).$$

Пусть T — обобщенная функция, соответствующая функционалу L, иначе говоря, T есть сужение L на $\mathcal{D}(\Omega)$. Тогда $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ имеем:

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle L, \varphi\rangle = (\varphi|g)_k = \sum_{|\alpha|\leqslant k}(D^\alpha\varphi|D^\alpha g) = \left\langle \sum_{|\alpha|\leqslant k}(-1)^{|\alpha|}D^{2\alpha}\overline{g}, \varphi \right\rangle.$$

Отсюда следует, что

$$T = \sum_{|\alpha|\leqslant k}(-1)^{|\alpha|}D^{2\alpha}\overline{g}.$$

Следствие. *Пространство $\mathcal{D}(\Omega)$ плотно в $H^{-k}(\Omega)$*

Доказательство. Каноническая изометрия

$$\sum_{|\alpha|\leqslant k}(-1)^{|\alpha|}D^{2\alpha}:\ H_0^k(\Omega) \text{ на } H^{-k}(\Omega)$$

отображает, очевидно, $\mathcal{D}(\Omega)$ в себя. Но образ плотного множества в некотором множестве при сюръективной изометрии является плотным множеством. Откуда и вытекает следствие.

c) Теорема о структуре элемента из $H^{-k}(\Omega)$. *Обобщенная функция T на Ω есть элемент из $H^{-k}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда она является конечной суммой производных порядков не выше k от функций, принадлежащих пространству $L^2(\Omega)$.*

Доказательство. 1) Пусть

$$T = \sum_{|\alpha|\leqslant k}D^\alpha f_\alpha,$$

где $f_\alpha \in L^2(\Omega)$. Тогда для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ имеем:

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \langle f_\alpha, (-1)^\alpha D^\alpha \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leqslant k} (-1)^{|\alpha|} (f_\alpha | D^\alpha \overline{\varphi}).$$

Откуда

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \|f_\alpha\|_0 \right) \|\varphi\|_k,$$

то есть T непрерывен на $\mathcal{D}(\Omega)$ по топологии $H^k(\Omega)$; поэтому $T \in H^{-k}(\Omega)$.

2) Обратно, пусть $T \in H^{-k}(\Omega)$. Тогда, согласно теореме об изоморфизме, существует $g \in H_0^k(\Omega)$ такой, что

$$T = \sum_{|\alpha| \leqslant k} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} g.$$

Полагая $f_\alpha = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha g$, имеем: $T = \sum_{|\alpha| \leqslant k} D^\alpha f_\alpha$.

II. Пространства $L_s^2(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $s \in \mathbb{R}$.

1^0) Определение. *Через $L_s^2(\mathbb{R}^n)$ обозначим множество функций f, измеримых и таких, что*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s \mathrm{d}\xi < \infty.$$

Очевидно, $L_s^2(\mathbb{R}^n)$ является векторным пространством. Снабжая его скалярным произведением:

$$(f|g)_{L_s^2} := \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) \overline{g(\xi)} (1 + |\xi|^2)^s \mathrm{d}\xi$$

и нормой, порождаемой этим скалярным произведением, получим предгильбертово пространство.

2^0) Свойства.

a) Полнота $L_s^2(\mathbb{R}^n)$.

Теорема. *Предгильбертовы пространства $L_s^2(\mathbb{R}^n)$ являются полными (то есть гильбертовыми) и изометрично изоморфными. Отображение $f \mapsto (1+|x|^2)^{s/2} f$ преобразует изометрично $L_{r+s}^2(\mathbb{R}^n)$ на $L_r^2(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Пусть $s \in \mathbb{R}$. Рассмотрим отображение $f \mapsto (1+|x|^2)^{s/2} f$ из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Очевидно, оно преобразует изометрично пространство $L_{r+s}^2(\mathbb{R}^n)$ на $L_r^2(\mathbb{R}^n)$ для любого действительного числа r. Следовательно, пространства $L_s^2(\mathbb{R}^n)$ все изоморфны. А поскольку $L_0^2(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$ является *гильбертовым*, то все пространства $L_s^2(\mathbb{R}^n)$ являются гильбертовыми.

b) Вложение $\mathcal{S}$ в $L_s^2(\mathbb{R}^n)$.

Теорема. *Для любого $s \in \mathbb{R}$ пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ канонически вкладывается в пространство $L_s^2(\mathbb{R}^n)$. Каноническое вложение $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в $L_s^2(\mathbb{R}^n)$ является непрерывным и плотным, то есть $\mathcal{S} \subset L_s^2$ и $\overline{\mathcal{S}} = L_s^2$.*

Доказательство. 1) Пусть $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Так как $(1+|x|^2)^{s/2}$ есть элемент из $\theta_M(\mathbb{R}^n)$, где $\theta_M(\mathbb{R}^n)$ — пространство мультипликаторов для $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, то функция $f(1+|x|^2)^{s/2}$ есть элемент из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, а значит и из $L^2(\mathbb{R}^n)$. Но тогда f есть элемент из $L_s^2(\mathbb{R}^n)$.

2) Естественное (каноническое) вложение $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в $L_s^2(\mathbb{R}^n)$ состоит из трех непрерывных отображений:

a) умножения на $(1+|x|^2)^{s/2}$, которое непрерывно отображает $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

b) непрерывного вложения $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$, то есть $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$.

c) умножения на $(1+|x|^2)^{-s/2}$, которое непрерывно отображает $L^2(\mathbb{R}^n)$ в $L_s^2(\mathbb{R}^n)$.

Следовательно, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L_s^2(\mathbb{R}^n)$.

3) Плотность же $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в $L_s^2(\mathbb{R}^n)$ вытекает из трех предложений:

a) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ плотно в $L^2(\mathbb{R}^n)$.

b) умножение на $(1+|x|^2)^{-s/2}$ преобразует $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

c) это же умножение преобразует изометрично $L^2(\mathbb{R}^n)$ на $L_s^2(\mathbb{R}^n)$.

c) Вложение $L_s^2(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Теорема. *Для любого $s \in \mathbb{R}$ имеем:*

1) Пространство $L_s^2(\mathbb{R}^n)$ вкладывается в пространство $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

2) Сильное дуальное для $L_s^2(\mathbb{R}^n)$ непрерывно вкладывается в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, снабженное сильной дуальной топологией, и отождествляется с гильбертовым пространством $L_{-s}^2(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. 1) Пусть $f \in L^2_s(\mathbb{R}^n)$. Покажем, что обобщенная функция, порождаемая функцией f (то есть регулярная обобщенная функция) есть обобщенная функция медленного роста. Действительно, в силу неравенства Шварца, имеем:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(\xi)|\mathrm{d}\xi}{(1+|\xi|^2)^{\frac{n-s}{2}}} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(\xi)|(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathrm{d}\xi}{(1+|\xi|^2)^{\frac{n}{2}}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s\mathrm{d}\xi\right)^{1/2} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{d}\xi}{(1+|\xi|^2)^n}\right)^{1/2} < \infty.$$

2) Согласно теореме о каноническом вложении дуальных пространств, сильное дуальное для $L^2_s(\mathbb{R}^n)$ непрерывно вкладывается в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, ибо вложение $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в $L^2_s(\mathbb{R}^n)$ является непрерывным и плотным. Далее, так как умножение на $(1+|x|^2)^s$ изометрически отображает $L^2_s(\mathbb{R}^n)$ на $L^2_{-s}(\mathbb{R}^n)$, для доказательства того, что сильное дуальное для $L^2_s(\mathbb{R}^n)$ отождествляется с $L^2_{-s}(\mathbb{R}^n)$, достаточно показать, что это самое умножение изометрически отображает $L^2_s(\mathbb{R}^n)$ на свое сильное дуальное. Пусть $g \in L^2_s(\mathbb{R}^n)$. Положим $h = (1+|x|^2)^s g$. Покажем, что эта обобщенная функция медленного роста T_h является линейным функционалом, непрерывным на $L^2_s(\mathbb{R}^n)$. В самом деле, пусть $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Имеем:

$$\langle T_h, \varphi\rangle = \left\langle (1+|x|^2)^s g, \varphi\right\rangle = \left\langle (1+|x|^2)^{s/2} g, (1+|x|^2)^{s/2}\varphi\right\rangle = (\varphi|\overline{g})_{L^2_s}.$$

Следовательно, функционал T_h непрерывен на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ по топологии $L^2_s(\mathbb{R}^n)$. Поэтому T_h продолжим в функционал L, непрерывный на $L^2_s(\mathbb{R}^n)$. Этот функционал задается формулой:

$$\langle L, f\rangle = (f|\overline{g})_{L^2_s},\ f \in L^2_s(\mathbb{R}^n)$$

и, следовательно,

$$\|L\|_{(L^2_s)'} = \|g\|_{L^2_s}.$$

Обратно, пусть L — линейный функционал, непрерывный на $L^2_s(\mathbb{R}^n)$. Согласно теореме о представлении линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве, существует элемент $g \in L^2_s(\mathbb{R}^n)$ такой, что для любого $f \in L^2_s(\mathbb{R}^n)$ имеем: $\langle L, f\rangle = (f|g)_{L^2_s}$. Пусть T есть сужение L на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ имеем:

$$\langle L, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle = (\varphi|g)_{L^2_s} = \left\langle (1+|x|^2)^s\overline{g}, \varphi\right\rangle.$$

Откуда $T = (1+|x|^2)^s \overline{g}$.

3^0) Соотношение между $H^\lambda(\mathbb{R}^n)$ и $L^2_\lambda(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Теорема. *Для всякого $\lambda \in \mathbb{Z}$ преобразование Фурье есть топологический изоморфизм пространства $H^\lambda(\mathbb{R}^n)$ на пространство $L^2_\lambda(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. 1) *Случай, когда $\lambda = 0$.* Тогда сформулированная теорема есть ничто иное, как теорема Планшереля-Парсеваля в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)$.

2) *Случай, когда $\lambda = k$ — целое и положительное.* Преобразование Фурье переставляет оператор дифференцирования D^λ и оператор умножения на моном x^α ($\alpha \in \mathbb{N}^n$). Теорема Планшереля-Парсеваля в этом случае показывает, что u есть элемент из $H^k(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда для любого $\alpha \in \mathbb{N}^n$ такого, что $|\alpha| \leqslant k$, функция $x^\alpha \hat{u}$ принадлежит $L^2(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, имеем:

$$\|u\|^2_{H^k} = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \int_{\mathbb{R}^n} |(2\pi\xi)^{2\alpha}| \cdot |\hat{u}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi.$$

Но известно, что существуют такие две константы c_1 и c_2, что

$$c_1(1+|\xi|^2)^k \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant k} |(2\pi\xi)^{2\alpha}| \leqslant c_2(1+|\xi|^2)^k, \ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Поэтому $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$, если и только если

$$(1+|\xi|^2)^{k/2}\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

и

$$c_1 \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^k |\hat{u}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \leqslant \|u\|^2_{H^k} \leqslant c_2 \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^k |\hat{u}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi.$$

3) *Случай, когда $\lambda < 0$.* Из пункта 2) следует, что $\overline{\mathcal{F}}$ есть топологический изоморфизм $H^k(\mathbb{R}^n)$ на $L^2_k(\mathbb{R}^n)$ для любого целого $k \geqslant 1$. Следовательно, транспонированное к нему отображение ${}^t\overline{\mathcal{F}}$ есть топологический изоморфизм сильного дуального к $L^2_k(\mathbb{R}^n)$, то есть $L^2_{-k}(\mathbb{R}^n)$, на сильное дуальное к $H^k(\mathbb{R}^n)$, то есть $H^{-k}(\mathbb{R}^n)$. Поэтому $({}^t\overline{\mathcal{F}})^{-1}$ есть топологический изоморфизм $H^{-k}(\mathbb{R}^n)$ на $L^2_{-k}(\mathbb{R}^n)$. Но $({}^t\overline{\mathcal{F}})^{-1}$ есть ничто иное, как ${}^t\mathcal{F}$, то есть $\mathcal{F}$.

III. Пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$, где $s \in \mathbb{R}$.

1^0) Определение. *Обобщенная функция медленного роста называется элементом из $H^s(\mathbb{R}^n)$, если ее образ Фурье есть элемент из*

$L^2_s(\mathbb{R}^n)$. *Иначе говоря,*

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) | \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi < \infty\}.$$

Множество $H^s(\mathbb{R}^n)$ снабжают скалярным произведением:

$$(u|v)_s := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}(1+|\xi|^2)^s \mathrm{d}\xi$$

и нормой, порождаемой этим скалярным произведением:

$$\|u\|_s^2 := \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s \mathrm{d}\xi.$$

N.B. Когда $s \in \mathbb{Z}$, эта норма эквивалентна норме, определенной ранее, но эти две нормы не равны.

2^0) Свойства пространств $H^s(\mathbb{R}^n)$.

a) *Трансформация Фурье преобразует изометрично $H^s(\mathbb{R}^n)$ на $L^2_s(\mathbb{R}^n)$.*

Это свойство вытекает из самого определения пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$ и топология в пространстве $H^s(\mathbb{R}^n)$ есть топология, переносимая из $L^2_s(\mathbb{R}^n)$ при преобразовании Фурье.

b) *Пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ является полным (то есть гильбертовым).*

Доказательство. Пусть $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ — последовательность Коши в $H^s(\mathbb{R}^n)$. Тогда $((1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}_\nu(\xi))_{\nu\in\mathbb{N}}$ есть последовательность Коши в $L^2(\mathbb{R}^n)$ и, следовательно, $((1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}_\nu(\xi))_{\nu\in\mathbb{N}}$ сходится в $L^2(\mathbb{R}^n)$ к функции $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Положим $g = (1+|\xi|^2)^{-s/2} f$. Поскольку $(1+|\xi|^2)^{-s/2} \in \theta_M(\mathbb{R}^n)$, то $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Поэтому $g = \hat{u}$ для некоторого $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Так как, с другой стороны, $f = (1+|\xi|^2)^{s/2} g = (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, то $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, последовательность $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ сходится к u в $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Пространство обобщенных функций $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}'$ называют *нормальным*, если $\mathcal{D} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{D}'$ и $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{A}$.

Пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$ являются нормальными. В действительности справедливо несколько большее.

c) *$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ плотно в $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. 1) Свойство $H^s(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ следует из определения пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$.

2) Пусть обобщенные функции u стремятся к нулю в $H^s(\mathbb{R}^n)$. Тогда $(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}$ стремятся к нулю в $L^2(\mathbb{R}^n)$ и поскольку $L^2(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, причем топология $L^2(\mathbb{R}^n)$ сильнее индуцированной из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, то $(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}$ стремится к нулю в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Но $(1+|\xi|^2)^{-s/2} \in \theta_M(\mathbb{R}^n)$ и так как умножение на элемент из θ_M является непрерывным из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, то $\hat{u}$ стремится к нулю в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Но тогда u стремится к нулю в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

3) Пусть $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и поскольку $(1+|\xi|^2)^{s/2} \in \theta_M(\mathbb{R}^n)$, то $(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, что означает $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^n)$, так как $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$.

4) Пусть φ сходится к нулю в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\hat{\varphi}$ также сходится к нулю в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, а поскольку $(1+|\xi|^2)^{s/2} \in \theta_M$, то $(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{\varphi}$ сходится к нулю в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и тем более в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, φ сходится к нулю в $H^s(\mathbb{R}^n)$.

5) Пусть $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Тогда $(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Так как $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ плотно в $L^2(\mathbb{R}^n)$, то существует такая последовательность $(\psi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, что $(\psi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ сходится к $(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}$. Так как $\psi_\nu = (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{\varphi}_\nu$, причем $\hat{\varphi}_\nu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, то элементы $\varphi_\nu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ сходятся к u в $H^s(\mathbb{R}^n)$.

d) *Если* $s \leqslant s'$, *то* $H^{s'}(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Очевидно, $(1+|\xi|^2)^{s/2} \leqslant (1+|\xi|^2)^{s'/2}$. Из того, что $(1+|\xi|^2)^{s'/2}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ непосредственно вытекает, что $(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ и, сверх того, $\|u\|_s \leqslant \|u\|_{s'}$. В силу указанных свойств получается бесконечная цепь пространств

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset H^{s'} \subset H^s \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}',\ s \leqslant s',$$

где $\mathcal{D}$ плотно в каждом пространстве.

Поскольку $H^s(\mathbb{R}^n)$ нормально, то его дуальное является пространством обобщенных функций, то есть $[H^s(\mathbb{R}^n)]' \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

N.B. Важно заметить, что хотя $H^s(\mathbb{R}^n)$ является гильбертовым пространством, мы не отождествляем его со своим дуальным, рассматривая $[H^s(\mathbb{R}^n)]'$ как банаховское сопряженное с $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Справедливо более сильное утверждение

e) $[H^s(\mathbb{R}^n)]' \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Так как $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ плотно в $H^s(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R}^n)$, то по теореме о каноническом вложении дуальных пространств вытекает, что $[H^s(\mathbb{R}^n)]' \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

f) *Пространство* $[H^s(\mathbb{R}^n)]'$, *дуальное к пространству* $H^s(\mathbb{R}^n)$, *изометрически изоморфно пространству* $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$, *то есть* $[H^s(\mathbb{R}^n)]' = H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Пусть $u \in [H^s(\mathbb{R}^n)]'$. Поскольку $[H^s(\mathbb{R}^n)]' \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, то $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим максимум выражения

$$((1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{u}|\psi),$$

когда ψ пробегает множество $\{\|\psi\|_{L^2} \leqslant 1\}$. Этот максимум равен

$$\|(1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{u}\|_{L^2} = \|u\|_{-s}.$$

Так как $(1+|\xi|^2)^{s/2} \in \theta_M(\mathbb{R}^n)$, то можно считать, что $\psi = (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{\overline{\varphi}}$, где $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, причем условие $\|\psi\|_{L^2} \leqslant 1$ эквивалентно $\|\varphi\|_s \leqslant 1$. Следовательно, используя теорему Парсеваля, получим

$$((1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{u}|\psi) = ((1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{u}|(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{\overline{\varphi}}) = (\hat{u}|\hat{\overline{\varphi}}) = (u|\overline{\varphi}).$$

Далее имеем:

$$|(u|\overline{\varphi})| \leqslant \|u\|_{[H^s(\mathbb{R}^n)]'}\|\varphi\|_s \leqslant \|u\|_{[H^s(\mathbb{R}^n)]'}.$$

Откуда $(1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, то есть $u \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|u\|_{-s} \leqslant \|u\|_{[H^s(\mathbb{R}^n)]'}. \tag{$*$}$$

Обратно, пусть $u \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$. Так как $\|u\|_{[H^{-s}(\mathbb{R}^n)]'} = \max\limits_{\|\overline{\varphi}\|_s \leqslant 1} |(u|\overline{\varphi})|$, то достаточно оценить выражение

$$((1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{u}|(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{\overline{\varphi}})$$

при условии, что $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\|\varphi\|_s \leqslant 1$.

Имеем:

$$|(u|\overline{\varphi})| = |((1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{u}|(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{\overline{\varphi}})| \leqslant$$
$$\|(1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{u}\|_{L^2}\|(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{\varphi}\|_{L^2} = \|u\|_{-s}\|\varphi\|_s,$$

откуда $u \in [H^s(\mathbb{R}^n)]'$ и кроме того

$$\|u\|_{[H^s(\mathbb{R}^n)]'} \leqslant \|u\|_{-s}. \tag{$**$}$$

Следовательно, $[H^s(\mathbb{R}^n)]' = H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ и, учитывая оценки (*) и (**), имеем:

$$\|u\|_{[H^s(\mathbb{R}^n)]'} = \|u\|_{-s}.$$

g) *Преобразование-свертка с $\mathcal{F}[(1+|x|^2)^{s/2}]$ изометрически отображает пространство $H^{r+s}(\mathbb{R}^n)$ на пространство $H^r(\mathbb{R}^n)$ для любых r и s из $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $u \in H^{r+s}(\mathbb{R}^n)$. Тогда имеем

$$\|u\|^2_{r+s} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^{r+s}\mathrm{d}\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \{|\hat{u}(\xi)|(1+|\xi|^2)^{s/2}\}^2(1+|\xi|^2)^r\mathrm{d}\xi.$$

Положим $\hat{v}(\xi) = \hat{u}(\xi)(1+|\xi|^2)^{s/2}$. Тогда $v \in H^r(\mathbb{R}^n)$ и $\|u\|^2_{r+s} = \|v\|^2_r$. Далее, $\mathcal{F}v = \mathcal{F}u\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}[(1+|\xi|^2)^{s/2}]$, откуда $v = u * \overline{\mathcal{F}}[(1+|\xi|^2)^{s/2}] = u * \mathcal{F}[(1+|\xi|^2)^{s/2}]$.

N.B. Если $s \in \mathbb{N}$, то обобщенная функция $\mathcal{F}[(1+|x|^2)^s]$ есть ни что иное, как $\left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^s\delta$, где δ — мера Дирака и Δ — оператор Лапласа, в то время как $\mathcal{F}[(1+|x|^2)^{-s}]$ есть элементарное решение оператора $\left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^s$. В самом деле, если $\left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^s\delta * E = \delta$, то $\mathcal{F}[\left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^s\delta]\mathcal{F}E = 1$, откуда $(1+|\xi|^2)^s\mathcal{F}E = 1$. Следовательно, $E = \overline{\mathcal{F}}[(1+|\xi|^2)^{-s}] = \mathcal{F}[(1+|\xi|^2)^{-s}]$.

3^0). Теоремы вложения С.Л.Соболева.

Пусть X и Y — банаховы пространства. Далее, пусть все элементы пространства X принадлежат также и пространству Y. Тогда говорят, что пространство X канонически (естественно) вложено (или вкладывается) в пространство Y. Обозначим через $\mathcal{I}$ оператор, который любому элементу $u \in X$ ставит в соответствие тот же элемент u, но рассматриваемый уже как элемент пространства Y. Оператор $\mathcal{I}$ называют *оператором (канонического) вложения* пространства X в пространство Y. С подобным обстоятельством мы уже встречались. Например, $H^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, вкладывается в $L^2(\Omega)$, то есть $H^k(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, но этот факт тривиален, ибо он следует из самого определения пространства $H^k(\Omega)$. Интерес, конечно, представляют нетривиальные теоремы вложения. «Теоремами вложения» принято называть теоремы об ограниченности (непрерывности) оператора вложения или его компактности (вполне непрерывности).

В теории обобщенных функций рассматривается, вообще говоря, не конкретная обобщенная функция, а класс эквивалентных обобщенных функций. В частности, некоторый класс обобщенных функций может оказаться эквивалентным некоторой классической непрерывной или интегрируемой функции, не будучи равным ей (поточечно).

Теоремы вложения говорят о том, что, если обобщенная функция принадлежит к какому-то пространству Соболева, то она оказывается эквивалентной некоторой классической функции из определенного класса.

Поставим вопрос о регулярности (гладкости) элементов из H^s.

а) *Случай пространства* $\mathbb{R}^n$.

Для всякого $k \in \mathbb{N}$ положим

$$\mathcal{B}_0^k(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathcal{E}^k(\mathbb{R}^n) | D^\alpha u \in C_0(\mathbb{R}^n),\ |\alpha| \leqslant k\},$$

где $C_0(\mathbb{R}^n)$ — подмножество из $C(\mathbb{R}^n)$, образованное из функций, обращающихся в нуль на бесконечности. Говорят, что непрерывная функция $f(x)$ обращается в нуль на бесконечности, если и только если, для любого $\varepsilon > 0$ существует компакт K из $\mathbb{R}^n$ такой, что если $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$, то $|f(x)| < \varepsilon$. Множество $C_0(\mathbb{R}^n)$ снабжают нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$; тогда $C_0(\mathbb{R}^n)$ становится банаховым пространством. Напомним, что топология в $C_0(\mathbb{R}^n)$ называется топологией равномерной сходимости в $\mathbb{R}^n$.

Очевидно, $\mathcal{B}_0^k(\mathbb{R}^n)$ есть векторное пространство; снабдим его нормой:

$$p_k(u) := \sup_{|\alpha| \leqslant k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha u(x)|.$$

Теорема. *Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $s \in \mathbb{R}$ такие, что $s > n/2 + k$, где n — размерность пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ непрерывно вкладывается в пространство $\mathcal{B}_0^k(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. 1) Рассмотрим сначала случай, когда $k = 0$. То есть покажем, что если $s > n/2$, то пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ непрерывно вкладывается в пространство $C_0(\mathbb{R}^n)$. В силу неравенства Шварца имеем:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(\xi)| \mathrm{d}\xi \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s \, d\xi \right)^{1/2} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{d}\xi}{(1 + |\xi|^2)^s} \right)^{1/2}.$$

Откуда, так как $s > n/2$, следует, что пространство $L_s^2(\mathbb{R}^n)$ непрерывно вкладывается в пространство $L^1(\mathbb{R}^n)$. Поэтому пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$

непрерывно вкладывается в пространство $\mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^n)$. Но, в силу теоремы Римана-Лебега, пространство $\mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^n)$ непрерывно вкладывается в пространство $C_0(\mathbb{R}^n)$, снабженное топологией равномерной сходимости.

2) Перейдем к общему случаю. Если $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, то для $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leqslant k$ $D^\alpha u \in H^{s-k}(\mathbb{R}^n)$. А так как $s-k > n/2$, то $D^\alpha u$ допускает представителя, принадлежащего $C_0(\mathbb{R}^n)$. Откуда $u \in \mathcal{B}_0^k(\mathbb{R}^n)$. Можно убедиться, что вложение $H^s(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{B}_0^k(\mathbb{R}^n)$ непрерывно.

b) *Случай произвольного открытого множества.*

Теорема. *Пусть Ω — открытое множество из $\mathbb{R}^n$, а $k \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}$ такие, что $m > n/2 + k$. Тогда пространство $H^m(\Omega)$ непрерывно вкладывается в пространство $\mathcal{E}^k(\Omega)$.*

Доказательство. Прежде покажем, что $H^m(\Omega)$ вложено в $\mathcal{E}^k(\Omega)$. Для этого достаточно показать, что сужение функции $u \in H^m(\Omega)$ на всякое открытое множество Ω_1, относительно компактное в Ω, является (представима через) функцией из класса C^k. Для этого рассмотрим функцию $\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$, равную 1 на Ω_1. Очевидно, ηu есть функция с компактным носителем в Ω, принадлежащая $H^m(\Omega)$. Пусть $\widetilde{\eta u}$ есть продолжение нулем для функции ηu на $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Тогда $\widetilde{\eta u} \in H^m(\mathbb{R}^n)$ и, в силу теоремы вложения Соболева в случае $\Omega = \mathbb{R}^n$ имеем, что $\widetilde{\eta u}$ есть (допускает представителя) функция из класса $C^k(\mathbb{R}^n)$. Но сужение для $\widetilde{\eta u}$ на Ω_1 равно u. Откуда и следует результат.

Остается убедиться, что вложение $H^m(\Omega)$ в $\mathcal{E}^k(\Omega)$ является непрерывным. Пусть K — некоторый компакт из Ω, а $\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$, равная 1 на K. Тогда имеем:

$$p_{K,k}(u) = \sup_{|\alpha| \leqslant k} \sup_{x \in K} |D^\alpha u| = p_{K,k}(\widetilde{\eta u}) \leqslant$$

$$p_k(\widetilde{\eta u}) \leqslant C\|\widetilde{\eta u}\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} = C\|\eta u\|_{H^m(\Omega)} \leqslant C'\|u\|_{H^m(\Omega)}.$$

Это показывает непрерывность вложения $H^m(\Omega)$ в $\mathcal{E}^k(\Omega)$, ибо $p_{K,k}$ — одна из полунорм пространства $\mathcal{E}^k(\Omega)$.

c) *Случай открытого множества, обладающего свойством m-продолжения.*

Говорят, что открытое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ обладает свойством m-продолжения, если существует линейное отображение $\Pi : L^2(\Omega) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, непрерывное из $H^r(\Omega)$ в $H^r(\mathbb{R}^n)$ для $r = 0,\ 1, \ldots, m$, и такое, что сужение Πu в Ω совпадает (почти всюду) с u. Πu называют m-продолжением функции $u \in H^m(\Omega)$ на $\mathbb{R}^n$, где $\Pi u \in H^m(\mathbb{R}^n)$.

Позже увидим, что полупространство обладает свойством m-продолжения для любого целого положительного m.

Теорема. *Пусть Ω — открытое множество, обладающее свойством m-продолжения. Тогда пространство $H^m(\Omega)$ непрерывно вкладывается в пространство $\mathcal{B}^k(\overline{\Omega})$, если $m > n/2 + k$, где $\mathcal{B}^k(\overline{\Omega})$ есть множество функций, k раз непрерывно дифференцируемых на $\overline{\Omega}$.*

Доказательство. Множество $\mathcal{B}^k(\overline{\Omega})$ снабжают нормой $p_k(u) := \sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} \sup\limits_{|a|\leqslant k} |D^\alpha u(x)|$. Пусть $u \in H^m(\Omega)$ и Π есть m-продолжение для Ω. Тогда Πu есть элемент из $\mathcal{B}_0^k(\mathbb{R}^n)$ и, следовательно, сужение Πu есть элемент из $\mathcal{B}^k(\overline{\Omega})$. Но это сужение есть ничто иное, как u.

Вложение $H^m(\Omega)$ в $\mathcal{B}^k(\overline{\Omega})$ есть композиция трех непрерывных отображений:

1) отображения Π, преобразующего непрерывно $H^m(\Omega)$ в $H^m(\mathbb{R}^n)$;

2) естественного непрерывного вложения $H^m(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{B}_0^k(\mathbb{R}^n)$;

3) непрерывного отображения — сужения $u \to u|_\Omega$, преобразующего $\mathcal{B}_0^k(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{B}^k(\overline{\Omega})$.

Поэтому $H^m(\Omega) \subset \mathcal{B}^k(\overline{\Omega})$.

4^0) Компактное вложение.

a) Теорема. *Пусть K — компакт из $\mathbb{R}^n$, а r и s — два действительных числа таких, что $r < s$. Тогда естественное вложение $H^s(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}'_K(\mathbb{R}^n)$ в $H^r(\mathbb{R}^n)$ является компактным.*

Здесь $H^s(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}'_K(\mathbb{R}^n) := \{u \in H^s(\mathbb{R}^n) | \operatorname{supp} u \subset K\}$ — множество функций, снабженное топологией, индуцированной из $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Докажем предварительно *лемму:*

Лемма. *Для всякого действительного числа s и любых x и y из $\mathbb{R}^n$ имеет место неравенство:*

$$(1 + |x + y|^2)^s \leqslant (1 + |x|)^{2|s|}(1 + |y|^2)^s.$$

Доказательство. Достаточно ее доказать для $s = \pm 1$. Рассмотрим случай, когда $s = +1$. Имеем:

$$1+|x+y|^2 = 1+|x|^2+2xy+|y|^2 \leqslant 1+|x|^2+2|x||y|+|y|^2 \leqslant (1+|x|)^2(1+|y|^2),$$

ибо $2|y| \leqslant 2|y|^2 + |x||y|^2 + 2$.

Рассмотрим случай, когда $s = -1$. Положим $\xi = -x$ и $\eta = x + y$ и используем неравенство, только что доказанное: $1 + |\xi + \eta|^2 \leqslant (1 + |\eta|^2)(1+|\xi|)^2$. Имеем: $1+|y|^2 \leqslant (1+|x+y|^2)(1+|x|)^2$. Или: $(1+|x+y|^2)^{-1} \leqslant (1 + |y|^2)^{-1}(1 + |x|)^2$.

Доказательство теоремы. Смысл теоремы в том, что если $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ есть последовательность элементов из $H^s(\mathbb{R}^n)$ с носителями, содержащимися в K и $\|u_j\|_s \leqslant 1$, то в ней существует подпоследовательность, которая является последовательностью Коши по топологии пространства $H^r(\mathbb{R}^n)$.

1) Покажем, что существует подпоследовательность $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ такая, что последовательность $(\hat{u}_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ равномерно сходится на каждом компакте. Пусть $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и равна 1 на окрестности K; очевидно, $u_j = \varphi u_j$ и, как следствие, $\hat{u}_j = \hat{\varphi} * \hat{u}_j$, то есть

$$\hat{u}_j(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi - \eta)\hat{u}_j(\eta)\mathrm{d}\eta.$$

Умножая это равенство на $(1 + |\xi|^2)^{s/2}$, используя неравенство $(1 + |\xi|^2)^{s/2} \leqslant (1 + |\xi - \eta|)^{|s|}(1 + |\eta|^2)^{s/2}$, доказанное в лемме, и применяя неравенство Шварца, получим:

$$|(1 + |\xi|^2)^{s/2}\hat{u}_j(\xi)|^2 \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} |(1 + |\xi|)^{|s|}\hat{\varphi}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi.$$

Также для всякого $\alpha \in \mathbb{N}^n$ имеем:

$$|(1 + |\xi|^2)^{s/2}D^\alpha\hat{u}_j(\xi)|^2 \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} |(1 + |\xi|)^{|s|}D^\alpha\hat{\varphi}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi.$$

Следовательно, последовательность $(\hat{u}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на каждом компакте. Согласно теореме Асколи, существует подпоследовательность равномерно сходящаяся на любом компакте. Для простоты обозначений будем считать, что это сама последовательность $(\hat{u}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ сходится равномерно.

2) Пусть теперь $\varepsilon > 0$. Выберем шар B достаточно большого радиуса, такого, что $(1 + |\xi|^2)^{r/2}/(1 + |\xi|^2)^{s/2} \leqslant \varepsilon$, как только $\xi \notin B$. Тогда

$$\|u_j - u_k\|_r \leqslant \varepsilon\|u_j - u_k\|_s + \left\{\int\limits_B (1 + |\xi|^2)^r|\hat{u}_j(\xi) - \hat{u}_k(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\right\}^{1/2}.$$

Так как $(\hat{u}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ сходится равномерно на B, то второе слагаемое правой части стремится к нулю, когда $k,\ j\to\infty$. С другой стороны, первое слагаемое в правой части всегда $\leqslant 2\varepsilon$. Следовательно, последовательность $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ является последовательностью Коши.

b) Теорема Рёлиха-Кондрашова. *Пусть Ω — открытое множество, относительно компактное в $\mathbb{R}^n$. Тогда для всякого целого $m\geqslant 1$*

1) Вложение $H_0^m(\Omega)$ в $H_0^{m-1}(\Omega)$ является компактным.

2) Вложение $H^m(\Omega)$ в $H^{m-1}(\Omega)$ является компактным, если Ω обладает свойством m-продолжения.

Доказательство. 1) Пусть $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ — последовательность элементов из $H_0^m(\Omega)$, такая, что $\|u_j\|_{H^m(\Omega)}\leqslant 1$. Пусть $\tilde{u}_j$ — продолжение нулем u_j на $\mathbb{R}^n\setminus\Omega$. Тогда $\tilde{u}_j\in H^m(\mathbb{R}^n)$. Так как $\overline{\Omega}$ — компакт в $\mathbb{R}^n$, то, в силу предыдущей теоремы, последовательность $(\tilde{u}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ содержит подпоследовательность $(\tilde{u}_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$, сходящуюся по топологии $H^{m-1}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, последовательность $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ сходится по топологии $H^{m-1}(\Omega)$.

2) То же доказательство с $\eta\Pi u$ вместо $\tilde{u}$, где $\eta\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, равна 1 на окрестности $\overline{\Omega}$, и где Π есть m-продолжение для Ω.

IV. Изучение следов.

Пусть Γ — гиперплоскость (Γ может быть и некоторым компактным подмногообразием из $\mathbb{R}^n$ размерности $\leqslant n-1$) в $\mathbb{R}^n$. Известна следующая проблема: какие функции f из $L^2(\mathbb{R}^n)$ допускают *естественное сужение на* Γ (след на Γ, обозначаемый $\mathrm{trace}_\Gamma f$)?

Так как мера Лебега множества Γ в $\mathbb{R}^n$ равна нулю, то не каждую функцию можно «сузить» на Γ. Есть надежда, что имеют следы на Γ хотя бы те функции f, в классе эквивалентности которых имеется достаточно гладкий представитель. Например, $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ имеет естественное сужение (след) $\mathrm{trace}_\Gamma f$, задаваемое просто набором значений f на Γ. Идея нашего подхода состоит в нахождении такого банахова пространства B, что $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\subset B\subset L^2(\mathbb{R}^n)$ и $\|\mathrm{trace}_\Gamma f\|_{L^2(\Gamma)}\leqslant c\|f\|_B$ для $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Если $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ плотно в B, то можно продолжить $\mathrm{trace}_\Gamma f$ на все B.

Что же следует выбрать в качестве такого банахова пространства B? Известно, что условия на гладкость функции f эквивалентны условиям на скорость убывания функции $\hat{f}$, поэтому естественно воспользоваться пространствами Соболева $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Будем исследовать следы функции на гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$.

1^0). Интегральные следы.

Точку пространства $\mathbb{R}^n$ будем обозначать через $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Будем полагать $\eta = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ и $\zeta = \xi_n \in \mathbb{R}$, так что $\xi = (\eta, \zeta)$.

Пусть Γ — гиперплоскость $\{\xi \in \mathbb{R}^n | \zeta = 0\}$.

a) Определение. *Для всякой функции $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и всякого $j \in \mathbb{N}$ положим*

$$(\mu_j u)(\eta) = \int\limits_{\mathbb{R}} \zeta^j u(\eta, \zeta) \mathrm{d}\zeta.$$

Функции $\mu_j u \in \mathcal{S}(\Gamma)$, по самому их определению, есть *интегральные следы (или моменты) функции u на гиперплоскости* Γ.

b) *Теорема.*

Будем называть *строгим сюръективным морфизмом гильбертова пространства E на гильбертово пространство F* всякое линейное отображение f, непрерывное из E *на* F, допускающее *непрерывное поднятие*, то есть существует линейное отображение g, непрерывное из F в E, такое, что $f \circ g$ есть тождество в F. Тогда имеет место следующая

Теорема. *Пусть m — целое, $\geqslant 1$. Пусть $\vec{\mu} = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{m-1})$ — отображение — векторный интегральный след, которое преобразует $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{S}(\Gamma) \times \cdots \times \mathcal{S}(\Gamma)$ (декартово произведение m сомножителей). Тогда $\vec{\mu}$ единственным образом продолжимо в строгий сюръективный морфизм (заново обозначаемый через $\vec{\mu}$) из $L^2_m(\mathbb{R}^n)$ на $\prod_{j=0}^{m-1} L^2_{m-j-1/2}(\Gamma)$.*

Доказательство. 1) Снабдим $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ топологией индуцированной, из $L^2_m(\mathbb{R}^n)$. Покажем, что μ_0 непрерывно отображает $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в $L^2_{m-1/2}(\Gamma)$. Пусть $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Положим

$$\nu(\eta) = \int\limits_{\mathbb{R}} u(\eta, \zeta) \mathrm{d}\zeta, \ \eta \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Применяя неравенство Шварца, имеем:

$$|\nu(\eta)|^2 \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{(1+|\xi|^2)^m} \int\limits_{\mathbb{R}} |u(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^m \mathrm{d}\xi, \qquad (*)$$

где $\xi = (\eta, \zeta)$. Применяя замену $\zeta = t\sqrt{1+|\eta|^2}$, получим:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{(1+|\xi|^2)^m} = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{(1+|\eta|^2+\zeta^2)^m} = \frac{1}{(1+|\eta|^2)^{m-1/2}} I_m,$$

где

$$I_m = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^m} \leqslant \pi.$$

А тогда из (*) имеем:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+|\eta|^2)^{m-1/2} |\nu(\eta)|^2 \mathrm{d}\eta \leqslant \pi \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^m \mathrm{d}\xi.$$

Это неравенство показывает, что линейное отображение $\mu_\Gamma : u \to \nu$ непрерывно преобразует $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в $L^2_{m-1/2}(\Gamma)$. В силу плотности $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в $L^2_m(\mathbb{R}^n)$ и полноты пространства $L^2_{m-1/2}(\Gamma)$, можно единственным образом продолжить μ_0 в линейное отображение, непрерывное из $L^2_m(\mathbb{R}^n)$ в $L^2_{m-1/2}(\Gamma)$.

Далее имеем: $\mu_j(u) = \mu_0(\zeta^j u)$ для всякой функции $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Но отображение $u \mapsto \zeta^j u$ непрерывно преобразует $L^2_m(\mathbb{R}^n)$ в $L^2_{m-j}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, отображение μ_j непрерывно преобразует $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, по прежнему снабженное топологией из $L^2_m(\mathbb{R}^n)$, в $L^2_{m-j-1/2}(\Gamma)$. Затем, как и выше, μ_j продолжают на $L^2_m(\mathbb{R}^n)$.

2) Покажем теперь сюръективность отображения $\vec{\mu}$ и существование непрерывного поднятия с помощью следующей леммы.

Лемма о сюръективности (при фиксированном j).

Пусть $\nu_j \in L^2_{m-j-1/2}(\Gamma)$. Тогда существует по крайней мере один элемент $u_j \in L^2_m(\mathbb{R}^n)$ такой, что $\mu_j u_j = \nu_j$ и $\|u_j\|_{L^2_m} \leqslant C\|\nu_j\|_{L^2_{m-j-1/2}}$, где C — константа, зависящая только от j и m.

Доказательство леммы. Пусть

$$u_j(\eta, \zeta) = \alpha \frac{\lambda^{2m-1}\zeta^j}{(\lambda^2+\zeta^2)^{m+j}} \nu_j(\eta),$$

где $\lambda = \sqrt{1+|\eta|^2}$, и α — пока произвольная константа. Далее имеем:

$$\mu_j u_j = \int\limits_{\mathbb{R}} u_j(\eta, \zeta) \zeta^j \mathrm{d}\zeta = \nu_j(\eta)$$

или

$$\alpha\nu_j(\eta)\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{(\sqrt{1+|\eta|^2})^{2m-1}\zeta^{2j}\mathrm{d}\zeta}{(1+|\eta|^2+\zeta^2)^{m+j}}=\nu_j(\eta)$$

или, проводя замену $\zeta=t\sqrt{1+|\eta|^2}$, имеем:

$$\alpha\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{t^{2j}\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{m+j}}=1,$$

то есть

$$\frac{1}{\alpha}=\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{t^{2j}\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{m+j}}.$$

Далее,

$$\|u_j\|^2_{L^2_m}=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\alpha\frac{\lambda^{2m-1}\zeta^j}{(\lambda^2+\zeta^2)^{m+j}}\nu_j(\eta)\right|^2(\lambda^2+\zeta^2)^m\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\alpha^2\lambda^{4m-2}\zeta^{2j}|\nu(\eta)|^2}{(\lambda^2+\zeta^2)^{m+2j}}\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta.$$

Замена $\zeta=t\sqrt{1+|\eta|^2}$ дает:

$$\|u_j\|^2_{L^2_m}=\alpha^2\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\frac{t}{1+t^2}\right)^{2j}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^m}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}|\nu_j(\eta)|^2(1+|\eta|^2)^{m-j-1/2}\mathrm{d}\eta=$$

$$=\alpha^2\beta^2\|\nu_l\|^2_{L^2_{m-j-1/2}},$$

где

$$\beta^2=\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\frac{t}{1+t^2}\right)^{2j}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^m}.$$

Таким образом, лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству пункта 2).

Положим

$$u(\eta,\zeta)=\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{h=1}^{m}c_{h,j}u_j\left(\eta,\frac{\zeta}{h}\right)\tag{$*$}$$

и определим числа $c_{h,j}$ $(0\leqslant j\leqslant m-1;\ 1\leqslant h\leqslant m)$ так, чтобы

$$\mu_l u=\nu_l,\ l=0,\ 1,\dots,m-1.$$

Очевидно,

$$\mu_l u = \sum_{j=0}^{m-1} c_{h,j} h^{l+1} \mu_l u_j.$$

Теперь достаточно на числа $c_{h,j}$ наложить условия:

$$\sum_{h=1}^{m} c_{h,j} h^{l+1} = \delta_{j,l},\ j = 0,\ 1, \dots, m-1,\ l = 0,\ 1, \dots, m-1,$$

где $\delta_{j,l}$ — символ Кронекера. Это возможно, ибо матрица Вандермонда обратима.

А тогда из (*) легко получить неравенство:

$$\|u\|^2_{L^2_m} \leqslant c \sum_{j=0}^{m-1} \|\nu_j\|^2_{L^2_{m-j-1/2}}.$$

Это доказывает существование непрерывного поднятия.

Теорема полностью доказана.

1^0) Исследование следов.

Здесь точку из $\mathbb{R}^n$ будем обозначать $x = (x_1, \dots, x_n)$. Положим $y = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, $z = x_n$; тогда $x = (y, z)$, $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, $z \in \mathbb{R}$.

Пусть Γ — гиперплоскость $\{x \in \mathbb{R}^n | z = 0\}$.

a) Определение. Для всякой функции $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и любого $j \in \mathbb{N}$ положим

$$(\gamma_j u)(y) = \frac{\partial^j}{\partial z^j} u(y, z)|_{z=0}.$$

Функции $(\gamma_j u)(y) \in \mathcal{S}(\Gamma)$ называют *следами и на гиперплоскости* Γ.

b) Теорема. *Пусть m — целое число $\geqslant 1$. Пусть $\vec{\gamma} = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1})$ — отображение — «векторный след», преобразующее $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{S}(\Gamma) \times \dots \times \mathcal{S}(\Gamma)$ (m раз). Тогда $\vec{\gamma}$ единственным образом продолжимо в строгий сюръективный морфизм (обозначаемый снова $\vec{\gamma}$) из $H^m(\mathbb{R}^n)$ на $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)$.*

Эта теорема вытекает из предыдущей теоремы и следующей леммы.

Лемма. *Пусть $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $(2\pi i)^j \mu_j(\mathcal{F}u) = \mathcal{F}(\gamma_j u)$.*

Заметим, что буква $\mathcal{F}$ в левой части равенства означает преобразование Фурье в $\mathbb{R}^n$, а в правой части $\mathcal{F}$ означает преобразование Фурье в $\mathbb{R}^{n-1}$.

Доказательство леммы. Пусть $f = \mathcal{F}u$, тогда $u = \overline{\mathcal{F}} f$, или

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{2\pi i x\xi} f(\xi) \mathrm{d}\xi.$$

Откуда

$$\frac{\partial^j u(x)}{\partial z^j} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (2\pi i \zeta)^j \mathrm{e}^{2\pi i x\xi} f(\xi) \mathrm{d}\xi.$$

Следовательно,

$$(\gamma_j u)(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (2\pi i \zeta)^j \mathrm{e}^{2\pi i y\eta} f(\eta, \zeta) \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathrm{e}^{2\pi i y\eta} \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}} (2\pi i \zeta)^j f(\eta, \zeta) \mathrm{d}\zeta \right\} \mathrm{d}\eta =$$

$$= (2\pi i)^j \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathrm{e}^{2\pi i y\eta} (\mu_j f)(\eta) \mathrm{d}\eta = (2\pi i)^j \overline{\mathcal{F}}(\mu_j f)(y).$$

V. Свойства полупространства.

Изучение локальных свойств границы некоторого открытого множества, когда эта граница достаточно гладкая, сводится с помощью локальных карт к изучению полупространства. Поэтому остановимся на изучении свойств полупространства.

Прежде всего, введем новое пространство. Для всякого открытого множества Ω из $\mathbb{R}^n$ будем обозначать через $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ множество функций, определенных на Ω, являющихся сужениями на Ω элементов из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Итак, $\mathcal{D}(\overline{\Omega}) := \{u|_\Omega$, где $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$.

В качестве Ω будем рассматривать полупространство

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n | z > 0\},$$

где $x = (y, z)$, $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, $z \in \mathbb{R}$, а его граница есть гиперплоскость $\Gamma := \{x \in \mathbb{R}^n | z = 0\}$.

1^0) Плотность $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ в $H^m(\Omega)$.

Теорема. *Для каждого $m \in \mathbb{N}$ $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ всюду плотно в $H^m(\Omega)$.*

Доказательство. Будем обозначать через $\tilde{u}$ продолжение нулем функции u вне ее области определения и через $\Omega_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n | z + \alpha > 0\}$.

Пусть $u \in H^m(\Omega)$. Для всякого $\varepsilon > 0$ положим:

$$u_\varepsilon(y, z) := u(y, z + \varepsilon),$$

что определяет $u_\varepsilon(y, z)$ на Ω_ε. Через ν_ε обозначим сужение для u_ε на Ω.

a) *Покажем, что для всякого фиксированного $\varepsilon > 0$ ν_ε может быть аппроксимировано элементами из $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$.*

Пусть η — элемент из $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, равный единице на окрестности $\overline{\Omega}$, где $\operatorname{supp} \eta \subset \Omega_\varepsilon$. Положим $U = \eta \tilde{u}_\varepsilon$. Тогда U есть элемент из $H^m(\mathbb{R}^n)$ и его сужение на Ω равно ν_ε. Но пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ плотно в $H^m(\mathbb{R}^n)$; следовательно, существует последовательность $(\Phi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ элементов из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, сходящаяся к U по топологии пространства $H^m(\mathbb{R}^n)$. Пусть $\varphi_j = \Phi_j|_\Omega$. Тогда $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ и последовательность $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ сходится к ν_ε по топологии пространства $H^m(\Omega)$.

b) *Покажем, что ν_ε сходится к u по топологии пространства $H^m(\Omega)$, когда $\varepsilon \to 0$.*

Сначала покажем, что ν_ε стремится к u по топологии $L^2(\Omega)$. Для этого достаточно показать, что $\tilde{\nu}_\varepsilon$ стремится к $\tilde{u}$ по топологии $L^2(\mathbb{R}^n)$. Имеем: $\|\tilde{\nu}_\varepsilon - \tilde{u}\| \leqslant \|\tilde{u} - \tilde{u}_\varepsilon\| + \|\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{\nu}_\varepsilon\|$, где $\|\cdot\|$ — норма в $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Обозначая через w сужение u на $\Omega_{-\varepsilon}$, видим, что второе слагаемое правой части равно $\|\tilde{u} - \tilde{w}\|$ и стремится к нулю в силу теоремы Лебега о мажорированной сходимости. Что касается первого слагаемого правой части, то оно равно $\|\tilde{u} - \tau_{-\varepsilon}\tilde{u}\|$ и стремится к нулю в силу непрерывности отображения $x \mapsto \tau_x u$, преобразующего $\mathbb{R}^n$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим теперь производные мультииндекса α, где $|\alpha| \leqslant m$. Имеем: $D^\alpha u_\varepsilon(y, z) = D^\alpha u(y, z + \varepsilon)$ и $D^\alpha \nu_\varepsilon = D^\alpha u_\varepsilon|_\Omega$, то есть сужение $D^\alpha u_\varepsilon$ на Ω. Поскольку $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leqslant m$, мы можем заключить, в силу только что сказанного, что $D^\alpha \nu_\varepsilon \to D^\alpha u$ по топологии $L^2(\Omega)$.

2^0) Свойство m-продолжения полупространства, $m \in \mathbb{N}$.

Теорема. *Полупространство обладает свойством m-продолжения для любого $m \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n | z > 0\}$. Согласно предыдущей теореме, $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ плотно в $H^m(\Omega)$. Следовательно, достаточно показать, что всякая функция $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ является m-продолжимой. Для этого положим

$$u^{\#}(x) = \begin{cases} u(x), & z \geqslant 0 \\ \nu(x), & z < 0, \end{cases}$$

где $\nu(x) = \lambda_1 u(y, \alpha_1 z) + \lambda_2 u(y, \alpha_2 z) + \ldots + \lambda_m u(y, \alpha_m z) + \lambda_{m+1} u(y, \alpha_{m+1} z)$ и в качестве α_i возьмем отрицательные, различные между собой числа (например, $\alpha_i = -i$). Теперь определим λ_i так, чтобы $u^{\#} \in H^m(\mathbb{R}^n)$.

Для этого необходимо, чтобы для всех $k = 0,\ 2, \ldots, m$ имели бы:

$$\frac{\partial^k}{\partial z^k}\nu(y,z)\bigg|_{z=0} = \frac{\partial^k}{\partial z^k}u(y,z)\bigg|_{z=0},\ y \in \mathbb{R}^{n-1},$$

то есть

$$\sum_{j=1}^{m+1} (\alpha_j)^k \lambda_j = 1,\ k = 0,\ 1, \ldots, m.$$

Мы получили линейную систему из $(m+1)$ уравнений с $(m+1)$ неизвестными $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m+1}$. Определитель системы есть определитель Вандермонда и, следовательно, не равен нулю, ибо все α_j различны между собой. Поэтому система имеет единственное решение. Положим $u^{\#} = \Pi u$. Очевидно, $\Pi u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ и что Π есть линейное отображение, непрерывное из $H^r(\Omega)$ в $H^r(\mathbb{R}^n)$ для $r \leqslant m$.

3^0) Следы для полупространства.

Для всякой $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ и любого $j \in \mathbb{N}$ обозначим через $(\gamma_j u)(y)$ значение $\frac{\partial^j}{\partial z^j}u(y,z)$ в точке $z = 0$. *Функции* $(\gamma_j u)(y)$ *называют следами u на гиперплоскости* Γ. Имеет место

Теорема. *Пусть m — целое число $\geqslant 1$, а $\vec{\gamma} = (\gamma_0, \ldots, \gamma_{m-1})$ — отображение — «векторный след», преобразующее $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ в $\mathcal{D}(\Gamma) \times \cdots \times \mathcal{D}(\Gamma)$ (m раз). Тогда*

a) *$\vec{\gamma}$ продолжимо единственным образом в строгий сюръективный морфизм (это продолжение снова обозначим через $\vec{\gamma}$) из $H^m(\Omega)$ на $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)$.*

b) *для почти всех $(y,z) \in \Omega$*

$$\frac{\partial^j u(y,z)}{\partial z^j} - (\gamma_j u)(y) = \int\limits_0^z \frac{\partial^{j+1}}{\partial z^{j+1}}u(y,t)\mathrm{d}t,\ 0 \leqslant j \leqslant m-1.$$

c) *ядро отображения $\vec{\gamma}$ есть $H_0^m(\Omega)$. В частности, ядро γ_0 есть $H_0^1(\Omega)$.*

Доказательство. a) Обозначим через $\vec{\Gamma} = (\Gamma_0, \ldots, \Gamma_{m-1})$ векторный след функции $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ на гиперплоскость Γ. Пусть Π — m-продолжение для Ω. Для $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ имеем:

$$\gamma_j\varphi = \left.\frac{\partial^j\varphi}{\partial z^j}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial^j\Pi\varphi}{\partial z^j}\right|_{z=0} = \Gamma_j(\Pi\varphi).$$

Пусть $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ снабжено предгильбертовой нормой из $H^m(\Omega)$. Тогда отображение γ_j есть композиция двух непрерывных линейных отображений: 1) Π, отображающего $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ в $H^m(\mathbb{R}^n)$ и 2) Γ_j, отображающего $H^m(\mathbb{R}^n)$ в $H^{m-j-1/2}(\Gamma)$. Следовательно, γ_j преобразует линейно и непрерывно $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ в $H^{m-j-1/2}(\Gamma)$. Далее, можно продолжить γ_j единственным образом в непрерывное линейное отображение из $H^m(\Omega)$ в $H^{m-j-1/2}(\Gamma)$.

Очевидно, для всякого m-продолжения Π имеем: $\gamma_j u = \Gamma_j\Pi u$, $u \in H^m(\Omega)$. В самом деле, это равенство верно для $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, а $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ плотно в $H^m(\Omega)$.

Остается показать, что $\vec{\gamma} = (\gamma_0, \ldots, \gamma_{m-1})$ есть строгий сюръективный морфизм. Обозначим через $\vec{R}$ непрерывное поднятие для $\vec{\Gamma}$, а через r_Ω — отображение, которое каждому $v \in H^m(\mathbb{R}^n)$ ставит в соответствие его сужение на Ω. Тогда $r_\Omega \circ \vec{R}$ есть, очевидно, непрерывное поднятие для $\vec{\gamma}$.

b) Так как $\gamma_j u = \gamma_0(\partial^j u/\partial z^j)$, то достаточно рассмотреть случай, когда $j = 0$. Иначе говоря, покажем, что для любого $u \in H^1(\Omega)$ имеем:

$$u(y,z) - (\gamma_0 u)(y) = \int\limits_0^z \frac{\partial u}{\partial z}(y,t)\mathrm{d}t.$$

Это соотношение верно, если $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$. Пусть $u \in H^1(\Omega)$ и $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ есть последовательность элементов из $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, сходящаяся к u по топологии $H^1(\Omega)$. Тогда последовательность $(\gamma_0\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ сходится к $\gamma_0 u$ по топологии $H^{1/2}(\Gamma)$, а следовательно, и по топологии $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$. С другой стороны, если обозначим через

$$\int\limits_0^z \frac{\partial u(\cdot,t)}{\partial z}\mathrm{d}t$$

функцию

$$y \mapsto \int\limits_0^z \frac{\partial u(y,t)}{\partial z}\mathrm{d}t,$$

то, очевидно, что для любого $z > 0$ последовательность

$$\int\limits_0^z \frac{\partial \varphi_k(\cdot, t)}{\partial z} \mathrm{d}t$$

сходится к

$$\int\limits_0^z \frac{\partial u(\cdot, t)}{\partial z} \mathrm{d}t$$

по топологии $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$. Окончательно, если обозначим через $u(\cdot, z)$ функцию $y \mapsto u(y, z)$, то существует подпоследовательность $(\varphi_{k_p})_{p\in\mathbb{N}}$ такая, что $\varphi_{k_p}(\cdot, z)$ сходится к $u(\cdot, z)$ по топологии $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ и для почти всех $z > 0$. Поэтому для почти всех $z > 0$ имеем:

$$u(\cdot, z) - \gamma_0 u = \int\limits_0^z \frac{\partial u(\cdot, t)}{\partial z} \mathrm{d}t,$$

то есть для почти всех $(y, z) \in \Omega$ получаем:

$$u(y, z) - (\gamma_0 u)(y) = \int\limits_0^z \frac{\partial u}{\partial z}(y, t) \mathrm{d}t.$$

c) Покажем, что ядро $\vec{\gamma}$ есть $H_0^m(\Omega)$.

1) Пусть $u \in H_0^m(\Omega)$. Тогда u есть предел, по топологии $H^m(\Omega)$, некоторой последовательности $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ элементов из $\mathcal{D}(\Omega)$. Очевидно, для любого $j \in \mathbb{N}$ имеем: $\gamma_j \varphi_k = 0$. Но для $0 \leqslant j \leqslant m-1$ γ_j непрерывно отображает $H^m(\Omega)$ в $H^{m-j-1/2}(\Gamma)$. Следовательно, $\gamma_j u$ есть предел, по топологии $H^{m-j-1/2}(\Gamma)$, последовательности $(\gamma_j u_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Также для всех j $(0 \leqslant j \leqslant m-1)$ $(\gamma_j u)$ есть нулевой элемент из $H^{m-j-1/2}(\Gamma)$; иначе говоря, $\vec{\gamma} u = 0$.

2) Обратно, пусть $u \in H^m(\Omega)$, где $\gamma_j u = 0$ для $j = 0, \ldots, m-1$. Покажем, что $u \in H_0^m(\Omega)$. Для этого достаточно показать, что

a) *для всякого $\varphi > 0$, для всякого $a > 0$ и для всякого $\nu \in H^m\Omega)$, где* $\operatorname{supp} \nu \subset \mathbb{R}^{n-1} \times [a; +\infty[$, *существует $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ такое, что $\|\nu - \varphi\|_{H^m(\Omega)} \leqslant \varepsilon$.*

Это утверждение доказывается легко. Пусть V — продолжение нулем для ν на $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$. Тогда очевидно, что $V \in H^m(\mathbb{R}^n)$. А тогда существует $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ такое, что $\|\Phi - V\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} \leqslant \varepsilon$ и $\operatorname{supp} \Phi \subset \Omega$; а тогда $\varphi = \Phi|_\Omega$.

b) *для всякого* $\varepsilon > 0$ *и всякой* $u \in H^m(\Omega)$, *где* $\vec{\gamma} u = 0$, *существуют* $a > 0$ *и* $\nu \in H^m(\Omega)$, *где* $\operatorname{supp} \nu \subset \mathbb{R}^{n-1} \times [a, +\infty[$, *такие, что* $\|u - \nu\|_{H^m(\Omega)} \leqslant \varepsilon$.

Сначала построим *усекающую последовательность в окрестности* Γ. Пусть ψ — функция из класса $C^\infty]0;\infty[$, $0 \leqslant \psi \leqslant 1$, равная нулю на $]0;1[$, равная 1 на $]2;\infty[$. Для всякого $k \in \mathbb{N}_*$ положим $\psi_k(z) = \psi(kz)$, $z > 0$. Тогда функция $\psi_k(z)$ из $C^\infty]0;\infty[$, равная нулю на $]0;1/k[$, равная 1 на $]2/k;\infty[$; кроме того, существует константа C, не зависящая от k, z и j, такая, что

$$\frac{\mathrm{d}^j \psi_k(z)}{\partial z^j}(z) \leqslant C k^j, \ 0 \leqslant j \leqslant m,$$

(C может зависеть от m). Положим $\Psi_k = 1 \otimes \psi_k(z)$, где 1 означает функцию, определенную на $\mathbb{R}^{n-1}$, равную 1 всюду. Тогда последовательность $(\Psi_k)_{k \in \mathbb{N}_*}$ назовем *усекающей последовательностью в окрестности* Γ.

Для простоты рассмотрим случай, когда $m = 1$. Иначе говоря, пусть $u \in H^1(\Omega)$, где $\gamma_0 u = 0$. Положим $u_k = u \Psi_k$ и покажем, что последовательность $(u_k)_{k \in \mathbb{N}_*}$ сходится к u по топологии $H^1(\Omega)$. Для $1 \leqslant j \leqslant n-1$ имеем:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i} = \Psi_k \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

и теорема Лебега о мажорированной сходимости показывает, что последовательность $(\partial u_k / \partial x_i)_{k \in \mathbb{N}_*}$ сходится к $\partial u / \partial x_i$ по топологии $L^2(\Omega)$. С другой стороны, имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \Psi_k \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_k}{\partial z} u,$$

где $x_n = z$.

Последовательность $\left(\Psi_k \frac{\partial u}{\partial z}\right)_{k \in \mathbb{N}_*}$ сходится к $\frac{\partial u}{\partial z}$ по топологии $L^2(\Omega)$, в силу той же теоремы Лебега. Остается показать, что последовательность $\left(\frac{\partial \Psi_k}{\partial z} u\right)_{k \in \mathbb{N}_*}$ сходится к 0 по топологии $L^2(\Omega)$.

Лемма. Пусть $g \in L^2(]0;a[)$, *пусть* $f(s) = \int\limits_0^s g(t)\mathrm{d}t$ *для почти всех* $s \in]0;a[$. *Тогда*

$$\int\limits_0^a |f(s)|^2 \mathrm{d}s \leqslant \frac{a^2}{2} \int\limits_0^a |g(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

Доказательство.

$$|f(s)|^2 = \left|\int_0^s g(t)\mathrm{d}t\right|^2 \leqslant \left(\int_0^s 1^2\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^s |g(t)|^2\mathrm{d}t\right)^2 = s\int_0^a |g(t)|^2\mathrm{d}t \leqslant$$

$$\leqslant s\int_0^a |g(t)|^2\mathrm{d}t$$

в силу неравенства Шварца. Поэтому

$$\int_0^a |f(s)|^2\mathrm{d}s \leqslant \int_0^a |g(t)|^2\mathrm{d}t \int_0^a s\mathrm{d}s = \frac{a^2}{2}\int_0^a |g(t)|^2\mathrm{d}t.$$

Продолжение доказательства теоремы.

Поскольку $\gamma_0 u = 0$, можно записать

$$u(y,z) = \int_0^z \frac{\partial u(y,t)}{\partial z}\mathrm{d}t$$

для почти всех $(y,z) \in \Omega$. В силу леммы имеем:

$$\int_0^{2/k} |u(y,z)|^2\mathrm{d}z \leqslant \frac{2}{k^2}\int_0^{2/k}\left|\frac{\partial u}{\partial z}(y,t)\right|^2\mathrm{d}t.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\infty}\left|\frac{\partial \Psi_k}{\partial z}(y,z)u(y,z)\right|^2\mathrm{d}z \leqslant 2C^2\int_0^{2/k}\left|\frac{\partial u}{\partial z}(y,t)\right|^2\mathrm{d}t,$$

а тогда

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial \Psi_k}{\partial z}u\right|^2\mathrm{d}x \leqslant 2C^2\int_{\mathbb{R}^{n-1}\times]0;2/k[}\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|^2\mathrm{d}x.$$

Но правая часть этого неравенства стремится к нулю, а поэтому и левая часть стремится к нулю. Теорема доказана.

Литература

[1] Шварц Л. *Комплексные многообразия. Эллиптические уравнения.* М.: Мир, 1964.

[2] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука, 1972.

[3] Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1988.

[4] Салехов Л.Г. *Методические разработки курса „Уравнения математической физики" для инженерного потока.* Часть I. Казань: КГУ, 1986.

[5] Салехов Л.Г. *Методические разработки курса „Уравнения математической физики" для инженерного потока.* Часть II. Казань: КГУ, 1987.