

УДК 519.21

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА
ДЛЯ ЭНДОМОРФИЗМОВ ЕВКЛИДОВА
ПРОСТРАНСТВА

B. T. Дубровин

Аннотация

Пусть W – невырожденная целочисленная матрица такая, что $|\det W| > 1$, $f(t) = f(t_1, \dots, t_d)$ – вещественнозначная, периодическая по каждому t_1, \dots, t_d функция, удовлетворяющая условию: $|f(t) - f(t')| \leq A\|t - t'\|$, где $A = \text{const}$, $t, t' \in \overline{\Omega}_d = \{t : 0 \leq t_i \leq 1, i = 1, \dots, d\}$. Для последовательности $(f(tW^n))$ доказана центральная предельная теорема с остаточным членом вида $O(1/n^{1/2-\varepsilon})$, где ε – сколь угодно малое положительное число.

Рассмотрим преобразование $Tt = \{tW\}$, задаваемое с помощью невырожденной целочисленной матрицы W , где $t \in \Omega_d$ – d -мерному тору, $\{\cdot\}$ – обозначение дробной доли. Пусть $\text{mes}(\cdot)$ – инвариантная мера на Ω_d , которую можно отождествить с мерой Лебега, определенной на гиперкубе $\overline{\Omega}_d = \{t = (t_1, \dots, t_d) : 0 \leq t_i \leq 1, i = 1, \dots, d\}$. Указанное преобразование является эндоморфизмом, сохраняющим меру, и оно эргодично тогда и только тогда, когда среди корней характеристического многочлена матрицы W нет корней из единицы (см. [1, 2]). В работе [1] доказана сходимость функции распределения

$$F_n(x) = \text{mes} \left\{ t : t \in \overline{\Omega}_d, \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n f(tW^k) < x \right\}$$

к функции распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du.$$

Здесь $\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\overline{\Omega}_d} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n f(tW^k) \right)^2 dt$; $f(t)$ – вещественнозначная, периодическая по каждому t_1, \dots, t_d функция, заданная на $\overline{\Omega}_d$.

Первое продвижение в направлении исследования скорости сходимости $F_n(x)$ к $\Phi(x)$ было сделано в работе [3], в которой доказано, что если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_n(x) = \sigma^2 > 0,$$

то

$$F_n(x) = \Phi(x) + O \left(\frac{1}{1+|x|^2} \cdot \frac{1}{n^{1/4-\varepsilon}} \right).$$

Здесь и ниже ε – сколь угодно малое положительное число. При этом предполагалось, что T и $f(t)$ удовлетворяют условиям:

1. Для некоторой постоянной A

$$|f(t) - f(t')| \leq A \cdot \|t - t'\|, \quad t, t' \in \overline{\Omega}_d,$$

$$\text{где } \|t\| = \sqrt{\sum_{i=1}^d t_i^2}.$$

2. Матрица W такова, что

$$\sup_{\|t\| < 1} \|tW^{-1}\| < 1, \quad |\det W| > 1.$$

3. $f(t)$ интегрируема по Лебегу на $\overline{\Omega}_d$ и $\int_{\overline{\Omega}_d} f(t) dt = 0$.

Оставляя неизменными условия 1–3, накладываемые на T и $f(t)$, и применяя метод «последовательных приближений» из работы [4], можно получить практически оптимальную оценку скорости сходимости в центральной предельной теореме.

Теорема. *Если в условиях 1–3 существует предел*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_n(x) = \sigma^2,$$

и если $0 < \sigma^2 < \infty$, то равномерно относительно x при $n \rightarrow \infty$

$$F_n(x) = \Phi(x) + O\left(\frac{1}{n^{1/2-\varepsilon}}\right).$$

Доказательство. Прежде всего, докажем оценки, которые понадобятся в ходе доказательства теоремы.

Пусть $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_\nu)$ – мультииндекс; $\mathbf{x}^\mathbf{k} = x_1^{k_1} \cdots x_\nu^{k_\nu}$; $\mathbf{k}! = k_1! \cdots k_\nu!$;

$$\sum_{\mathbf{k}=a}^b = \sum_{k_1, \dots, k_\nu=a}^b; \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{\partial^\nu}{\partial \alpha_1 \cdots \partial \alpha_\nu}.$$

Обозначим через $\chi_\nu(n)$ ν -й семиинвариант суммы $\sum_{k=1}^n f(tW^k)$, то есть

$$\chi_\nu(n) = \frac{d^\nu}{dz^\nu} \ln \int_{\overline{\Omega}_d} \exp \left(z \sum_{k=1}^n f(tW^k) \right) dt \Bigg|_{z=0}.$$

Лемма 1. *При фиксированном ν , $2 \leq \nu < \omega$ (здесь и в дальнейшем ω – достаточно большое вещественное число) справедлива оценка*

$$\chi_\nu(n) = O(n).$$

Доказательство. Известно (см. [1], (1.4)), что

$$\chi_\nu(n) = \sum_{\mathbf{l}=1}^n S^{(\nu)}(\mathbf{l}),$$

где

$$S^{(\nu)}(\mathbf{l}) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln \int_{\overline{\Omega}_d} \exp \left(\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i f(tW^{l_i}) \right) dt \Bigg|_{\alpha=0}, \quad \mathbf{l} = (l_1, \dots, l_\nu).$$

Оценим $S^{(\nu)}(\mathbf{l})$. Набор (l_1, \dots, l_ν) , $1 \leq l_j \leq n$, натуральных чисел назовем d -набором, если в записи его членов в виде вариационного ряда $l_1^* \leq l_2^* \leq \dots \leq l_\nu^*$ верно неравенство

$$2d < \max_{1 \leq k \leq \nu-1} (l_{k+1}^* - l_k^*) \leq 2(d+1).$$

Пусть числа l_1, \dots, l_ν , $l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_\nu$, образуют d -набор, и пусть $l_{m+1} - l_m > 2d$. Рассмотрим аналитическую в окрестности $U = \{\alpha : |\alpha_1|, \dots, |\alpha_\nu| \leq \varepsilon_0\}$ (здесь ε_0 – достаточно мало) функцию

$$\varphi(\alpha) = \int_{\overline{\Omega}_d} \exp \left(\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i f(tW^{l_i}) \right) dt,$$

которую можно записать следующим образом

$$\varphi(\alpha) = \sum_{\mathbf{k}=0}^{\infty} \frac{\alpha^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!} \int_{\overline{\Omega}_d} \prod_{i=1}^{\nu} f^{k_i}(tW^{l_i}) dt. \quad (1)$$

Числа l_1, \dots, l_ν образуют d -набор, поэтому из леммы 2 работы [3] следует

$$\left| \int_{\overline{\Omega}_d} \prod_{i=1}^{\nu} f^{k_i}(tW^{l_i}) dt - \int_{\overline{\Omega}_d} \prod_{i=1}^m f^{k_i}(tW^{l_i}) dt \cdot \int_{\overline{\Omega}_d} \prod_{i=m+1}^{\nu} f^{k_i}(tW^{l_i}) dt \right| \leq C_1^\nu \theta^d,$$

где $0 < \theta < 1$, C_1 – некоторая положительная постоянная (обозначение C_i для положительных постоянных будем использовать и в дальнейшем).

Далее, повторяя доказательство леммы 1 из [4], получим, что при любом d -наборе \mathbf{l}

$$|S^{(\nu)}(\mathbf{l})| \leq DC_1^\nu \theta^d. \quad (2)$$

Очевидно, что различных d -наборов – не более $\nu!n(2(d+1))^{\nu-1}$. Учитывая это и разбивая в равенстве $\chi_\nu(n) = \sum_{\mathbf{l}=1}^n S^{(\nu)}(\mathbf{l})$ суммирование по d -наборам, получим с помощью (2) оценку

$$\chi_\nu(n) = O \left(n + \sum_{d=1}^{n-1} n (2(d+1))^{\nu-1} C_1^\nu \theta^d \right) = O(n).$$

□

Лемма 2. При фиксированном ν , $1 \leq \nu < \omega$, справедлива оценка

$$\int_{\overline{\Omega}_d} \left(\sum_{k=1}^m f(tW^k) \right)^{2\nu} dt = O \left(m^{\nu(\omega+\nu)/\omega} \right).$$

Доказательство. Повторяя доказательство леммы 2 из работы [5] и применив при этом результат леммы 2 из [3], получим оценку

$$\int_{\Omega_d} \left(\sum_{k=1}^m f(tW^k) \right)^{2\nu} dt \leq K^{2\nu} \nu! (M+1)^\nu (1 + \theta^K (M+1)^\nu), \quad (3)$$

где $0 < \theta < 1$, $M = [m/K]$, K – любое целое число из интервала $(1, m/3)$. Здесь и в дальнейшем $[a]$ – обозначение целой части числа a .

Допустим, что $K = [m^{\nu/\omega}] + 1$. Тогда $\theta^K (M+1)^\nu \leq \text{const}$, и из (3) вытекает утверждение леммы. \square

Приступим непосредственно к доказательству теоремы. Пусть Q и N – растущие вместе с n натуральные числа, которые мы выберем позднее, $p = [n/(Q+N)]$,

$$\eta_k = \frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{r=(k-1)(Q+N)+1}^{kQ+(k-1)N} f(tW^r), \quad 1 \leq k \leq p,$$

$$\eta_k^\circ = \frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{r=kQ+(k-1)N+1}^{k(Q+N)} f(tW^r), \quad 1 \leq k \leq p,$$

$$\eta_{p+1}^\circ = \frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{r=p(Q+N)+1}^n f(tW^r),$$

$$\zeta_p = \sum_{r=1}^p \eta_r, \zeta_p^\circ = \sum_{r=1}^{p+1} \eta_r^\circ, \hat{\zeta}_p = \sum_{r=1}^p \hat{\eta}_r,$$

где $\hat{\eta}_1, \dots, \hat{\eta}_p$ – величины, удовлетворяющие следующим свойствам:

$$\text{A. } \text{mes} \{t : t \in \overline{\Omega}_d, \hat{\eta}_k < x\} = \text{mes} \{t : t \in \overline{\Omega}_d, \eta_k < x\}.$$

$$\text{B. } \int_{\overline{\Omega}_d} \exp \left(\frac{il}{\sigma(Q)\sqrt{p}} \hat{\zeta}_p \right) dt = \prod_{k=1}^p \int_{\overline{\Omega}_d} \exp \left(\frac{il}{\sigma(Q)\sqrt{p}} \hat{\eta}_k \right) dt.$$

Здесь

$$\sigma^2(Q) = \int_{\overline{\Omega}_d} \left(\frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{k=1}^Q f(tW^k) \right)^2 dt.$$

Пусть также

$$\rho_m(Q) = \int_{\overline{\Omega}_d} \left| \frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{k=1}^Q f(tW^k) \right| dt,$$

$$f_p^{(1)}(l) = \int_{\overline{\Omega}_d} \exp \left(\frac{il}{\sigma(Q)\sqrt{p}} \zeta_p \right) dt, \quad f_p^{(2)}(l) = \int_{\overline{\Omega}_d} \exp \left(\frac{il}{\sigma(Q)\sqrt{p}} \hat{\zeta}_p \right) dt,$$

$$F_p^{(1)}(x) = \text{mes} \left\{ t : t \in \overline{\Omega}_d, \frac{\zeta_p}{\sigma(Q)\sqrt{p}} < x \right\},$$

$$F_p^{(2)}(x) = \text{mes} \left\{ t : t \in \overline{\Omega}_d, \frac{\hat{\zeta}_p}{\sigma(Q)\sqrt{p}} < x \right\}.$$

Из леммы 3 работы [3] следует

$$\left| f_p^{(1)}(l) - f_p^{(2)}(l) \right| \leq C_2 \sqrt{\frac{p}{Q}} e^{-C_3 N}. \quad (4)$$

Далее, положим

$$P_k(-W) = \sum_{q=1}^k \frac{(-1)^{k+2q}}{q!} \sum \frac{\lambda_{k_1} \cdots \lambda_{k_q}}{k_1! \cdots k_q!} W^{k+2q}, \quad (5)$$

где внутреннее суммирование ведется по $k_1, \dots, k_q \geq 3$, $k_1 + \cdots + k_q = k + 2q$; $\lambda_r = \chi_r / \sigma^2(Q)$; χ_r – r -й семиинвариант η_1 , то есть

$$\chi_r = \left. \frac{d^r}{dz^r} \ln \int_{\Omega_d} \exp(z\eta_1) dt \right|_{z=0},$$

и введем функцию

$$G_{\nu p}(x) = \Phi(x) + \sum_{k=1}^{\nu} \frac{P_k(-\Phi)}{p^{k/2}},$$

где $P_k(-\Phi)$ вычисляются по формуле (5) с заменой W^r на

$$\Phi^{(r)}(x) = \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{2\pi}} H_{r-1}(x) e^{-x^2/2},$$

$H_r(x)$ – полином Чебышева–Эрмита, число ν будет определено позднее.

Преобразование Фурье–Стильтеса функции $G_{\nu p}(x)$ имеет вид

$$g_{\nu p}(l) = e^{-t^2/2} \left(1 + \sum_{k=1}^{\nu} P_k(il) p^{-k/2} \right).$$

Теорема 1 (п. а) из § 41 [6] дает оценку

$$\left| f_p^{(2)}(l) - g_{\nu p}(l) \right| \leq \frac{C(\nu)}{T_{\nu p}^{\nu+1}} \left(|l|^{\nu+3} + |l|^{3(\nu+1)} \right) e^{-t^2/4}, \quad (6)$$

если

$$|l| \leq T_{\nu p} = \frac{\sqrt{p} \sigma^3(Q)}{8(\nu+3) \rho_{\nu+3}^{3/(\nu+3)}(Q)}.$$

Здесь $C(\nu)$ зависит только от ν .

По теореме 1 и § 39 [6] имеем

$$\left| F_p^{(1)}(x) - G_{\nu p}(x) \right| \leq \frac{24}{\pi} \cdot \frac{H}{T} + \frac{1}{\pi} \int_{-T}^T \left| \frac{f_p^{(1)}(l) - g_{\nu p}(l)}{l} \right| dl, \quad (7)$$

где $H > 0$ – постоянная.

Выберем

$$T = \varepsilon_0 Q^{\frac{1}{4}-\varepsilon} T_{\nu p},$$

где $\varepsilon_0 > 0$. Оценим интеграл из правой части (7). Очевидно, что $T \geq T_{\nu p}$, поэтому

$$\int_{-T}^T \left| \frac{f_p^{(1)}(l) - g_{\nu p}(l)}{l} \right| dl = \int_{-T}^{T_{\nu p}} + \int_{-T_{\nu p}}^{T_{\nu p}} + \int_{T_{\nu p}}^T = I_1 + I_2 + I_3.$$

Оценим I_2 :

$$I_2 \leq \int_{-T_{\nu p}}^{T_{\nu p}} \left| \frac{f_p^{(1)}(l) - f_p^{(2)}(l)}{l} \right| dl + \int_{-T_{\nu p}}^{T_{\nu p}} \left| \frac{f_p^{(2)}(l) - g_{\nu p}(l)}{l} \right| dl.$$

Для оценки первого интеграла правой части при $|l| \leq n^{-\omega_1}$, $\omega_1 = w^{3/4}$, используем очевидную оценку

$$\left| f_p^{(1)}(l) - f_p^{(2)}(l) \right| \leq C_4 l^2,$$

а при $n^{-\omega_1} < |l| \leq T_{\nu p}$ — оценку (4), преобразованную следующим образом. Положим в (4) $N = n^{1/\omega_2}$ (здесь $\omega_2 = \omega^{1/4}$). После чего оценка (4) примет вид

$$\left| f_p^{(1)}(l) - f_p^{(2)}(l) \right| \leq C_5 \sqrt{\frac{p}{Q}} \cdot \frac{1}{n^{\omega_1}}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_{-T_{\nu p}}^{T_{\nu p}} \left| \frac{f_p^{(1)}(l) - f_p^{(2)}(l)}{l} \right| dl &= C_4 \int_{-n^{-\omega_1}}^{n^{-\omega_1}} l dl + \int_{n^{-\omega_1}}^{T_{\nu p}} \frac{C_5 \sqrt{p}}{\sqrt{Q} n^{\omega_1} |l|} dl + \\ &+ \int_{-T_{\nu p}}^{-n^{-\omega_1}} \frac{C_5 \sqrt{p}}{\sqrt{Q} n^{\omega_1} |l|} dl = O\left(\frac{\sqrt{p} \ln T_{\nu p}}{\sqrt{Q} n^{\omega_1}}\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Для оценки интеграла

$$\int_{-T_{\nu p}}^{T_{\nu p}} \left| \frac{f_p^{(2)}(l) - g_{\nu p}(l)}{l} \right| dl$$

применим оценку (6):

$$\int_{-T_{\nu p}}^{T_{\nu p}} \left| \frac{f_p^{(2)}(l) - g_{\nu p}(l)}{l} \right| dl \leq \frac{C(\nu)}{T_{\nu p}^{\nu+1}} \int_{-\infty}^{\infty} (|l|^{\nu+2} + |l|^{3\nu+2}) e^{-l^2/4} dl = O\left(\frac{1}{T_{\nu p}^{\nu+1}}\right). \quad (9)$$

Из (8) и (9) следует

$$I_2 = O\left(\frac{1}{T_{\nu p}^{\nu+1}} + \frac{\sqrt{p} \ln T_{\nu p}}{\sqrt{Q} n^{\omega_1}}\right).$$

Перейдем к оценке интеграла I_3 .

$$I_3 \leq \int_{T_{\nu p}}^T \left| \frac{f_p^{(1)}(l) - f_p^{(2)}(l)}{l} \right| dl + \int_{T_{\nu p}}^T \left| \frac{f_p^{(2)}(l)}{l} \right| dl + \int_{T_{\nu p}}^T \left| \frac{g_{\nu p}(l)}{l} \right| dl.$$

Действуя так же, как и при оценке (8), оценим интеграл

$$\int_{T_{\nu p}}^T \left| \frac{f_p^{(1)}(l) - f_p^{(2)}(l)}{l} \right| dl = O \left(\frac{\sqrt{p} \ln Q}{\sqrt{Q} n^{\omega_1}} \right). \quad (10)$$

Для оценки интеграла

$$\int_{T_{\nu p}}^T \left| \frac{f_p^{(2)}(l)}{l} \right| dl$$

понадобится утверждение о том, что $|f_Q(l)|$ меньше единицы при $|l| > 0$. Здесь

$$f_Q(l) = \int_{\overline{\Omega}_d} \exp(il\eta_1) dl.$$

Докажем это утверждение. В [3] доказано асимптотическое соотношение

$$\begin{aligned} F_n(x) = \text{mes} \left\{ t : t \in \overline{\Omega}_d, \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n f(tW^k) < x \right\} = \\ = \Phi(x) + O \left(\frac{1}{1+|x|^2} \cdot \frac{1}{n^{1/4-\varepsilon}} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Обозначим

$$R_n(x) = F_n(x) - \Phi(x).$$

Тогда

$$f_n(l) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ilx} d\Phi(x/\sigma) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{ilx} dR_n(x/\sigma),$$

где

$$f_n(l) = \int_{\overline{\Omega}_d} \exp \left(\frac{il}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n f(tW^k) \right) dt.$$

Отсюда, учитывая то, что

$$R_n(x) = O \left(\frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{n^{1/4-\varepsilon}} \right),$$

получим

$$|f_n(l)| \leq e^{-l^2\sigma^2/2} + \frac{C_5 |l|}{n^{1/4-\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Пусть $\sigma > 0$. Тогда существуют числа $\Delta, \gamma > 0$ такие, что при $n > \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/(1/4-\varepsilon)}$ будет верна оценка

$$\max_{\delta \leq |l| \leq \gamma n^{1/4-\varepsilon}} |f_n(l)| \leq 1 - \Delta.$$

Теперь достаточно взять $n = Q$, и получим нужную нам оценку для $|f_Q(l)|$. Полученная оценка позволяет оценить интеграл

$$\int_{T_{\nu p}}^T \left| \frac{f_p^{(2)}(l)}{l} \right| dl = \int_{T_{\nu p}/\sigma(Q)\sqrt{p}}^{T/\sigma(Q)\sqrt{p}} |f_Q(l)|^p \frac{dl}{l} \leq e^{-C_7 p} \ln \left(\frac{T}{T_{\nu p}} \right) = O \left(\frac{1}{p^{(\nu+1)/2}} \right). \quad (12)$$

Далее оценим интеграл $\int_{T_{\nu p}}^T \left| \frac{g_{\nu p}(l)}{l} \right| dl$:

$$\int_{T_{\nu p}}^T \left| \frac{g_{\nu p}(l)}{l} \right| dl \leq \int_{T_{\nu p}}^T \left| e^{-l^2/2} \left(1 + \sum_{k=1}^{\nu} P_k(il) p^{-k/2} \right) \right| \frac{dl}{l}. \quad (13)$$

Применяя оценку леммы 1, нетрудно показать, что

$$P_k(il) = O \left((C_8)^k e^{3k} Q^{-k/2} \right).$$

Используя эту оценку и (13), получим

$$\int_{-T_{\nu p}}^T \left| \frac{g_{\nu p}}{l} \right| dl = O \left(\frac{1}{p^{(\nu+1)/2}} \right). \quad (14)$$

Из (10), (12), (14) получается окончательная оценка для I_3 :

$$I_3 = \int_{T_{\nu p}}^T \left| \frac{f_p^{(1)}(l) - g_{\nu p}(l)}{l} \right| dl = O \left(\frac{1}{p^{(\nu+1)/2}} \right).$$

Интеграл I_1 оценивается аналогично интегралу I_3 :

$$I_1 = \int_{-T}^{-T_{\nu p}} \left| \frac{f_p^{(1)}(l) - g_{\nu p}(l)}{l} \right| dl = O \left(\frac{1}{p^{(\nu+1)/2}} \right).$$

Произведя оценку интегралов I_1 , I_2 , I_3 , получим

$$\int_{-T}^T \left| \frac{f_p^{(1)}(l) - g_{\nu p}(l)}{l} \right| dl = O \left(\frac{1}{T_{\nu p}^{\nu+1}} + \frac{\sqrt{p} \ln T_{\nu p}}{\sqrt{Q} n^{\omega_1}} + \frac{1}{p^{(\nu+1)/2}} \right).$$

Из этой оценки и (7) находим:

$$F_p^{(1)}(x) - G_{\nu p}(x) = O \left(\frac{1}{T_{\nu p}^{\nu+1}} + \frac{\sqrt{p} \ln T_{\nu p}}{\sqrt{Q} n^{\omega_1}} + \frac{1}{Q^{1/4-\varepsilon} T_{\nu p}} + \frac{1}{p^{\nu+1/2}} \right). \quad (15)$$

Заменим в (15) $F_p^{(1)}(x)$ на функцию распределения

$$\text{mes} \left\{ t : t \in \overline{\Omega}_d, \frac{1}{\sigma(Q) \sqrt{pQ}} \sum_{k=1}^n f(tW^k) < x \right\},$$

а возникающую при этом погрешность оценим так же, как в [4], используя при этом неравенство Маркова и оценку из леммы 2. Результатом будет асимптотическое соотношение

$$\begin{aligned} \text{mes} \left\{ t : t \in \overline{\Omega}_d, \frac{1}{\sigma(Q) \sqrt{pQ}} \sum_{k=1}^n f(tW^k) < x \right\} = \\ = G_{\nu p}(x) + O \left(\frac{1}{T_{\nu p}^{\nu+1}} + \frac{1}{p^{(\nu+1)/2}} + \frac{\sqrt{p} \ln T_{\nu p}}{\sqrt{Q} n^{\omega_1}} + \frac{1}{Q^{1/4-\varepsilon} T_{\nu p}} + \right. \\ \left. + \frac{N+1}{\sqrt{Q}} + \frac{(p(N+1))^{\nu^2/\omega}}{(N+1)^\nu} \right). \quad (16) \end{aligned}$$

Полиномы $P_k(-\Phi)$, входящие в $G_{\nu p}(x)$, оценим с помощью леммы 1:

$$P_k(-\Phi) = O \left((C_9)^k e^{-x^2/2} x^{3k} Q^{-k/2} \right).$$

Отсюда следует

$$G_{\nu p}(x) = \Phi(x) + O \left(\sum_{k=1}^{\nu} (C_9)^k e^{-x^2/2} x^{3k} Q^{-k/2} \right). \quad (17)$$

Далее, выберем $\nu = [\omega^{1/3}]$, $p = [n^{(1/2+2\varepsilon)/(3/2+2\varepsilon)}]$, а Q – из условия $|n - p(Q+N)| \leq p$ (заметим, что ранее мы выбрали $N = n^{1/\omega_2}$, где $\omega_2 = \omega^{1/4}$).

Оценим $\sigma^2(Q)$. Из теоремы 18.2.1 [7] следует

$$\begin{aligned} \sigma^2(Q) &= \int_{\overline{\Omega}_d} \left(\frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{k=1}^Q f(tW^k) \right)^2 dt = \\ &= \sigma^2 + \frac{2}{Q} \sum_{k=1}^Q (Q-k) \int_{\overline{\Omega}_d} f(t)f(tW^k) dt = \sigma^2 + O \left(\frac{1}{Q} \right), \end{aligned}$$

так как

$$\sum_{k=1}^Q (Q-k) \int_{\overline{\Omega}_d} f(t)f(tW^k) dt \leq \text{const},$$

что вытекает из леммы 2 [3]. Таким образом, $\sigma^2(Q) = \sigma^2 + O \left(\frac{1}{Q} \right)$. Заметим также,

$$\text{что } \left(\frac{pQ}{n} \right)^{1/2} = 1 + O \left(\frac{N}{Q} \right).$$

Учитывая все сказанное, получим из (16) и (17):

$$\text{mes} \left\{ t : t \in \overline{\Omega}_d, \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n f(tW^k) < x \right\} = \Phi(x) + O \left(n^{-\frac{1}{3+4\varepsilon} + \frac{1}{\omega_2}} \right).$$

Из полученного соотношения следует оценка

$$\text{mes} \left\{ t : t \in \overline{\Omega}_d, \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n f(tW^k) < x \right\} = \Phi(x) + O \left(\frac{1}{1+|x|^{\omega_2}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{3+4\varepsilon} - \frac{2}{\omega_2}}} \right). \quad (18)$$

Доказательство этого перехода аналогично доказательству формулы (24) из [4], поэтому мы его опускаем.

Таким образом, получили аналог формулы (11), но с показателем степени у n большим, чем в (11).

Далее, мы можем повторить все рассуждения, проделанные до этого, но используя уже при этом вновь полученную формулу (18). Итогом этого будет улучшение остаточного члена в (18) (показатель степени у n возрастёт).

Докажем, что результатом таких последовательных приближений будет утверждение нашей теоремы, то есть асимптотическое соотношение

$$\text{mes} \left\{ t : t \in \overline{\Omega}_d, \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n f(tW^k) < x \right\} = \Phi(x) + O \left(\frac{1}{n^{1/2-\varepsilon}} \right).$$

Обозначим показатель степени у n в формуле (11) через β_1 , то есть $\beta_1 = \frac{1}{4} - \varepsilon$. Тогда формулу (18) можно переписать следующим образом

$$\text{mes} \left\{ t : t \in \overline{\Omega}_d, \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n f(tW^k) < x \right\} = \Phi(x) + O \left(\frac{1}{1+|x|^{\omega_2}} \cdot \frac{1}{n^{(4(1-\beta_1))^{-1}-2\omega_2^{-1}}} \right)$$

и, следовательно,

$$\beta_2 = (4(1-\beta_1))^{-1} - 2\omega_2^{-1}.$$

Продолжая этот итерационный процесс, получим рекуррентную формулу

$$\beta_{k+1} = (4(1-\beta_k))^{-1} - 2\omega_2^{-1}, \quad \beta_1 = \frac{1}{4} - \varepsilon,$$

где β_k – показатель степени у n в формуле (18) на k -м шаге. Нетрудно показать (см. [4]), что найдется номер $k = k_0$ такой, что $\beta_{k_0} > \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{\omega_2}}$, что приводит нас к окончательному результату:

$$\text{mes} \left\{ t : t \in \overline{\Omega}_d, \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n f(tW^k) < x \right\} = \Phi(x) + O \left(\frac{1}{n^{1/2-\varepsilon}} \right).$$

Теорема доказана. □

Summary

V.T. Dubrovin. Central limit theorem for endomorphisms of the Euclidean space.

Let W be a non-degenerated integer-valued matrix such that $|\det W| > 1$, $f(t) = f(t_1, \dots, t_d)$ be a real function periodic with respect to any argument, f satisfy the condition $|f(t) - f(t')| \leq A\|t - t'\|$ where $A = \text{const}$, $t, t' \in \overline{\Omega}_d = \{t : 0 \leq t_i \leq 1, i = 1, \dots, d\}$. A central limit theorem for the sequence $(f(tW^n))$ with the rest $O(1/n^{1/2-\varepsilon})$ is established where ε is an arbitrarily small positive number.

Литература

1. Леонов В.П. Некоторые приложения старших семиинвариантов к теории случайных процессов. – М.: Наука, 1964. – 68 с.
2. Постников А.Г. Эргодические вопросы теории сравнений и теории диофантовых приближений // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. – М.: Наука, 1966. – Т. 82. – 112 с.
3. Дубровин В.Т., Москвин Д.А. О распределении дробных долей одного класса преобразований евклидовых пространств // Вероятн. методы и кибернетика. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1971. – Вып. 9. – С. 45–56.
4. Дубровин В.Т., Москвин Д.А. Центральная предельная теорема для сумм функций от последовательностей с переименованием // Теория вероятн. и её применение. – 1979. – Т. XXIV, № 3. – С. 553–563.
5. Дубровин В.Т. Центральная предельная теорема для сумм функций от слабозависимых случайных величин // Вероятн. методы и кибернетика. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1971. – Вып. 9. – С. 21–33.
6. Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. – 264 с.

7. *Ибрагимов И.А., Линник Ю.В.* Независимые и стационарно связанные величины. – М.: Наука, 1965. – 524 с.

Поступила в редакцию
03.04.06

Дубровин Вячеслав Тимофеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики Казанского государственного университета.