УДК 514.765.1

НОРМАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА ТРЕХМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С НЕРАЗРЕШИМОЙ ГРУППОЙ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ. II. РАЗРЕШИМЫЙ СТАБИЛИЗАТОР

Н.П. Можей

Аннотация

Представлена локальная классификация трехмерных однородных пространств, допускающих нормальную связность. В статье рассмотрен только случай неразрешимой группы Ли преобразований с разрешимым стабилизатором. Локальная классификация однородных пространств эквивалентна описанию эффективных пар алгебр Ли. Описаны все инвариантные аффинные связности на таких однородных пространствах вместе с их тензорами кривизны и кручения. Исследованы алгебры голономии однородных пространств и найдено, когда инвариантная связность нормальна. В работе использован алгебраический подход для описания связностей, методы теорий групп Ли, алгебр Ли и однородных пространств.

Ключевые слова: нормальная связность, однородное пространство, группа преобразований, алгебра голономии.

Цель настоящей работы – описать трехмерные однородные пространства с неразрешимой группой преобразований, допускающие нормальную связность, сами связности, их тензоры кривизны, кручения и алгебры голономии. Понятие нормальной связности для риманова многообразия ввел Э. Картан [1], интересную характеристику таких связностей дал К. Номидзу [2], классификация трехмерных однородных пространств с неразрешимой группой преобразований в комплексном случае проводилась в [3]. Настоящая статья является продолжением работы [4], в которой приведен более подробный тематический обзор, а также обоснование применяемых методов, при изложении сохранены обозначения, введенные ранее. В данной работе продолжается изучение трехмерных однородных пространств, допускающих нормальную связность, в 2-й части внимание сосредоточено на пространствах с неразрешимой группой преобразований и разрешимым стабилизатором.

Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\overline{G}$, $G = \overline{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M, \overline{G})$ равносильна классификации пар групп Ли $(\overline{G}, G)$ [5]. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\overline{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Если однородное пространство допускает аффинную связность, то $\mathfrak{g}$-модуль $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ точен, а пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ является изотропно-точной. Для нахождения всех изотропно-точных пар нужно классифицировать (с точностью до изоморфизма) все точные трехмерные $\mathfrak{g}$-модули U (это эквивалентно классификации подалгебр в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ с точностью до сопряженности, все такие подалгебры найдены в [6], дальнейшая нумерация соответствует приведенной там). Ограничимся случаем с ненулевым стабилизатором, так как все остальные однородные пространства – трехмерные группы Ли. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ – изотропное представление подалгебры, а все отображение $\mathfrak{g}$-инвариантно, инвариантные аффинные связности на однородном пространстве $(M, \overline{G})$ находятся во взаимно-однозначном соответствии [7] с аффинными связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$.

Опишем пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$; через $\{e_1, \ldots, e_n\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ $(n = \dim \bar{\mathfrak{g}})$. Будем полагать, что подалгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождается векторами $e_1, \ldots, e_{n-3}$, а $\{e_{n-2}, e_{n-1}, e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$, для определенности обозначим его $\{u_1, u_2, u_3\}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, соответствующие приведенным в [6], здесь d – размерность подалгебры, а n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Будем описывать аффинную связность на однородном пространстве через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, тензор кривизны R – через $R(u_1, u_2)$, $R(u_1, u_3)$, $R(u_2, u_3)$, а тензор кручения T – через $T(u_1, u_2)$, $T(u_1, u_3)$, $T(u_2, u_3)$. Предполагается, что переменные обозначены латинскими буквами и принадлежат $\mathbb{R}$, а параметр обозначен μ, подалгебры с одинаковыми номерами, но разными значениями параметра μ не сопряжены друг другу.

Теорема 1. I. *Пусть $\mathfrak{g}$ – подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ такая, что пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ допускает нормальную связность, $\bar{\mathfrak{g}}$ неразрешима, а $\mathfrak{g}$ разрешима $(\mathfrak{g} \neq \{0\})$. Тогда $\mathfrak{g}$ сопряжена одной и только одной из следующих подалгебр:*

$$4.21 \ \begin{array}{|ccc|}\hline x & y & u \\ & & z \\ & & \\ \hline\end{array}; \quad 3.13 \ \begin{array}{|ccc|}\hline x & & z \\ & & y \\ & & \mu x \\ \hline\end{array}, \ \begin{array}{c}\mu = -1; \\ \mu = 0\end{array}; \quad 3.19 \ \begin{array}{|ccc|}\hline & y & z \\ & x & \\ & & -x \\ \hline\end{array};$$

$$3.21 \ \begin{array}{|ccc|}\hline & y & z \\ & & x \\ & -x & \\ \hline\end{array}; \quad 3.25 \ \begin{array}{|ccc|}\hline & x & z \\ & & y \\ & & \\ \hline\end{array}; \quad 2.8 \ \begin{array}{|ccc|}\hline & & x \\ & y & \\ & & \\ \hline\end{array}; \quad 2.9 \ \begin{array}{|ccc|}\hline y & & x \\ & -2y & \\ & & 2y \\ \hline\end{array}; \quad 2.17 \ \begin{array}{|ccc|}\hline & & x \\ & & y \\ & & \\ \hline\end{array};$$

$$2.21 \ \begin{array}{|ccc|}\hline x & y & \\ & & y \\ & & -x \\ \hline\end{array}; \quad 1.1 \ \begin{array}{|ccc|}\hline x & & \\ & -x & \\ & & \\ \hline\end{array}; \quad 1.3 \ \begin{array}{|ccc|}\hline & & x \\ -x & & \\ & & \\ \hline\end{array}; \quad 1.5 \ \begin{array}{|ccc|}\hline & & x \\ & & \\ & & \\ \hline\end{array}; \quad 1.8 \ \begin{array}{|ccc|}\hline & x & \\ & & x \\ & & \\ \hline\end{array}.$$

II. *Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ коразмерности 3, допускающая нормальную связность, такая, что $\bar{\mathfrak{g}}$ неразрешима, а $\mathfrak{g}$ разрешима $(\mathfrak{g} \neq \{0\})$, эквивалентна одной и только одной из следующих пар:*

4.21.11	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	0	e_4	u_1	0	0
e_2	$-e_2$	0	e_4	0	0	$e_2 + u_1$	0
e_3	0	$-e_4$	0	0	0	$-2e_3$	u_2
e_4	$-e_4$	0	0	0	0	$-e_4$	$e_2 + u_1$
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0	0
u_2	0	$-e_2 - u_1$	$2e_3$	e_4	0	0	$-2u_3$
u_3	0	0	$-u_2$	$-e_2 - u_1$	0	$2u_3$	0

,

3.13.6	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-\mu e_2$	$(1-\mu)e_3$	u_1	0	μu_3
e_2	μe_2	0	0	e_3	$2e_2$	u_2
e_3	$(\mu-1)e_3$	0	0	0	e_3	u_1
u_1	$-u_1$	$-e_3$	0	0	$-u_1$	0
u_2	0	$-2e_2$	$-e_3$	u_1	0	$2u_3$
u_3	$-\mu u_3$	$-u_2$	$-u_1$	0	$-2u_3$	0

, $\mu = -1, 0,$

3.19.14	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_2$	e_3	0	u_2	$-u_3$
e_2	e_2	0	0	0	u_1	0
e_3	$-e_3$	0	0	0	0	u_1
u_1	0	0	0	0	e_3	e_2
u_2	$-u_2$	$-u_1$	0	$-e_3$	0	e_1
u_3	u_3	0	$-u_1$	$-e_2$	$-e_1$	0

,

3.21.6	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_3$	e_2	0	$-u_3$	u_2
e_2	e_3	0	0	0	u_1	0
e_3	$-e_2$	0	0	0	0	u_1
u_1	0	0	0	0	e_2	e_3
u_2	u_3	$-u_1$	0	$-e_2$	0	e_1
u_3	$-u_2$	0	$-u_1$	$-e_3$	$-e_1$	0

,

3.21.7	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_3$	e_2	0	$-u_3$	u_2
e_2	e_3	0	0	0	u_1	0
e_3	$-e_2$	0	0	0	0	u_1
u_1	0	0	0	0	$-e_2$	$-e_3$
u_2	u_3	$-u_1$	0	e_2	0	$-e_1$
u_3	$-u_2$	0	$-u_1$	e_3	e_1	0

,

3.25.30	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_2	0	u_1	0
e_2	0	0	0	0	e_2	u_1
e_3	e_2	0	0	e_2	$2e_3$	u_2
u_1	0	0	$-e_2$	0	$-u_1$	0
u_2	$-u_1$	$-e_2$	$-2e_3$	u_1	0	$2u_3$
u_3	0	$-u_1$	$-u_2$	0	$-2u_3$	0

,

2.8.7	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_1	0	u_1
e_2	0	0	0	u_2	0
u_1	$-e_1$	0	0	0	u_3
u_2	0	$-u_2$	0	0	0
u_3	$-u_1$	0	$-u_3$	0	0

,

2.9.12	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_2$	u_1	$-2u_2$	$2u_3$
e_2	e_2	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	e_2	0
u_2	$2u_2$	0	$-e_2$	0	$-e_1$
u_3	$-2u_3$	$-u_1$	0	e_1	0

,

2.17.27	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	$2e_1$	e_2	u_1
e_2	0	0	e_2	0	u_2
u_1	$-2e_1$	$-e_2$	0	u_2	$2u_3$
u_2	$-e_2$	0	$-u_2$	0	0
u_3	$-u_1$	$-u_2$	$-2u_3$	0	0

,

2.21.4	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	0	u_1	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	u_1	u_2
u_2	0	$-u_1$	$-u_1$	0	u_3
u_3	u_3	$-u_2$	$-u_2$	$-u_3$	0

,

1.1.5	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	u_1	$-u_2$	0
u_1	$-u_1$	0	e_1	0
u_2	u_2	$-e_1$	0	0
u_3	0	0	0	0

,

1.1.7	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	u_1	$-u_2$	0
u_1	$-u_1$	0	e_1+u_3	0
u_2	u_2	$-e_1-u_3$	0	0
u_3	0	0	0	0

,

1.3.3	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	u_2	0	e_1+u_3	0
u_2	$-u_1$	$-e_1-u_3$	0	0
u_3	0	0	0	0

,

1.3.4	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	u_2	0	$-e_1+u_3$	0
u_2	$-u_1$	e_1-u_3	0	0
u_3	0	0	0	0

,

1.3.5	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	u_2	0	e_1	0
u_2	$-u_1$	$-e_1$	0	0
u_3	0	0	0	0

,

1.3.6	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	u_2	0	$-e_1$	0
u_2	$-u_1$	e_1	0	0
u_3	0	0	0	0

,

1.5.19	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_1	0	u_1
u_1	$-e_1$	0	0	u_3
u_2	0	0	0	0
u_3	$-u_1$	$-u_3$	0	0

,

1.8.2	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	u_1	u_2
u_1	0	0	u_1	u_2
u_2	$-u_1$	$-u_1$	0	u_3
u_3	$-u_2$	$-u_2$	$-u_3$	0

.

Подалгебра 1.3 допускает риманову метрику, 2.21, 1.1, 1.8 – псевдориманову метрику, а 4.21, 3.13, 3.19, 3.21, 3.25, 2.8, 2.9, 2.17, 1.5 не допускают инвариантную метрику, пары 1.3.3, 1.3.4, 1.3.5, 1.3.6 допускают риманову метрику, 2.21.4, 1.1.5, 1.1.7, 1.8.2 – псевдориманову метрику, а 4.21.11, 3.13.6, 3.19.14, 3.21.6, 3.21.7, 3.25.30, 2.8.7, 2.9.12, 2.17.27, 1.5.19 не допускают инвариантную метрику.

Доказательство. Классификация разрешимых подалгебр в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ приведена, например, в [6]. Для каждой такой подалгебры найдем изотропно-точные пары и выберем пары, допускающие нормальную связность, а также выпишем сами аффинные связности, их тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии.

Рассмотрим, например, подалгебру $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ типа 2.21. Пусть $E=\{e_1,e_2\}$ – базис в $\mathfrak{g}$,

$$e_1=\Lambda(e_1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad e_2=\Lambda(e_2)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

так как ограничение отображения Λ на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры. Через $\mathfrak{h}$ обозначим нильпотентную подалгебру алгебры Ли $\mathfrak{g}$, порожденную вектором e_1. Имеем $\bar{\mathfrak{g}}^{\alpha}(\mathfrak{h})=\mathfrak{g}^{\alpha}(\mathfrak{h})\times U^{\alpha}(\mathfrak{h})$ для всех $\alpha\in\mathfrak{h}^*$. Тогда $\mathfrak{g}^{(0)}(\mathfrak{h})\supset\supset\mathbb{R}e_1$, $U^{(1)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}u_1$, $\mathfrak{g}^{(1)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}e_1$, $U^{(0)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}u_2$, $U^{(-1)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}u_3$. В силу тождества Якоби получим

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	0	u_1	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	α_1u_1	α_1u_2
u_2	0	$-u_1$	$-\alpha_1u_1$	0	α_1u_3
u_3	u_3	$-u_2$	$-\alpha_1u_2$	$-\alpha_1u_3$	0

.

При $\alpha_1 \neq 0$ отображение $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_4 \to \bar{\mathfrak{g}}$, где $\pi(e_1) = e_1$, $\pi(e_2) = e_2$, $\pi(u_1) = \frac{1}{\alpha_1} u_1$, $\pi(u_2) = \frac{1}{\alpha_1} u_2$, $\pi(u_3) = \frac{1}{\alpha_1} u_3$, устанавливает эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и 2.21.4. При $\alpha_1 = 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ тривиальна, алгебра $\bar{\mathfrak{g}}$ является разрешимой и не входит в рассматриваемый в работе класс алгебр. Разумеется, пары не сопряжены друг другу, так как в случае 2.21.4 алгебра $\bar{\mathfrak{g}}$ не является разрешимой.

Пусть

$$\Lambda(u_1)=\begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix}, \ \Lambda(u_2)=\begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3} \\ q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3} \end{pmatrix}, \ \Lambda(u_3)=\begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{2,1} & \mathbb{R}_{2,2} & r_{2,3} \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} \end{pmatrix}$$

для некоторых $p_{i,j}$, $q_{i,j}$, $r_{i,j} \in \mathbb{R}$ (при $i,j = 1,2,3$). Пусть, далее, $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – пара 2.21.4. Отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным, следовательно, из равенства $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_2, u_1])$ имеем $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = 0$, поэтому $p_{2,1} = 0$, $p_{2,2} = p_{1,1}$, $p_{2,3} = p_{1,2}$, $p_{3,1} = 0$, $p_{3,2} = p_{2,1}$, $p_{3,3} = p_{1,1}$, $p_{3,2} = 0$. Поскольку $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_1, u_1])$, то $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda(u_1)$, $p_{1,1} = p_{1,3} = 0$. Так как $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_2)] = \Lambda([e_2, u_2])$, то $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_2)] = \Lambda(u_1)$, $q_{2,2} = q_{1,1} + p_{1,2}$, $q_{2,3} = q_{1,2} + p_{1,3}$, $q_{3,3} = q_{2,2} + p_{1,2}$, $q_{2,1} = q_{3,1} = q_{3,2} = 0$. Если $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_2)] = \Lambda([e_1, u_2])$, а значит, $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_2)] = 0$, то $q_{1,2} = q_{1,3} = 0$. Поскольку $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_3)] = \Lambda([e_2, u_3])$, то $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_3)] = \Lambda(u_2)$, $q_{1,1} = -p_{1,2} = r_{2,1} = r_{3,2}$, $r_{2,2} = r_{1,1}$, $r_{2,3} = r_{1,2}$, $r_{3,1} = 0$, $r_{3,3} = r_{2,2}$. Из равенства $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_3)] = \Lambda([e_1, u_3])$ вытекает, что $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_3)] = -\Lambda(u_3)$, тогда $r_{1,1} = r_{1,2} = r_{1,3} = 0$; получаем связность

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \ \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Для остальных подалгебр рассуждения аналогичны. В частности, рассмотрим подалгебру 3.21. Пусть $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ – базис в $\mathfrak{g}$, где

$$e_1 = \Lambda(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \Lambda(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \Lambda(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Через $\mathfrak{h}$ обозначим нильпотентную подалгебру алгебры Ли $\mathfrak{g}$, порожденную вектором e_1. Рассмотрим комплексный обобщенный модуль $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, U^{\mathbb{C}})$. Положим $\tilde{e}_i = e_i \otimes 1$, $i = 1,2,3$, и $\tilde{u}_j = u_j \otimes 1$, $j = 1,2,3$. Тогда $\tilde{E} = \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ – базис $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Векторное пространство $U^{\mathbb{C}}$ может быть отождествлено с $\mathbb{C}^3$, пусть $\{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3\}$ – стандартный базис в $U^{\mathbb{C}}$. Тогда

$$\mathfrak{g}^{(0)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}\,\widetilde{e}_1, \quad \mathfrak{g}^{(i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}\,(\widetilde{e}_2 + i\widetilde{e}_3), \quad \mathfrak{g}^{(-i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}\,(\widetilde{e}_2 - i\widetilde{e}_3),$$

$$(U^{\mathbb{C}})^{(0)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}\,\widetilde{u}_1, \quad (U^{\mathbb{C}})^{(+i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}\,(\widetilde{u}_2 + i\widetilde{u}_3), \quad (U^{\mathbb{C}})^{(-i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}\,(\widetilde{u}_2 - i\widetilde{u}_3)$$

и

$$\begin{aligned}
&[e_1, e_2] = -e_3, \\
&[e_1, e_3] = e_2, \ [e_2, e_3] = 0, \\
&[e_1, u_1] = 0, \ [e_2, u_1] = pe_2, \ [e_3, u_1] = pe_3, \\
&[e_1, u_2] = qe_3 - u_3, \ [e_2, u_2] = u_1, \ [e_3, u_2] = pe_1, \\
&[e_1, u_3] = u_2 + re_3, \ [e_2, u_3] = -pe_1, \ [e_3, u_3] = u_1;
\end{aligned}$$

имеем $(\bar{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}})^{(0)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}\tilde{e}_1 + \mathbb{C}\tilde{u}_1$, $(\bar{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}})^{(i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}\,(\tilde{e}_2 + i\tilde{e}_3) + \mathbb{C}(\tilde{u}_2 + i\tilde{u}_3)$, $(\bar{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}})^{(-i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}\,(\tilde{u}_2 - i\tilde{u}_3) + \mathbb{C}\,(\tilde{e}_2 - i\tilde{e}_3)$. Поэтому $[u_1, u_2] = a_2e_2 + a_3e_3 + \alpha_2u_2 + \alpha_3u_3$, $[u_1, u_3] = b_2e_2 + b_3e_3 + \beta_2u_2 + \beta_3u_3$, $[u_2, u_3] = c_1e_1 + \gamma_1u_1$.

При $p \neq 0$, используя тождество Якоби, видим, что $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна $(\bar{\mathfrak{g}}_2, \mathfrak{g}_2)$, где последняя имеет вид

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_3$	e_2	0	$-u_3$	u_2
e_2	e_3	0	0	e_2	u_1	$-e_1$
e_3	$-e_2$	0	0	e_3	e_1	u_1
u_1	0	$-e_2$	$-e_3$	0	u_2	u_3
u_2	u_3	$-u_1$	$-e_1$	$-u_2$	0	0
u_3	$-u_2$	e_1	$-u_1$	$-u_3$	0	0

.

Здесь отображение $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_2 \to \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = 1, 2, 3$, $\pi(u_j) = \dfrac{1}{p}u_j$, $j = 1, 2, 3$. Полученная алгебра $\bar{\mathfrak{g}}$ является полупростой. Отображение Λ является $\mathfrak{g}$-инвариантным, следовательно, $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_3, u_1])$, откуда $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_1)] = \Lambda(e_3)$, $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = \Lambda(e_2)$, $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = 0$, $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_2)] = \Lambda(e_1)$; непосредственной проверкой получаем, что соответствующая система не имеет решений, пара не допускает аффинную связность.

При $p = 0$, используя тождество Якоби, видим, что $[u_1, u_2] = a_2e_2$, $[u_1, u_3] = a_2e_3$, $[u_2, u_3] = a_2e_1 + \gamma_1u_1$, $q = 0$. При $a_2 = r = 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре $(\bar{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{g}_1)$, отображение $\pi : \bar{\mathfrak{g}} \to \bar{\mathfrak{g}}_1$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = 1, 2, 3$, $\pi(u_1) = u_1$, $\pi(u_2) = u_2 - \dfrac{\gamma_1}{2}e_3$, $\pi(u_3) = u_3 - \frac{\gamma_1}{2}\,e_2$. Полученная алгебра $\bar{\mathfrak{g}}$ является разрешимой и не входит в рассматриваемый в работе класс алгебр. При $a_2 = 0$, $r \neq 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна $(\bar{\mathfrak{g}}_3, \mathfrak{g}_3)$, $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_3 \to \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = 1, 2, 3$, $\pi(u_1) = \dfrac{1}{r}u_1$, $\pi(u_2) = \frac{1}{r}\left(u_2 - \dfrac{\gamma_1}{2}e_3\right)$, $\pi(u_3) = \frac{1}{r}\left(u_3 - \dfrac{\gamma_1}{2}e_2\right)$. Полученная алгебра $\bar{\mathfrak{g}}$ также является разрешимой и не входит в рассматриваемый в работе класс алгебр.

При $a_2 > 0$, $r \neq 0$ отображение $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_4 \to \bar{\mathfrak{g}}$ такое, что $\pi(e_1) = e_1$, $\pi(e_2) = \dfrac{r}{\sqrt{a_2}}e_2$, $\pi(e_3) = \frac{r}{\sqrt{a_2}}e_3$, $\pi(u_1) = \frac{r}{\sqrt{a_2}}u_1$, $\pi(u_2) = \dfrac{1}{\sqrt{a_2}}\left(u_2 - \dfrac{\gamma_1}{2}e_3\right)$, $\pi(u_3) = \dfrac{1}{\sqrt{a_2}}\left(u_3 - \dfrac{\gamma_1}{2}e_2\right)$, устанавливает эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и $(\bar{\mathfrak{g}}_4, \mathfrak{g}_4)$, где последняя имеет вид

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_3$	e_2	0	$-u_3$	$u_2 + e_3$
e_2	e_3	0	0	0	u_1	0
e_3	$-e_2$	0	0	0	0	u_1
u_1	0	0	0	0	e_2	e_3
u_2	u_3	$-u_1$	0	$-e_2$	0	e_1
u_3	$-e_3 - u_2$	0	$-u_1$	$-e_3$	$-e_1$	0

.

Отображение Λ является $\mathfrak{g}$-инвариантным, следовательно, $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_3, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_3), \Lambda(u_1)] = 0$, $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = 0$, $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = 0$, $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_2)] = 0$, $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_2)] = \Lambda(u_1)$, $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_2)] = -\Lambda(u_3)$, $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_3)] = \Lambda(e_3) + \Lambda(u_2)$; непосредственной проверкой получаем, что соответствующая система не имеет решений и пара не допускает аффинную связность.

При $a_2 < 0$, $r \neq 0$ нетрудно проверить, что пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре $(\bar{\mathfrak{g}}_5, \mathfrak{g}_5)$

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_3$	e_2	0	$-u_3$	u_2+e_3
e_2	e_3	0	0	0	u_1	0
e_3	$-e_2$	0	0	0	0	u_1
u_1	0	0	0	0	$-e_2$	$-e_3$
u_2	u_3	$-u_1$	0	e_2	0	$-e_1$
u_3	$-e_3-u_2$	0	$-u_1$	e_3	e_1	0

.

Отображение Λ является $\mathfrak{g}$-инвариантным, следовательно, $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_1)] = 0$, $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = 0$, $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = 0$, $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_2)] = 0$, $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_2)] = \Lambda(u_1)$, $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_2)] = -\Lambda(u_3)$, $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_3)] = \Lambda(e_3) + \Lambda(u_2)$; непосредственной проверкой получаем, что система уравнений не имеет решений и пара не допускает аффинную связность.

При $a_2 > 0$, $r = 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре $(\bar{\mathfrak{g}}_6, \mathfrak{g}_6)$, то есть 3.21.6, отображение $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_6 \to \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = 1, 2, 3$, $\pi(u_1) = \dfrac{1}{\sqrt{a_2}} u_1$, $\pi(u_2) = \dfrac{1}{\sqrt{a_2}} \left(u_2 - \dfrac{\gamma_1}{2} e_3\right)$, $\pi(u_3) = \dfrac{1}{\sqrt{a_2}} \left(u_3 - \dfrac{\gamma_1}{2} e_2\right)$. Отображение Λ является $\mathfrak{g}$-инвариантным, следовательно, $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_3, u_1])$, поэтому $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_1)] = 0$, $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = 0$, $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = 0$, $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_2)] = 0$, $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_2)] = \Lambda(u_1)$, $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_2)] = -\Lambda(u_3)$, $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_3)] = \Lambda(u_2)$; непосредственной проверкой получаем связность

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} 0 & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} 0 & -q_{1,3} & q_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При $a_2 < 0$, $r = 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре $(\bar{\mathfrak{g}}_7, \mathfrak{g}_7)$, то есть 3.21.7. Отображение Λ является $\mathfrak{g}$-инвариантным, непосредственной проверкой получаем, что связность совпадает с приведенной для 3.21.6.

Заметим, что $\dim[D\bar{\mathfrak{g}}_2, \bar{\mathfrak{g}}_2] \neq \dim[D\bar{\mathfrak{g}}_i, \bar{\mathfrak{g}}_i]$, где $i \in \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_1 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_6$, $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_1 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_7$; любая подалгебра Леви в $\bar{\mathfrak{g}}_6$ изоморфна $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ и любая подалгебра Леви в $\bar{\mathfrak{g}}_7$ изоморфна $\mathfrak{su}(2)$; $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_3 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_4$, $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_3 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_5$; любая подалгебра Леви в $\bar{\mathfrak{g}}_4$ изоморфна $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ и любая подалгебра Леви в $\bar{\mathfrak{g}}_5$ изоморфна $\mathfrak{su}(2)$. Отсюда следует, что пары $(\bar{\mathfrak{g}}_i, \mathfrak{g}_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots, 7\}$, не эквивалентны друг другу.

Рассмотрим теперь, например, подалгебру 1.3; пусть $\{e_1\}$ – базис в $\mathfrak{g}$, где

$$e_1 = \Lambda(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда (с точностью до $\mathrm{Aut}(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$) имеем $[e_1, u_1] = -u_2$, $[e_1, u_2] = u_1$, $[e_1, u_1] = pe_1$, $p \in \mathbb{R}$. Положим $[u_1, u_2] = a_1 e_1 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$, $[u_1, u_3] = b_1 e_1 + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3$, $[u_2, u_3] = c_1 e_1 + \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3$. Проверив тождество Якоби, получаем $\alpha_3 p = 0$, $\alpha_2 = \alpha_1 = \gamma_3 = 0$, $\beta_3 p + c_1 = 0$, $\beta_2 + \gamma_1 = 0$, $\gamma_2 - \beta_1 - p = 0$, $\gamma_3 p - b_1 = 0$, $\gamma_2 - \beta_1 + p = 0$, $\beta_1 a_1 = 0$, $\beta_1 \alpha_3 = 0$. Изоморфизм $\pi : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}$, $\pi(e_1) = e_1$, $\pi(u_1) = u_1$, $\pi(u_2) = u_2$, $\pi(u_3) = u_3 + \beta_2 e_1$, устанавливает эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ и $(\bar{\mathfrak{g}}',\mathfrak{g}')$, где последняя имеет вид

$$\begin{array}{c|cccc}
 & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline
e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\
u_1 & u_2 & 0 & a_1e_1+\alpha_3u_3 & \beta_1u_1 \\
u_2 & -u_1 & -a_1e_1-\alpha_3u_3 & 0 & \beta_1u_2 \\
u_3 & 0 & -\beta_1u_1 & -\beta_1u_2 & 0
\end{array}.$$

Пусть $a_1\alpha_3\neq 0$. Тогда пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна паре 1.3.3 или паре 1.3.4: $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_{3(4)}\to\bar{\mathfrak{g}},\ \pi(e_1)=e_1,\ \pi(u_1)=\sqrt{|a_1|}\,u_1,\ \pi(u_2)=\sqrt{|a_1|}\,u_2,\ \pi(u_3)=\dfrac{|a_1|}{\alpha_3}u_3$. Пары 1.3.3 и 1.3.4 не эквивалентны, поскольку подалгебра Леви 1.3.4 изоморфна $\mathfrak{su}(2)$, а подалгебра Леви 1.3.3 – $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$.

Пусть $\alpha_3=0,\ a_1\neq 0$. Тогда пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна паре 1.3.5 или паре 1.3.6: $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_{5(6)}\to\bar{\mathfrak{g}},\ \pi(e_1)=e_1,\ \pi(u_1)=\sqrt{|a_1|}\,u_1,\ \pi(u_2)=\sqrt{|a_1|}\,u_2,\ \pi(u_3)=u_3$. Пары 1.3.5 и 1.3.6 не эквивалентны, поскольку подалгебра Леви 1.3.6 изоморфна $\mathfrak{su}(2)$, а подалгебра Леви 1.3.5 – $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Эти пары не эквивалентны парам 1.3.3 и 1.3.4, так как $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_{5,6}\bigcap\mathfrak{g}\neq 0$, а $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_{3,4}\bigcap\mathfrak{g}=0$. Пусть $\alpha_3\neq 0,\ a_1=0$. Тогда пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна паре 1.3.7, $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_7\to\bar{\mathfrak{g}},\ \pi(e_1)=e_1,\ \pi(u_1)=u_1,\ \pi(u_2)=u_2,\ \pi(u_3)=\alpha_3^{-1}u_3$ ($\bar{\mathfrak{g}}$ разрешима и не входит в рассматриваемый в работе класс алгебр). Пара 1.3.7 не эквивалентна парам $1.3.i$, $i=1,\dots,6$, так как ее нильпотентный радикал имеет нетривиальный подмодуль.

Пусть $\alpha_3=a_1=0,\ \beta_1\neq 0$. Тогда пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна паре 1.3.2, $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_2\to\bar{\mathfrak{g}},\ \pi(e_1)=e_1,\ \pi(u_1)=u_1,\ \pi(u_2)=u_2,\ \pi(u_3)=\beta_1u_3$ ($\bar{\mathfrak{g}}$ разрешима и не входит в рассматриваемый в работе класс алгебр). Если $\alpha_3=a_1=\beta_1=0$, то пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ тривиальна ($\bar{\mathfrak{g}}$ разрешима и не входит в рассматриваемый в работе класс алгебр). Пара 1.3.1 не эквивалентна парам $1.3.i$, $i=3,\dots,6$, так как 1.3.1 разрешима. Пары $1.3.i$, $i=1,3,4,5,6,7$, и 1.3.2 не эквивалентны, поскольку пары $1.3.i$ имеют нетривиальный центр $Z(\bar{\mathfrak{g}}_i)=\mathbb{R}u_3$.

Прямыми вычислениями получаем, что нормальную связность допускают пары 1.3.3–1.3.6. Поскольку отображение Λ является $\mathfrak{g}$-инвариантным, $[\Lambda(e_1),\Lambda(u_1)]=\Lambda([e_1,u_1])$, а значит, $[\Lambda(e_1),\Lambda(u_1)]=-\Lambda(u_2)$, получаем $p_{2,1}=-p_{1,2},\ q_{1,1}=-p_{1,2}-p_{2,1},\ q_{1,2}=-p_{2,2}+p_{1,1},\ q_{1,3}=-p_{2,3},\ q_{2,1}=-p_{2,2}+p_{1,1},\ q_{2,2}=p_{1,2}+p_{2,1},\ q_{2,3}=p_{1,3},\ q_{3,1}=-p_{3,2},\ q_{3,2}=p_{3,1},\ q_{3,3}=0$. Так как $[\Lambda(e_1),\Lambda(u_2)]=\Lambda(u_1)$, имеем $p_{2,2}=0,\ p_{1,1}=0,\ p_{3,3}=0,\ p_{2,1}=0,\ p_{1,2}=0$. Поскольку $[\Lambda(e_1),\Lambda(u_3)]=0$, то $r_{2,1}=-r_{1,2},\ r_{2,2}=r_{1,1},\ r_{2,3}=r_{1,3}=r_{3,2}=r_{3,1}=0$ и

$$\Lambda(u_1)=\begin{pmatrix}0&0&p_{1,3}\\0&0&p_{2,3}\\p_{3,1}&p_{3,2}&0\end{pmatrix},$$

$$\Lambda(u_2)=\begin{pmatrix}0&0&-p_{2,3}\\0&0&p_{1,3}\\-p_{3,2}&p_{3,1}&0\end{pmatrix},$$

$$\Lambda(u_3)=\begin{pmatrix}r_{1,1}&r_{1,2}&0\\-r_{1,2}&r_{1,1}&0\\0&0&r_{3,3}\end{pmatrix}.$$

Проведя выкладки, аналогичные приведенным выше, получаем пары, таблицы умножения и изотропные представления которых приведены в теореме 1. Для других разрешимых подалгебр однородных пространств с неразрешимой $\bar{\mathfrak{g}}$, допускающих нормальную связность, нет. Выпишем для найденных пар разложение Леви

Пара	Разложение Леви
4.21.11	$\{\{8e_4,-8e_2-8u_1,e_1,u_1\},\{-32e_3,8e_4+16u_2,16e_2+16u_1-32u_3\}\}$
3.13.6	$\{\{2u_1,e_3,e_1\},\{4e_2,e_3+4u_2,u_1+4u_3\}\}$
3.19.14	$\{\{-e_2,u_1,e_3\},\{-u_1+u_2,-u_3,e_1-e_2\}\}$
3.21.6	$\{\{-e_3,e_2,u_1\},\{-u_3,-u_1+u_2,e_1-e_3\}\}$
3.21.7	$\{\{u_1,e_2,-e_3\},\{-u_3,u_1+u_2,-e_1-e_3\}\}$
3.25.30	$\{\{2u_1,e_1,e_2\},\{4e_3,e_2+4u_2,u_1+4u_3\}\}$
2.8.7	$\{\{u_2,e_2\},\{e_1,u_1,u_3\}\}$
2.9.12	$\{\{u_1,-e_2\},\{-2u_2,2u_1+2u_3,-e_1-e_2\}\}$
2.17.27	$\{\{u_2,e_2\},\{2e_1,e_2+u_1,2e_2+2u_3\}\}$
2.21.4	$\{\{e_1+u_2,-e_2+u_1\},\{u_1,-u_3,u_2\}\}$
1.1.5	$\{\{u_3\},\{-e_1,-u_1,-u_2\}\}$
1.1.7	$\{\{u_3\},\{-e_1-u_3,-u_1,-u_2\}\}$
1.3.3	$\{\{u_3\},\{e_1+u_3,u_1,u_2\}\}$
1.3.4	$\{\{u_3\},\{-e_1+u_3,-u_1,-u_2\}\}$
1.3.5	$\{\{u_3\},\{e_1,u_1,u_2\}\}$
1.3.6	$\{\{u_3\},\{-e_1,-u_1,-u_2\}\}$
1.5.19	$\{\{u_2\},\{e_1,u_1,u_3\}\}$
1.8.2	$\{\{-e_1+u_1\},\{u_1,u_2,u_3\}\}$

Тогда аффинные связности на найденных парах имеют вид

Пара	Связность
4.21.11	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 1 & r_{1,1}+p_{1,3} \end{pmatrix}$
3.13.6, $\mu=0$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1}+p_{1,3}-q_{2,3} & r_{2,3} \\ 0 & -1 & r_{1,1}+p_{1,3} \end{pmatrix}$
3.13.6, $\mu=-1$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
3.19.14	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & r_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.21.6 3.21.7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -q_{1,3} & q_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.25.30	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & -1 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & -q_{1,3} & r_{1,3} \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & -1 & r_{1,1}+p_{1,3} \end{pmatrix}$

2.8.7	$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & r_{1,3} \\ 0 & r_{2,2} & 0 \\ -1/2 & 0 & r_{1,1}+p_{1,3} \end{pmatrix}$
2.9.12	тривиальная
2.17.27	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ -1 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & -q_{1,3} & r_{1,3} \\ -p_{2,3} & r_{1,1}+p_{1,3}-q_{2,3} & r_{2,3} \\ -1 & 0 & r_{1,1}+p_{1,3} \end{pmatrix}$
2.21.4	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}$
1.1.5 1.1.7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ q_{3,1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$
1.3.3 1.3.4	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ -p_{3,2} & p_{3,1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & 0 \\ -r_{1,2} & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$
1.3.5 1.3.6	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ -p_{3,2} & p_{3,1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & 0 \\ -r_{1,2} & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$
1.5.19	$\begin{pmatrix} -1/2 & p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,1}+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & q_{2,2} & q_{2,3} \\ 0 & 0 & q_{1,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ -p_{2,3} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ -1/2 & p_{1,2} & r_{1,1}+p_{1,3} \end{pmatrix}$
1.8.2	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & 0 & q_{1,2}+p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ -p_{1,2} & r_{1,1}+q_{1,2} & r_{1,2}+q_{1,3} \\ 0 & -p_{1,2} & r_{1,1}+2q_{1,2}+p_{1,3} \end{pmatrix}$

Тензор кручения $T \in \operatorname{Inv} T_2{}^1(\mathfrak{m})$ и тензор кривизны $R \in \operatorname{Inv} T_3{}^1(\mathfrak{m})$ имеют вид $T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x,y]_{\mathfrak{m}}$, $R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x,y])$ для всех $x, y \in \bar{g}$, в частности, в случае 2.21.4 тензор кривизны определяется по формулам

$$R(u_1,u_2) = [\Lambda(u_1), \Lambda(u_2)] - \Lambda([u_1,u_2]) =$$
$$= \Lambda(u_1)\Lambda(u_2) - \Lambda(u_2)\Lambda(u_1) - \Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}^2 - p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}^2 - p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R(u_1,u_3) = [\Lambda(u_1), \Lambda(u_3)] - \Lambda([u_1,u_3]) =$$
$$[\Lambda(u_1), \Lambda(u_3)] - \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} -p_{1,2}^2 + p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}^2 - p_{1,2} \end{pmatrix},$$

$$R(u_2,u_3) = [\Lambda(u_2),\Lambda(u_3)] - \Lambda([u_2,u_3]) =$$
$$[\Lambda(u_2),\Lambda(u_3)] - \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2}^2 + p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2}^2 + p_{1,2} & 0 \end{pmatrix},$$

а тензор кручения – по формулам

$$T(u_1,u_2) = \Lambda(u_1)(u_2)_{\mathfrak{m}} - \Lambda(u_2)(u_1)_{\mathfrak{m}} - [u_1,u_2]_{\mathfrak{m}} = \begin{pmatrix} 2p_{1,2}-1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$T(u_1,u_3) = \Lambda(u_1)(u_3)_{\mathfrak{m}} - \Lambda(u_3)(u_1)_{\mathfrak{m}} - [u_1,u_3]_{\mathfrak{m}} = \begin{pmatrix} 0 & 2p_{1,2}-1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$T(u_2,u_3) = \Lambda(u_2)(u_3)_{\mathfrak{m}} - \Lambda(u_3)(u_2)_{\mathfrak{m}} - [u_2,u_3]_{\mathfrak{m}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2p_{1,2}-1 \end{pmatrix}.$$

Проведя аналогичные вычисления, получаем

Пара	Тензор кривизны
4.21.11	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & p_{1,3} & {p_{1,3}}^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,3}+2r_{1,1} & {p_{1,3}}^2 \\ 0 & 0 & p_{1,3}+2r_{1,1} \end{pmatrix}$
3.13.6, $\mu=0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -q_{2,3}+2p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2p_{1,3}+q_{2,3} & -r_{2,3}+{p_{1,3}}^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} -2r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & q_{2,3}-2r_{1,1}-2p_{1,3} & -4r_{2,3}+{q_{2,3}}^2 \\ 0 & 0 & q_{2,3}-2r_{1,1}-2p_{1,3} \end{pmatrix}$
3.13.6, $\mu=-1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & -2p_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.19.14	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3.21.6	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3.21.7	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
3.25.30	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -p_{1,3} & {p_{1,3}}^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2r_{1,1} & 0 & 2q_{1,3}p_{1,3}-3r_{1,3} \\ 0 & -p_{1,3}-2r_{1,1} & {p_{1,3}}^2 \\ 0 & 0 & -p_{1,3}-2r_{1,1} \end{pmatrix}$
2.8.7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q_{2,3}/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,3}/2-r_{1,1} & 0 & -2r_{1,3}+{p_{1,3}}^2 \\ 0 & -r_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & -p_{1,3}/2-r_{1,1} \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -q_{2,3}/2 & 0 & q_{2,3}r_{1,1}+q_{2,3}p_{1,3}-r_{2,2}q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.9.12

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2.17.27

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3q_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3}-2q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -p_{1,3}-2r_{1,1} & 3q_{1,3} & -4r_{1,3}+{p_{1,3}}^2+q_{1,3}p_{2,3} \\ 0 & -2r_{1,1}-2p_{1,3}+2q_{2,3} & p_{2,3}p_{1,3}+p_{2,3}q_{2,3}-3r_{2,3} \\ 0 & 0 & -p_{1,3}-2r_{1,1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -2q_{1,3} & 0 & q_{1,3}p_{1,3}+q_{1,3}q_{2,3} \\ p_{1,3}-2q_{2,3} & q_{1,3} & -r_{1,3}+q_{1,3}p_{2,3}+{q_{2,3}}^2 \\ 0 & 0 & q_{1,3} \end{pmatrix}$$

2.21.4

$$\begin{pmatrix} 0 & {p_{1,2}}^2-p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & {p_{1,2}}^2-p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -{p_{1,2}}^2+p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {p_{1,2}}^2-p_{1,2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -{p_{1,2}}^2+p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -{p_{1,2}}^2+p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}$$

1.1.5

$$\begin{pmatrix} p_{1,3}q_{3,1}-1 & 0 & 0 \\ 0 & -p_{3,2}q_{2,3}+1 & 0 \\ 0 & 0 & p_{3,2}q_{2,3}-p_{1,3}q_{3,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2}r_{2,2}-r_{3,3}p_{3,2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3}r_{3,3}-r_{2,2}q_{2,3} \\ q_{3,1}r_{1,1}-r_{3,3}q_{3,1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1.7

$$\begin{pmatrix} p_{1,3}q_{3,1}-1-r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{3,2}q_{2,3}+1-r_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{3,2}q_{2,3}-p_{1,3}q_{3,1}-r_{3,3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2}r_{2,2}-r_{3,3}p_{3,2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3}r_{3,3}-r_{2,2}q_{2,3} \\ q_{3,1}r_{1,1}-r_{3,3}q_{3,1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.3.3

$$\begin{pmatrix} -p_{1,3}p_{3,2}+p_{2,3}p_{3,1}-r_{1,1} & p_{1,3}p_{3,1}+p_{2,3}p_{3,2}-1-r_{1,2} & 0 \\ -p_{2,3}p_{3,2}-p_{1,3}p_{3,1}+1+r_{1,2} & -p_{1,3}p_{3,2}+p_{2,3}p_{3,1}-r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & -2p_{2,3}p_{3,1}+2p_{1,3}p_{3,2}-r_{3,3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}-r_{1,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3}r_{3,3}+r_{1,2}p_{1,3}-r_{1,1}p_{2,3} \\ p_{3,1}r_{1,1}-p_{3,2}r_{1,2}-r_{3,3}p_{3,1} & p_{3,1}r_{1,2}+p_{3,2}r_{1,1}-r_{3,3}p_{3,2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3}r_{3,3}-r_{1,2}p_{1,3}+r_{1,1}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}-r_{1,2}p_{2,3} \\ -p_{3,2}r_{1,1}-p_{3,1}r_{1,2}+r_{3,3}p_{3,2} & p_{3,1}r_{1,1}-p_{3,2}r_{1,2}-r_{3,3}p_{3,1} & 0 \end{pmatrix}$$

1.3.4

$$\begin{pmatrix} -p_{1,3}p_{3,2}+p_{2,3}p_{3,1}-r_{1,1} & p_{1,3}p_{3,1}+p_{2,3}p_{3,2}+1-r_{1,2} & 0 \\ -p_{2,3}p_{3,2}-p_{1,3}p_{3,1}-1+r_{1,2} & -p_{1,3}p_{3,2}+p_{2,3}p_{3,1}-r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & -2p_{2,3}p_{3,1}+2p_{1,3}p_{3,2}-r_{3,3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}-r_{1,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3}r_{3,3}+r_{1,2}p_{1,3}-r_{1,1}p_{2,3} \\ p_{3,1}r_{1,1}-p_{3,2}r_{1,2}-r_{3,3}p_{3,1} & p_{3,1}r_{1,2}+p_{3,2}r_{1,1}-r_{3,3}p_{3,2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3}r_{3,3}-r_{1,2}p_{1,3}+r_{1,1}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}-r_{1,2}p_{2,3} \\ -p_{3,2}r_{1,1}-p_{3,1}r_{1,2}+r_{3,3}p_{3,2} & p_{3,1}r_{1,1}-p_{3,2}r_{1,2}-r_{3,3}p_{3,1} & 0 \end{pmatrix}$$

1.3.5

$$\begin{pmatrix} -p_{1,3}p_{3,2}+p_{2,3}p_{3,1} & p_{1,3}p_{3,1}+p_{2,3}p_{3,2}-1 & 0 \\ -p_{2,3}p_{3,2}-p_{1,3}p_{3,1}+1 & -p_{1,3}p_{3,2}+p_{2,3}p_{3,1} & 0 \\ 0 & 0 & -2p_{2,3}p_{3,1}+2p_{1,3}p_{3,2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}-r_{1,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3}r_{3,3}+r_{1,2}p_{1,3}-r_{1,1}p_{2,3} \\ p_{3,1}r_{1,1}-p_{3,2}r_{1,2}-r_{3,3}p_{3,1} & p_{3,1}r_{1,2}+p_{3,2}r_{1,1}-r_{3,3}p_{3,2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3}r_{3,3}-r_{1,2}p_{1,3}+r_{1,1}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}-r_{1,2}p_{2,3} \\ -p_{3,2}r_{1,1}-p_{3,1}r_{1,2}+r_{3,3}p_{3,2} & p_{3,1}r_{1,1}-p_{3,2}r_{1,2}-r_{3,3}p_{3,1} & 0 \end{pmatrix}$$

1.3.6

$$\begin{pmatrix} -p_{1,3}p_{3,2}+p_{2,3}p_{3,1} & p_{1,3}p_{3,1}+p_{2,3}p_{3,2}+1 & 0 \\ -p_{2,3}p_{3,2}-p_{1,3}p_{3,1}-1 & -p_{1,3}p_{3,2}+p_{2,3}p_{3,1} & 0 \\ 0 & 0 & -2p_{2,3}p_{3,1}+2p_{1,3}p_{3,2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}-r_{1,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3}r_{3,3}+r_{1,2}p_{1,3}-r_{1,1}p_{2,3} \\ p_{3,1}r_{1,1}-p_{3,2}r_{1,2}-r_{3,3}p_{3,1} & p_{3,1}r_{1,2}+p_{3,2}r_{1,1}-r_{3,3}p_{3,2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3}r_{3,3}-r_{1,2}p_{1,3}+r_{1,1}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}-r_{1,2}p_{2,3} \\ -p_{3,2}r_{1,1}-p_{3,1}r_{1,2}+r_{3,3}p_{3,2} & p_{3,1}r_{1,1}-p_{3,2}r_{1,2}-r_{3,3}p_{3,1} & 0 \end{pmatrix}$$

1.5.19

$$\begin{pmatrix} 0 & -q_{1,2}/2+p_{1,2}q_{2,2}-q_{1,1}p_{1,2} & -q_{1,3}+p_{1,2}q_{2,3}-q_{1,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3}q_{1,1}-q_{2,2}p_{2,3}-q_{2,3}/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -p_{1,2}p_{2,3}-p_{1,3}/2-r_{1,1} & -3r_{1,2}/2+p_{1,2}r_{2,2}+p_{1,3}p_{1,2}-r_{1,1}p_{1,2} & A \\ 0 & 2p_{1,2}p_{2,3}-r_{2,2} & B \\ 0 & 0 & -p_{1,2}p_{2,3}-p_{1,3}/2-r_{1,1} \end{pmatrix},$$

$$A = -2r_{1,3} + p_{1,2}r_{2,3} + {p_{1,3}}^2 - r_{1,2}p_{2,3},$$

$$B = p_{2,3}r_{1,1} + 2p_{2,3}p_{1,3} - r_{2,2}p_{2,3} - 3r_{2,3}/2,$$

1.8.2	$\begin{pmatrix} -q_{1,2}p_{2,3}-q_{1,3}/2 & q_{1,1}r_{1,2}+q_{1,2}r_{2,2}+q_{1,3}p_{1,2}-r_{1,1}q_{1,2}-r_{1,2}q_{2,2} & q_{1,2}r_{2,3}+q_{1,3}p_{1,3}-r_{1,2}q_{2,3} \\ p_{2,3}q_{1,1}-q_{2,2}p_{2,3}-q_{2,3}/2 & p_{1,2}q_{2,3}+q_{1,2}p_{2,3} & H \\ 0 & q_{1,1}p_{1,2}+q_{1,2}/2-p_{1,2}q_{2,2} & q_{1,3}/2-p_{1,2}q_{2,3} \end{pmatrix},$ $H=q_{2,2}r_{2,3}+q_{2,3}r_{1,1}+q_{2,3}p_{1,3}+p_{2,3}q_{1,3}-r_{2,2}q_{2,3}-r_{2,3}q_{1,1}$ $\begin{pmatrix} 0 & {p_{1,2}}^2-p_{1,2} & 3p_{1,3}p_{1,2}-p_{1,3} \\ 0 & 0 & {p_{1,2}}^2-p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} -{p_{1,2}}^2+p_{1,2} & q_{1,2}p_{1,2}-p_{1,3}p_{1,2}-q_{1,2} & p_{1,2}q_{1,3}+2p_{1,3}q_{1,2}+{p_{1,3}}^2-q_{1,3} \\ 0 & 0 & q_{1,2}p_{1,2}+2p_{1,3}p_{1,2}-q_{1,2}-p_{1,3} \\ 0 & 0 & {p_{1,2}}^2-p_{1,2} \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} -q_{1,2}p_{1,2}-r_{1,1} & -r_{1,2}p_{1,2}+{q_{1,2}}^2-p_{1,2}q_{1,3}-r_{1,2} & A \\ -{p_{1,2}}^2+p_{1,2} & -p_{1,3}p_{1,2}-r_{1,1}-q_{1,2} & B \\ 0 & -{p_{1,2}}^2+p_{1,2} & C \end{pmatrix},$ $A=-2p_{1,2}r_{1,3}+3q_{1,2}q_{1,3}+q_{1,3}p_{1,3}-r_{1,2}p_{1,3}-r_{1,3},$ $B=q_{1,2}{}^2+2p_{1,3}q_{1,2}+{p_{1,3}}^2-r_{1,2}p_{1,2}-r_{1,2}-q_{1,3},$ $C=q_{1,2}p_{1,2}+p_{1,3}p_{1,2}-r_{1,1}-2q_{1,2}-p_{1,3}$

Пара	Тензор кручения
4.21.11	$(0,0,0),(p_{1,3}-r_{1,1},0,0),(0,p_{1,3}-r_{1,1},0)$
3.13.6, $\mu=0$	$(0,0,0),(p_{1,3}-r_{1,1},0,0),(0,2q_{2,3}-r_{1,1}-p_{1,3},0)$
3.13.6, $\mu=-1$	$(0,0,0),(0,2p_{2,3},0),(0,0,0)$
3.19.14	$(0,0,0),(0,0,0),(q_{1,3}-r_{1,2},0,0)$
3.21.6	$(0,0,0),(0,0,0),(2q_{1,3},0,0)$
3.21.7	$(0,0,0),(0,0,0),(2q_{1,3},0,0)$
3.25.30	$(0,0,0),(p_{1,3}-r_{1,1},0,0),(2q_{1,3},p_{1,3}-r_{1,1},0)$
2.8.7	$(0,0,0),(p_{1,3}-r_{1,1},0,0),(0,q_{2,3}-r_{2,2},0)$
2.9.12	нулевой
2.17.27	$(0,0,0),(p_{1,3}-r_{1,1},2p_{2,3},0),(2q_{1,3},2q_{2,3}-r_{1,1}-p_{1,3},0)$
2.21.4	$(2p_{1,2}-1,0,0),(0,2p_{1,2}-1,0),(0,0,2p_{1,2}-1)$
1.1.5	$(0,0,p_{3,2}-q_{3,1}),(p_{1,3}-r_{1,1},0,0),(0,q_{2,3}-r_{2,2},0)$
1.1.7	$(0,0,p_{3,2}-q_{3,1}-1),(p_{1,3}-r_{1,1},0,0),(0,q_{2,3}-r_{2,2},0)$
1.3.3	$(0,0,2p_{3,2}-1),(p_{1,3}-r_{1,1},p_{2,3}+r_{1,2},0),(-p_{2,3}-r_{1,2},p_{1,3}-r_{1,1},0)$
1.3.4	$(0,0,2p_{3,2}-1),(p_{1,3}-r_{1,1},p_{2,3}+r_{1,2},0),(-p_{2,3}-r_{1,2},p_{1,3}-r_{1,1},0)$
1.3.5	$(0,0,2p_{3,2}),(p_{1,3}-r_{1,1},p_{2,3}+r_{1,2},0),(-p_{2,3}-r_{1,2},p_{1,3}-r_{1,1},0)$
1.3.6	$(0,0,2p_{3,2}),(p_{1,3}-r_{1,1},p_{2,3}+r_{1,2},0),(-p_{2,3}-r_{1,2},p_{1,3}-r_{1,1},0)$
1.5.19	$(p_{1,2}-q_{1,1},0,0),(p_{1,3}-r_{1,1},2p_{2,3},0),(q_{1,3}-r_{1,2},q_{2,3}-r_{2,2},q_{1,1}-p_{1,2})$
1.8.2	$(2p_{1,2}-1,0,0),(p_{1,3}-r_{1,1},2p_{1,2}-1,0),(q_{1,3}-r_{1,2},p_{1,3}-r_{1,1},2p_{1,2}-1)$

Алгебра Ли группы голономии инвариантной связности $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ на паре $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ вида $\mathfrak{h}^* = V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}),V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}),[\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}),V]] + \ldots$, где V – подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x),\Lambda(y)] - \Lambda([x,y]) | x,y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Прямыми вычислениями находим

Пара	Алгебра голономии	
4.21.11	$r_{1,1}{\neq}0,\ p_{1,3}{=}0$	$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 \end{pmatrix}$
	$p_{1,3}{\neq}0,\ \gamma = 2r_{1,1}/p_{1,3}$	$\begin{pmatrix} \gamma p_6 & p_2 & p_1 \\ 0 & p_5{+}(1{+}\gamma)p_6 & p_3 \\ 0 & p_4 & -p_5{+}(1{+}\gamma)p_6 \end{pmatrix}$
	иначе	нулевая
3.13.6, $\mu{=}0$	$q_{2,3}{=}2p_{1,3},\ r_{2,3}{=}p_{1,3}^2,\ r_{1,1}{\neq}0$	$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 \end{pmatrix}$
	$q_{2,3}{=}2p_{1,3},\ r_{2,3}{\neq}p_{1,3}^2,\ r_{1,1}{\neq}0$	$\begin{pmatrix} p_6 & p_2 & p_1 \\ 0 & p_5{+}p_6 & p_3 \\ 0 & p_4 & -p_5{+}p_6 \end{pmatrix}$
	$q_{2,3}{=}2p_{1,3},\ r_{2,3}{\neq}p_{1,3}^2,\ r_{1,1}{=}0$	$\begin{pmatrix} 0 & p_2 & p_1 \\ 0 & p_5 & p_3 \\ 0 & p_4 & -p_5 \end{pmatrix}$
	$q_{2,3}{\neq}2p_{1,3},\ r_{2,3}{=}(q_{2,3}^2{+}q_{1,3}^2)/4,\ \gamma = 2r_{1,1}/(2p_{1,3} - q_{2,3})$	$\begin{pmatrix} \gamma p_3 & p_2 & p_1 \\ 0 & (\gamma+1)p_3 & 0 \\ 0 & 0 & (\gamma+1)p_3 \end{pmatrix}$
	$q_{2,3}{\neq}2p_{1,3},\ r_{2,3}{\neq}(q_{2,3}^2{+}q_{1,3}^2)/4,\ \gamma = 2r_{1,1}/(2p_{1,3} - q_{2,3})$	$\begin{pmatrix} \gamma p_6 & p_2 & p_1 \\ 0 & (\gamma{+}1)p_6{+}p_5 & p_3 \\ 0 & p_4 & (\gamma{+}1)p_6{-}p_5 \end{pmatrix}$, иначе нулевая
3.13.6, $\mu{=}{-}1$	$p_{2,3}{\neq}0$	$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$
	$p_{2,3}{=}0$	нулевая
3.19.14		$\begin{pmatrix} 0 & p_2 & p_1 \\ 0 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & -p_3 \end{pmatrix}$
3.21.6 3.21.7		$\begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ 0 & 0 & -p_3 \\ 0 & p_3 & 0 \end{pmatrix}$

3.25.30	$p_{1,3}{=}r_{1,3}{=}0,\ r_{1,1}{\neq}0$	$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 \end{pmatrix}$
	$p_{1,3}{=}r_{1,1}{=}0,\ r_{1,3}{\neq}0$	$\begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
	$p_{1,3}{=}0,\ r_{1,3}{\neq}0,\ r_{1,1}{\neq}0$	$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 \end{pmatrix}$
	$p_{1,3}{\neq}0,\ \gamma = 2r_{1,1}/p_{1,3}$	$\begin{pmatrix} \gamma p_6 & p_2 & p_1 \\ 0 & p_4{+}(1{+}\gamma)p_6 & p_3 \\ 0 & p_5 & -p_4{+}(1{+}\gamma)p_6 \end{pmatrix}$
	иначе	нулевая
2.9.12		$\begin{pmatrix} p_2 & 0 & p_1 \\ 0 & -2p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_2 \end{pmatrix}$
2.21.4	$p_{1,2}{\neq}0,1$	$\begin{pmatrix} p_3 & p_1 & 0 \\ p_2 & 0 & p_1 \\ 0 & p_2 & -p_3 \end{pmatrix}$
	$p_{1,2}{=}0,1$	нулевая

Положим $\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$ равной подалгебре в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, порожденной множеством $\{\Lambda(x);\ x\in\bar{\mathfrak{g}}\}$. Связность нормальна, если $\mathfrak{h}^*$ совпадает с $\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$. Определим, в каких случаях связность является нормальной. Для пары 4.21.11 связность нормальна, если $p_{1,3} = -2r_{1,1}\neq 0$, тогда алгебра голономии есть $\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ 0 & p_4 & p_5 \\ 0 & p_6 & -p_4 \end{pmatrix}$ При $p_{1,3}=0$ алгебра голономии не более чем одномерна и связность нормальной не является, при $p_{1,3}\neq -2r_{1,1}$ образ $\Lambda(\mathfrak{g})$ не лежит в алгебре голономии, поэтому $\mathfrak{h}^*\neq\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$.

У пары 3.13.6 ($\mu=0$) связность является нормальной при $q_{2,3}=2r_{1,1}+2p_{1,3}$, $r_{1,1}\neq 0$, $r_{2,3}\neq(q_{2,3}^2+q_{1,3}^2)/4$, тогда алгебра голономии есть $\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ 0 & p_4 & p_5 \\ 0 & p_6 & -p_4 \end{pmatrix}$. При $\mu=-1$ связность нормальна, если $p_{2,3}\neq 0$, алгебра голономии – это $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$.

У пар 3.19.14, 3.21.6 и 3.21.7, 2.9.12 связности являются нормальными, у пары 2.21.4 связность нормальна, если $p_{1,2}\neq 0,1$, у пары 3.25.30 связность нормальна, если $p_{1,3}\neq 0$ ($\gamma=2r_{1,1}/p_{1,3}$), алгебры голономии приведены в таблице.

Для пары 2.8.7 связность является нормальной при $p_{1,3}=-2r_{1,1}$, $r_{2,2}\neq 0$, $r_{1,3}\neq 1/2{p_{1,3}}^2$, $q_{2,3}=0$, тогда алгебра голономии есть $\begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_2 \\ 0 & p_3 & 0 \\ p_4 & 0 & -p_1 \end{pmatrix}$, либо при $p_{1,3}=-2r_{1,1}$, $r_{2,2}\neq 0$, $r_{1,3}\neq 1/2{p_{1,3}}^2$, $q_{2,3}\neq 0$, тогда алгебра голономии есть $\begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_2 \\ p_4 & p_5 & p_6 \\ p_3 & 0 & -p_1 \end{pmatrix}$.

Для пары 2.17.27 связность нормальна при $q_{1,3} \neq 0$, $q_{2,3} = 2p_{1,3} + 3r_{1,1}$, тогда алгебра голономии – это $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$, либо при $q_{1,3} \neq 0$, $q_{2,3} \neq 2p_{1,3}3r_{1,1}$ – $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, либо при $q_{1,3} = 0$, $r_{1,3} \neq {p_{1,3}}^2/4$, $r_{1,1} = -q_{2,3}$, $p_{1,3} = -2r_{1,1}$ – $\begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_2 \\ p_3 & 0 & p_4 \\ p_5 & 0 & -p_1 \end{pmatrix}$, либо при $q_{1,3} = 0$, $r_{1,3} \neq {p_{1,3}}^2/4$, $r_{1,1} \neq -q_{2,3}$, $p_{1,3} = -2r_{1,1}$ – $\begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_2 \\ p_3 & 0 & p_4 \\ p_5 & 0 & p_6 \end{pmatrix}$, либо при $q_{1,3} = 0$, $r_{1,3} \neq {p_{1,3}}^2/4$, $r_{1,1} + p_{1,3} - q_{2,3} \neq 0$, $\gamma = \dfrac{p_{1,3} + 2r_{1,1}}{2r_{1,1} + 2p_{1,3} - 2q_{2,3}}$ – $\begin{pmatrix} p_5 + \gamma p_6 & 0 & p_1 \\ p_3 & p_6 & p_2 \\ p_4 & 0 & -p_5 + \gamma p_6 \end{pmatrix}$.

У пары 1.1.5 связность нормальна, если

$p_{1,3}q_{3,1}{=}p_{3,2}q_{2,3}$, $r_{2,2}{=}{-}r_{1,1}$, $r_{3,3}{=}0$,

тогда алгебра голономии есть $\begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_{1,3}p_2 \\ 0 & -p_1 & q_{2,3}p_3 \\ q_{3,1}p_3 & p_{3,2}p_2 & 0 \end{pmatrix}$;

$p_{1,3}{=}0$, $q_{3,1}p_{3,2}q_{2,3} \neq 0$, $r_{3,3}{=}{-}r_{2,2}{-}r_{1,1}$, ($r_{3,3}{=}r_{2,2}$, $p_{3,2}q_{2,3} \neq 1/2$ или $r_{3,3} \neq r_{2,2}$), $\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ p_3 & p_2{-}p_1 & p_4 \\ p_5 & p_6 & -p_2 \end{pmatrix}$;

$p_{1,3}{=}0$, $q_{3,1}{=}0$, $p_{3,2}q_{2,3} \neq 0$, $r_{3,3}{=}{-}r_{2,2}{-}r_{1,1}$, ($r_{3,3}{=}r_{2,2}$, $p_{3,2}q_{2,3} \neq 1/2$ или $r_{3,3} \neq r_{2,2}$), $\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2{-}p_1 & p_3 \\ 0 & p_4 & -p_2 \end{pmatrix}$;

$p_{1,3} \neq 0$, $q_{3,1}{=}0$, $p_{3,2}q_{2,3} \neq 0$, $r_{3,3}{=}{-}r_{2,2}{-}r_{1,1}$, ($r_{3,3}{=}r_{2,2}$, $p_{3,2}q_{2,3} \neq \frac{1}{2}$ или $r_{3,3} \neq r_{2,2}$), $\begin{pmatrix} p_1 & p_3 & p_4 \\ 0 & p_2{-}p_1 & p_5 \\ 0 & p_6 & -p_2 \end{pmatrix}$;

$p_{1,3} \neq 0$, $q_{3,1} \neq 0$, $p_{3,2}{=}0$, $q_{2,3} \neq 0$, $r_{3,3}{=}{-}r_{2,2}{-}r_{1,1}$, ($r_{3,3}{=}r_{1,1}$, $p_{1,3}q_{3,1} \neq 1/2$ или $r_{3,3} \neq r_{1,1}$), $\begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_3 \\ p_4 & p_2{-}p_1 & p_5 \\ p_6 & 0 & -p_2 \end{pmatrix}$;

$p_{1,3} \neq 0$, $q_{3,1} \neq 0$, $p_{3,2}{=}0$, $q_{2,3}{=}0$, $r_{3,3}{=}{-}r_{2,2}{-}r_{1,1}$, ($r_{3,3}{=}r_{1,1}$, $p_{1,3}q_{3,1} \neq 1/2$ или $r_{3,3} \neq r_{1,1}$), $\begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_3 \\ 0 & p_2{-}p_1 & 0 \\ p_4 & 0 & -p_2 \end{pmatrix}$;

$p_{1,3} \neq 0$, $q_{3,1} \neq 0$, $p_{3,2} \neq 0$, $q_{2,3}{=}0$, $r_{3,3}{=}{-}r_{2,2}{-}r_{1,1}$, ($r_{3,3}{=}r_{1,1}$, $p_{1,3}q_{3,1} \neq 1/2$ или $r_{3,3} \neq r_{1,1}$), $\begin{pmatrix} p_1 & p_3 & p_4 \\ 0 & p_2{-}p_1 & 0 \\ p_5 & p_6 & -p_2 \end{pmatrix}$;

$p_{1,3}q_{3,1} \neq p_{3,2}q_{2,3} \neq 0$, $r_{3,3}{=}{-}r_{2,2}{-}r_{1,1}$, $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$.

У пары 1.1.7 связность нормальна, если

$p_{1,3}q_{3,1}{=}p_{3,2}q_{2,3}$ ($r_{2,2}{=}{-}r_{1,1} \neq 0$ или $r_{2,2}{=}{-}r_{1,1}{=}0$, $p_{3,2}q_{2,3} \neq 1$), $r_{3,3}{=}0$ ($r_{1,1} \neq {-}1$ или $p_{1,3}q_{3,1} \neq 0$),

тогда алгебра голономии есть $\begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_{1,3}p_2 \\ 0 & -p_1 & q_{2,3}p_3 \\ q_{3,1}p_3 & p_{3,2}p_2 & 0 \end{pmatrix}$;

$$p_{1,3}q_{3,1}=p_{3,2}q_{2,3}\neq 0,\quad r_{2,2}\neq -r_{1,1},\ r_{3,3}=\frac{1}{2}(r_{2,2}+r_{1,1}),\qquad \begin{pmatrix} p_1+r_{1,1}p_4 & 0 & p_{1,3}p_2\\ 0 & -p_1+r_{2,2}p_4 & q_{2,3}p_3\\ q_{3,1}p_3 & p_{3,2}p_2 & \frac{r_{2,2}+r_{1,1}}{2}p_4 \end{pmatrix};$$

$$p_{1,3}=0,\ q_{3,1}p_{3,2}q_{2,3}\neq 0,\ r_{3,3}=-r_{2,2}-r_{1,1},\quad (r_{3,3}=r_{2,2}\neq 1/2,\ p_{3,2}q_{2,3}\neq 1/2 \text{ или } r_{3,3}\neq r_{2,2},\ r_{1,1}\neq -1),\qquad \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0\\ p_3 & p_2-p_1 & p_4\\ p_5 & p_6 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$$p_{1,3}=0,\ q_{3,1}=0,\ p_{3,2}q_{2,3}\neq 0,\ r_{3,3}=-r_{2,2}-r_{1,1},\quad (r_{3,3}=r_{2,2}\neq 1/2,\ p_{3,2}q_{2,3}\neq 1/2 \text{ или } r_{3,3}\neq r_{2,2},\ r_{1,1}\neq -1),\qquad \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0\\ 0 & p_2-p_1 & p_3\\ 0 & p_4 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$$p_{1,3}\neq 0,\ q_{3,1}=0,\ p_{3,2}q_{2,3}\neq 0,\ r_{3,3}=-r_{2,2}-r_{1,1},\quad (r_{3,3}=r_{2,2}\neq 1/2,\ p_{3,2}q_{2,3}\neq 1/2 \text{ или } r_{3,3}\neq r_{2,2},\ r_{1,1}\neq -1),\qquad \begin{pmatrix} p_1 & p_3 & p_4\\ 0 & p_2-p_1 & p_5\\ 0 & p_6 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$$p_{1,3}\neq 0,\ q_{3,1}\neq 0,\ p_{3,2}=0,\ q_{2,3}\neq 0,\ r_{3,3}=-r_{2,2}-r_{1,1},\quad (r_{3,3}=r_{1,1}\neq -1/2,\ p_{1,3}q_{3,1}\neq 1/2 \text{ или } r_{3,3}\neq r_{1,1},\ r_{2,2}\neq 1),\qquad \begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_3\\ p_4 & p_2-p_1 & p_5\\ p_6 & 0 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$$p_{1,3}\neq 0,\ q_{3,1}\neq 0,\ p_{3,2}=0,\ q_{2,3}=0,\ r_{3,3}=-r_{2,2}-r_{1,1},\quad (r_{3,3}=r_{1,1}\neq -1/2,\ p_{1,3}q_{3,1}\neq 1/2 \text{ или } r_{3,3}\neq r_{1,1},\ r_{2,2}\neq 1),\qquad \begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_3\\ 0 & p_2-p_1 & 0\\ p_4 & 0 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$$p_{1,3}\neq 0,\ q_{3,1}\neq 0,\ p_{3,2}\neq 0,\ q_{2,3}=0,\ r_{3,3}=-r_{2,2}-r_{1,1},\quad (r_{3,3}=r_{1,1}\neq -1/2,\ p_{1,3}q_{3,1}\neq 1/2 \text{ или } r_{3,3}\neq r_{1,1},\ r_{2,2}\neq 1),\qquad \begin{pmatrix} p_1 & p_3 & p_4\\ 0 & p_2-p_1 & 0\\ p_5 & p_6 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$$p_{1,3}q_{3,1}\neq p_{3,2}q_{2,3}\neq 0,\ r_{3,3}=-r_{2,2}-r_{1,1}\qquad \mathfrak{sl}(3,\mathbb{R}),$$

$$p_{1,3}q_{3,1}\neq p_{3,2}q_{2,3}\neq 0,\ r_{3,3}\neq -r_{2,2}-r_{1,1}\qquad \mathfrak{gl}(3,\mathbb{R}).$$

Прямыми вычислениями получаем, что другие однородные пространства с неразрешимой группой преобразований и разрешимым стабилизатором не допускают нормальную связность. $\square$

Автор выражает искренною благодарность своему учителю Комракову Борису Петровичу за постановку задачи и полезные замечания.

Summary

N.P. Mozhei. Normal Connections on Three-Dimensional Homogeneous Spaces with a Non-Solvable Transformation Group. II. A Solvable Stabilizer.

In this paper we present a complete local classification of three-dimensional homogeneous spaces admitting normal connection. We consider only the case of a non-solvable Lie group of transformations with a solvable stabilizer. The local classification of homogeneous spaces is equivalent to the description of effective pairs of Lie algebras. We describe all invariant affine connections on those homogeneous spaces together with their curvature and torsion tensors. We study the holonomy algebras of homogeneous spaces and find when the invariant connection is normal. We use an algebraic approach for describing the connections as well as methods of the theories of Lie groups, Lie algebras and homogeneous spaces.

Keywords: normal connection, homogeneous space, transformation group, holonomy algebra.

Литература

1. *Картан Э.* Риманова геометрия в ортогональном репере (По лекциям Э. Картана, читанным в Сорбонне в 1926–1927 гг.; пер., обр. и ред. С.П. Финикова). – М.: Моск. гос. ун-т, 1960. – 307 с.
2. *Nomizu K.* Uniqueness of the normal connections and congruence of isometric immersions // Tohoku Math. J. – 1976. – V. 28, No 1. – P. 613–617.
3. *Ким Сен Ен, Морозов В.В.* Об импримитивных группах трехмерного комплексного пространства // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1955. – Т. 115, кн. 14. – С. 69–85.
4. *Можей Н.П.* Нормальные связности на трехмерных однородных пространствах с неразрешимой группой преобразований. I. Неразрешимый стабилизатор // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2013. – Т. 155, кн. 4. – С. 61–76.
5. *Онищик А.Л.* Топология транзитивных групп преобразований. – М.: Физматлит, 1995. – 384 с.
6. *Komrakov B., Tchourioumov A., Mozhey N. et al.* Three-dimensional isotropically-faithful homogeneous spaces: Vol. 1–3 // Preprint series. Institute of Mathematics. University of Oslo. Pure mathematics. – Oslo: Inst., Univ, 1993. – No 35–37.
7. *Nomizu K.* Invariant affine connections on homogeneous spaces // Amer. J. Math. – 1954. – V. 76, No 1. – P. 33–65.

Поступила в редакцию
11.09.13

Можей Наталья Павловна – кандидат физико-математических наук, докторант, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *mozheynatalya@mail.ru*