

УДК 531.37

## К ЗАДАЧЕ О СВОБОДНЫХ УГЛОВЫХ ДВИЖЕНИЯХ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА, БЛИЗКОГО ПО ФОРМЕ К ШАРУ

*В.В. Новиков, Л.Н. Февральских*

### Аннотация

Изучены свободные угловые движения однородного упругого тела, близкого по форме к шару. На примере тела с малыми отклонениями формы от шаровой с эллипсоидальной и кубической симметриями продемонстрирован эффект глобального перемещения полюса (положения оси устойчивого стационарного вращения в теле).

**Ключевые слова:** устойчивость, стационарное вращение, упругие деформации, эллипсоид инерции, квазисферическая поверхность, кубическая симметрия.

При исследовании движений твердого тела обычно считают его абсолютно твердым, то есть не принимают во внимание деформации, возникающие при движении. Следующей после абсолютно твердого тела более сложной и богатой динамикой моделью реальных объектов является линейное вязкоупругое тело. Задача об угловых движениях деформируемого тела поддается анализу в случае, когда оно достаточно жестко: упругие колебания и движение тела как целого имеют различные временные масштабы, а внутренняя диссипация обеспечивает быстрое затухание колебаний [1–3]. Ее решение обнаруживает новые эффекты в динамике тела и представляет интерес для объяснения некоторых особенностей динамики Земли и искусственных спутников, повышения точности гироскопов с неконтактным подвесом (см., например, [4–6]).

Рассматривается однородное тело объема  $V$ , ограниченное поверхностью  $S$ , мало отличающейся от сферы. Разложим уравнение поверхности тела  $S$  в ряд по сферическим функциям  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  и ограничимся  $N$  членами разложения:

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left( 1 + \delta \sum_{l=2, |m| \leq l}^N \alpha_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \right), \quad \delta \ll 1, \quad \alpha_{lm} = (-1)^m \alpha_{lm}^*.$$

Без учета деформации тела его свободные угловые движения определяются тензором инерции, который в связанной системе координат  $Ox_1x_2x_3$  с началом в центре инерции, ориентированной по главным осям тела, имеет вид

$$I_{ij} = (I_0 + \Delta_i) \delta_{ij}, \quad \Delta_i \ll I_0,$$

где  $\Delta_i$  – малые добавки к шаровому тензору инерции  $I_0$ , определяемые второй гармоникой отклонения поверхности тела от сферы.

Подчеркнем, что при отсутствии в  $R(\theta, \varphi)$  составляющих с  $l = 2$  квазишар представляет собой в динамике шаровой волчок. Любое положение в нем оси устойчивого стационарного вращения остается неизменным со временем.

В дальнейшем предполагается, что вторая гармоника присутствует в разложении  $R(\theta, \varphi)$ . Для определенности считаем, что  $Ox_3$  – ось среднего по величине момента инерции:

$$\Delta_2 < \Delta_3 < \Delta_1.$$

Вращения вокруг осей  $Ox_1, Ox_2$  консервативно устойчивы, то есть им отвечают особые точки типа «центр». Вращение вокруг оси  $Ox_3$  неустойчиво. Ему отвечает седловая точка. Учет малую диссипацию энергии. Вращение вокруг оси  $Ox_2$  наименьшего момента инерции неустойчиво, вращение вокруг оси  $Ox_1$  наибольшего момента асимптотически устойчиво.

Учет даже малых упругих деформаций тела может качественно изменить его динамику.

Пусть в связанной с телом системе  $Ox_1x_2x_3$  смещение элемента объема характеризуется вектором  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . Для деформируемого тела выбор связанной системы  $Ox_1x_2x_3$  должен осуществляться в каждый момент времени в соответствии с условиями отсутствия в ней поступательных перемещений и поворотов тела как жесткого целого:

$$\int_V \mathbf{u} dV = 0, \quad \int_V [\mathbf{r}, \dot{\mathbf{u}}] dV = 0. \quad (1)$$

Уравнение движения элемента тела в связанной системе координат и условие отсутствия напряжений на его поверхности имеют вид:

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} = \rho \left( \ddot{\mathbf{u}} + [\dot{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{r} + \mathbf{u}] + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r} + \mathbf{u}]] + 2[\boldsymbol{\omega}, \dot{\mathbf{u}}] \right) \text{ в } V, \quad (2)$$

$$[\lambda u_{ii} \delta_{ij} + 2\mu u_{ij}] n_j = 0 \text{ на } S, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3)$$

где  $\mu, \lambda$  – постоянные Ламе,  $\rho$  – плотность тела,  $u_{ij}$  – тензор малых деформаций,

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

$\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i$  – нормаль к поверхности  $S$ .

При переходе к безразмерным переменным и параметрам в качестве масштабов времени, длины и массы примем  $t_*$  – характерное время движения тела как целого относительно центра инерции,  $R_0$  – характерный размер тела и его массу  $M$ . Введем новые обозначения

$$\kappa = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \varepsilon = \frac{\rho R_0^2}{\mu t_*^2}.$$

Будем предполагать деформации тела малыми, то есть что параметры, характеризующие его упругие свойства, – большие, но, в отличие от абсолютно твердого тела, конечные величины. Пусть справедливо неравенство  $\varepsilon \ll 1$ . Кроме того, считаем, что внутренняя диссипация энергии обеспечивает затухание собственных упругих колебаний тела за время, много меньшее периода его вращения.

Это позволяет в задаче (1)–(3) представить вектор перемещений в виде ряда по малым параметрам  $\varepsilon, \delta$  и ограничиться в нем первыми членами:

$$\mathbf{u} = \varepsilon [\mathbf{u}_0 + \delta \mathbf{u}_1].$$

Перемещение  $\mathbf{u}_0$  определяется из решения задачи о деформировании шара радиуса  $R_0$

$$\Delta \mathbf{u}_0 + (\kappa + 1) \text{grad div } \mathbf{u}_0 = [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]] \text{ в } V_0, \quad (4)$$

$$[\kappa u_{il}^0 \delta_{ij} + 2u_{ij}^0] n_j = 0 \text{ на } S_0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Вектор  $\mathbf{u}_1$  является решением квазистатической задачи [2]

$$\Delta \mathbf{u}_1 + (\kappa + 1) \text{grad div } \mathbf{u}_1 = [\dot{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]] \text{ в } V, \quad (6)$$

$$[\kappa u_{il}^1 \delta_{ij} + 2u_{ij}^1] n_j = 0 \text{ на } S, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Для нахождения перемещения  $\mathbf{u}$  воспользуемся аппаратом шаровых векторов [2, 7], представив  $\mathbf{u}$  в следующем виде:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \sum_{l,m,\nu} (\nu f_{lm}^0(r) + \delta \nu f_{lm}^1(r)) \mathbf{Y}_{lm}^\nu(\theta, \varphi),$$

где шаровые векторы  $\mathbf{Y}_{lm}^\nu$  определяются выражениями

$$\mathbf{Y}_{lm}^+(\theta, \varphi) = (l+1)Y_{lm}(\theta, \varphi)\mathbf{e}_r - r \text{grad } Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

$$\mathbf{Y}_{lm}^-(\theta, \varphi) = lY_{lm}(\theta, \varphi)\mathbf{e}_r + r \text{grad } Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

$$\mathbf{Y}_{lm}^0(\theta, \varphi) = [\mathbf{r}, \text{grad } Y_{lm}(\theta, \varphi)].$$

Решение задач (4)–(5), (6)–(7) приведено в [2]. Тензор инерции упругого квазишара в рассматриваемом приближении имеет вид

$$I_{ij} = \int_V [(x_k^2 + 2x_k u_k) \delta_{ij} - (x_i x_j + 2x_i u_j)] dV = I_{ij}^0 + \varepsilon(I'_{ij} + \delta I''_{ij}),$$

где тензор  $I_{ij}^0$  отвечает абсолютно твердому телу, тензоры  $I'_{ij}, I''_{ij}$  – поправки, обусловленные упругими свойствами и являющиеся, как следует из уравнений (4)–(5), (6)–(7), квадратичными функциями компонент угловой скорости. Тензор  $I''_{ij}$  зависит от параметров формы тела  $\alpha_{lm}$  с индексами  $l \leq 4$ . Более высокие гармоники сказываются на компонентах тензора инерции при учете членов более высокого порядка малости.

Угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}$  определяется в результате решения уравнения для кинетического момента  $\mathbf{K}$  [2], которое следует из (1)–(3), и имеет вид уравнения Эйлера

$$\dot{\mathbf{K}} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{K}] = 0, \quad (8)$$

где в рассматриваемом приближении  $K_i = [I_{ij}^0 + \varepsilon(I'_{ij} + \delta I''_{ij})] \omega_j$ .

Поведение упругого шара в свободном угловом движении не отличается от динамики абсолютно твердого. Поправки  $I'_{ij}$ , вычисляемые по деформациям шара, в уравнение (8) не входят. При вращении шар принимает форму эллипсоида вращения, но деформации никак не сказываются на его угловых движениях.

Иначе обстоит дело в случае, когда в отсутствие вращения поверхность тела несферична. Вторая гармоника сказывается на его движении как в приближении абсолютно твердого, так и деформируемого тела (соответственно  $I_{ij}^0, I''_{ij}$  в выражении для кинетического момента  $K_i$ ).

Покажем это на примере однородного упругого тела, уравнение поверхности которого имеет вид

$$R(\theta, \varphi) = 1 + \delta (\alpha_{40} Y_{40}(\theta, \varphi) + \alpha_{44} [Y_{44}(\theta, \varphi) + Y_{4,-4}(\theta, \varphi)]).$$

В отсутствие деформаций тензор инерции является шаровым:

$$I_{ij}^0 = I_0 \delta_{ij}, \quad I_0 = \frac{2}{5}.$$

Вычисленные по решению задачи (4)–(5) поправки к тензору инерции, отвечающие деформированию шара, имеют вид

$$I'_{ij} = \frac{2}{35} \left[ \left( -\frac{1}{3}(1 - \xi_1) + 4\xi_2 + 28\xi_3 \right) (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) \delta_{ij} + (1 - \xi_1) \omega_i \omega_j \right],$$

$$\xi_1 = \frac{3\kappa + 2}{2(19\kappa + 14)}, \quad \xi_2 = \frac{1}{15(\kappa + 2)}, \quad \xi_3 = \frac{1}{15(3\kappa + 2)}.$$

Четвертая гармоника формы вносит вклад в тензор инерции в виде поправок

$$I''_{11} = Q_2 [(3\alpha_{40} + \sqrt{70}\alpha_{44})\omega_1^2 + (\alpha_{40} - \sqrt{70}\alpha_{44})\omega_2^2 - 4\alpha_{40}\omega_3^2],$$

$$I''_{22} = Q_2 [(\alpha_{40} - \sqrt{70}\alpha_{44})\omega_1^2 + (3\alpha_{40} + \sqrt{70}\alpha_{44})\omega_2^2 - 4\alpha_{40}\omega_3^2],$$

$$I''_{33} = 4\alpha_{40}Q_2 [-\omega_1^2 - \omega_2^2 + 2\omega_3^2],$$

$$I''_{12} = 2Q_2(\alpha_{40} - \sqrt{70}\alpha_{44})\omega_1\omega_2,$$

$$I''_{13} = -8Q_2\alpha_{40}\omega_1\omega_3, \quad I''_{23} = -8Q_2\alpha_{40}\omega_2\omega_3,$$

где

$$Q_2 = \frac{(\kappa + 1)(35\kappa + 26)}{35\sqrt{\pi}(19\kappa + 14)^2}.$$

С учетом того, что  $I'_{ij}$ ,  $I''_{ij}$  являются квадратичными функциями компонент угловой скорости, составляющие вектора кинетического момента  $\mathbf{K}$  и энергии  $E$  определяются выражениями

$$K_p = I_{pq}^0 \omega_q + \varepsilon K_{pqlm} \omega_q \omega_l \omega_m,$$

$$E = \frac{1}{2} I_{pq}^0 \omega_p \omega_q + \frac{3}{4} \varepsilon K_{pqlm} \omega_p \omega_q \omega_l \omega_m,$$

$$K_{pqlm} \omega_p \omega_q \omega_l \omega_m = Q_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)^2 + \delta Q_2 [(3\alpha_{40} + \sqrt{70}\alpha_{44})(\omega_1^4 + \omega_2^4) + 8\alpha_{40}\omega_3^4 + 6(\alpha_{40} - \sqrt{70}\alpha_{44})\omega_1^2\omega_2^2 - 24\alpha_{40}(\omega_1^2 + \omega_2^2)\omega_3^2],$$

где

$$Q_1 = \frac{4}{35} \left[ \frac{1}{3}(1 - \xi_1) + 2\xi_2 + 14\xi_3 \right].$$

Годограф вектора кинетического момента может быть получен из пересечения центрально симметричной поверхности  $E = \text{const}$  с семейством поверхностей  $4/3E - \mathbf{K}^2/2I_0$  при различных  $\mathbf{K}^2$ , представляющим собой в данном случае концентрические сферы.

Вращению вокруг осей, проходящих через вершины «куба» и центры граней, на сфере  $\mathbf{K}^2 = \text{const}$  отвечают особые точки типа «центр». Вращение вокруг осей, направленных на середины ребер, неустойчиво. Ему отвечают седловые точки.

Пусть  $\alpha_{40} = -1$ ,  $\alpha_{44} = -\sqrt{5/14}$ . Уравнение поверхности тела имеет вид

$$R(\theta, \varphi) = 1 - \delta \frac{3}{16\sqrt{\pi}} (3 + 35 \cos^4 \theta + 30 \cos^2 \theta + 5 \sin^4 \theta \cos 4\varphi).$$

Поправка к выражению для энергии тела вычисляется по формуле

$$K_{pqlm} \omega_p \omega_q \omega_l \omega_m = Q_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)^2 + \delta Q_2 \left[ -(\omega_1^4 + \omega_2^4 + \omega_3^4) + 3(\omega_1^2 \omega_2^2 \omega_1^2 \omega_3^2 + \omega_2^2 \omega_3^2) \right].$$

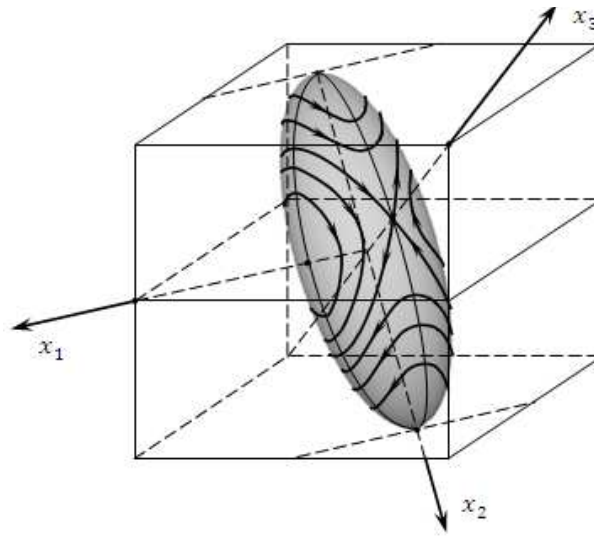


Рис. 1. Ориентация эллипсоида инерции недеформированного тела

Отсюда следует, что энергия при фиксированном кинетическом моменте имеет максимум при вращении тела вокруг осей, направленных на центры граней. Минимум энергии отвечает ориентации вектора  $\omega$  на вершины «куба».

Принимая во внимание диссипацию энергии (пусть даже очень малую), заключаем, что вращение вокруг осей, проходящих через противоположные вершины «куба», асимптотически устойчиво, а вращение относительно направления на центры противоположных граней «куба» неустойчиво (соответственно устойчивые и неустойчивые фокусы на поверхности  $\mathbf{K}^2 = \text{const}$ ).

Эффект глобального перемещения в теле оси устойчивого стационарного вращения продемонстрируем на примере тела, отклонение поверхности которого от сферы характеризуется эллипсоидальностью и указанными гармониками с  $l = 4$ . При этом предполагаем параметры  $\alpha_{2i}$  настолько меньшими, чем  $\alpha_{4i}$ , что при вращении тела основной вклад в его деформации связан с четвертой гармоникой формы.

При достаточно больших значениях угловой скорости динамику тела определяет «кубичность» формы, а при малых  $\omega$ , когда влияние деформаций несущественно, движение тела обуславливает его эллипсоидальность в недеформированном состоянии.

Ориентируем эллипсоид инерции недеформированного тела согласно рис. 1. Выберем систему главных осей  $Ox_1x_2x_3$  так, чтобы ось  $Ox_3$  проходила через главную диагональ «куба». В системе  $Ox_1x_2x_3$  тензор инерции недеформированного квазишара примет вид

$$I_{ij}^0 = (I_0 + \Delta_i)\delta_{ij}, \quad \Delta_i \ll I_0.$$

Будем считать, что  $Ox_3$  – ось среднего по величине момента инерции

$$\Delta_2 < \Delta_3 < \Delta_1.$$

Приведем тело в быстрое вращение вокруг оси  $Ox_3$  и будем рассматривать малые возмущения этого движения.

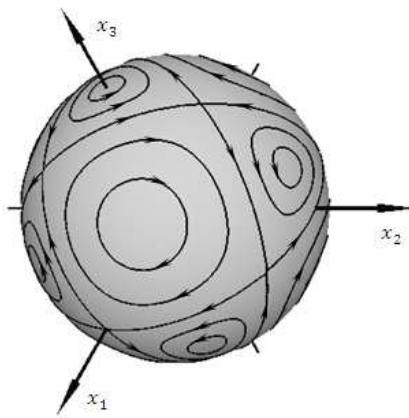


Рис. 2. Годограф  $\mathbf{K}$  на сфере  $\mathbf{K}^2 = \text{const}$  при  $\omega \gg \Omega_1$

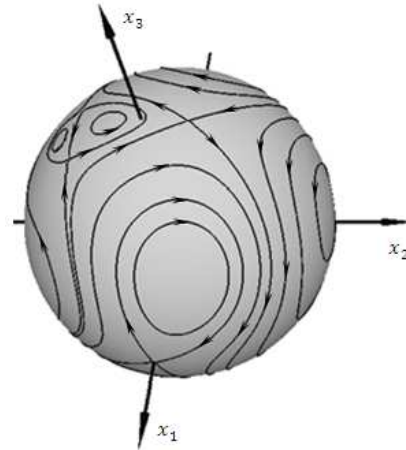


Рис. 3. Годограф  $\mathbf{K}$  на сфере  $\mathbf{K}^2 = \text{const}$  при  $\omega = \Omega_1 + \Delta\omega$ ,  $0 < \Delta\omega \ll 1$

Перемещение в теле оси устойчивого стационарного вращения будем описывать геометрически, изображая годограф вектора кинетического момента  $\mathbf{K}$  на сфере  $\mathbf{K}^2 = \text{const}$ .

При большой скорости вращения качество динамики тела определяется четвертой гармоникой формы (рис. 2). С уменьшением угловой скорости область притяжения устойчивого вращения уменьшается (рис. 3). Примыкающая к ней ячейка, ограничивающая неустойчивый фокус, смещается в сторону положения устойчивого вращения. Так же ведет себя седловая точка, изначально находившаяся на границе области притяжения. Положение устойчивого вращения вместе с седловой точкой со временем «поворачиваются» в плоскости  $Ox_2x_3$ , иллюстрируя тем самым перераспределение влияния на динамику тела «кубичности» и эллипсоидальности его формы. При некотором критическом значении угловой скорости  $\Omega_1$  примыкающая к области притяжения ячейка исчезает. Ее граница «схлопывается» в отрезок, являющийся частью траектории, окружающей ось наименьшего момента инерции  $Ox_2$ . Место области притяжения заполняют траектории, охватывающие  $Ox_2$  (рис. 4). При дальнейшем замедлении вращения седло будет двигаться к положению оси  $Ox_3$ . Уменьшение угловой скорости до некоторого значения  $\Omega_2$  приводит к исчезновению неустойчивых фокусов, заключенных в петлях сепаратрис седловой точки в положении оси наибольшего момента инерции  $Ox_1$ , и рождению в окрестности этой оси устойчивого фокуса. С этого момента эллипсоид инерции тела в недеформированном состоянии полностью определяет качество его динамики (рис. 5).

Пусть тело совершает угловые движения в малой окрестности оси  $Ox_3$ . Учтем малую внутреннюю диссипацию энергии и будем считать, что угловая скорость такова, что «кубичность» поверхности тела определяет его динамику. Со временем диссипация приводит к затуханию движений оси вращения в теле и переходу ее в устойчивое положение. При этом качество динамики тела не меняется.

Иначе обстоит дело, если имеется внешнее сопротивление движению. Под действием внешнего момента вращение тела замедляется, область притяжения устойчивого вращения уменьшается. При некотором критическом значении угловой скорости  $\Omega_1$  область притяжения исчезает, а ось вращения попадает в ячейку неустойчивого фокуса, отделенную сепаратрисами седловой точки, движущейся к положению оси  $Ox_3$ . При достаточной близости оси вращения к сепаратрисам

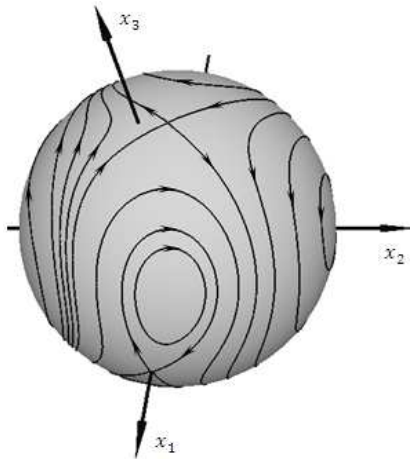


Рис. 4. Годограф  $K$  на сфере  $K^2 = \text{const}$  при  $\Omega_2 < \omega < \Omega_1$

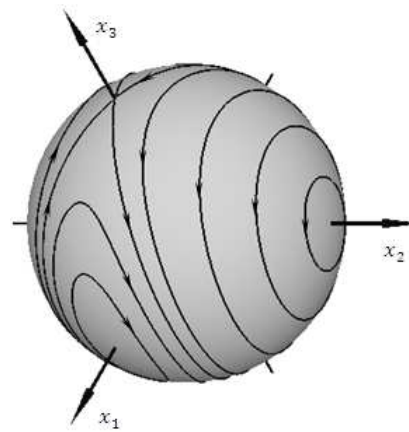


Рис. 5. Годограф  $K$  на сфере  $K^2 = \text{const}$  при  $\omega < \Omega_2$

седла даже малое возмущение способно перевести ось в новую область устойчивого вращения. После попадания в эту область до некоторого момента времени ось вращения приближается к петлям сепаратрис седловой точки в положении оси наибольшего момента инерции  $Ox_1$ . Уменьшение угловой скорости до значения  $\Omega_2$  приводит к появлению в этом положении нового устойчивого состояния стационарного вращения.

С энергетической точки зрения минимум кинетической энергии в рассматриваемой задаче сдвигается от  $Ox_3$  – исходного положения оси вращения – к оси  $Ox_1$  наибольшего момента инерции тела в недеформированном состоянии. В итоге положение оси устойчивого стационарного вращения в теле переместится от  $Ox_3$  к  $Ox_1$ . В инерциальном пространстве такое явление представляет собой поворот тела на угол  $\pi/2$ . Процесс смены положения в теле осей устойчивого стационарного вращения (смены положения полюса) имеет существенно меньший масштаб времени, чем уменьшение угловой скорости при вращении тела вблизи такого направления.

Полученные результаты можно рассматривать как один из возможных механизмов глобального перемещения полюсов Земли, наблюдавшегося в ее истории.

Авторы благодарны Г.Г. Денисову за постоянный интерес к работе и полезные замечания.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-00314).

### Summary

*V.V. Novikov, L.N. Fevral'skikh.* On the Problem of Free Angular Motions of a Deformable Solid Body with a Shape Similar to a Sphere.

In this paper we study free angular motions of a homogeneous elastic body with a shape similar to a sphere. We demonstrate the effect of global displacement of the pole (position of the stable steady rotation axis in the body) based on the example of a body with small deviations of its shape from a sphere and with ellipsoidal and cubic symmetry.

**Keywords:** stability, steady rotation, elastic deformations, inertia ellipsoid, quasi-spherical surface, cubic symmetry.

**Литература**

1. Черноусько Ф.Л. О движениях вязкоупругого твердого тела относительно центра масс // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1980. – № 1. – С. 22–26.
2. Денисов Г.Г., Новиков В.В. О свободных движениях деформируемого твердого тела, близкого к шару // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1983. – № 3. – С. 43–50.
3. Новиков В.В. Анизотропно-упругий шар в свободном движении // Прикл. матем. и механика. – 1987. – Т. 51, Вып. 5. – С. 767–774.
4. Денисов Г.Г., Новиков В.В. О свободном движении вязкоупругого квазишара // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1999. – № 1. – С. 26–32.
5. Урман Ю.М., Новиков В.В. Влияние упругости на динамику сверхпроводящего ротора, вращающегося в магнитном поле // Прикл. механика и техн. физика. – 2001. – Т. 42, № 3. – С. 162–167.
6. Акуленко А.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.Г., Рыжлова Л.В. Прогноз движения полюса деформируемой Земли // Астрон. журн. – 2002. – Т. 79, № 10. – С. 952–960.
7. Петрашень Г.И. Динамические задачи теории упругости в случае изотропной сферы // Учен. зап. Ленингр. гос. ун-та. Сер. матем. наук. Механика. – 1950. – Вып. 21. – С. 24–70.

Поступила в редакцию  
23.01.14

---

**Новиков Валерий Вячеславович** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

E-mail: [vvnovikov2007@yandex.ru](mailto:vvnovikov2007@yandex.ru)

**Февральских Любовь Николаевна** – магистрант кафедры теоретической механики, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

E-mail: [grigorieva\\_ln@mail.ru](mailto:grigorieva_ln@mail.ru)