МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»
Научно-образовательный математический центр
Приволжского федерального округа
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

# ЛОБАЧЕВСКИЙ И XXI ВЕК

## Материалы XII научно-образовательной студенческой конференции, посвященной Дню рождения Николая Ивановича Лобачевского

Казань, КФУ, 1 декабря 2025 года

Казань
2025

**УДК 51**
**ББК 22.1**
**Л68**

*Книга издана в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2025-1725/1*

**Составитель и ответственный редактор** –
доктор педагогических наук, профессор **Л.Р. Шакирова**

**Л68 Лобачевский и XXI век** [Электронный ресурс]: материалы XII научно-образовательной студенческой конференции, посвященной Дню рождения Н.И. Лобачевского (Казань, 1 декабря 2025 г.) / под ред. Л.Р. Шакировой. – Электронные текстовые данные (1 файл: 6,55 Мб). – 346 с. – Системные требования: Adobe Acrobat Reader. – URL: https://kpfu.ru/portal/docs/F_55397432/Sbornik_L21_2025.pdf

В сборнике представлены материалы XII Конкурса-конференции на лучшую студенческую работу «Лобачевский и XXI век», посвященного Дню рождения Н.И. Лобачевского. В сборник вошли конкурсные работы студентов в следующих номинациях: «Лучшая научно-исследовательская работа», «Лучшая поисково-исследовательская разработка», «Лучшая прикладная работа», «Лучшее эссе», «Лучшая методическая разработка». В представленных проектах отражены результаты самостоятельной научной, поисковой, исследовательской деятельности студентов математических и педагогических направлений вузов. Материалы сборника будут интересны и полезны студентам, школьникам и учителям. Печатается в авторской редакции.

**УДК 51**
**ББК 22.1**

Оглавление

## От составителя

Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского (далее – ИММ) Казанского федерального университета (далее – КФУ) совместно с Научно-образовательным математическим центром Приволжского федерального округа ежегодно проводит конкурс-конференцию на лучшую студенческую работу «Лобачевский и XXI век». В этом году конкурс проводится в двенадцатый раз.

Конкурс посвящается дню математика в России и дню рождения великого геометра Николая Ивановича Лобачевского. Общеизвестно, какую роль сыграл Н.И. Лобачевский в развитии мировой математики. Наша цель, чтобы молодые люди познакомились и осознали, какое значение имеет его наследие, его жизнь и деятельность для развития Казанского университета и математического образования в нашей стране в целом.

Одна из номинаций конкурса – «Лучшая поисково-исследовательская работа». Участники представляют результаты изучения педагогического наследия ученого, его отношение к проблемам обучения и воспитания, особенности его руководства учениками, а также деятельность ученых, внесших вклад в изучение наследия Лобачевского.

Выразить свое отношение к историческому наследию, «увидеть» глазами студента личность Н.И. Лобачевского и его влияние на современных студентов можно в номинации «Лучшее эссе».

Номинация «Лучшая научно-исследовательская работа» включает возможность представления оригинальных результатов исследований в любой области математики и методики обучения математике.

Будущие учителя математики и информатики разрабатывают сценарии уроков и внеклассных мероприятий с историческими экскурсами и представляют свои проекты в номинации «Лучшая методическая разработка».

Победители конкурса награждаются дипломами I, II и III степеней.

В сборнике представлены работы финалистов конкурса в авторской редакции.

Организаторы конкурса благодарят всех участников и надеются на дальнейшее сотрудничество!

Организатор и председатель экспертной комиссии конкурса – Шакирова Л.Р., д-р пед. наук, профессор, Заслуженный работник высшей школы РФ, зав. кафедрой теории и технологий преподавания математики и информатики Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского федерального университета

***Номинация «Лучшая научно-исследовательская работа в области математики»***

# МОДЕЛЬ КИТАЕВА С МАЛЫМ ЧИСЛОМ УЗЛОВ


Малышева М.А.

*Российская федерация, г. Ижевск*

*Удмуртский государственный университет, институт математики, информационных технологий и физики*

*Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Тинюкова Т.С.*



*Аннотация.* Рассматривается гамильтониан H, описывающий дискретную (решёточную) модель, соответствующую цепочке Китаева, содержащей два узла и присоединенную квантовую точку. Исследуются спектральные свойства несамосопряженного оператора H. Найдено условие существования собственных значений и соответствующие собственные функций этого оператора. Для нулевого собственного значения результаты исследования собственных функций представлены графически.



*Ключевые слова:* модель Китаева, собственные функции.


# KITAEV MODEL WITH SMALL NUMBER OF NODES


*Malysheva M.A.*

*Russia, Izhevsk*

*Udmurt State University*

*Scientific supervisor: Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher Tinyukova T.S.*



*Abstract.* A Hamiltonian H is considered, which describes a discrete (lattice) model corresponding to a Kitaev chain containing two sites and an attached quantum dot. The spectral properties of the non-self-adjoint operator H are

investigated. The condition for the existence of eigenvalues and the corresponding eigenfunctions of this operator has been found. For the zero eigenvalue, the results of the eigenfunction analysis are presented graphically.

*Keywords*: Kitaev model, eigenfunctions.

Научная проблема. В последние два десятилетия в физической литературе активно изучаются дискретные (решёточные) модели. Одна из самых распространенных и востребованных – цепочка Китаева [1,2]. Данная модель описывает сверхпроводник (ток в нем не испытывает сопротивления) и весьма перспективна для создания кубитов и квантовых вычислений [3]. Известные научные работы посвящены в основном бесконечной, полубесконечной или конечной, но достаточно длинной, цепочке и принадлежат исследователям-физикам. Математических научных работ, посвященных данной тематике, почти нет. В прошлом 2024 впервые экспериментально были получены установки, соответствующие минимальной цепочке Китаева [4]. Созданные вживую цепочки содержат всего 2 или 3 узла и присоединенную квантовую точку (QD). Появление такой модели породило новую волну интереса к цепочке Китаева, но уже минимальных размеров.

Подавляющее количество известных работ посвящены численному изучению данных моделей, а точность полученных результатов и их интерпретация зависят от многих факторов. Создание и исследование математических моделей, используя строго аналитический подход, позволяет изучить вопросы, связанные с существованием интересующих физиков локализованных состояний и их энергий, а также их устойчивости. Так как математики мало занимаются данной тематикой, аналитические результаты в данной области особенно ценны и актуальны.

Объект исследования – модель Китаева.

Предмет исследования – спектральные свойства гамильтониана Китаева, соответствующего цепочке, состоящей из двух узлов и присоединенной квантовой точки.

Бесконечная модель Китаева описывается с помощью гамильтониана

$$(H_k\Psi)(n) = \begin{pmatrix} -t(\psi_1(n+1)+\psi_1(n-1)) + \Delta(\psi_2(n+1)-\psi_2(n-1)) - \mu\psi_1(n) \\ t(\psi_2(n+1)+\psi_2(n-1)) - \Delta(\psi_1(n+1)-\psi_1(n-1)) + \mu\psi_2(n) \end{pmatrix}$$

,

где $\Psi(n) = (\psi_1(n), \psi_2(n))^T$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ – номер узла в рассматриваемой бесконечной цепочке, $\psi_1 \in l^2(\mathbb{Z})$ описывает электрон, а $\psi_2 \in l^2(\mathbb{Z})$ описывает дырку (отсутствие электрона), $t \in \mathbb{R}$ – амплитуда перехода на соседний узел, $\Delta \in \mathbb{R}$ – параметр сверхпроводящего спаривания, $\mu \in \mathbb{R}$ – химический потенциал (см. Рис.1).

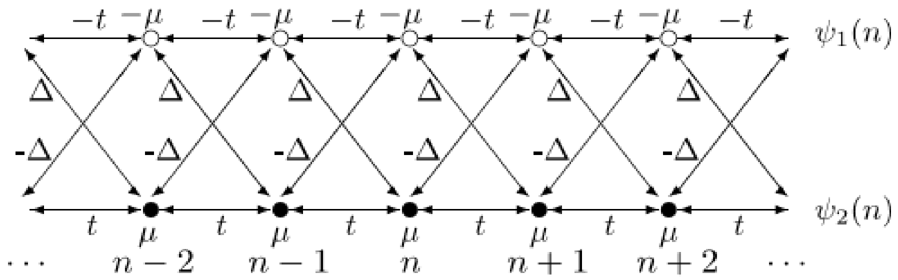



Рисунок 1. Модель Китаева для бесконечной цепочки

Интересующая нас модель с малым числом узлов описывается гамильтонианом

$$H\Psi = A\Psi,$$

где $\Psi = (\psi_{11}, \psi_{21}, \psi_{12}, \psi_{22}, \psi_{13}, \psi_{23})^T$, $A$ – матрица, имеющая вид

$$\begin{pmatrix} -\mu & 0 & -t & \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -\Delta & t & 0 & 0 \\ -t & -\Delta & -\mu & 0 & -t_r & 0 \\ \Delta & t & 0 & \mu & 0 & t_r \\ 0 & 0 & -t_r & 0 & -\nu_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_r & 0 & \nu_r \end{pmatrix},$$

здесь $\psi_{11}, \psi_{12}, \psi_{13}$ описывают электрон, а $\psi_{21}, \psi_{22}, \psi_{23}$ – дырку, при этом узлы $\psi_{13}$ и $\psi_{23}$ относятся к присоединенной справа QD, $t_r \in \mathbb{R}$ –амплитуда перехода от QD к сверхпроводящему участку, которому отвечают узлы $\psi_{11}$, $\psi_{12}$, $\psi_{21}$ и $\psi_{22}$, $\nu_r \in \mathbb{R}$ – энергия QD. Считаем, что все параметры системы не равны нулю.

Для поиска собственных значений и собственных функций гамильтониана $H$ решим уравнение

$$(A - E)\Psi = 0. \tag{1}$$

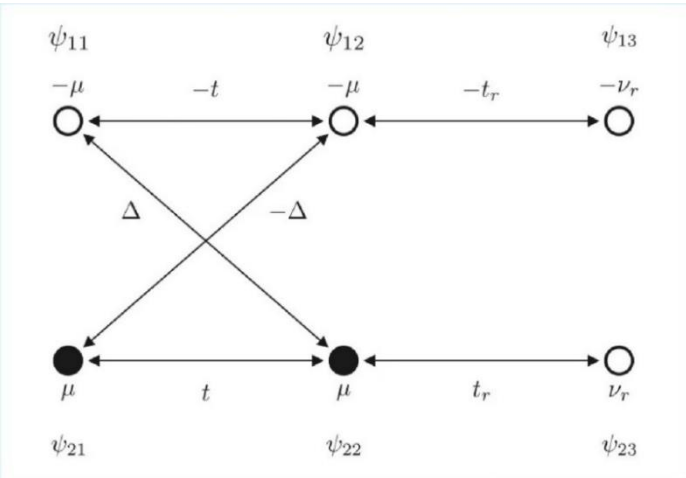



Рисунок 2. Модель Китаева с двумя узлами и одной квантовой точкой

Обозначим $K(E) = \dfrac{t^2}{\mu + E} - \dfrac{\Delta^2}{\mu - E} - \mu + \dfrac{t_r^2}{\nu_r + E}.$

Теорема 1. Пусть $E \neq \pm\mu, E \neq \pm\nu_r$. Необходимое и достаточное условие существования собственного значения гамильтониана H имеет вид

$$(K(E)-E)\,(K(-E)+E)+\frac{4t^2\Delta^2E^2}{\left(\mu^2-E^2\right)^2}=0 \qquad (2)$$

Собственным значениям $E\neq 0$, удовлетворяющим (2), соответствует собственная функция $\Psi$, обладающая компонентами:

$$\psi_{11}=-\frac{t}{\mu+E}-\frac{(K(E)-E)\,(\mu-E)}{2tE},\ \psi_{12}=1,\ \psi_{13}=-\frac{t_r}{\nu_r+E}, \qquad (3)$$

$$\psi_{21}=\frac{\Delta}{\mu-E}+\frac{(K(E)-E)(\mu+E)}{2\Delta E},\ \psi_{22}=-\frac{(K(E)-E)\left(\mu^2-E^2\right)}{2t\Delta E},\ \psi_{23}=\frac{(K(E)-E)\,t_r\left(\mu^2-E^2\right)}{2t\Delta E(\nu_r-E)},$$

а значению $E=0$ соответствуют две собственные функции:

$$\Psi_1=\left(\frac{t}{\mu},\frac{\Delta}{\mu},1,0,-\frac{t_r}{\nu_r},0\right),\ \Psi_2=\left(-\frac{\Delta}{\mu},-\frac{\mathrm{t}}{\mu},0,1,0,-\frac{t_r}{\nu_r}\right).$$

Доказательство. Из 1, 2, 5, 6 строк (1) выразим величины

$$\psi_{11}=-\frac{t\psi_{12}-\Delta\psi_{22}}{\mu+E},\quad \psi_{21}=-\frac{\Delta\psi_{12}-\mathrm{t}\psi_{22}}{\mu-E},$$

$$\psi_{13}=-\frac{t_r}{\nu_r+E}\psi_{12},\quad \psi_{23}=-\frac{t_r}{\nu_r-E}\psi_{22}. \qquad (4)$$

Подставим выражения для $\psi_{11},\psi_{21},\psi_{13},\psi_{23}$ в строки 3 и 4 уравнения (1), получим систему

$$\begin{cases}(K(E)-E)\,\psi_{12}+\dfrac{2t\Delta\mathrm{E}}{\mu^2-E^2}\psi_{22}=0,\\ \dfrac{2t\Delta\mathrm{E}}{\mu^2-E^2}\psi_{12}-(K(-E)+E)\,\psi_{22}=0.\end{cases} \qquad (5)$$

Выпишем условие существования ненулевого решения системы (5), т.е. равенство нулю определителя,

$$(K(E)-E)\,(K(-E)+E)+\frac{4t^2\Delta^2E^2}{\left(\mu^2-E^2\right)^2}=0.$$

Из первого уравнения системы (5), предполагая $E\neq 0$, имеем

$$\psi_{22}=-(K(E)-E)\,\frac{\mu^2-E^2}{2t\Delta E}\psi_{12}.$$

Подставим выражение для $\psi_{22}$ в равенство (4). Полагая $\psi_{12} = 1$, из (4) получим (3).

Если $E = 0$, то (5) примет вид $\begin{cases} K(0)\,\psi_{12} = 0, \\ K(0)\,\psi_{22} = 0. \end{cases}$

Тогда $K(0) = 0$ или $\psi_{12} = \psi_{22} = 0$. Если $\psi_{12} = \psi_{22} = 0$, то (1) имеет только нулевое решение. Условие $K(0) = 0$ означает $\frac{t^2 - \Delta^2}{\mu} - \mu + \frac{t_r^2}{\nu_r} = 0$, тогда $\psi_{12}$ и $\psi_{22}$ могут принимать произвольные значения.

Если $\psi_{12} = 1,\ \psi_{22} = 0$, то, используя (4), получим $\Psi_1 = \left(\frac{t}{\mu}, \frac{\Delta}{\mu}, 1, 0, -\frac{t_r}{\nu_r}, 0\right)$.

Если $\psi_{12} = 0,\ \psi_{22} = 1$, имеем $\Psi_2 = \left(-\frac{\Delta}{\mu}, -\frac{t}{\mu}, 0, 1, 0, -\frac{t_r}{\nu_r}\right)$.

Теорема доказана.

Результаты для случаев $E = \pm\,\mu,\ E = \pm\,\nu_r$ для краткости приведем в таблице.

Таблица 1. Частные случаи

| Условие существования собственных значений | Собственная функция |
|---|---|
| $E = \mu$ | |
| $t\left(\frac{t^2 - \Delta^2}{2E} - 2E + \frac{t_r^2}{\nu_r + E}\right) + \frac{\Delta^2}{t}\left(\frac{\Delta^2 - t^2}{2E} -\right.$ | $\left(\frac{\Delta^2 - t^2}{2tE}, \frac{\Delta}{t^2}\left(\frac{t^2 - \Delta^2}{2E} + \frac{t_r^2}{\nu_r - E}\right), 1, \frac{\Delta}{t}, -\frac{t_r}{\nu_r + E}, -\right.$ |
| $E = -\,\mu$ | |
| $t\left(\frac{\Delta^2 - t^2}{2E} + 2E + \frac{t_r^2}{\nu_r - E}\right) - \frac{\Delta^2}{t}\left(\frac{\Delta^2 - t^2}{2E} -\right.$ | $\left(\frac{\Delta}{t^2}\left(\frac{\Delta^2 - t^2}{2E} - \frac{t_r^2}{\nu_r + E}\right), \frac{t^2 - \Delta^2}{2tE}, \frac{\Delta}{t}, 1, -\frac{t_r\Delta}{(\nu + E)}\right.$ |
| $E = \nu_r$ | |

| | |
|---|---|
| $\left(\frac{t^2(\mu-E)-\Delta^2(\mu+E)}{\mu^2-E^2}-\mu-E+\frac{t_r^2}{2E}\right)t_r$ | $\left(-\frac{t}{\mu+E},\frac{\Delta}{\mu-E},1,0,-\frac{t_r}{2E},\frac{2t\Delta E}{\left(\mu^2-E^2\right)t_r}\right)^T$ |
| $E=-\nu_r$ | |
| $\left(\frac{\Delta^2(\mu-E)-t^2(\mu+E)}{\mu^2-E^2}-\mu-E+\frac{t_r^2}{2E}\right)t_r$ | $\left(\frac{\Delta}{\mu+E},-\frac{t}{\mu-E},0,1,\frac{2t\Delta E}{\left(\mu^2-E^2\right)t_r},\frac{t_r}{2E}\right)^T$ |

В физических работах особое внимание уделяется нулевому собственному значению $E=0$, поскольку этот случай соответствует нулевой энергии частицы. В связи с этим рассмотрим $E=0$.

Используя теорему, выпишем условие существования нулевого собственного значения:

$$\frac{t^2-\Delta^2}{\mu}-\mu+\frac{t_r^2}{\nu_r}=0$$

Собственная функция, удовлетворяющая $E=0$, имеет вид

$$\left(\frac{t\psi_{12}-\Delta\psi_{22}}{\mu},\frac{\Delta\psi_{12}-t\psi_{22}}{\mu},\psi_{12},\psi_{22},-\frac{t_r}{\nu_r}\psi_{12},-\frac{t_r}{\nu_r}\psi_{22}\right)^T,$$

здесь $\psi_{12}$и $\psi_{22}$принимают произвольные значения.

Пусть $\psi_{12}=1,\ \psi_{22}=0$, тогда $\Psi_1=\left(\frac{t}{\mu},\frac{\Delta}{\mu},1,0,-\frac{t_r}{\nu_r},0\right).$

Пусть $\psi_{12}=0,\ \psi_{22}=1$, тогда $\Psi_2=\left(-\frac{\Delta}{\mu},-\frac{t}{\mu},0,1,0,-\frac{t_r}{\nu_r}\right).$

Функции $\Psi_1$ и $\Psi_2$линейно независимы, т.к. равенство $\alpha\Psi_1+\beta\Psi_2=0$ справедливо лишь для $\alpha=\beta=0$. Это следует из наличия нулей в составе $\Psi_1$и $\Psi_2$на разных местах.

Рассмотрим только электронные составляющие полученных волновых функций (физически интересны результаты лишь для электронов):

$$\Psi_1^e = (\psi_{11}, \psi_{12}, \psi_{13})^T = \left(\frac{t}{\mu}, 1, -\frac{t_r}{\nu_r}\right)^T,$$

$$\Psi_2^e = (\psi_{11}, \psi_{12}, \psi_{13})^T = \left(-\frac{\Delta}{\mu}, 0, 0\right)^T.$$

В эксперименте параметры относящиеся к свойствам сверхпроводящих материалов $(t,\ \Delta,\ \mu)$ сложно изменить и регулируют в основном энергию QD $(\nu_r)$.

Пусть $t = \Delta = \mu = 1$, тогда $\nu_r = t_r^2$.

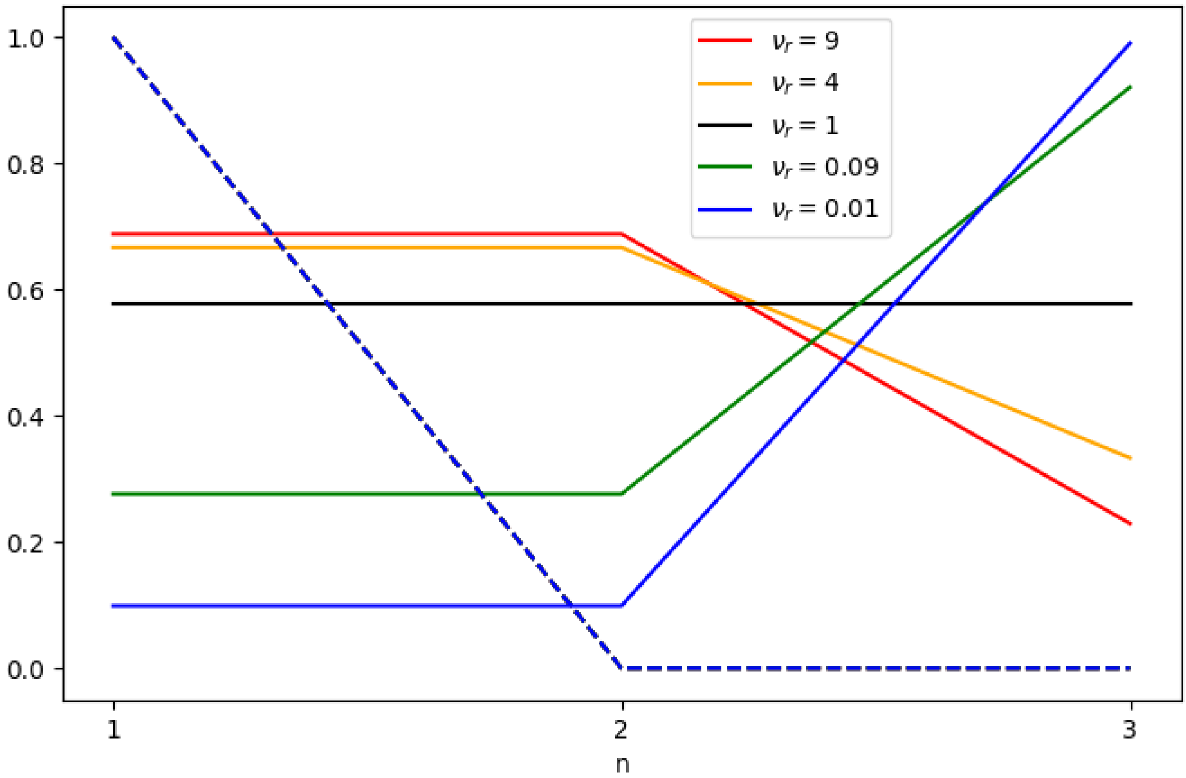



Рисунок 3. Графики функций $\frac{|\Psi_1^e|}{\|\Psi_1^e\|}$ (сплошная линия) и $\frac{|\Psi_2^e|}{\|\Psi_2^e\|}$ (пунктирная линия) для параметров $t = \Delta = \mu = 1$

Заметим, что электрон, описываемый $\Psi_2^e$ стабильно находится в крайнем левом узле цепочки. А локализация второго электрона (см. $\Psi_1^e$

) зависит от значения параметра $v_r$ (энергии QD). При уменьшении $v_r$ локализация на крайнем правом узле возрастает. Таким образом, в этом случае электроны находятся на противоположных краях.

Все результаты, полученные в данной работе, новые и могут быть полезны и интересны физикам. Полученные аналитическим путем математические результаты позволяют вычислять значения собственных функций с любой точностью, что с большой степенью достоверности говорит не только о наличие или отсутствие частицы в определенной части системы, но и позволяет знать ее энергию (собственное значение), а также влиять на ее поведение с помощью «настройки» параметров системы. Кроме того, отметим, что, даже отвлекаясь от физической подоплеки и происхождения задачи, данная работа, посвященная изучению спектральных свойств несамосопряженного оператора, содержит интересные математические результаты.

Список литературы


1. Elliott S. R., Franz M. Colloquium: Majorana fermions in nuclear, particle, and solid-state physics //Reviews of Modern Physics. – 2015. – Т. 87. – №. 1. – С. 137-163.
2. Alicea J. New directions in the pursuit of Majorana fermions in solid state systems //Reports on progress in physics. – 2012. – Т. 75. – №. 7. – С. 076501.
3. Sato M., Fujimoto S. Majorana fermions and topology in superconductors //Journal of the Physical Society of Japan. – 2016. – Т. 85. – №. 7. – С. 072001.
4. Dvir T. et al. Realization of a minimal Kitaev chain in coupled quantum dots //Nature. – 2023. – Т. 614. – №. 7948. – С. 445-450.


## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОТОУПРУГОСТИ


*Сизов М.Н.*

*Россия, г. Москва*

*Государственный университет просвещения,*

*физико-математический факультет*

*Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Васильчикова Е.Н.*

*Аннотация.* Работа посвящена визуализации и моделированию напряжений, возникающих в результате воздействия механической нагрузки, приводящей к оптической анизотропии образцов заданных геометрических размеров. Результаты математического моделирования изохроматических полос при различных нагрузках находятся в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными.

*Ключевые слова:* математическое моделирование, фотоупругость.

**MATHEMATICAL MODELING OF PHOTOELASTICITY**

*Sizov M.N.*

*Russia, Moscow*

*State University of Education, Faculty of Physics and Mathematics*

*Scientific supervisor: PhD, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Fundamental Physics and Nanotechnology Vasilchikova E.N.*

*Abstract.* The work is devoted to visualization and modeling of stresses resulting from the action of a mechanical load, leading to optical anisotropy of samples of specified geometric dimensions. The results of mathematical modeling of isochromatic bands under various loads are in satisfactory agreement with experimental data.

*Keywords*: mathematical modeling, photoelasticity.

ВВЕДЕНИЕ

Фотоупругость – пьезооптический эффект, суть которого заключена в том, что изначально изотропные прозрачные материалы под действием внешних механических воздействий приобретают свойства, присущие двулучепреломляющим оптически анизотропным кристаллам. Однако в отличие от кристаллов, такие материалы при прекращении механического воздействия вновь возвращаются в оптически изотропное состояние. Другими словами, фотоупругость является следствием зависимости диэлектрической проницаемости вещества от деформации.

Явление фотоупругости, применяемое на практике при исследовании напряжений, часто называют поляризационно-оптическим методом. На протяжении долгого времени этот метод был и остается важным инструментом в инженерной практике и научных исследованиях благодаря своей наглядности, точности и превосходством над другими методами по надёжности, охвату и практичности. Его актуальность сохраняется в связи с развитием новых материалов, цифровизацией технологий и методов анализа и обработки результатов, а также необходимостью решения сложных задач как в механике и проектировании, так и в горном деле, металлургии, медицине.

**Целью работы** является создание простых с методической точки зрения математических моделей, связывающих оптические явления с механическими напряжениями в упругих средах.

**Объект исследования:** поляризационно-оптический метод исследования искусственной оптической анизотропии.

**Предмет исследования:** цифровое моделирование метода фотоупругости.

## ИСТОРИЧЕСКАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ РАБОТЫ

### 1. История метода фотоупругости

История развития поляризационно-оптического метода – это великолепный пример того, как фундаментальное физическое открытие постепенно превратилось в мощный инженерный инструмент.

Первооткрывателем явления фотоупругости считается шотландский физик Дэвид Брюстер. В 1813–1816 годах он опытным путем установил, что прозрачные изотропные материалы (экспериментировал он со стеклом и желатином), находящиеся под механической нагрузкой, становятся двулучепреломляющими, т. е. оптически анизотропными.

Брюстер заметил, что если поместить такой нагруженный объект между двумя поляризаторами, то в проходящем свете возникают цветные интерференционные полосы. Он эмпирически связал эти полосы с приложенной нагрузкой, однако он не смог дать полного математического объяснения

Позже этим явлением заинтересовался Уильям Николь, заметивший разноцветные цвета неотпущенного стекла, помещенного в полярископ. Своими наблюдениями Николь поделился с юным студентом Кембриджского университета – Джеймсом Максвеллом, что стало импульсом к его изучению законов поляризованного света. В 1850 году была опубликована первая серьезная работа Максвелла «On the Equilibrium of Elastic Solids». Ему удалось напрямую установить связь между оптическими явлениями и распределениями напряжений внутри материала.

Однако фотоупругость долгие годы существовала только в рамках лабораторного эксперимента. Лишь в конце первой четверти двадцатого века учеными из Лондонского университета Э. Кокером и Л. Филоном удалось превратить фотоупругость в полноценный инструмент для инженеров-конструкторов, как жизнеспособный метод качественного анализа напряжений. Их классическая книга «Фотоупругость» стала настольной книгой для многих исследователей в этой области. Они систематизировали теорию, усовершенствовали экспериментальную технику и стандартизировали методы количественного анализа.

## 2. Вклад Николая Ивановича Лобачевского в развитие метода фотоупругости

Николай Иванович Лобачевский был современником и Брюстера, и Максвелла, но сама методология фотоупругости как инженерный инструмент была разработана и стала широко применяться значительно позже, уже в конце XIX и особенно в XX веке. Следовательно, даже хронологически эта область не была в фокусе его научной деятельности. Конечно, прямого и непосредственного применения работ Николая Ивановича Лобачевского к методу фотоупругости нет. Однако его глобальный вклад в математику и науку в целом создал интеллектуальный фундамент, который, в конечном счете, способствовал развитию таких прикладных методов, как фотоупругость.

Главное достижение Лобачевского — создание неевклидовой геометрии — была революцией не в вычислениях, а в мышлении. Он показал, что возможны непротиворечивые и логичные геометрические системы, отличные от на тот момент известной. Это стало стимулом к развитию тензорного исчисления и дифференциальной геометрии. Поэтому, если рассматривать вопрос в философском и историко-научном ключе, то именно его идеи проложили путь для развития сложного математического аппарата, который является необходимым фундаментом для точного описания упругих деформаций, визуализируемых с помощью фотоупругости.

# II. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПОЛЯРИЗАЦИОННО-ОПТИЧЕСКОГО МЕТОДА

## 2. Закон фотоупругости

Зависимость между наведенным двойным лучепреломлением и напряжениями, которыми оно вызвано, основывается на экспериментальных данных, полученных в течение долгого периода времени большим числом физиков. Если падающий на образец свет перпендикулярен к оптической оси образца, находящегося в плоском напряженном состоянии в пределах упругости, то, как показывает теория, разность показателей преломления обыкновенной и необыкновенной волн пропорциональна разности главных напряжений (6). В этом и заключается суть закона фотоупругости.

$$n_o - n_e = C \cdot (\sigma_1 - \sigma_2), \qquad (1)$$

где $C$– коэффициент пропорциональности, характеризующий упругие свойства вещества, названный константой фотоупругости.

2. Семейства полос, получаемые с помощью метода фотоупругости

Темные и светлые полосы, получаемые при нагружении образца в поле полярископа, являются геометрическим местом точек равных разностей фаз, вызванных двойным лучепреломлением и, следовательно, точек с постоянной величиной разности главных напряжений и имеющих одну и ту же величину наибольшего касательного напряжения.

Говоря о изохроматических полосах, перепишем закон фотоупругости (1) в следующем виде:

$$m\lambda = Cd(\sigma_1 - \sigma_2), \qquad (2)$$

где $d$– толщина исследуемого образца, $m$– порядок полосы.

Преобразуем (2) и введем следующие обозначения:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{m\lambda}{2Cd};\# (3)$$

$$\tau_{max} = m\tau_0^{(d)}, \qquad (4)$$

где $\tau_0^{(d)}$ – цена полосы модели – постоянная, зависящая от материала, толщины модели и длины волны света, применяемого в установке.

Важность определения порядка изохроматической полосы в фотоупругом методе обусловлена тем, что наибольшее касательное напряжение прямо пропорционально этой величине (4). Удобным и верным методом определения порядка служит внимательное наблюдение за образованием картины полос при постепенном нагружении модели в поле полярископа и их подсчёт, начиная от нулевой, в сторону источника полос.

При рассматривании диска, сжатого диаметрально противоположными силами, источник полос находится в точках приложения сил, а вот полоса нулевого порядка совпадает с контуром диска. Цену же полосы определяют путем испытания моделей, для которых, согласно теории упругости, уже имеются теоретические решения. Для диска решение дается в следующем виде [4]:

$$\tau_0^{(d)} = \frac{4F}{\pi Dmd}.\#(5)$$

Данный способ является более точным и по причине того, что при неоднократном использовании моделей в них возникает изменение оптической разности хода вследствие старения материала, в особенности проявляющееся у поверхности модели, которое получило название краевого эффекта [6]. Порядок полос в центре диска практически не зависит от данного эффекта.

Биполярное уравнение изохром для диска, сжатого по диаметру двумя сосредоточенными силами, получается на основе простого выражения:

$\sigma_1 - \sigma_2 = \zeta$ ,

где $\zeta$– постоянная, параметр полосы. Разность главных напряжений находится по соответствующим формулам:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2},$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2},$$

куда подставляются элементарные напряженные состояния в круглых дисках. Окончательно, осуществив математические преобразования с необходимыми заменами и подстановками, получим биполярное уравнение:

$$\frac{\pi^2 d^2 \zeta^2}{4P^2} = \left(\frac{cos\Theta_1}{r_1} + \frac{cos\Theta_2}{r_2}\right)^2 - 4\frac{cos\Theta_1}{r_1}\frac{cos\Theta_2}{r_2}\sin^2(\Theta_1 + \Theta_2),$$

что не удобно при выполнении вычислений, так как для каждой точки необходимо знать все четыре координаты $r_1, \Theta_1, r_2, \Theta_2$. Вычисления значительно упрощаются, при переходе к классическим прямоугольным координатам $(x,y)$.

Для преобразования координат пользуются следующими зависимостями:

$$\sin(\Theta_1 + \Theta_2) = \frac{2xR}{r_1 r_2};$$

$$r_1 = \sqrt{x^2 + (R - y)^2},\ r_2 = \sqrt{x^2 + (R + y)^2}$$

Выполним подстановку и необходимые математические преобразования. Для удобства на этом этапе вводятся порядок полосы $m$ и цена полосы $\tau_0^{(d)}$ (4). Окончательно получаем выражение (11):

$$\frac{K}{m} = \frac{\left(R^2 + x^2 + y^2\right)^2 - 4R^2y^2}{R^2 - x^2 - y^2} \qquad (6)$$

Выражение (6) дает в явном виде зависимость между координатами $x$ и $y$ и значением $m$ любой полосы,

где $K = \frac{2FR}{\pi d \tau_0^{(d)}}$.# (7)

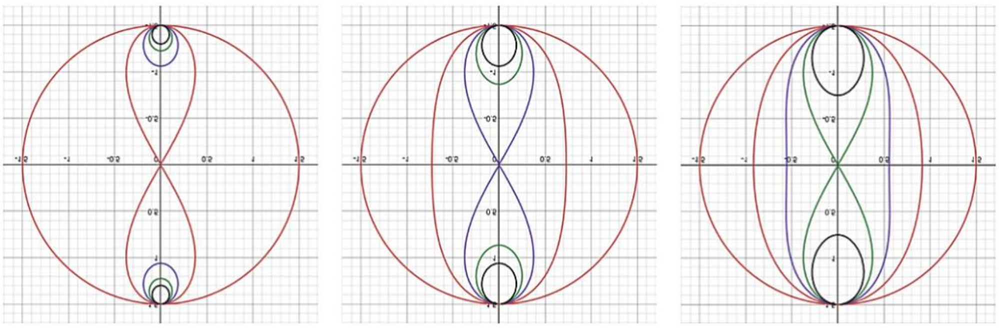
Здесь $K$ – переменная, зависящая от геометрических размеров образца ( $R$ радиуса и $d$ толщины), материала ( $\tau_0^{(d)}$ ) и приложенной силы ( $F$ ) [5].

## III. МОДЕЛИРОВАНИЕ

Построение и анализ графиков функций способствуют более детальному пониманию физических концепций, выявлению закономерностей, проверке гипотезы и прогнозированию значений переменных, рассматриваемых в задаче [1]. Моделирование изохроматических полос объединяет эксперимент и теорию, являясь ключевым моментом в инженерных и научных исследованиях, поскольку впоследствии позволяет визуализировать и анализировать распределение напряжений внутри исследуемых образцов без реального на них воздействия и разрушающего контроля.

Существует множество программ, позволяющих проводить моделирование разной степени сложности. С методической точки зрения, с целью упрощения задачи написания программного кода, нами был выбран графический онлайн калькулятор *Desmos*, не требующий специального программного обеспечения.

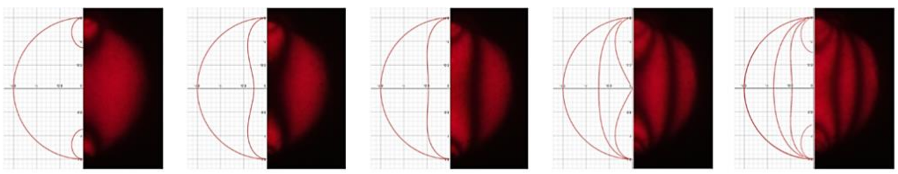
Зная необходимые константы, определенные в ходе эксперимента, методика которого отражена в статьях [2,3], и проверив единицы измерения всех величин, для каждого порядка полосы (указан в индексе) в соответствии с формулой (6), можно получить истинные значения нагрузок.



$F_1$ = 93,5 Н $F_2$ = 187 Н $F_3$ = 280,5 Н

Рисунок 1. Моделирование зависимости порядка полосы от величины нагрузки для рассматриваемой центральной точки

На рисунке 2 представлено сравнение теоретического моделирования с реальным экспериментом, проводимым на базе кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения.



$F$ = 62 Н $F$ = 103,9 Н $F$ = 124,6 Н $F$ = 187 Н $F$ = 249 Н

Рисунок 2. Моделирование изохроматических полос, с указанием теоретических нагрузок [2]

В более сложном варианте моделирование можно провести в любой другой программе. В качестве примера на рисунке 3 представлен авторский код построения изохроматических полос для исследуемого образца, созданный в программе Python.

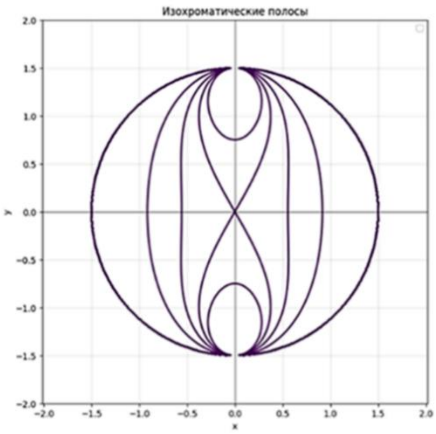
```
# Параметры задачи
R = 1.5  # Радиус диска
K =   # константа
m_values = [1, 2, 3, 4,]  # значения m для построения

# Создаём сетку координат
x = np.linspace(-2, 2, 700)
y = np.linspace(-2, 2, 700)
X, Y = np.meshgrid(x, y)

# Подготовка графика
plt.figure(figsize=(8, 8))

# Вычисляем и рисуем для каждого m
for m in m_values:
    # Вычисляем уравнение
    Z = ((R**2 + X**2 + Y**2)**2 - 4*R**2*Y**2) / (R**2 - X**2 - Y**2) - K/m
    # Маска для исключения точек вне области определения
    mask = (R**2 - X**2 - Y**2) == 0
    Z[mask] = np.nan
    # Рисуем только нулевую линию
    plt.contour(X, Y, Z, levels=[0], linewidths=2, label=f'm={m}')

# Настройки графика
plt.title('Изохроматические полосы')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.5)
plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.5)
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.legend()
plt.axis('equal')  # одинаковый масштаб по осям
plt.show()
```




$K = 6{,}75$

Рисунок 3. Пример и результат авторского кода в программе Python

К преимуществам графического онлайн калькулятора *Desmos* можно отнести и возможность создания картин в динамике. Примечательно, что по количеству и конфигурации полос можно определить не только распределение напряжений внутри образца, но и проводить обратную задачу – определять величину приложенный силы. В таком случае исследуемый диск можно по праву назвать оптическим динамометром.

## Заключение

В работе показана методика математической модели, устанавливающей количественную связь между оптическими явлениями и механическими напряжениями в упругих средах. Проведенная верификация модели путём сравнения результатов численного моделирования с данными натурного эксперимента, демонстрирует хорошее качественное и количественное соответствие.

Список литературы

1. Графическая визуализация решения задач по физике и математике / Е. Н. Васильчикова, М. Н. Сизов, Н. И. Уварова // Фундаментальные проблемы математики, физики и физико-математического образования: Сборник трудов кафедры высшей алгебры, математического анализа и геометрии. – Москва: Государственный университет просвещения, 2024. – С. 47-56. – EDN GDKEEL.
2. Исследование искусственной оптической анизотропии, обусловленной механическим воздействием, поляризационно-оптическим методом / М. Н. Сизов, Е. Н. Васильчикова, М. С. Константинов // Молодёжная петербургская школа-конференция инженеров-педагогов: Сборник материалов научной конференции, Санкт-Петербург, 22–23 апреля 2025 года. – Санкт-Петербург: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого", 2025. – С. 73-75. – EDN FCVSGU.
3. Исследование состояния поляризации света в условиях наведенной оптической анизотропии, обусловленной механическим напряжением / М. Н. Сизов, Е. Н. Васильчикова, М. С. Константинов // Проблемы теории и практики инновационного развития и интеграции современной науки и образования, ГУП, Москва, 2025. –С. 63-68.
4. Теория упругости: учебное пособие / Л. М. Савельев; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Самарский университет. – Самара: Издательство Самарского университета, 2021. – 339 с. ISBN 978-5-7883-1711-3
5. Фрохт М.М. Фотоупругость. Поляризационно-оптический метод исследования напряжений / Пер. с англ. М.Ф. Бокштейн, Ю.Ф. Красонтовича и А.К. Прейсс; Под ред. проф. Н.И. Пригоровского. Т. 1-. — Москва, Ленинград: Гостехиздат, 1948. – 432 с.
6. Mindlin R., J. Appl. Phys. 10 222 (1939); J. Appl. Phys. 10 273 (1939) / Пер. с англ. Л.Э. Прокофьевой-Михайловской: Миндлин Р УФН 23:1 16 (1940)

## НАЧАЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ С НЕМИНИМАЛЬНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ СВЯЗЬЮ[1[1]]

*Камалитдинов Р.И.*

1[1] Работа поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» №24-1-1-39-4.

*Россия, г. Казань*
*Казанский Федеральный Университет / Институт физики*
*Научный руководитель: доцент, зав. кафедрой теории относительности и гравитации Сушков С.В.*

*Аннотация.* В настоящей статье рассматривается теория гравитации с неминимальной кинетической связью, в которой производные скалярного поля связаны с тензором Эйнштейна. Показано, что гармоники полей описываются обратным гармоническим осциллятором. Моды и спектр для когерентного начального состояния расходятся экспоненциально.

*Ключевые слова:* инфляция, начальное состояние, примордиальный спектр мощности

## INITIAL STATE IN THE THEORY OF GRAVITY WITH NON-MINIMUMAL DERIVATIVE COUPLING

*Kamalitdinov R.I.*
*Russia, Kazan*
*Kazan Federal University / Physics Institute*
*Scientific supervisor: docent, head of the Department of relativity and gravity Sushkov S.V.*

*Abstract.* In the present paper we consider a non-minimal kinetic coupled theory of gravitation in which the derivatives of the scalar field are related to the Einstein tensor. It is shown that the harmonics of the fields are described by an inverse harmonic oscillator. The modes and spectrum for the coherent initial state diverge exponentially.

*Keywords*: inflation, initial state, primordial power spectrum

### Введение

Одной из возможных модификаций теории гравитации Эйнштейна является скалярно-тензорная теория гравитации, в которой лагранжиан содержит слагаемое вида $\xi G_{\mu\nu}\phi^{;\mu}\phi^{;\nu}$, которое описывает неминимальную связь производных скалярного поля с кривизной. Различные космологические аспекты теории гравитации с неминимальной кинетической связью детально обсуждались в литературе (в частности, см. [2,3]). В качестве важного результата стоит отметить существование стадии первичной кинетической инфляции, которая определяется параметром неминимальной связи $\xi$.

Одним из важных этапов исследования и апробации теорий гравитации является исследование космологических возмущений. В предыдущей работе[1] было показано, что возмущения в инфляционной эре имеют экспоненциальную зависимость, так что плоские волны (в частности функция Бэнча-Дэвиса) не являются решениями в данной модели. Для получения спектральных характеристик – скалярного спектра мощности $\Delta^2_{\mathscr{R}}$, спектрального индекса $n_s$ и скалярно-тензорного отношения r необходимо задать начальное состояние.

Цель настоящей работы – применить метод вторичного квантования для задания начального состояния. С этой целью мы строим гамильтонианы гармоник для полей и анализируем их в эре квази де Ситтера.

В работе используется планковская система единиц, в которой $\hbar = c = G = 1$, т.е. масса Планка $M_{Pl} = 1$ и гравитационная постоянная Эйнштейна $\kappa = 8\pi$.

## 1. Уравнения поля

Действие скалярно-тензорной теории гравитации, в которой скалярное поле имеет неминимальную кинетическую связь с кривизной, имеет вид:

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{R}{8\pi} - \left(g_{\mu\nu} + \xi G_{\mu\nu}\right)\phi^{;\mu}\phi^{;\nu}\right], \# (1.1)$$

где $\xi$- параметр неминимальной связи, имеющий размерность $(\text{длина})^2$.

Рассмотрим изотропную однородную плоскую космологическую модель с метрикой Фридмана-Робертсона-Уокера:

$$ds^2 = a^2(\eta)\left[-d\eta^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j\right],\#(1.2)$$

где $\eta$ - конформное время, $a(\eta)$- масштабный фактор, $\mathscr{H}(\eta) = a'(\eta)/a(\eta)$- конформный параметр Хаббла, где штрих означает производную по конформному времени, т.е. $' = d/d\eta$. Вследствие однородности и изотропности пространства $\phi = \phi(\eta)$- фоновое скалярное поле.

Модифицированные уравнение Фридмана и уравнение на скалярное поле в метрике (1.1) примут вид, соответственно:

$$3\mathscr{H}^2 = 4\pi\phi'^2\left[1 - \frac{9\xi\mathscr{H}^2}{a^2}\right],\#(1.3)$$

$$2\mathscr{H}' + \mathscr{H}^2 = -4\pi\phi'^2\left[1 + \frac{\xi}{a^2}\left(2\mathscr{H}' - 3\mathscr{H}^2 + 4\mathscr{H}\frac{\phi''}{\phi'}\right)\right],\#(1.4)$$

$$\phi' = \frac{Q}{a^2 - 3\xi\mathscr{H}^2}.\#(1.5)$$

где $Q$- константа интегрирования. Для удобства анализа вводятся параметры медленного скатывания, определенные как:

$$\epsilon \equiv 1 - \frac{\mathscr{H}'}{\mathscr{H}^2},\#(1.6)$$

$$\delta \equiv 1 - \frac{\phi''}{\mathscr{H}\phi'}.\#(1.7)$$

Уравнения (1.3), (1.4), (1.5) были подробно изучены в работе [2], показано существование двух асимптотических эпох: эпохи квази-де Ситтера ($4\pi\xi\phi'^2 a^{-2} \ll 1, \delta \simeq 12\pi\xi\phi'^2 a^{-2}$):

$$a = -\frac{1}{H_\xi \eta}, \mathscr{H} = -\frac{1}{\eta}, H_\xi = \frac{1}{\sqrt{9\xi}}\#(1.8)$$

и эпохи доминирования скалярного поля ($4\pi\xi\phi'^2 a^{-2} \gg 1,\ \delta \approx \epsilon$):

$$a = \sqrt{1+2\eta},\ \mathscr{H} = \frac{1}{1+2\eta}.\#(1.9)$$

## 2. Космологические возмущения

В плоской (см. [3]) возмущенная метрика имеет вид:

$$ds^2 = a^2(\eta)\left[-d\eta^2(1+2A) + 2\partial_i B d\eta dx^i + \left(\delta_{ij} + 2E_{ij}\right)dx^i dx^j\right],\#(2.1)$$

где $A \equiv A(\eta,\mathbf{x}) \ll 1,\ B \equiv B(\eta,\mathbf{x}) \ll 1$ - скалярные возмущения, $E_{ij} \equiv E_{ij}(\eta,x) \ll 1$- тензорные возмущения. Тензорные моды удовлетворяют условиям поперечности и бесследовости: $\partial^i E_{ij} = 0_j, E^i_i = 0$.

Возмущенное скалярное поле имеет вид:

$$\phi(\eta,x) = \phi(\eta) + \delta\phi(\eta,x),\#(2.2)$$

где $\delta\phi(\eta,\mathbf{x})$- возмущение такое, что $\delta\varphi \equiv \dfrac{\delta\phi(\eta,x)}{\phi(\eta)} \ll 1$. Далее мы будем рассматривать Фурье образ произвольной скалярной величины $S(\eta,x)$:

$$A(\eta,x) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3}\int A_k e^{ikx} d^3k,\#(2.3)$$

где $A_k \equiv A(\eta,k)$ - мода с волновым числом $k$.

## 3. Скалярные возмущения

Действие второго порядка из общего действия (1.1), включающее только возмущение скалярного поля, в метрике (2.1) без учета членов, являющихся производной по времени или трехмерной дивергенцией, имеет вид:

$$S^{(2)} = \int d\eta d^3x \mathscr{L}^{(2)},\#(2.4)$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{(2)} &= \frac{a^2\left(2\delta^3+3\delta^2\epsilon+4\epsilon^3\right)}{18\delta^3}\delta\phi'^2 - \sqrt{\frac{\delta\epsilon}{3\pi}}\frac{2a^4(\delta-\epsilon)^2(2\delta+\epsilon)}{27Q\delta^3\epsilon}\Delta\delta\phi\delta\phi' \\ &+ \sqrt{\frac{\pi\delta}{3\epsilon}}\frac{2Q\left[\delta\epsilon\left(4\delta^2+3\epsilon^2\right)+2\epsilon^4\right]}{\delta^3\epsilon(2\delta+\epsilon)}\delta\phi'\delta\phi + \frac{a^2\left[2\delta^2(\epsilon-1)+\delta\epsilon(7-2\epsilon)+4\epsilon^2\right]}{18\delta^2}\Delta\delta\phi\delta\phi \\ &- \frac{6\pi Q^2\epsilon(\delta-\epsilon)}{a^2\delta^2}\delta\phi^2, \quad (2.5)\end{aligned}$$

где с целью замкнуть лагранжиан относительно возмущения скалярного поля мы использовали два констрейнта на метрические потенциалы $\frac{\delta S^{(2)}}{\delta A}=0$, $\frac{\delta S^{(2)}}{\delta \Delta B}=0$ и переписали лагранжиан в терминах параметров медленного скатывания (1.6), (1.7).

**Эра доминирования вещества** $4\pi\xi\phi'^2a^{-2}\gg 1$

Действие относительно возмущения скалярного поля в рассматриваемой эпохе имеет вид:

$$S^{(2)}=\frac{1}{2}\int d\eta d^3x\left[v'^2-(\partial v)^2+v^2\left(\mathscr{H}^2+\mathscr{H}'\right)\right], \quad (2.6)$$

где введена переменная Муханова $v\equiv a\,\delta\phi$. Аналогичное действие в эйнштейновской теории гравитации имеет вид[4]:

$$S^{(2)}=\frac{1}{2}\int d\eta d^3x\left[v'^2-(\partial v)^2+\frac{z''}{z}v^2\right], z=\frac{a\phi'}{\mathscr{H}}. \quad (2.7)$$

Нетрудно показать, что эффективная масса, $z''/z$, в рассматриваемой эпохе равна $\mathscr{H}^2+\mathscr{H}'$. Так что действия эквивалентны, т.е. поведение скалярных возмущений повторяет аналогичное поведение в классической теории гравитации.

**Эра квази-де Ситтера** $4\pi\xi\phi'^2a^{-2}\ll 1$

Гамильтониан возмущения скалярного поля в рассматриваемой эпохе имеет вид:

$$H = \frac{1}{2}\int d\eta d^3k \left[\pi_k \pi_{-k} - \Omega_k^2(\eta)\, v_k v_{-k}\right], \# (2.8)$$

где $v_k \equiv \frac{\sqrt{2}}{3} a\delta\phi_k$ – мода вспомогательного поля, $\pi_k = v'_k$ – импульс вспомогательного поля, $\Omega_k^2(\eta) = k^2/3 + 2\mathscr{H}^2$ - частота гармоники.

4. **Тензорные возмущения**

Действие второго порядка из общего действия (1.1), включающее только тензорные возмущения, в метрике (2.1) без учета членов, являющихся производной по времени или трехмерной дивергенцией, имеет вид:

$$S^{(2)} = \frac{1}{16\pi}\int d\eta d^3x \left\{ \left(E'_{ij}\right)^2 \left(a^2 + 4\pi\xi\phi'^2\right) - \left(a^2 - 4\pi\xi\phi'^2\right)\left(\partial E_{ij}\right)^2 - 2\left(E_{ij}\right)^2 \left[ a^2\left(\mathscr{H}^2 + 2\mathscr{H}' + 4\pi\phi'^2\right) + 4\pi\xi\phi'^2\left(-3\mathscr{H}^2 + 2\mathscr{H}' + 4\mathscr{H}\frac{\phi''}{\phi'}\right)\right]\right\}, \quad (2.9)$$

где введены обозначения $\left(E_{ij}\right)^2 \equiv E_{ij}E^{ij}$, $\left(\partial E_{ij}\right)^2 \equiv \partial_k E_{ij}\partial^k E^{ij}$; множитель при $\left(E_{ij}\right)^2$ равен нулю из уравнений фоновой динамики (1.4). Вариация действия выше приводит к уравнению на тензорные возмущения, подробно рассмотренные ранее[1].

Разложим тензорные возмущения на поперечные моды, $\{+, \times\}$, полагая:

$$E_{ij} = \sum_{\lambda=\{+,\times\}} E_\lambda \epsilon_{ij}^\lambda,$$

где поляризационный базис, $\epsilon_{ij}^\lambda$, удовлетворяет условиям бесследовости, поперечности и ортогональности:

$$\epsilon^{\lambda}_{ij}\delta^{ij}=0,\ \partial^{i}\epsilon^{\lambda}_{ij}=0,\ \epsilon^{\lambda}_{ij}\epsilon^{ij}_{\lambda'}=\delta^{\lambda}_{\lambda'}.$$

Получим окончательно действия на моды гравитационных волн:

$$S^{(2)}=\frac{1}{16\pi}\sum_{\lambda}\int d\eta d^3x\left[E'^2_{\lambda}\left(a^2+4\pi\xi\phi'^2\right)-(\partial E_{\lambda})^2\left(a^2-4\pi\xi\phi'^2\right)\right].\#(2.10)$$

**Эра доминирования вещества** $4\pi\xi\phi'^2a^{-2}\gg 1$

Действие после интегрирования по частям в рассматриваемой эпохе имеет вид:

$$S^{(2)}=\frac{1}{2}\sum_{\lambda}\int d\eta d^3x\left[\left(f'_{\lambda}\right)^2-(\nabla f_{\lambda})^2+\frac{a''}{a}f^2_{\lambda}\right],\#(2.11)$$

где $f_{\lambda}\equiv\frac{aE_{\lambda}}{8\pi}$ – вспомогательное поле. Полученное действие совпадает с результатом классической космологии (см [4], например).

**Эра квази-де Ситтера** $4\pi\xi\phi'^2a^{-2}\ll 1$

Гамильтониан гравитационных волн в рассматриваемой эпохе имеет вид:

$$H=\sum_{\lambda}\frac{1}{2}\int d\eta d^3k\left[\pi_{\lambda,\boldsymbol{k}}\pi_{\lambda,-\boldsymbol{k}}-\Omega^2_k(\eta)\,g_{\lambda,\boldsymbol{k}}g_{\lambda,-\boldsymbol{k}}\right],\#(2.12)$$

где $g_{\lambda,\boldsymbol{k}}\equiv\sqrt{\frac{\xi}{2}}\phi'E_{\lambda,\boldsymbol{k}}=\frac{3Q}{2a^2}\sqrt{\frac{\xi}{2}}E_{\lambda,\boldsymbol{k}}$ – мода вспомогательного поля, $\pi_{\lambda,\boldsymbol{k}}=g'_{\lambda,\boldsymbol{k}}$ – импульс вспомогательного поля, $\Omega^2_k(\eta)=k^2+2\mathscr{H}^2$ - частота гармоники.

5. **Квантование полей. Обратный гармонический осциллятор**

Из уравнений (2.8) и (2.12) следует, что гармоники полей в инфляционной эпохе описываются обратным гармоническим осциллятором:

$$\widehat{H}_k=\frac{\hat{p}_k\hat{p}_{-k}}{2}-\frac{\Omega^2_k(\eta)\,\hat{q}_k\hat{q}_{-k}}{2}.\#(3.1)$$

Собственные функции данного оператора не ограничены снизу, в общем случае не нормализуемые (см. [5]). Поэтому задание вакуумного состояния как состояния с наименьшей энергией невозможно. Рассмотрим далее стандартную процедуру квантования, полагая, что

$$\left[\hat{q}_{\boldsymbol{k}}, \hat{p}_{\boldsymbol{k}'}\right] = i\delta\left(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}'\right), \left[\hat{q}_{\boldsymbol{k}}, \hat{q}_{\boldsymbol{k}'}\right] = \left[\hat{p}_{\boldsymbol{k}}, \hat{p}_{\boldsymbol{k}'}\right] = 0, \# (3.2)$$

где коммутационные соотношения берутся в один и тот же момент времени.

Уравнения Гамильтона имеют вид:

$$\frac{\partial \hat{q}_k}{\partial \eta} = \hat{p}_k, \# (3.3)$$

$$\frac{\partial \hat{p}_k}{\partial \eta} = \Omega_k^2(\eta)\, \hat{q}_k. \# (3.4)$$

Для системы выше введем операторы $A_k^{\pm}(\eta)$, определенные как

$$\hat{A}_{\boldsymbol{k}}^{\pm}(\eta) \equiv \sqrt{\frac{\Omega_k(\eta)}{2}}\left(\hat{q}_k \pm \frac{i\hat{p}_k}{\Omega_k(\eta)}\right), \left[\hat{A}_{\boldsymbol{k}}^{+}, \hat{A}_{\boldsymbol{k}'}^{-}\right] = \delta\left(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}'\right), \left[\hat{A}_{\boldsymbol{k}}^{\pm}, \hat{A}_{\boldsymbol{k}'}^{\pm}\right] = 0, \# (3.5)$$

где коммутационные соотношения следуют из определения операторов $\hat{A}_{\boldsymbol{k}}^{\pm}(\eta)$ и из (3.2).

Рассматриваемые операторы не являются лестничными в привычном смысле (см. [5]). Для конкретных временных зависимостей $\Omega_k(\eta)$ нетрудно получить явные зависимости для полевых конфигураций:

$$\hat{v}_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}\left[c_1 \frac{e^{k\eta/\sqrt{3}}}{\sqrt{2k}}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{k\eta}\right) + c_2 \frac{-e^{k\eta/\sqrt{3}}}{\sqrt{2k}}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{k\eta}\right)\right]\hat{A}_{\boldsymbol{k}}^{(s)+} + h.c. \qquad (3.6)$$

$$\hat{g}_{\lambda,\boldsymbol{k}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}\left[c_1 \frac{e^{k\eta}}{\sqrt{2k}}\left(1 - \frac{1}{k\eta}\right) + c_2 \frac{-e^{k\eta}}{\sqrt{2k}}\left(1 + \frac{1}{k\eta}\right)\right]\hat{A}_{\boldsymbol{k}}^{(t)+} + h.c. \qquad (3.7)$$

где $\hat{A}_k^{(s,t)\pm}$ не зависят от времени и вронскиан, построенный на решениях, удовлетворяет условию нормализации:

$$W\left[g_{\lambda,k}, g_{\lambda,k}^*\right] = W\left[v_k, v_k^*\right] = i. \# (3.8)$$

Решение на моды гравитационных волн совпадает с классическим с точностью до поворота Вика ($\eta \to i\,\eta$), решение на скалярные моды с точностью поворота Вика и перемасштабирования времени ($\eta \to \sqrt{3}i\,\eta$). В бесконечном прошлом поведение мод не повторяет поведения в пространстве Минковского – моды расходятся экспоненциально:

$$\lim_{\eta\to-\infty} v_k \sim \frac{e^{-k\eta/\sqrt{3}}}{\sqrt{2k}}, \lim_{\eta\to-\infty} g_{\lambda,k} \sim \frac{e^{-k\eta}}{\sqrt{2k}}, \# (3.9)$$

причем эта расходимость неустранима, поскольку, если положить $c_2 = 0$, то условие нормализации (3.8) не будет справедливо.

Формально мы можем определить (псевдо-)вакуумное состояние как:

$$\hat{A}_k^{(s,t)+}|0>^{(s,t)} = 0. \# (3.10)$$

Введенное вакуумное состояние не является состояние с нулевым количеством частиц заполнения, как в стандартном случае, но задает когерентное состояние с нулевым собственным значением[5]. Оно задает изотропную и однородную конфигурацию полей, в том смысле, что

$$<^{(s)}0\left|\hat{v}_k\right|0>^{(s)} = <^{(t)}0\left|\hat{g}_{\lambda,k}\right|0>^{(t)} = 0, \# (3.11)$$

что довольно очевидно следует из однородности и изотропности фона (1.2).

Начальный скалярный спектр, индуцированный данным вакуумным состоянием, имеет вид:

$$\Delta_v(\eta)^2 \sim |v_k(\eta)|^2 \sim e^{2k|\eta|/\sqrt{3}}, \# (3.12)$$

и в любой момент времени в эре квази де Ситтера расходится экспоненциально, в отличие от эйнштейновской теории гравитации, где спектр расходится по степенному закону.

**Заключение**

Мы получили в качестве вакуумного решения экспоненты, одна из которых расходится при $\eta \to -\infty$, что выходит за рамки линейной теории возмущений. Спектр мощности в начальный момент времени также расходится экспоненциально. Важно отметить, что начальный спектр мощности расходится и в классической теории гравитации, где, однако, расходимость устранима за счет инфляционной динамики, что приводит к верно предсказанному спектру мощности в конце инфляции. Мы продолжим исследование с целью ренормализовать начальный спектр мощности и получить окончательный вид спектра в конце инфляции.

Список литературы

1. Камалитдинов Р. И., Сушков С. В. Космологические возмущения в теории гравитации с неминимальной кинетической связь // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. - 2025. - №1. - С. 101-107.

2. Sushkov S. V., Galeev R. Cosmological models with arbitrary spatial curvature in the theory of gravity with non-minimal derivative coupling // Phys. Rev. D. — 2023. — Vol. 108. — P. 044028.

3. S. V. Sushkov. Realistic cosmological scenario with non-minimal kinetic coupling // Phys. Rev. D. — 2012. — Vol. 85. — P. 123520.

4. Ellis G. F. R., Maartens R., MacCallum M. A. H. Relativistic Cosmology. — Cambridge University Press, 2012. — ISBN 978-0-52138115-4.

5. Baumann D. Cosmology. — Cambridge University Press, 2022. —ISBN 978-1-108-83807-8.

6. Rahma Zerimeche, Rahma Zerimeche Inverted oscillator: pseudo hermiticity and coherent states // Rev.Mex.Fis. — 2023. — Vol. 69. — P. 010402.

## КИНЕТИКА РЕЛЯТИВИСТСКОЙ АКСИОННО АКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ В ПОЛЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ЭФИРА

Валиуллин К.Р.

Россия, г. Казань

Казанский (Приволжский) федеральный университет / Институт Физики / Кафедра теории относительности и гравитации

Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор Балакин А.Б.

Аннотация. Разработана теория релятивистской многокомпонентной плазмы, взаимодействующей с динамическим эфиром и аксионным полем. Получена замкнутая система уравнений для полей и плазмы, проклассифицированы силы, воздействующие на частицы. Сформулирована новая концепция равновесия и исследована динамика частиц в различных космологических моделях, выявившая режимы аномального изменения импульса частицы и симптомы плазменных неустойчивостей.

Ключевые слова: аксион, динамический эфир, релятивистская плазма

## KINETICS OF RELATIVISTIC AXIONICALLY ACTIVE PLASMA IN THE FIELD OF DYNAMIC AETHER

Valiullin K.R.

Russia, Kazan

Kazan Federal University

Institute of Physics

Scientific supervisor: Doctor of Sciences, Professor Balakin A.B.

Abstract. A theory of relativistic multi-component plasma interacting with dynamic aether and axion fields has been developed. A self-consistent system of equations for fields and plasma has been derived, and forces acting on particles have been classified. A novel equilibrium concept has been formulated, and particle dynamics in cosmological models has been investigated, revealing regimes of anomalous momentum change and symptoms of plasma instabilities.

Keywords: axion, aether, relativistic plasma

**Введение**

Исследование релятивистской плазмы в космологических и астрофизических условиях требует учёта сложной полевой структуры, включающей гравитационное, электромагнитное и аксионное поля. Значительный интерес представляет взаимодействие такой плазмы с динамическим эфиром - векторным полем, модифицирующим стандартную теорию гравитации и играющим роль тёмной энергии. В данной работе предлагается последовательная модель релятивистской многокомпонентной плазмы, взаимодействующей как с аксионным полем, так и с динамическим эфиром.

**Целью** данной работы является разработка теории релятивистской аксионно-эфирно активной многокомпонентной плазмы.

Для достижения поставленной цели было необходимо решить следующие **задачи**:

- Разработка формализма кинетической теории релятивистской многокомпонентной аксионно-эфирно активной плазмы
- Получение полного набора связанных основных уравнений
- Классификация сил, действующих на частицы плазмы в электромагнитном, эфирном, аксионном и гравитационном полях, в рамках эффективной теории поля
- Формулировка концепции равновесия в аксионно-эфирно активной плазме
- Исследование динамики заряженных частиц, взаимодействующих с динамическим эфиром посредством смоделированных сил

Предлагаемый подход обладает существенной новизной, поскольку впервые объединяет динамический эфир, аксионное поле и релятивистскую плазму в рамках единой самосогласованной модели. Результаты работы открывают новые возможности для описания поведения плазмы в экстремальных астрофизических условиях и в ранней Вселенной.

## 1. Основные элементы модели

Рассматриваемая модель имеет иерархическую структуру. Гравитационное, аксионное и эфирное поля образуют глобальную полевую конфигурацию, на фоне которой происходят различные плазменные процессы.

### 1.2 Гравитационное поле

Гравитационное поле описывается в рамках общей теории относительности с помощью симметричного метрического тензора $g_{mn}$, определяющего геометрию пространства-времени $ds^2 = g_{mn} dx^m dx^n$. Эволюция поля задаётся уравнениями Эйнштейна, которые можно получить из принципа наименьшего действия для функционала

$$S_{(E)} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2\kappa} R + L_{(m)} \right], \qquad (1)$$

где $L_{(m)}$ - лагранжиан материи.

### 1.2 Динамический эфир

Теория динамического эфира [1] представляет собой векторно-тензорную модификацию гравитации. Основным её элементом является времениподобное единичное векторное поле $U^k$, ассоциированное с четыре вектором скорости гипотетической среды. Функционал действия включает лагранжиан Эйнштейна-Гильберта, условие нормировки векторного поля и кинетические слагаемые:

$$S_{(AE)} = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2\kappa} \left[ R + 2\Lambda + \lambda (g_{mn} U^m U^n - 1) + K^{ab}{}_{mn} \nabla_a U^m \nabla_b U^n \right], \qquad (2)$$

где $K^{ab}{}_{mn} = C_1 g^{ab} g_{mn} + C_2 \delta^a_m \delta^b_n + C_3 \delta^a_n \delta^b_m + C_4 U^a U^b g_{mn}$.

### 1.3 Аксионное поле

Аксион - массивный псевдоголдстоуновский бозон, введённый для решения проблемы CP-инвариантности в квантовой хромодинамике [2]. Аксионное(псевдоскалярное) поле $\phi$ описывается функционалом действия

$$S_{(A)} = \int d^4x\sqrt{-g}\frac{1}{2}\Psi_0^2\left[V(\phi) - g^{mn}\nabla_m\phi\nabla_n\phi\right], \tag{3}$$

где $\Psi_0^2 = const,$ а потенциал $V(\phi) = 2m_A^2\left[1 - cos(\phi)\right]$ имеет периодический вид. В контексте нашей работы важно отметить, что аксионы являются кандидатами на роль частиц тёмной материи.

### 1.4 Электромагнитное поле

Электромагнитное поле в рамках рассматриваемой модели описывается функционалом действия вида

$$S_{(EM)} = \int d^4x\sqrt{-g}\frac{1}{4}C^{mnpq}F_{mn}F_{pq}, \tag{4}$$

Где $F_{mn} = \nabla_m A_n - \nabla_n A_m$- тензор Максвелла. Особенностью подхода является введение материального тензора Тамма специальной структуры:

$$C^{mnpq} = \frac{1}{2}[g^{mp}g^{nq} - g^{mq}g^{np} + sin(\phi)\epsilon^{mnpq} + A(g^{mp}U^nU^q - g^{mq}U^nU^p + g^{nq}U^mU^p - g^{np}U^mU^q)].$$

(5)

Данный тензор содержит два ключевых элемента: аксионно-фотонную связь $sin(\phi)\epsilon^{mnpq}$ и эфирные поправки с параметром $A$. При малых значениях $\phi$ модель воспроизводит стандартное аксионно-электромагнитное взаимодействие, а параметр $A$ играет роль, аналогичную квадрату эффективного показателя преломления.

### 1.4 Структура глобальной полевой конфигурации

В качестве фона рассматривается однородная изотропная космологическая модель с метрикой FLRW: $ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\right]$. Вектор скорости эфира $U^j = \delta^j_0$, его ковариантная производная $\nabla_k U_j = H(g_{kj} - U_k U_j)$, скаляр растяжения $\theta = 3H$. Аксионное поле зависит только от времени $\nabla_k \phi = U_k \frac{d\phi}{dt}$. Рассматриваются различные законы эволюции масштабного фактора a(t). Фоновое электромагнитное поле отсутствует.

## 2. Формализм

## 3. Полуфеноменологический подход

Для моделирования эволюции системы применяется комбинированный метод, объединяющий релятивистскую кинетическую теорию и лагранжев формализм. Полный функционал действия теории имеет вид:

$$S_{(total)} = \int dx^4 \sqrt{-g} \left\{ L_{(EA)} + L_{(A)} + L_{(EM)} + L_{(P)} \right\}. \quad (6)$$

Лагранжианы эфирного $L_{(EA)}$, аксионного $L_{(A)}$ и электромагнитного полей $L_{(EM)}$ заданы явно(см. (2-4)), лагранжиан плазмы $L_{(P)}$строится феноменологически на основе кинетической теории.

## 4. Уравнения поля

Для получения уравнений, описывающих эволюцию рассматриваемых полей, необходимо найти вариацию полного функционала действия (4) по этим полям. Таким образом, мы получаем уравнения электродинамики:

$$\begin{cases} \nabla_n \left[ F^{jn} + sin(\phi) F^{*jn} + A U_q (F^{jq} U^n - F^{nq} U^j) \right] = -4\pi \sum\limits_{(a)} e_{(a)} N^j_{(a)}, \\ \nabla_k F^{*ik} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Уравнения Джекобсона:

$$\nabla_a J^a_j = \lambda U_j + C_4 U^s \nabla_s U_m \nabla_j U^m + \kappa A \Psi_0^2 U^s (\nabla_s \phi)(\nabla_j \phi) + \kappa \frac{\delta L_{(P)}}{\delta U^j}, \quad (8)$$

где $J^a_j = K^{ab}{}_{jn} \nabla_b U^n$ - тензор Джекобсона.

Уравнения аксионного поля:

$$\nabla_m \left[(g^{mn} + AU^m U^n)\nabla_n \phi\right] + m_A^2 sin(\phi) = -\frac{1}{4\Psi_0^2} cos(\phi) F^*_{mn} F^{mn} - \frac{1}{\Psi_0^2}\frac{\delta L_{(P)}}{\delta \phi}. \tag{9}$$

Уравнения гравитационного поля:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} - \Lambda g_{ik} = T^{(U)}_{ik} + \kappa T^{(A)}_{ik} + \kappa T^{(EM)}_{ik} + \kappa T^{(P)}_{ik}. \tag{10}$$

### 2.3 Феноменологическое моделирование источников

Как можно видеть, в уравнениях поля возникают конструкции вида $\kappa \frac{\delta L_{(P)}}{\delta U^j}$ и $\frac{1}{\Psi_0^2}\frac{\delta L_{(P)}}{\delta \phi}$. Для того чтобы получить набор самосогласованных связанных уравнений необходимо провести феноменологическое моделирование данных источников поля. Наш анзац заключается в том, что данные вариационные производные могут быть представлены в виде линейной комбинации первых двух моментов функции распределения.

$$\kappa \frac{\delta L_{(P)}}{\delta U^j} = \sum_{(a)} \left[\omega_{(a)} N_{(a)j} + \Omega_{(a)} T_{(a)jk} U^k\right], \tag{11}$$

$$-\frac{1}{\Psi_0^2}\frac{\delta L_{(P)}}{\delta \phi} = sin(\phi) \sum_{(a)} \left[\alpha_{(a)} N_{(a)j} U^j + \beta_{(a)} T_{(a)jk} g^{jk} + \gamma_{(a)} T_{(a)jk} U^j U^k\right], \tag{12}$$

где $\omega_{(a)}, \Omega_{(a)}, \alpha_{(a)}, \beta_{(a)}, \gamma_{(a)}$ - феноменологические параметры. $N_{(a)j}$ - четыре-вектор числа частиц сорта (a), $N_{(a)j} = \frac{1}{m_{(a)}c}\int dP\, p^j f_{(a)}$. $T_{(a)jk}$ - тензор энергии импульса частиц сорта (a), $T^{ls} = \frac{1}{m_{(a)}}\int dP\, p^l p^s f_{(a)}$. $f_{(a)}$ - функция распределения частиц сорта (a)

### 2.4 Классификация сил

Функция распределения частиц сорта (a) может быть найдена из общерелятивистских кинетических уравнений

$$\frac{p^j}{m_{(a)}c}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} - \Gamma^l_{kj} p^k \frac{\partial}{\partial p^l}\right) f_{(a)} + \frac{\partial}{\partial p^i}\left[\mathscr{F}^i_{(a)} f_{(a)}\right] = \sum_{(b)} \mathscr{I}_{(a)(b)}, \tag{13}$$

где $\mathscr{I}_{(a)(b)}$ - интеграл столкновений частиц сортов (a) и (b), $\mathscr{F}^i_{(a)}$ - сумма сил, действующих на частицы сорта (a). Таким образом, для нахождения функции распределения нам необходимо провести моделирование этих сил в рамках эффективной теории поля.

В класс силовых конструкций, не содержащих производных, входит лишь одна сила

$$\mathscr{F}^i_{(S)} = \frac{\lambda_{(s)}}{m_a c}\left[\delta^i_k \left(p^l p_l\right) - p^i p_k\right] U^k \left[1 + \vartheta_{(S)} cos(\phi)\right]. \tag{14}$$

Здесь и далее $\lambda$ и $\vartheta$- феноменологически введённые скалярные функции.

В класс силовых конструкций первого порядка входят шесть сил. Их детальное описание мы привели в работе [4]. Для примера можно рассмотреть силу градиентного типа

$$\mathscr{F}^i_{(G)} = \frac{\lambda_{(G)}}{m_a c}\left[g^{ik}\left(p^l p_l\right) - p^i p^k\right] \nabla_k \phi \, sin(\phi) \left[1 + \vartheta_{(G)} cos(\phi)\right]. \tag{15}$$

В класс силовых конструкций второго порядка входят три линейные по кривизне силы, построенные при помощи тензора неминимальной восприимчивости

$$\mathscr{R}^{\mathrm{ikmn}} = \frac{q_1}{2} \mathrm{R}(g^{im} g^{kn} - g^{in} g^{km}) + q_2 \left[\mathrm{R}^{\mathrm{im}} g^{kn} - \mathrm{R}^{\mathrm{in}} g^{km} + \mathrm{R}^{\mathrm{kn}} g^{im} - \mathrm{R}^{\mathrm{km}} g^{in}\right] + + q_3 \mathrm{R}^{\mathrm{ikmn}}, \tag{16}$$

где $q_1$, $q_2$, $q_3$- безразмерные параметры. В качестве примера приведём одну из них

$$\mathscr{F}^i_{(T)} = \frac{\lambda_{(T)}}{m_a c} \mathscr{R}^i_{.\,kmn} p^k U^m p^n \left[1 + \vartheta_{(T)} cos(\phi)\right]. \tag{17}$$

## 5. Равновесные состояния в аксионно-эфирно активной плазме

Мы следуем общепринятому определению термодинамического равновесия, согласно которому скаляр производства энтропии в замкнутой системе должен быть равен нулю. В случае упругих столкновений это выполнено, когда все интегралы столкновений обращаются в нуль, а функция распределения принимает форму равновесного распределения Юттнера-Черникова $f^{(eq)}_{(a)} = A_{(a)} e^{-\xi_k p^k}$. Здесь $A_{(a)}$- нормировочный скаляр, а $\xi_k$- времениподобное векторное поле, которое можно связать с температурой и макроскопической скоростью кинетической системы. Для нахождения $A_{(a)}$ и $\xi_k$ необходимо подставить функцию распределения Юттнера-Черникова в кинетическое уравнение. В результате чего приходим к уравнению

$$p^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left[ln(A_{(a)})\right] - \frac{1}{2} p^j p^k \left[\nabla_j \xi_k + \nabla_k \xi_j\right] = m_{(a)} c \xi_j \mathscr{F}^j_{(a)} - m_{(a)} c \frac{\partial}{\partial p^j} \mathscr{F}^j_{(a)}. \tag{18}$$

При подстановке всех смоделированных ранее сил приходим к весьма громоздкой системе уравнений на $A_{(a)}$ и $\xi_j$. Для её решения мы предлагаем анзац, согласно которому $\xi_j = \frac{cU^j}{k_B T}$. Проверку данного анзаца осуществляем в однородной изотропной космологической модели с метрикой типа FLRW. Хорошо известно, что пространство-время такого типа не допускает существования вектора $\xi_j$, а потому и стандартное равновесие массивных частиц невозможно. Однако в нашем случае динамический эфир, воздействуя на частицы плазмы, приводит её в равновесное состояние, в котором макроскопическая скорость плазменного потока совпадает со скоростью динамического эфира, а равновесная температура не зависит от времени.

## 6. Анализ динамики частиц и симптомы плазменных неустойчивостей

Рассмотрим плазму, находящуюся в бесстолкновительном режиме. В этом случае все интегралы столкновений $\mathscr{I}_{(a)(b)}$ оказываются равными нулю, и общерелятивистские кинетические уравнения принимают вид

$$\frac{p^j}{m_{(a)}c}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} - \Gamma^l_{kj} p^k \frac{\partial}{\partial p^l}\right) f_{(a)} + \frac{\partial}{\partial p^i}\left[\mathscr{F}^i_{(a)} f_{(a)}\right] = 0. \tag{19}$$

Уравнения характеристик, связанные с кинетическими уравнениями могут быть представлены в следующей форме

$$\frac{Dp^j}{ds} = \frac{dp^j}{ds} + \Gamma^j_{lk} p^l \frac{p^k}{m_a c} = \mathscr{F}^j_{(a)}. \tag{20}$$

В данном случае функция распределения может быть представлена в виде $f_{(a)}(K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6)\delta(K_0 - m^2_{(a)}c^2)$ произвольной функции от шести интегралов движения $K_\alpha$, которые можно определить из уравнений характеристик. Например, в случае космологической модели с метрикой $ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\right]$ и постоянного аксионного поля $\phi = 2\pi n,\ n \in Z$ решение уравнений характеристик имеет вид

$$p_i(t) = p_i(t_0)\left(\frac{a(t)}{a(t_0)}\right)^{\sigma_1}\left(\frac{H(t)}{H(t_0)}\right)^{\sigma_2}, \quad i = 1, 2, 3 \tag{21}$$

где $\sigma_1 = -\frac{\lambda_{(s)}}{H}\left[1 + \vartheta_{(S)}\right] + H\lambda_{(T)}(6q_1 + 6q_2 + q_3)\left[1 + \vartheta_{(T)}\right]$,

$\sigma_2 = H\lambda_{(T)}(3q_1 + 4q_2 + q_3)\left[1 + \vartheta_{(T)}\right]$. Другими словами, величины

$K_i = p_i(t)\,[a(t)]^{-\sigma_1}\,[H(t)]^{-\sigma_2}$ являются интегралами характеристических уравнений. Для нахождения трёх оставшихся интегралов движения необходимо проинтегрировать уравнение $\frac{dx^i}{ds} = \frac{p^i(t)}{m_{(a)}c}$.

В работе [5] был детально исследован закон эволюции физической компоненты импульса частицы $P = \sqrt{g^{11} p_1 p^1}$ для различных космологических сценариев. В качестве характерного примера рассмотрим модель с антигауссовым законом расширения $a(t) = a(t_*)e^{ht^2}$. В этой модели импульс частицы демонстрирует сложное поведение, описываемое выражением:

$$P(t) = P(t_o)e^{h(\sigma_1-1)(t^2-t_0^2)}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\sigma_2}. \tag{22}$$

В зависимости от сочетания параметров, входящих в силовые конструкции, возможно как монотонное убывание импульса, вследствие которого частицы становятся нерелятивистскими, так и аномальный рост, приводящий к становлению ультрарелятивистских частиц (рисунок 1). Если предположить, что модельные параметры $\sigma_1$ и $\sigma_2$ зависят от сорта частиц, то в нашей системе будет возникать двухтемпературная плазма. Поскольку предполагается, что частицы плазмы электрически заряжены, то при появлении каких-либо внутренних или внешних возмущений в аксионно-эфирно активной плазме могут возникать плазменные неустойчивости.

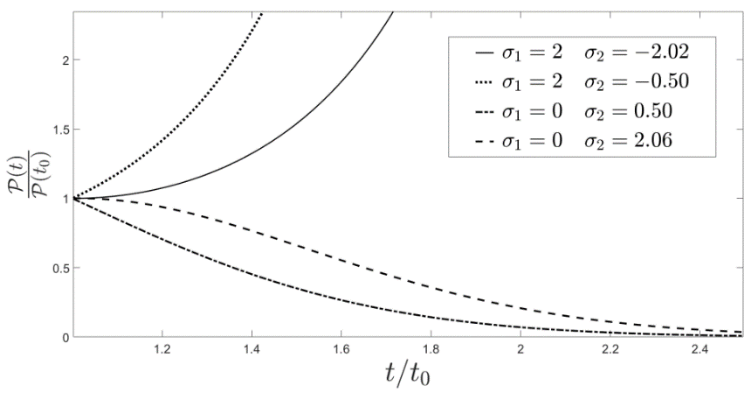



Рисунок 1. Иллюстрация поведения импульса частицы для случая антигауссова $a(t) = a(t_*)e^{ht^2}$ расширения вселенной. $h = 1$.

Например, гравитационные волны, проходя через двухтемпературную плазму, создают продольные электрические токи и позволяют нам говорить о признаках нестабильности плазмы.

Список литературы

1. Jacobson, T. Gravity with a dynamical preferred frame / T. Jacobson, D. Mattingly. — DOI 10.1103/PhysRevD.64.024028. — Text : electronic // Phys. Rev. D. — 2001. — Vol. 64. — P. 024028.
2. Peccei, R. D. CP conservation in the presence of instantons / R. D. Peccei, H. R. Quinn. — DOI 10.1103/PhysRevLett.38.1440. — Text : electronic // Physical Review Letters. — 1977. — Vol. 38. — P. 1440—1443.
3. Burgess, C. P. Introduction to effective field theory / C. P. Burgess. — DOI 10.1146/annurev.nucl.56.080805.140508. — Text : electronic // Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. — 2007. — Vol. 57. — P. 329-362.
4. Balakin, A. B. Kinetics of relativistic axionically active plasma in the field of dynamic aether. Part I: General formalism and new concept of equilibrium states / A. B. Balakin, K. R. Valiullin. — Text : electronic // Space, Time and Fundamental Interactions. — 2024. — № 2. — P. 38-50. — ISSN 2309-3793.
5. Kinetics of relativistic axionically active plasma in the field of dynamic aether. Part II: Particle dynamics and symptoms of plasma instability / A. B. Balakin, K. R. Valiullin // Space, Time and Fundamental Interactions. — ISSN 2309-3793. — Текст: электронный // arXiv. — URL: https://arxiv.org/pdf/2505.02551(дата обращения: 24.11.25). — Принята к публикации

## РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА РЕДУЦИРОВАНИЯ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ГАЛЛЮЦИНАЦИЙ БОЛЬШИХ ЯЗЫКОВЫХ МОДЕЛЕЙ

Муллагалиев Дениз Радикович

Российская Федерация, г. Казань

Казанский (Приволжский) Федеральный Университет, Институт искусственного интеллекта, робототехники и системной инженерии

Научный руководитель: б.с, Смольникова Камилла Рустемовна, заместитель директора по инновационной деятельности ИВМиИТ КФУ

*Аннотация:* В работе исследована проблема вычислительных галлюцинаций больших языковых моделей при точных символьных вычислениях и предложено математически обоснованное решение в виде алгоритма-надстройки. Метод основан на многократной независимой генерации ответов с голосованием большинства и многоуровневой верификацией. Реализация на Python демонстрирует экспоненциальное снижение вероятности ошибок и повышает надежность вычислений без изменения самой модели.

*Ключевые слова:* большие языковые модели, арифметические галлюцинации, символьные вычисления, токенизация чисел, самопроверка LLM, модульная арифметика, неравенство Хёфдинга, верификация вычислений

**DEVELOPMENT OF AN ALGORITHM FOR REDUCING ARITHMETIC HALLUCINATIONS OF LARGE LANGUAGE MODELS**

Mullagaliev Deniz Radikovich
Russian Federation, Kazan
Kazan (Volga Region) Federal University, Institute of Artificial Intelligence, Robotics and System Engineering
Scientific supervisor: B.S. Smolnikova Kamilla Rustemovna, Deputy Director for Innovation at the ICMIT KFU

*Abstract:* The paper examines the problem of computational hallucinations of large language models in accurate symbolic calculations and offers a mathematically sound solution in the form of an add-on algorithm. The method is based on multiple independent generation of responses with majority voting and multi-level verification. The Python implementation demonstrates an exponential reduction in the probability of errors and increases the reliability of calculations without changing the model itself.

*Keywords:* large language models, arithmetic hallucinations, symbolic calculations, tokenization of numbers, LLM self-verification, modular arithmetic, Hoefding's inequality, verification of calculations

## 1. **Постановка цели и задач исследования**

Современные большие языковые модели часто галлюцинируют при выполнении арифметических операций — выдают неправильные числовые ответы, производят ошибочные вычислительные действия. В данной работе будет рассмотрена математическая причина данной проблемы, а также предложено её алгоритмическое решение в качестве надстройки для LLM.

**Цель исследования:** Дать математическую формализацию явления вычислительных галлюцинаций LLM, разработать алгоритм, который снижает вероятность таких ошибок для численных и символьных вычислений

**Задачи исследования:**

1. Составить бенчмарк популярных языковых моделей в выполнении символьных вычислений.
2. Изучить математический аппарат возникновения галлюцинаций у LLM при вычислениях и сделать выводы.
3. Сформулировать гипотезу решения проблемы.
4. На основе сформулированной гипотезы реализовать алгоритм.
5. Проверить работоспособность алгоритма на практических задачах.

## 2. Сравнение галлюцинаций в символьных вычислениях у современных LLM

Для того чтобы подтвердить описанную проблему рассмотрим составленный на основе результатов эксперимента бенчмарк корректности символьных вычислений у современных передовых языковых моделей. В ходе эксперимента каждая LLM решила 6 арифметических примеров.

В эксперименте использовались модели gemma 3 27b, gpt-5, qwen3-30b, llama 30b, gigachat-max, yandex gpt 5 pro, claude 4.5 sonnet, deepseek-r1

Результаты эксперимента представлены в таблице ниже. "Да" означает правильный ответ, "Нет" — наличие ошибок в символьных вычислениях (галлюцинация). Задачи включали как целочисленные умножения, так и умножения с плавающей запятой.

Таблица 1. Сравнительный бенчмарк

| Модель | 10 030 × 209 | 1234 × 1235 | 70 008 × 9009 | 2112 × 1221 | 11,22 * 111,2121 | 33,444 * 555,888 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| gemma | **Нет** | Да | Да | **Нет** | **Нет** | **Нет** |
| gpt-5 | Да | Да | Да | Да | Да | Да |
| qwen3 | Да | **Нет** | Да | Да | Да | **Нет** |
| llama | Да | **Нет** | Да | **Нет** | **Нет** | **Нет** |
| gigachat | Да | **Нет** | **Нет** | **Нет** | **Нет** | **Нет** |
| yandex gpt | Да | Да | Да | Да | **Нет** | **Нет** |
| claude 4.5 | Да | Да | Да | Да | Да | **Нет** |
| deepseek | Да | Да | Да | Да | Да | **Нет** |

Эксперимент подтверждает проблему галлюцинаций в символьных вычислениях. Ни одна модель не достигла 100% точности на всех задачах, кроме GPT-5. Самые уязвимые задачи — умножения с плавающей запятой (5-я и 6-я), где все модели, кроме GPT-5, допустили ошибки. Это указывает на слабость в обработке десятичных дробей, где модели склонны к приближениям или ошибкам округления вместо точных символьных операций. Целочисленные задачи (1–4) решались лучше, но даже здесь Gemma 3 27B и Llama 30B показали низкую точность (по 2/4).

### 3. Математический аппарат возникновения галлюцинаций

Большие языковые модели видят текст в виде токенов — векторов, положение в пространстве которых отражает семантический смысл текста. Соответственно и числа, попадая в пространство эмбеддингов[2[1]], интерпретируются моделью не как математические объекты с точной алгебраической структурой, а как семантические сущности, расположенные в многообразии признаков. Обучающая выборка любой языковой модели содержит петабайты информации, включающие в том числе и математические

*Математическая формализация проблемы:*

Пусть x - входной промпт, содержащий вычислительную задачу;

При генерации ответа LLM задаёт распределение на последовательностях токенов T: $P_\theta$(T | x);

Генерируемое токенами выражение интерпретируется как кандидат-ответ

y = Φ(T), где Φ — детерминированный парсер. Целевой верный ответ — оператор C(x), дающий числовой ответ на задачу x. Проблема: LLM

2[1] Эмбеддинг — способ представления объектов (текста, чисел, изображений и т.п.) в виде числовых векторов иногда генерирует $y \neq C(x)$ с ненулевой вероятностью. Событие ошибки $E = \{y \neq C(x)\}$. Нам нужно снизить $P(E)$ до приемлемого уровня $\boldsymbol{\delta}$.

*Почему происходят события множества E? Что исходит из-за расхождения интерпретации представления чисел у LLM?*

1. Стохастическая генерация ответа. Трансформеры генерируют текст токен за токеном, и выбор каждого следующего токена является случайной величиной. Эту величину можно выразить так:

$y_t \sim P_\theta( y_t | y_{<t}, x )$

где x - контекст, а $y_{<t}$— уже сгенерированные токены. На раннем шаге вследствие неправильной интерпретации числа может возникнуть ошибка, которая приведет к выбору неверных последующих токенов, следовательно и всё вычисление будет осуществлено неправильно. [1, 2]

2. Большие числа разбиваются на дискретные токены

Числа длиной более 4–5 цифр почти всегда разбиваются на несколько токенов (например, «10030» → «100», «30» или «1», «00», «30»). Модель не имеет встроенного механизма переносов и выравнивания разрядов, как в обычном процессоре. Поэтому ошибка в одном токене-разряде разрушает всю дальнейшую арифметику. [3, 4]

3. Смещение распределения в сторону «популярных» и «красивых» чисел.

Обучающие данные содержат непропорционально много круглых и часто встречающихся чисел. Поэтому даже при правильном начале вычисления модель склонна «соскальзывать» на более вероятные в её распределении значения, что особенно заметно на редко встречающихся примерах. [5, 6]

## 4. Концепция решения

Мы можем утверждать, что LLM “знает” правильный ответ на заданное вычисляемое выражение, но выдаёт неверный ответ на него. Но мы выяснили, что вероятность выбора последующего токена является случайной величиной, следовательно с некоторой вероятностью, сделав несколько прогонов генерации ответа, мы можем получить верный ответ, ведь он был в обучающей выборке.

*Гипотеза*

Комбинация множественной генерации кандидатов символьного вычисления выражения x и числовых проверок кандидатов (например остаток по модулю, интервал, рациональное представление), даёт экспоненциальное снижение вероятности неверной финальной выдачи. Формально: если одиночная попытка даёт корректность q > 0.5, то усредненная схема с k независимыми попытками и большинственным решением обеспечивает вероятность ошибки $P \leq \exp(-2k\,(q - 0.5)^2)$ согласно оценке Хёфдинга[3[2]]. [7]

*Математическая постановка идеи алгоритма*

Пусть независимые прогоны вычислений дают кандидаты $Y_1, \ldots, Y_k$

Тогда количество корректных прогонов:

$$S = \sum_{i=1}^{k} 1\,\{Y_i = C(x)\}$$

Мы принимаем правило большинства: выбираем ответ, который встречается чаще всего среди $y_i$. Вероятность, что большинство окажется неверным, — вероятность S ≤ [k/2]. По неравенству Хёфдинга:

3[2] Оценка Хёфдинга — статистическая мера, которая оценивает совместное ранжирование точек данных.

$$P(S \le \frac{k}{2}) \le exp(-2k(q-0.5)^2)$$

Значит, $exp(-2k(q-0.5)^2) \le$ $\boldsymbol{\delta}$, где $\boldsymbol{\delta}$ - вероятность ошибки. Тогда нам нужно сделать k прогонов, чтобы получить k кандидатов, таких что:

$$k \ge \frac{ln(\frac{1}{\boldsymbol{\delta}})}{2(q-0.5)^2}$$

*Описание алгоритма*

1. Модель запускается k раз на одном и том же промпте. Это даёт набор ответов $y_1,..,y_k$.
2. Среди всех кандидатов выбирается наиболее частый. Если вероятность правильного ответа в одном прогоне 0.5, то по неравенству Хёфдинга ошибка большинства убывает экспоненциально как $exp(-2k(q-0.5)^2)$
3. Избранный кандидат $y_i$проходит быстрый набор тестов — проверку равенства $y_i$= C(x) по модулю, проверку границ интервала, в котором лежит кандидат, проверку приведения к рациональной форме. Если кандидат не проходит проверки, выбирается следующий по частоте.
4. Оставшийся кандидат проверяется независимым символьным вычислителем. Если символьная проверка подтверждает равенство $y_i$= C(x), кандидат принимается.
5. Если найден кандидат, прошедший все уровни проверки, он считается корректным. Если ни один кандидат не проходит тесты, алгоритм сообщает, что уверенного ответа нет.

**4. Алгоритмическое решение на языке Python**

Рассмотрим реализацию каждой функции алгоритма на языке Python.

```
def generate_batch(model_name, prompt, n, gen_kwargs):
    tokenizer = AutoTokenizer.from_pretrained(model_name)
    model = AutoModelForCausalLM.from_pretrained(model_name)
    if torch.cuda.is_available():
        model = model.to("cuda")
    gen_cfg = GenerationConfig(**gen_kwargs)
    inputs = tokenizer(prompt, return_tensors="pt")
    if torch.cuda.is_available():
        inputs = {k: v.to("cuda") for k, v in inputs.items()}
    outputs = []
    for i in range(n):
        out = model.generate(**inputs, generation_config=gen_cfg)
        text = tokenizer.decode(out[0], skip_special_tokens=True)
        outputs.append(text)
    return outputs
```

Рис.1 Функция генерации кандидатов

Генерируется n независимых ответов LLM на символьное вычисление. Возвращает список строк с кандидатами ответов.

```
def compute_mods(expr, moduli):
    try:
        if expr is None:
            return {m: None for m in moduli}
        if expr.is_Rational:
            return {m: None for m in moduli}
        if expr.is_Integer:
            val = int(expr)
        else:
            try:
                val_eval = sp.nsimplify(expr)
                val = int(sp.Integer(val_eval))
            except Exception:
                return {m: None for m in moduli}
        return {m: val % m for m in moduli}
    except Exception:
        return {m: None for m in moduli}
```

Рис 2. Функция модульной проверки

Считает остатки выражения по большим модулям для числовых проверок.

```python
def majority_and_certify(raw_texts, moduli, majority_frac_threshold=0.6, require_integer_mod_check=True, B=None):
    diagnostics = {"candidates": []}
    for t in raw_texts:
        res = extract_result(t)
        expr, err = sym_eval(res) if res is not None else (None, "no_parse")
        diagnostics["candidates"].append({"raw": t, "extracted": res, "expr": str(expr) if expr is not None else None, "err": err})
    counter = Counter()
    expr_map = defaultdict(list)
    for d in diagnostics["candidates"]:
        if d["expr"] is not None:
            key = d["expr"]
            counter[key] += 1
            expr_map[key].append(d)
        else:
            counter[("PARSE_FAIL", d["extracted"])] += 1
    if not counter:
        return None, diagnostics
    most_common, freq = counter.most_common(1)[0]
    k = len(raw_texts)
    frac = freq / k
    diagnostics["summary"] = {"most_common": most_common, "freq": freq, "k": k, "frac": frac}
    if frac >= majority_frac_threshold and not (isinstance(most_common, tuple) and most_common[0] == "PARSE_FAIL"):
        candidate_expr = sp.sympify(most_common)
        residues = compute_mods(candidate_expr, moduli)
        diagnostics["cert"] = {"candidate": str(candidate_expr), "residues": residues}
        if require_integer_mod_check:
            if all(r is not None for r in residues.values()):
                M = 1
                for m in moduli:
                    M *= m
                if B is not None and M > 2 * B:
                    return str(candidate_expr), diagnostics
                else:
                    return str(candidate_expr), diagnostics
            else:
                diagnostics["cert_failed_reason"] = "non-integer or cannot compute residues"
                return None, diagnostics
        else:
            return str(candidate_expr), diagnostics
    else:
        diagnostics["note"] = "no strong majority or parse failure"
        return None, diagnostics
```

Рис. 3 Главная функция для символьного вычисления

Алгоритм принимает множество текстовых ответов, извлекает из каждого предполагаемое числовое выражение и приводит его к каноническому символьному виду. Далее подсчитывается частота полученных выражений, и производится отбор наиболее часто встречающегося кандидата при условии превышения порога большинства. Для лидирующих выражений выполняются числовые проверки: согласованность по наборам модулей, проверка принадлежности допустимому диапазону значений и приводимость результата к целочисленному или рациональному виду. После этого выполняется сертификация результата на основе произведения модулей, обеспечивающая единственность решения в рамках китайской теоремы об остатках. Итоговый ответ принимается только при выполнении всех условий согласованности; в противном случае алгоритм возвращает отсутствие достоверного результата.

Реализованный алгоритм размещён в Colab-ноутбуке по адресу: https://colab.research.google.com/drive/1Zo9-I2HOLwUnfU6YliKYKRJoNTZEgPv9?usp=sharing

*Результаты работы алгоритма:*

Вычислить 123456789 * 982222221. Использовалась модель gemma3 12 b

Без использования разработанного алгоритма был получен ответ: 121 234 567 654 321 889 за 4,5 секунды. С использованием алгоритма был получен правильный ответ за 38 секунд 121 262 001 489 108 369. Ответ правильный.

**Вывод**

В работе предложен алгоритм, объединяющий многократную генерацию ответов LLM, статистическое агрегирование и математическую верификацию с помощью символьных вычислений и числовых проверок. Экспериментально показано, что такой подход существенно снижает вероятность ошибочной выдачи при умеренных вычислительных затратах, обеспечивая высокую точность и надёжность результатов по сравнению с одиночным прогоном модели и традиционным символьным вычислением. Данный метод демонстрирует перспективность для прикладных задач точных вычислений с использованием больших языковых моделей.

**Список использованной литературы**

1. Масуд А. Why Large Language Models Struggle with Mathematical Reasoning? [Электронный ресурс] // Medium. – URL: https://medium.com/@adnanmasood/why-large-language-models-

struggle-with-mathematical-reasoning-3dc8e9f964ae (дата обращения: 24.11.2025).
2. Why LLMs Struggle: Math, Structured Data & AI Reasoning Limits [Электронный ресурс] // Moveo.ai. – URL: https://moveo.ai/blog/why-llm-struggle (дата обращения: 24.11.2025).
3. Мадасу Вишну Радж. Why LLMs Struggle with Mathematical Calculation: The Tokenization Problem [Электронный ресурс] // Medium. – URL: https://medium.com/@madasuvishnuraj/why-llms-struggle-with-mathematical-calculation-the-tokenization-problem-83322e9569a2 (дата обращения: 24.11.2025).
4. Saxton K. The first step is the hardest: pitfalls of representing and tokenizing numbers in LLMs // Frontiers in Artificial Intelligence. – 2024. – Vol. 7. – Art. 1425853. – DOI: 10.3389/frai.2024.1425853. – URL: https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC11339515/ (дата обращения: 24.11.2025).
5. Chan C. M., Chen C. H., Su Y. C., et al. More is more: Addition bias in large language models // Patterns. – 2025. – Vol. 6, iss. 2. – Art. 100487. – DOI: 10.1016/j.patter.2024.100487. – URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2949882125000131 (дата обращения: 24.11.2025).
6. StreetMath: Study of LLMs' Approximation Behaviors [Электронный ресурс] // OpenReview. – URL: https://openreview.net/pdf/48018828b0946c469f631091f8e0864085f4a4ab.pdf (дата обращения: 24.11.2025).
7. Боровков А. А. Теория вероятностей: учебник для вузов. – 5-е изд., испр. – М.: МЦНМО, 2018. – 472 с. – С. 156–158.

***Номинация «Лучшая научно-исследовательская работа в области методики обучения математике»***

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ДОПОЛНЕННОЙ РЕАЛЬНОСТИ ПРИ ОБУЧЕНИИ ИНФОРМАТИКЕ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ

Гарайшина Л.Р.

Россия, г. Казань

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

Институт математики и механики имени Н.И. Лобачевского

Научный руководитель: канд. пед. наук, доцент Фазлеева Э.И.

*Аннотация.* В данной работе рассматриваются теоретические основы дополненной реальности (AR) как современного образовательного инструмента, а также анализируются практические аспекты ее внедрения в учебный процесс по информатике в основной школе. Исследование охватывает определение и классификацию технологии дополненной реальности, историю ее развития, преимущества и недостатки в образовании.

*Ключевые слова:* дополненная реальность, технологии дополненной реальности, образование, информатика, виртуальные объекты, основная школа.

## Using Augmented Reality in Teaching Computer Science in Basic Schools

Garayshina L.R.

Russia, Kazan

Kazan (Volga Region) Federal University,

N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics

*Abstract.* This paper examines the theoretical foundations of augmented reality (AR) as a modern educational tool and analyzes the practical aspects of its implementation in computer science education in secondary schools. The study covers the definition and classification of augmented reality technology, the history of its development, and its advantages and disadvantages in education.

*Keywords*: Augmented reality, augmented reality technologies, education, computer science, virtual objects, primary school.

**Актуальность работы.** Сфера образования достаточно быстро трансформируется под влиянием новых технологий, которые все больше внедряются в нашу обыденную жизнь. Одним из перспективных направлений в этой области считается развитие технологий дополненной реальности.

Актуальность исследования обусловлена необходимостью постоянного поиска новых эффективных методов обучения, которые соответствуют требованиям современного общества и способствуют развитию у учеников креативного мышления и умения обрабатывать информацию. В эпоху цифровых технологий дополненная реальность может из простого увлечения превратиться в ключевой инструмент, обеспечивающий формирование динамичной и интерактивной образовательной среды.

**Объектом исследования** является процесс обучения информатике в основной школе.

**Предметом исследования** является использование возможностей технологий дополненной реальности при обучении информатике в основной школе.

**Целью** данной работы является анализ эффективности использования технологий дополненной реальности при обучении информатике в основной школе и создание объекта дополненной реальности по теме «Персональный компьютер».

**Практическая значимость работы:** разработанные AR-объекты могут быть использованы учителями в учебном процессе и студентами при прохождении педагогической практики.

«Технология дополненной реальности (Augmented reality, AR) – технология, позволяющая интегрировать информацию с объектами реального времени в форме текста, компьютерной графики, аудио и иных представлений в режиме реального времени» [7].

Дополненная реальность позволяет расширить реальную картину мира, добавляя в нее всевозможные рисунки, графики, аудио- или видеоматериалы.

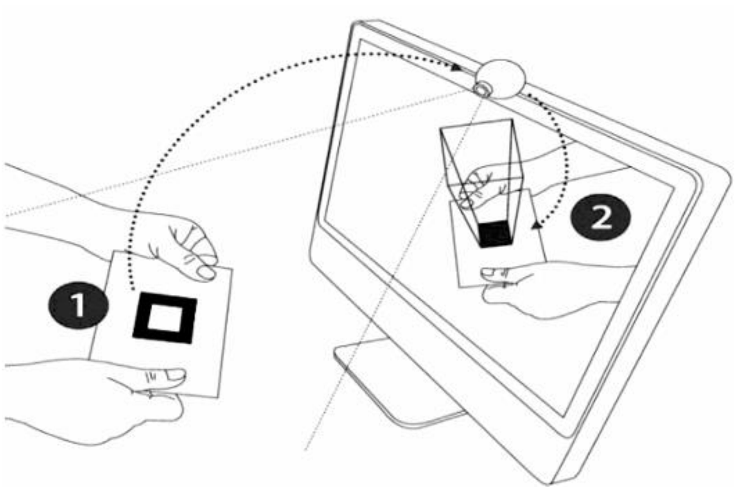



Рисунок 1. Процесс возникновения дополненной реальности

По типу отображения, принято выделять 4 основных типа дополненной реальности:

1. Маркерная дополненная реальность. Такая дополненная реальность использует QR-коды или статичное изображение для запуска интерактивного взаимодействия, а программа распознает маркер и накладывает на него виртуальные объекты.

2. Дополненная реальность без использования маркеров. Этот тип дополненной реальности уже опирается не на физическое изображение, а использует данные об окружающих физических объектах, снятых на камеру пользователя. На окружающие человека объекты, снятые камерой, накладывается виртуальная сетка. На этой сетке программа выбирает особенные точки, к которым прикрепляются уже виртуальные объекты.

3. Проекционная дополненная реальность. Данный тип дополненной реальности использует проекторы для отображения цифровых 3D объектов на плоской двумерной поверхности.

4. «Пространственная» технология дополненной реальности. В ней используются данные о местоположении пользователя, а виртуальный контент прикрепляется к координатам в пространстве. Активация технологии происходит при совпадении координат, заложенных программой, с координатами пользователя [2].

Первые упоминания о наложении информационных объектов на реальные объекты появились в 1960-х годах. Основателем идеи концепции, которую в современном мире называют AR технологиями, можно считать Айвена Сазерленда. В 1965 году он опубликовал эссе, в котором описывал концепцию идеального дисплея: «Идеальный дисплей, конечно же, представлял бы собой комнату, в которой компьютер способен управлять существованием материи. Кресло, отображённое в такой комнате, было бы достаточно реальным, чтобы на нём сидеть. Наручники, созданные в ней, могли бы удерживать, а пуля – убивать. При соответствующем программировании такой дисплей буквально стал бы Страной чудес, в которую вошла Алиса» [2].

В 1968 году Айвен Сазерленд создал первый шлем виртуальной и дополненной реальности. Шлем был настолько тяжелый, что его приходилось подвешивать к потолку, из-за чего за ним закрепилось название – «Дамоклов меч».

Термин «дополненная реальность» впервые был упомянут в 1992 году американскими учеными Томом Коделлом и Дэвидом Мизеллом, работающими в компании Boeing. Их целью было создание системы для помощи работникам авиазавода.

Использование технологий дополненной реальности на уроках может позволить визуализировать процессы, которые трудно или даже невозможно воссоздать в реальном мире, и, благодаря этому, сделать процесс обучения более понятным и интересным.

Перечислим основные преимущества и недостатки внедрения AR в образование.

**Преимущества AR в образовании:**

- повышение вовлеченности и мотивации учащихся;
- повышение наглядности и интерактивности учебного материала;
- индивидуализация и дифференциация обучения;

- формирование цифровых компетенций.

**Недостатки AR в образовании:**

- высокая стоимость внедрения;
- отвлекающий фактор и снижение концентрации внимания;
- ограничения по нормам СанПин и образовательным стандартам;
- методические и организационные проблемы.

Немногие педагоги готовы к использованию элементов дополненной реальности на уроках. Главная сложность заключается в отсутствии подходящих методических разработок, ведь большинство из существующих AR-приложений не учитывают возрастные особенности обучающихся, а также не соответствуют учебным программам, а, в большей степени, являются развлекательным контентом. Из-за этого учителям приходится адаптировать материал, что требует дополнительное время при подготовке к урокам и соответствующий уровень цифровых компетенций учителя [10].

Для создания виртуальных объектов, прежде всего, необходимо выбрать подходящий инструмент. В процессе создания были проанализированы несколько приложений и проведена их сравнительная характеристика для выбора наилучшего.

В таблице 1 представлены основные характеристики перечисленных ранее платформ.

Таблица 1. Сравнительная характеристика инструментов

| Платформа | Удобство использования | Язык программирования | Понятность интерфейса | Доступность |
|---|---|---|---|---|
| Unity + Vuforia | Среднее (требует навыков работы с 3D) | C# | Интерфейс сложный, требует знания английского языка | Бесплатная, требует установки. Недоступна в РФ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Web – AR Studio | Высокое | Без кода | На русском языке, интуитивный | Платная, есть пробный период |
| Unity + AR Foundation | Низкое | C# | Интерфейс сложный, требует знания английского языка | Бесплатная, требует установки |
| CoSpaces Edu | Высокое | Блоки (аналог Scratch)/JavaScript | На русском языке, простой | Бесплатны простые инструменты. Расширения требуют покупки. |

Для создания виртуальных объектов была выбрана платформа Web – AR Studio, так как она имеет русскоязычный интерфейс и все необходимые функции для создания простого виртуального контента.

В рамках учебной программы 7–9 классов были рассмотрены и выбраны темы, подходящие для визуализации с помощью средств дополненной реальности. Наиболее подходящей оказалась тема «Персональный компьютер». Данная тема изучается в 7 классе по учебнику Босовой Л.Л. [3]. На изучение отводится 1 час.

Выбранная тема оказалась наиболее удачной для визуализации с помощью дополненной реальности, так как она содержит наглядные компоненты (материнская плата, процессор, видеокарта и др.), которые удобно представить в 3D. В учебнике при изложении содержания данной темы основные компоненты персонального компьютера не представлены отдельно, а лишь описаны и приведены на одной диахромной иллюстрации, что не позволяет обучающимся в полной мере визуализировать основные компоненты системного блока.

**Создание объекта дополненной реальности для урока по теме «Персональный компьютер»**

1. *Подготовка моделей.*

В качестве 3D моделей были выбраны и загружены в приложение в формате GLB основные компоненты ПК:

1. Материнская плата
2. Процессор
3. Внешняя память
4. Внутренняя память
5. Карты расширений
6. Блок питания

2. *Создание и настройка AR-сцены.*

В качестве маркера будем использовать иллюстрацию из учебника. Для начала нужно загрузить данное изображение в качестве триггера на платформу Web – AR Studio. Программа сама анализирует подойдет ли изображение для использования его в качестве маркера.

Следующим шагом будет добавление и переименование (для удобства) необходимого количества сцен. После добавления сцен, добавляем на каждую из них необходимый объект. Каждая сцена будет содержать либо 3D модель объекта, либо его описание.

Каждую 3D модель необходимо отрегулировать по размеру и выставить на сцене так, чтобы при наведении камеры на маркер, модель можно было бы детально рассмотреть со всех сторон.

3. *Добавление интерактивности.*

Для удобства использования готового продукта необходимо добавить кликабельные элементы. Например, при нажатии на модель видеокарты, сцена переключается на ее описание, а при нажатии на описание возвращает пользователя на начальный экран, на котором перечислены основные компоненты компьютера. Начальный экран также содержит кнопки, которые отправляют пользователя на сцену с выбранным элементом.

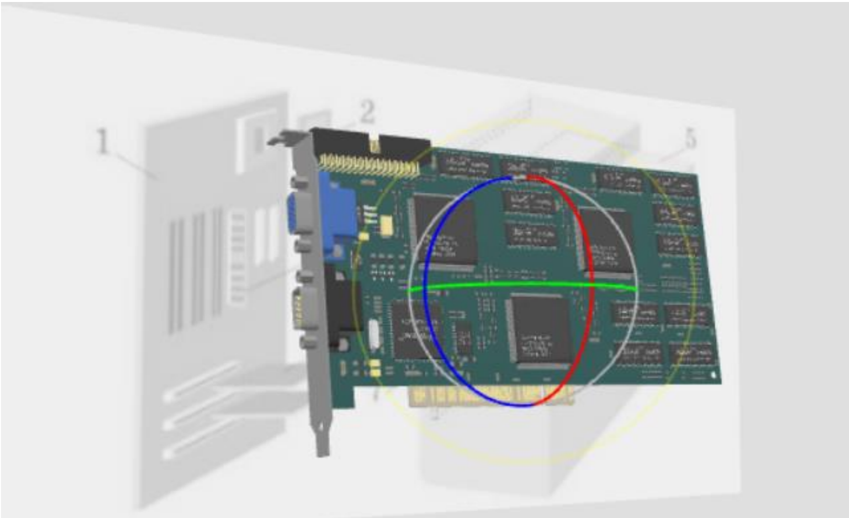



Рисунок 2. Пример 3D модели видеокарты

Технологии дополненной реальности обладают значительным потенциалом для современного образования. Их правильное применение на уроках информатики обеспечит повышение качества образования и разовьет у учащихся не только больший интерес к предмету, а что более важно в век информационных технологий, умение работать с инновационными технологиями. Однако для успешного внедрения технологий дополненной реальности важно обеспечить школы хорошим техническим оборудованием, разработать методические материалы и обучить учителей, а также продолжать изучение новых возможностей AR технологий в образовании.

Список литературы

1. Schmalstieg D., Höllerer T. Augmented Reality: Principles and Practice // USA: Addison-Wesley Professional, 2016. – 528 p. [Электронный ресурс]. – URL: https://books.google.ru/books?id=qPU2DAAAQBAJ (дата обращения: 07.05.2025).

2. Биткин В.В. Дополненная реальность, её виды и инструменты создания // Скиф. – 2021. – № 5. С С. 106 –109. [Электронный ресурс]. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/dopolnennaya-realnost-eyo-vidy-i-instrumenty-sozdaniya (дата обращения: 15.02.2022).
3. Босова Л.Л. Информатика: 7 класса: базовый уровень: учебник / Л.Л. Босова, А.Ю. Босова. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2021. – 240 с. – ISBN 978-0003-05. – [Электронный ресурс]. URL: https://go.11klasov.net/8568-informatika-uchebnik-dlja-7-klassa-bosova-ll.html (дата обращения: 10.11.2023).
4. Гарсон Х., Павон Х., Балдирис С. Применение дополненной реальности в образовании: метаанализ // Computers & Education. – 2020. – Vol. 145. – P. 103778 [Электронный ресурс]. – DOI: 10.1016/j.compedu.2019.103778. (дата обращения: 07.05.2025).
5. Дюличева Ю. Ю. О применении технологии дополненной реальности в процессе обучения математике и физике // Открытое образование. – 2020. – Т. 24, № 3. – С. 44 – 55. [Электронный ресурс]. – DOI: 10.21686/1818-4243-2020-3-44-55. (дата обращения: 11.05.2025).
6. Иванова А. В. Технологии виртуальной и дополненной реальности: возможности и препятствия применения // Современные технологии в образовании. – 2018. – № 3. – С. 88 – 107. [Электронный ресурс]. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/tehnologii-virtualnoy-i-dopolnennoy-realnosti-vozmozhnosti-i-prepyatstviya-primeneniya (дата обращения: 11.05.2025).
7. Маслова Ю.А., Белов Ю.С. Технологии дополненной реальности // КиберЛенинка [Электронный ресурс]. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/tehnologii-dopolnennoy-realnosti/viewer (дата обращения: 01.05.2025).
8. Ольшанникова Е., Ометов А., Кучерявый Ю. и др. Визуализация больших данных с помощью дополненной и виртуальной реальности: проблемы и направления исследований // Журнал больших данных 2, 22 (2015) [Электронный ресурс]. – URL: https://doi.org/10.1186/s40537-015-0031-2
9. Половинко Е. В., Ботвинева Н. Ю., Чебоксаров А.Б., Использование виртуальной (VR) и дополненной (AR) реальности в современном школьном образовании // Современные информационные технологии в образовании. – 2021. – № 3. – С. 45–52 [Электронный ресурс]. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/ispolzovanie-virtualnoy-vr-i-dopolnennoy-ar-realnostey-v-sovremennom-shkolnom-obrazovanii/viewer (дата обращения: 31.05.2025).

10. Сайын И. С., Морозов Б. Б. Анализ использования дополненной реальности в образовании // Вестник науки. – 2020. – № 12 (33) [Электронный ресурс]. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/analiz-ispolzovaniya-dopolnennoy-realnosti-v-obrazovanii(дата обращения: 11.05.2025).

11. Сотников А.М., Тычков А.Ю., Золотарев Р.В., Николаева М.А., Петкилева А.А. Дополненная и виртуальная реальность в образовании как инструмент осознанного обучения // КиберЛенинка [Электронный ресурс]. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/dopolnennaya-i-virtualnaya-realnost-v-obrazovanii-kak-instrument-osoznannogo-obucheniya/viewer (дата обращения: 10.05.2025).

12. Суворова Е. Ю. Образовательный потенциал дополненной реальности // Известия ВГПУ. – 2021. – № 4 (157). – С. 30–35 [Электронный ресурс]. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/obrazovatelnyy-potentsial-dopolnennoy-realnosti (дата обращения: 31.05.2025).

13. Федеральный закон от 29.12.2012 г. № 273-ФЗ // Официальный сайт Президента России [Электронный ресурс]. URL: http://www.kremlin.ru/events/president/news/12345 (дата обращения: 31.05.2025).

14. Филимоненкова Т. Н. Дополненная реальность как инновационная технология образовательного процесса // Проблемы современного педагогического образования. – 2018. – № 58-1. – С. 246–251[Электронный ресурс]. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/dopolnennaya-realnost-kak-innovatsionnaya-tehnologiya-obrazovatelnogo-protsessa(дата обращения: 31.05.2025).

15. Шепелов Н.Н. Дополненная и смешанная реальности в образовании// КиберЛенинка. [Электронный ресурс]. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/dopolnennaya-i-smeshannaya-realnosti-v-obrazovanii/viewer (дата обращения: 15.07.2024).

## О КОНСТРУИРОВАНИИ ПРОГРАММ ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ У ОБУЧАЮЩИХСЯ 7–8- х КЛАССОВ

*Абузяров М.А., Вьюгова Д.Д.*

*Россия, г. Екатеринбург*

*Уральский государственный педагогический университет, Институт математики, физики, информатики*

*Научный руководитель: кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики и методики обучения математике Семенова И.Н.*

*Аннотация.* В работе приводится обоснование необходимости подготовки методического обеспечения для учителей по формированию математической грамотности у обучающихся 7–8-х классов. Представлены рекомендации для реализации поэтапной интерпретации действий учителя, направленных на конструирование дифференцированных программ для достижения указанного результата.

*Ключевые слова:* математическая грамотность, рекомендации учителю, конструирование программ, дифференциация обучающихся.

## ON DESIGNING PROGRAMS FOR THE FORMATION OF MATHEMATICAL LITERACY AMONG STUDENTS IN GRADES 7-8

*Abuzyarov M.A., Vyugova D.D.*

*Russia, Ekaterinburg*

*Ural State Pedagogical University*

*Scientific supervisor: Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics and Methods of Teaching Mathematics Semenova I.N.*

*Abstract.* The research work provides a justification for the need to prepare methodological support for teachers on the formation of mathematical literacy among students in grades 7-8. Recommendations are presented for the implementation of a step-by-step interpretation of the teacher's actions aimed at constructing differentiated programs to achieve the specified result..

*Keywords*: mathematical literacy, recommendations to the teacher, program design, student differentiation.

**Актуальности исследования**

На протяжении своего пути человек неоднократно сталкивается с множеством жизненных ситуаций, решение которых возможно только при интеграции разнообразных знаний и умений. Для успешного применения требуемого объема знаний и умений в жизни необходимо еще в процессе школьного обучения сформировать у индивида позитивные личностные установки и мотивацию к установлению связи с предметным материалом других учебных дисциплин и стратегиями поведения в различных обстоятельствах. Достижение именно таких качеств личности закрепляется как результат образования в федеральном государственном стандарте основного общего образования (ФГОС ООО) в виде формирования у обучающихся функциональной грамотности (ФГ), то есть способности решать учебные задачи и жизненные проблемные ситуации на основе сформированных предметных, метапредметных и универсальных способов деятельности[4][1]. Именно эта грамотность предполагает овладение ключевыми компетенциями, составляющими основу успешной социализации личности, его конкурентоспособности в профессиональной сфере и бытовой жизни. При этом укажем, что одним из компонентов,

4[1] Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования : приказ № 287 : [Утвержден Минпросвещением от 31 мая 2021 г.]. – URL: https://docs.cntd.ru/document/607175848 (дата обращения: 20.11.2025).

составляющих функциональную грамотность, является математическая грамотность (МГ).

Разработкой и исследованием основ формирования ФГ и МГ в отечественном сегменте занимаются такие исследователи, как В. В. Артемьева, Е. А. Артемьева, Л. В. Воронина [2] – формирование МГ заключается в адаптации математического образования к вызовам VUCA-мира (нестабильность, неопределенность, сложность, неоднозначность), который пришел на смену SPOD-миру (устойчивость, предсказуемость, простота, определенность); В. С. Басюк, Г. С. Ковалева [4] – создание и внедрение национальной системы мониторинга формирования ФГ, основанной на концептуальных рамках исследования PISA, с целью переориентации российского образования с усвоения предметных знаний на развитие способности обучающихся применять эти знания для решения практических жизненных задач; В. И. Блинов, Е. А. Рыков, И. С. Сергеев [5] – разработка целостной концепции формирования ФГ студентов среднего профессионального образования; В. Ю. Бодряков [6] – использование цифровых лабораторных работ по математике как эффективного инструмента для формирования МГ, поскольку они позволяют студентам на практике переходить от реального явления к его математической модели и обратно; О. Ю. Васильева [7] – системное обобщение итогов масштабного государственного проекта, доказавшего, что ФГ является интегральной характеристикой образовательных результатов и ключевым фактором повышения конкурентоспособности российского образования, для чего была создана комплексная национальная система её формирования и оценивания; Н. В. Дударева, Е. А. Утюмова [8] – создание универсальной структурно-логической модели формирования МГ, которая является основой для разработки методик обучения на всех ступенях образования от дошкольного до высшего; Л. О. Рослова, К. А. Краснянская, Е. С. Квитко [12] – предлагают концептуальные основы формирования и оценки

МГ в соответствии с международными стандартами PISA; И. Н. Семенова, А. В. Слепухин [16] – представляют возможности использования теоретических основ развивающего обучения математике для формирования у школьников МГ.

На основе вышеизложенных позиций, уже несколько лет активно ведется создание отечественными методистами требуемых материалов, направленных на формирование МГ, с опорой на результаты теоретических изысканий и обобщение эмпирического опыта учителей-практиков. При этом отметим, что анализ методических сборников, направленных на формирование МГ (например, [3; 9; 10; 11; 15; 17] и др.), показал, что во многих из них в качестве основного средства формирования МГ рассматривается такая дидактическая единица школьного курса математики как задача. Однако, на данный момент не представлены, как минимум, варианты или прототипы программ формирования МГ для обучающихся 7–8-х классов, в особенности использующие при разработке дифференцированный подход.

Сказанное определяет **противоречие на научно-методическом уровне** между складывающейся практикой использования различных средств для формирования математической грамотности у обучающихся 7–8-х классов (задач, лабораторных работ по математике и др.) и неразработанностью идеологии конструирования дифференцированных программ, направленных на достижение сформированности МГ.

С позиции выделенных положений сформулируем **проблему**: какие рекомендации необходимо учитывать учителям при конструировании дифференцированных программ по формированию математической грамотности у обучающихся 7–8-х классов?

**Целью исследования** поставим формулировку рекомендаций к конструированию дифференцированных программ по формированию математической грамотности у обучающихся 7–8-х классов.

**Объект исследования**: формирование математической грамотности.

**Предмет исследования**: конструирование программ формирования математической грамотности у обучающихся 7–8-х классов.

В качестве **практической значимости** нами представлены этапы планирования к конструированию дифференцированных программ формирования математической грамотности у обучающихся 7–8-х классов.

**Методология и методы исследования**

Для получения результата в первую очередь определимся с терминологическим аппаратом. Однако, анализ приведенных и других материалов исследователей позволяет сформулировать суждение об отсутствии единой терминологической трактовка понятия МГ. Для однозначности предлагаемых нами позиций укажем основным определение Л. О. Рословой: математическая грамотность – это способность индивидуума проводить математические рассуждения и формулировать, применять, интерпретировать математику для решения проблем в разнообразных контекстах реального мира [14; с. 48].

Для достижения поставленной цели воспользуемся результатом предыдущего нашего исследования, в котором был разработан подход к дифференциации задач по сложности, который учитывает уровень академической успеваемости обучающихся, и тем самым, способствует надежному формированию МГ [1; с. 251-252]. В основу подхода положено объединение концепции уровневой дифференциации обучающихся (по А. Н. Капиносову) и модели оценки сложности задач (по В. И. Крупичу), дополненное подуровнями познавательной деятельности (по А. В. Матвееву) и критериями успешности выполнения заданий (по В. Р. Лещинеру), который представлен в таблице 1.

Таблица 1. Соотнесение сложности и дидактического потенциала задачи для формирования ФМГ с дифференцированными группами обучающихся

| Группа обучающихся | Подуровень | Сложность задачи (в е. с.) | Учебно-познавательные умения, требуемые для решения задачи | Дидактический потенциал задачного материала для формирования ФМГ |
|---|---|---|---|---|
| 1 группа | творческий | более 5 е. с. | продуктивные действия творческого типа:<br>– доказательство;<br>– моделирование;<br>– прогнозирование;<br>– проектирование;<br>– «создание» новой информации | формулирование математики; применение математики; интерпретация математики |
| 2 группа | конструктивно-аналитический | 5-6 е. с. | – анализ;<br>– классификация по указанному основанию;<br>– систематизация (при указании сущности связи элементов);<br>– обобщение | применение математики; интерпретация математики |
| 3 группа | конструктивно-описательный | 3-4 е. с. | – самостоятельное оперирование имеющимися информационным и источниками на основе ранее усвоенного алгоритма;<br>– описание или выявление особенностей явлений | применение математики; интерпретация математики |
| 4 группа | репродуктивный | 1-2 е. с. | – повторение ранее изученных алгоритмов действий;<br>– пересказ усвоенного материала;<br>– владение простейшими учебными действиями | применение математики |

В материалах, представленных в таблице 1, демонстрируется дифференциация контингента обучающихся на группы по актуальной академической успеваемости для формирования МГ с дополнительными уточнениями. В результате нами был получен потенциал для дифференциации учебного материала. Это заключается, прежде всего, в наличии четкой методической рамки, которая позволяет не интуитивно, а на основе объективных критериев (единиц сложности) распределять задачи по уровням, для целенаправленного конструирования и отбора заданий для каждой группы обучающихся.

При этом важно учитывать выделенные критерии при разработке заданий по ФГ, в частности, по МГ, которые выделили Л. О. Рослова, Е. С. Квитко, И. И. Карамова [13; с. 55]:

1) Комплексность предполагает структуру из контекстного текста и системы разноуровневых вопросов, охватывающих различные темы и требующих применения всего спектра когнитивных процессов (от формулирования до интерпретации и рассуждений) с использованием различных форм ответа.

2) Мотивационность характеризует способность задания вызывать интерес и желание глубоко погрузиться в ситуацию.

3) Реалистичность означает, что сюжет и вопросы задания взяты из жизненно правдоподобных, а не надуманных контекстов.

4) Проблемность отражает наличие затруднения, альтернатив или ограничений, которые необходимо преодолеть, моделируя тем самым реальные проблемные ситуации, а не готовые учебные задачи.

5) Компетентностность обусловлена необходимостью привлечения не только математической, но и иной грамотности (читательской, информационной, социальной).

6) Уровневость обеспечивает доступность задания для обучающихся с разной подготовкой за счет вопросов разной сложности: от простых до исследовательских.

7) Вариативность решений предоставляет свободу в выборе математической модели и способа решения, не ограничиваясь рамками конкретной темы.

## Основные результаты

На основе указанного опишем поэтапное планирование деятельности учителя, при составлении дифференцированных программ формирования МГ у обучающихся 7–8-х классов:

1 этап – организационный. Необходимо провести внутреннюю диагностику контингента обучающихся на уровень их актуальной академической успеваемости для дальнейшей их дифференциации по группам от более (1 группа), до менее (4 группа) успешных учеников.

2 этап – проективный. На основе результатов диагностики и предложенной таблицы дифференциации задач учитель формирует банк учебных задач, соответствующих уровням сложности для каждой группы обучающихся. Дополнительно, для каждой группы формулируется задания, направленные на формирование конкретной компоненты (или конкретных компонент) МГ, соответствующим дидактическому потенциалу задачного материала (по таблице 1), которые должны отвечать критериям комплексности, мотивационности, реалистичности, проблемности, компетентностности, уровневости и вариативности.

3 этап – содержательно-методический. Разрабатывается структура каждой дифференцированной программы, включающая:

– цель и задачи формирования математической грамотности;

– планируемые личностные, метапредметные и предметные результаты освоения содержания программы;

– интеграцию межпредметных связей и жизненных контекстов;

– тематическое планирование с учётом дифференциации обучающихся;

– подбор и адаптацию задач и заданий в соответствии со сложностью и с компонентами определения МГ (проведение математических рассуждений, формулирование, применение, интерпретация математики).

4 этап – реализационный. Учитель внедряет программы в образовательный процесс. На этом этапе важно обеспечить:

– последовательное усложнение задач в каждой группе обучающихся;

– поддержку обучающихся в зоне их ближайшего развития.

5 этап – оценочно-рефлексивный. Проводится мониторинг динамики формирования МГ с использованием анализа уровня сформированности умений. По итогам осуществляется корректировка программы и индивидуальных образовательных траекторий обучающихся.

Такая последовательность в поэтапной интерпретации позволит учителю, выполняя конкретные и неабстрактные шаги, достигать необходимого результата для обучающихся любой актуальной академической успеваемости.

## Заключение

Предложенные рекомендации были обсуждены с учителями школ Свердловской области, которые подтвердили, что представленный материал способствует учителю целенаправленно конструировать дифференцированные программы формирования МГ с учётом индивидуальных особенностей обучающихся и современных требований к образовательным результатам.

### Список литературы

1. Абузяров, М. А. О дифференциации дидактического материала, направленного на формирование у обучающихся средней школы функциональной математической грамотности / М. А. Абузяров, Д. Д. Вьюгова, И. Н. Семенова // Проблемы дошкольного и общего образования в Российской Федерации. – Ульяновск : ИП Кеньшенская

Виктория Валерьевна (издательство «Зебра»), 2024. – С. 247-261. – URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=65679799 (дата обращения: 18.11.2025).
2. Артемьева, В. В. Математическая грамотность как необходимый элемент функциональной грамотности личности / В. В. Артемьева, Л. В. Воронина, Е. А. Артемьева // Функциональная грамотность: новые дидактические решения и методические императивы : Материалы международной научно-практической конференции, Ярославль, 01–02 ноября 2022 года. – Ярославль : Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского, 2023. – С. 135-142. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=50302691&pff=1 (дата обращения: 16.11.2025).
3. Банк задач на ФМГ. – URL: https://gukolomna.ru/obrazovanie/fmg-tasks-bank-rus.php (дата обращения: 16.11.2025).
4. Басюк, В. С. Инновационный проект Министерства просвещения «Мониторинг формирования функциональной грамотности»: основные направления и первые результаты / В. С. Басюк, Г. С. Ковалева // Отечественная и зарубежная педагогика. – 2019. – Т. 1, № 4(61). – С. 13-33. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=39249302 (дата обращения: 16.11.2025).
5. Блинов, В. И. Концепция формирования функциональной грамотности студентов среднего профессионального образования / В. И. Блинов, Е. А. Рыкова, И. С. Сергеев // Профессиональное образование и рынок труда. – 2019. – № 4. – С. 4-21. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=41335653 (дата обращения: 16.11.2025).
6. Бодряков, В. Ю. Лабораторные работы по математике как инструмент формирования функциональной математической грамотности студентов / В. Ю. Бодряков // Физико-математическое образование: цели, достижения и перспективы : Материалы Международной научно-практической конференции, Минск, 25–26 ноября 2021 года / Редколлегия: С.И. Василец, А.Ф. Климович (отв. ред.), В.Р. Соболь [и др.]. – Минск : Учреждение образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка», 2021. – С. 36-39. – EDN XIDGJA. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=50004684 (дата обращения: 16.11.2025).
7. Васильева, О. Ю. Итоги проекта «Мониторинг формирования функциональной грамотности обучающихся» / О. Ю. Васильева, В. С. Басюк, Г. С. Ковалева // Известия Российской академии образования. – 2025. – № 1(69). – С. 43-63. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=81457983 (дата обращения: 16.11.2025).
8. Дударева, Н. В. Модель формирования функционально-математической грамотности в процессе обучения математике / Н. В. Дударева, Е. А. Утюмова // Педагогическое

образование в России. – 2021. – № 4. – С. 14-25. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=46547603 (дата обращения: 16.11.2025).
9. Математическая грамотность : пособие по развитию функциональной грамотности старшеклассников / Т. А. Трофимова [и др.]. М., 2021. – 68 с.
10. Математическая грамотность. – URL: http://skiv.instrao.ru/bank-zadaniy/matematicheskaya-gramotnost/ (дата обращения: 16.11.2025).
11. Методические рекомендации по формированию функциональной грамотности обучающихся 5-9 классов с использованием открытого банка заданий на цифровой платформе по шести направлениям функциональной грамотности в учебном процессе и для проведения внутришкольного мониторинга формирования функциональной грамотности обучающихся / Г. С. Ковалева [и др.]. М., 2022. – 360 с. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=50387826 (дата обращения: 16.11.2023).
12. Рослова, Л. О. Концептуальные основы формирования и оценки математической грамотности / Л. О. Рослова, К. А. Краснянская, Е. С. Квитко // Отечественная и зарубежная педагогика. – 2019. – Т. 1. № 4(61). – С. 58-79. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=39249304 (дата обращения: 16.11.2025).
13. Рослова, Л. О. Критерии для разработки заданий, предназначенных для формирования и оценки математической грамотности / Л. О. Рослова, Е. С. Квитко, И. И. Карамова // Отечественная и зарубежная педагогика. – 2023. – Т. 2, № S1(90). – С. 51-64. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=50408039 (дата обращения: 18.11.2025).
14. Рослова, Л. О. Методическая система формирования математической грамотности как необходимое условие научно-технологического развития страны / Л. О. Рослова // Актуальные перспективы развития функциональной грамотности : сборник материалов Всероссийского форума экспертов по функциональной грамотности с международным участием (Москва, 09 – 10 апреля 2025 года). – Москва : ФГБУ «Российская академия образования», 2025. – С. 89-92.
15. Сборник диагностических заданий для проверки предметных результатов обучения учащихся основной школы / Э. М. Амбарцумова [и др.]. М., 2022. – 72 с. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=50441044 (дата обращения: 16.11.2025).
16. Семенова, И. Н. Использование теоретических основ развивающего обучения математике для формирования у школьников функциональной математической грамотности / И. Н. Семенова, А. В. Слепухин // Эвристическое обучение математике : V Международная научно-методическая конференция, Донецк, 23–25 декабря 2021 года.

– Донецк : Донецкий национальный университет, 2021. – С. 324-329. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=48361685 (дата обращения: 16.11.2025).
17. Сергеева, Т. Ф. Математика на каждый день. 6–8 классы : учеб. пособие / Т. Ф. Сергеева. – М., 2020. – 112 с. – URL: https://clck.ru/36DVxF (дата обращения: 16.11.2025).

## ВОПРОСЫ ФОРМИРОВАНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ У ОБУЧАЮЩИХСЯ В ТРУДАХ Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Д.А. Митрофанов, магистрант

Орск, Орский гуманитарно-технологический институт (филиал) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет», факультет педагогического образования

Т.И. Уткина, д-р. пед. наук, профессор

*Аннотация.* Работа раскрывает педагогическое наследие Николая Ивановича Лобачевского как реформатора математического образования, чьи идеи предвосхитили современное понятие функциональной математической грамотности. Проблема формирования функциональной математической грамотности актуализирована обновленными федеральными государственными образовательными стандартами среднего общего образования (2021 г.). В работе представлены ключевые идеи Н.И. Лобачевского по формированию функциональной математической грамотности в различных его публикациях, например, «Речи о важнейших предметах воспитания» и «Наставлениях учителям математики», в которых Н.И Лобачевский настаивал на связи математических знаний в жизни, понимании вместо зубрёжки и практико-ориентированном обучении. Его подход, направленный на формирование функциональной математической

грамотности как универсального инструмента, остаётся актуальным и в наши дни.

*Ключевые слова:* Н.И. Лобачевский, функциональная математическая грамотность, математическое образование, педагогика, геометрия, учебники, Казанский университет, PISA.

**The best research work**

**ISSUES OF FORMING FUNCTIONAL MATHEMATICAL LITERACY (FML) IN STUDENTS IN THE WORKS OF N.I. LOBACHEVSKY**

D.A. Mitrofanov, Master's Student

Orsk, Orsk Humanitarian and Technological Institute (Branch) of the Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Orenburg State University", Faculty of Pedagogical Education

T.I. Utkina, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor

*Abstract.* The work reveals the pedagogical legacy of Nikolai Ivanovich Lobachevsky as a reformer of mathematical education, whose ideas anticipated the modern concept of functional mathematical literacy. The problem of developing functional mathematical literacy has been updated by the revised Federal State Educational Standards for Secondary General Education (2021). The paper presents the key ideas of N.I. Lobachevsky on developing functional mathematical literacy in his various publications, such as "Speeches on the Most Important Subjects of Education" and "Instructions for Mathematics Teachers," where N.I. Lobachevsky emphasized the importance of connecting mathematical knowledge with everyday life, understanding instead of rote memorization, and practical-oriented learning. His approach to developing functional mathematical literacy as a universal tool remains relevant today.

*Keywords*: N.I. Lobachevsky, functional mathematical literacy, mathematical education, pedagogy, geometry, textbooks, Kazan University, PISA.

Введение. Актуальность данной работы определяется социальным заказом, сформулированным в обновленных федеральных государственных образовательных стандартах (ФГОС ОО), федеральной рабочей программой по математике для 5-9 классов и недостаточном уровнем сформированной функциональной математической грамотности учащихся [5, 6].

Целью работы является исследование педагогического наследия Н.И. Лобачевского для решения проблемы формирования математической функциональной грамотности (ФМГ) у обучающихся.

Объектом исследования выступает процесс формирования функциональной математической грамотности у обучающихся, а предметом - педагогические идеи Н.И. Лобачевского, содержащиеся в его трудах, ориентированные на развитие ФМГ.

Новизна исследования заключается в рассмотрении наследия Н.И. Лобачевского через призму современной концепции ФМГ, в частности, в рамках международного исследования PISA.

Когда мы произносим имя Николая Ивановича Лобачевского, наш мысленный взор рисует образ гениального геометра, создателя неевклидовой вселенной. Но был и другой Лобачевский - страстный педагог-реформатор, который за полтора века до того, как термин «функциональная грамотность» вошел в моду, уже воплощал его принципы в жизнь. Его наследие - это не только кривые пространства, но и революционный взгляд на то, как и зачем нужно учить математике каждого человека.

Это рассказ о том, как в стенах Казанского университета и российских гимназий XIX века рождалась идея: математика - не сухая абстракция для избранных, а живой инструмент для понимания и преобразования мира [1, 2].

В 1828 году, став ректором Казанского университета, Н.И. Лобачевский произнес свою знаменитую «Речь о важнейших предметах воспитания». Этот текст можно считать его педагогическим манифестом. Здесь он не просто излагает мысли, а провозглашает принцип, который сегодня является краеугольным камнем функциональной грамотности: связь знания с жизнью: «Науки не должны быть отчуждены от общего образования, не должны составлять тайну для толпы... Математику должно учить затем, что она упорядочивает ум» [1].

Это высказывание является квинтэссенцией его «Речи» [1]. Точную цитату можно найти в издании: Лобачевский Н.И. Речь о важнейших предметах воспитания. - Казань, 1828. – С. 15-16. (Оригинал хранится в Национальной библиотеке РФ и архиве Казанского университета) [1].

Н.И. Лобачевский утверждал, что математика - это не сборник формул, а «гимнастика для ума», которая учит логически выстраивать мысли, отделять главное от второстепенного, находить причинно-следственные связи. Это и есть ядро функциональности: сформированное математикой мышление работает в любой сфере - от юриспруденции до управления имением.

Ключевые идеи относительно формирования ФМГ у обучающихся, выступающие как инструкция к действию по обучению математике, сформулированная в работе «Наставления учителям математики в гимназиях» (1840-е гг.) [2].

Если «Речь» - это манифест, то «Наставления» - это подробная инструкция, как этот манифест воплотить в обучении математике на любом уровне. Этот документ, рассылавшийся по всем гимназиям Казанского учебного округа, поражает своей современностью относительно решения проблемы формирования ФМГ у обучающихся: «Понимание, а не зубрежка» [1, 2]. Н.И. Лобачевский прямо запрещал механическое заучивание. Он требовал, чтобы ученик понимал не только правило, но и его происхождение и связь с другими правилами: «Ученик должен не только знать то или другое правило, уметь решать ту или другую задачу, но и понимать связь правил, видеть их необходимость и возможность приложений» [2].

Другой ключевой идеей в трудах Н.И. Лобачевского относительно формирования ФМГ является: «от практики - к теории». Он считал, что обучение начиналось не с абстрактной теоремы, а с наглядной, жизненной задачи: «Начиная геометрию, не спешите с определениями. Начните с измерения расстояний, высот деревьев, зданий, с задач на разделение участков земли. Пусть ученик сначала почувствует необходимость в науке, а затем уже узнает ее законы» [2].

Н.И. Лобачевский не только учил учителей, но и сам писал учебники. Его «Геометрия» [3] и «Алгебра» [4] для гимназий были новаторскими в плане конкретной реализации модели формирования ФМГ у обучающихся. В них было минимум сухих формулировок и максимум объяснений, диалога с читателем и практических задач. Пример из «Геометрии»: прежде чем дать строгое доказательство теоремы о подобии треугольников, он предлагал ученикам измерить пропорциональные отрезки на местности, чтобы определить ширину реки или высоту колокольни [3].

Проведенный анализ трудов Н.И. Лобачевского относительно проблемы формирования ФМГ позволил сделать сопоставление компонентного состава ФМГ по версии PISA и федеральной рабочей программы по математике 5-9 классов (таблица 1, 2).

Таблица 1. Компоненты функциональной математической грамотности в федеральной рабочей программе по математике основного общего образования и ключевые идеи трудов Н.И. Лобачевского

| Компонент ФМГ в федеральной рабочей программе | Ключевые идеи трудов Н.И. Лобачевского, ориентированные на развитие компонентов ФМГ |
|---|---|
| Умения распознавать проявления математических понятий, объектов и закономерностей в реальных жизненных ситуациях и при изучении других учебных предметов, проявления зависимостей и закономерностей | 1. Видеть математические структуры в окружающих явлениях (геометрия в архитектуре, проценты в финансовых расчетах, статистика в анализе данных) [3].<br>2. Выявлять зависимости и закономерности между различными величинами (скорость-время-расстояние в физике, причинно-следственные связи в естественных науках) [3]. |
| Формулировать математические понятия на языке математики и создавать математические модели | 1. Переводить на формальный язык: Точно выражать вербальные определения, условия задач и жизненные ситуации с помощью математической символики, терминов, формул и чертежей [2, 4]. |

| | |
|---|---|
| | 2. Абстрагировать и идеализировать: Выделять в реальном объекте или процессе его существенные количественные и структурные характеристики, отвлекаясь от второстепенных деталей [3, 4]. |
| Применять освоенный математический аппарат для решения практико-ориентированных задач | 1. Выбирать адекватный инструментарий: Осознанно подбирать подходящие математические методы, формулы, алгоритмы и теоремы для решения конкретной прикладной проблемы [2, 3, 4].<br>2. Действовать по алгоритму и выходить за его рамки: Чётко следовать известным методам решения и гибко адаптировать их под нестандартные условия задачи [2]. |
| Интерпретировать и оценивать полученные результаты | 1. Переводить с математического языка на естественный: Объяснять, что означает найденное число, формула или график в контексте исходной реальной задачи [2, 3 ,4]. |

| | |
|---|---|
| | 2. Оценивать правдоподобие и адекватность: Анализировать, является ли ответ реалистичным с точки зрения здравого смысла и условий задачи. (Например, отрицательное количество банок краски или время движения явно указывает на ошибку в модели или расчётах) [2, 3]. |
| Развитие математического мышления | 1. Абстрактное и логическое мышление:<br>Умение отвлекаться от конкретных деталей, выделяя существенные структурные и количественные отношения [2, 3, 4].<br>2. Алгоритмическое и структурное мышление:<br>Умение видеть порядок и последовательность, составлять и выполнять план действий (алгоритм).<br>Способность выявлять иерархии, структуры и закономерности в сложных системах [2, 3]. |

Таблица 2. Компоненты ФМГ по версии PISA и ключевые идеи трудов Н.И. Лобачевского

| Компоненты ФМГ по международному исследованию PISA | Ключевые идеи трудов Н.И. Лобачевского, ориентированные на развитие компонентов ФМГ |
|---|---|
| Способность формулировать, применять и интерпретировать математику в разнообразных контекстах | Начинать урок с практической проблемы (измерить, вычислить, разделить) [2, 3, 4]. |
| Использовать математические понятия и инструменты | Использовать задачи из геодезии, торговли, строительства [3, 4]. |
| Применять математические рассуждения | Требовать от ученика не просто дать ответ, а объяснить, что он означает в реальном контексте [2]. |

Его система была нацелена на формирование «здравого смысла» - именно того качества, которое позволяет человеку уверенно действовать в современном сложном мире.

Николай Иванович Лобачевский видел в математике не свод догм, а динамичный язык, на котором говорит сама природа. Его педагогические труды - это не архивная пыль, а живое послание всем нам, кто связан с образованием.

Он доказал, что истинно великое открытие - это не только новая геометрия, но и новая философия обучения, где ученик - не сосуд для наполнения, а активный исследователь, вооруженный мощным инструментом - функциональным математическим мышлением. И этот инструмент, выкованный в Казани XIX века, остается острым и востребованным в XXI веке [1].

Проведенное исследование позволяет сделать вывод, что ключевые идеи в трудах Н.И. Лобачевского могут быть положены в основу методологии формирования ФМГ у обучающихся как на уровне общего образования, так и профессионального образования.

Список литературы

1. Лобачевский Н.И. Речь о важнейших предметах воспитания. - Казань: Университетская типография, 1828. - 24 с.

2. Лобачевский Н.И. Наставления учителям математики в гимназиях // Сборник распоряжений по Казанскому учебному округу. - Казань, 1840-е гг. - ЦГА ТР, Ф.92, Оп.1.

3. Лобачевский Н.И. Геометрия. - Учебное руководство для гимназий. - Казань: Университетская типография, 1823. - 198 с.

4. Лобачевский Н.И. Алгебра, или Вычисление конечных. - Учебное руководство для гимназий. - Казань: Университетская типография, 1834. - 480 с.

5. Федеральная рабочая программа по учебному предмету "Математика" (5-9 классы) [Электронный ресурс]. - М.: Институт стратегии развития образования РАО, 2021. - URL: https://gclnk.com/2ZUyhfF2 (дата обращения: 15.11.2024).

6. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования [Электронный ресурс]: утв. приказом Министерства просвещения РФ от 31 мая 2021 г. № 287. - URL: http://publication.pravo.gov.ru/document/0001202107050028 (дата обращения: 15.11.2024).

## УСЛОВИЯ ОВЛАДЕНИЯ ЯЗЫКОМ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРОЙ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В 5-6 КЛАССАХ

*Гусева М.А.*

*Россия, г. Екатеринбург*

*Уральский государственный педагогический университет*

*Институт математики, физики и информатики*
*Научный руководитель: к.п.н., доцент Утюмова Е.А.*

*Аннотация.* В статье рассматриваются условия и методы формирования математического языка и математической культуры у учащихся 5-6 классов, что является одной из ключевых задач современного образования в соответствии с ФГОС ООО. Определены основные понятия «математический язык» и «математическая культура», раскрыта ее структура. На основе анализа педагогической литературы выделены педагогические условия и разработан комплекс заданий, направленных на развитие компонентов математической культуры.

*Ключевые слова:* математический язык, математическая культура, учащиеся 5-6 классов, формирование, условия, комплекс заданий, ФГОС.

## CONDITIONS FOR MASTERING THE LANGUAGE OF MATHEMATICS AND MATHEMATICAL CULTURE IN MATHEMATICS LESSONS FOR GRADES 5–6

*Guseva M. A.*
*Russia, Yekaterinburg*
*Ural State Pedagogical University*
*Institute of Mathematics, Physics and Informatics*
*Scientific supervisor: Ph. D. (Pedagogy), Associate Professor*
*Utyumova E. A.*

*Abstract.* The article examines the conditions and methods for developing mathematical language and mathematical culture among students in grades 5–6, which is one of the key objectives of modern education in accordance with the Federal State Educational Standard for Basic General Education (FGOS OOO). The core concepts of «mathematical language» and «mathematical culture» are defined, and the structure of mathematical culture is elucidated. Based on an

analysis of pedagogical literature, the key pedagogical conditions are identified, and a set of tasks aimed at developing components of mathematical culture is developed.

*Keywords*: mathematical language, mathematical culture, grades 5–6 students, formation, conditions, set of tasks, FGOS.

Современное математическое образование направлено не только на формирование вычислительных навыков и усвоение алгоритмов, но и на развитие у школьников математического мышления, способности к логическим рассуждениям, а также овладение специфическим языком математики и основами математической культуры. Особенно важным этот процесс становится в среднем звене — в 5–6 классах, когда школьники переходят от наглядно-действенного мышления к более абстрактному и теоретическому.

**Актуальность** темы подтверждается требованиями Федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования (ФГОС ООО[5][1]), который подчёркивает значимость формирования математической культуры как неотъемлемой части общего образования. В частности, в разделе, посвящённом предметной области «Математика», указано, что изучение этой области должно обеспечить:

1. Осознание значения математики в повседневной жизни человека.
2. Формирование представлений о социальных, культурных и исторических факторах становления математической науки.
3. Формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления.

5[1] Приказ Минпросвещения России от 31.05.2021 N 287 (ред. от 22.01.2024) "Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования». – Текст: электронный // ФГОС: [сайт]. – URL: https://sh-pesochenskaya-r62.gosweb.gosuslugi.ru/netcat_files/32/315/FGOS_OOO_v_redaktsii_ot_22.01.2024.pdf (дата обращения: 29.05.2025)

Современное математическое образование ставит перед собой задачу не только передать набор знаний и навыков, но и развить у учащихся важные качества, такие как способность к анализу, логичности и точности выражения своих мыслей. Центральную роль в достижении этих целей играет формирование **математического языка** и **математической культуры**. Рассмотрение условий овладения математическим языком и математической культурой требует четкого понимания базовых терминов и концепций.

Термин «**математический язык**» употребляется как обозначение совокупности всех основных средств, с помощью которых выражается математическое знание и осуществляется математическое мышление. В таком употреблении «язык» охватывает оба важнейших проявления речемыслительной деятельности — язык и речь [1, С. 218].

«**Математическая культура** личности — личностное интегративное качество, представляющее собой результат взаимодействия ценностно-оценочного, когнитивного, рефлексивно-оценочного и действенно-практического компонентов, которые характеризуются сформированным ценностным отношением к получаемым математическим знаниям (**ценностно-оценочный компонент**), высоким уровнем овладения математическими знаниями и умениями (**когнитивный компонент**), умением использовать полученные математические знания и умения в практической деятельности (**действенно-практический компонент**) и развитой способностью к рефлексии процесса и результата математической деятельности (**рефлексивно-оценочный компонент**)» [4, С. 41].

Подробно разберем структуру каждого компонента математической культуры:

1. **Ценностно-оценочный компонент**. Это личное отношение человека к математике и математическим знаниям.

Данный компонент отражает внутренние убеждения, мотивацию и заинтересованность в изучении математики.

2. **Когнитивный компонент**. Этот компонент представляет собой объём знаний и умений, которыми обладает личность в области математики. Это касается владения математическими теориями, приёмами и методами, глубины понимания математических понятий и концепций.

3. **Действенно-практический компонент**. Данный компонент описывает способность применить полученные математические знания и умения в реальной жизни и профессиональной деятельности.

4. **Рефлексивно-оценочный компонент**. Последний компонент заключается в способности к рефлексии, то есть осознанному размышлению о собственном опыте и деятельности в области математики.

Под **формированием математической культуры** будем понимать систематический и целенаправленный процесс присвоения личностью математической культуры, необходимой ему для успешной социальной адаптации к процессам информатизации и технологизации общества [4, С. 41].

Сделаем вывод, что для лучшего формирования математического языка и математической культуры учащимся 5-6 классов **необходимы**:

1. Мотивация к изучению математики:

- использование занимательных, логических, нестандартных задач, головоломок и проектов, вдохновляющих на самостоятельное исследование и размышление, формируя способность делать выводы и умозаключения.

2. Практическое применение математических знаний:

- интеграция математики в реальную жизнь через решение задач, имеющих жизненное значение, таких как расчёт стоимости покупок, измерения площадей помещений и расстояний;

3. Интерактивные методы обучения:

- использование групповых и парных форм работы, мозговых штурмов, квестов и соревнований, что способствует развитию коммуникабельности и лидерских качеств;

4. Формирование умения оценивать выбранные математические решения с точки зрения их эффективности и значимости:

- регулярное обсуждение математических доказательств и способов их обоснования, что способствует формированию культуры математического аргумента.

Анализ педагогической литературы и выделение особенностей формирования математической культуры позволяет выделить следующие **условия** для ее формирования:

- Развитие мотивации к обучению математике.

Формирование познавательного интереса и внутренней мотивации к математике возможно через включение учащихся в поисковую, исследовательскую, игровую деятельность, решение нестандартных задач и логических головоломок. Эффективны также межпредметные связи, показывающие практическую значимость математики.

- Создание ситуации успеха. Важно обеспечить каждому ученику возможность ощутить собственную успешность в изучении предмета. Это достигается через индивидуализацию заданий, поощрение усилий, а не только результата, и создание поддерживающей образовательной среды.

- Связь изучаемых математических фактов с реальной жизнью. Демонстрация применимости математических знаний в быту, в науке и в различных профессиях способствует формированию осознанного отношения к математике как части общей культуры.

- Формирование ценностного отношения к математике. Знакомство с историей математики, с биографиями великих математиков, с культурным значением математических открытий помогает учащимся воспринимать предмет не как абстрактную дисциплину, а как важную часть человеческого знания и прогресса.

На основе проанализированной литературы, выделим для каждого компонента математической культуры слова-конструкторы [2, 6], с помощью которых требуется формулировать задания. Представим результаты в виде таблицы 1.

*Таблица 1. Соответствие слов-конструкторов компонентам математической культуры*

| **Компоненты математической культуры** | **Слова-конструкторы** |
|---|---|
| Ценностно-оценочный | Выразить словами; обосновать; выбрать один ответ из…; сформулировать текст задачи, используя модель; объяснить значение/смысл; оформить высказывание, связывающее причину и следствие; придумать заголовки |
| Когнитивный | Вычленить; определить основную мысль; разделить объект на части; охарактеризовать части объекта; установить, о каких объектах идёт речь; внести данные в таблицу, схему, рисунок; представить в виде… (графика, формулы); определить связи между частями |
| Действенно-практический | Нарисовать схему; создать; сравнить; распределить по признакам; установить общее; найти лишний объект; составить классификацию; определить сходство и различие; рассортировать; выбрать название для классификации; определить параметры сравнения |
| Рефлексивно-оценочный | Сделать вывод; проанализировать; найти ошибку; проверить правильность рассуждений; составить план доказательства; выписать шаги решения; обобщить сказанное; сформулировать умозаключение; вставить пропущенное |

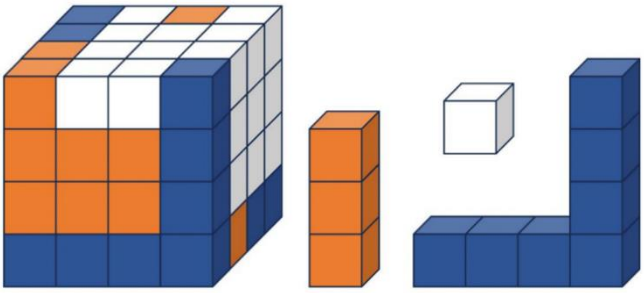
Формирование математического языка и культуры у учащихся средних классов является важнейшей частью их интеллектуального развития.

Овладение этими компетенциями позволяет детям осознавать важность математики в жизни общества, развивать логическое мышление и повышать общую образованность.

Данные **задания** разработаны с целью повышения эффективности обучения и направлены на достижение ключевых элементов математической культуры: владение терминологией и математическим языком, умение оперировать математическими понятиями, умение проводить аргументированные доказательства и адекватно оценивать собственные достижения.

**Задача:**

На перемене Ваня и Лиза поспорили, кто лучше соберёт большой куб 4×4×4 из деталей:



Ваня говорит: «Белых кубиков тут совсем мало, давай сначала ставить синие уголки!». Лиза возражает: «Нет, белых кубиков больше всего, их даже считать долго!». Кто прав? Сколько маленьких белых кубиков спряталось внутри этого куба?

**Задание 1**. Ответьте на вопрос, кто прав в споре: Ваня или Лиза? Объясни свой ответ, используя слова «внутренние кубики», «внешний слой», «объём».

**Задание 2.** Большой куб 4×4×4 можно представить как матрёшку: снаружи — цветные детали, внутри — белые. Ответьте на вопрос: сколько кубиков в самом внутреннем кубе 2×2×2? А если убрать ещё один слой? Запишите, сколько всего белых кубиков получилось.

**Задание 3.** Придумайте правило, как найти количество белых кубиков в кубе $n \times n \times n$, если они всегда спрятаны внутри (т.е. без внешнего слоя). Проверьте свою формулу на примере куба $3 \times 3 \times 3$.

**Задание 4**. Представьте, что большой куб — это коробка с конфетами: сверху — обёртка (цветные детали), внутри — сами конфеты (белые кубики). Ответьте на вопрос: если в коробке $5 \times 5 \times 5$ конфет, сколько из них не видны снаружи? Придумайте свою аналогию с кубом и опиши её.

Решение этой задачи направленно на реализацию **условия 1** (развитие мотивации к обучению математике) и ценностно-оценочного компонента.

**Условие задачи**. В первой половине XVI века немецкий математик Михаил Штифель ввел понятие «отрицательные числа» и именовал их «числами, меньшими, чем нуль» («0 + 5» означает +5, а «0 – 3» означает – 3). Также Штифель дал таблицу для умножения и деления положительных и отрицательных чисел (Рис. 1) [3, С. 142].

для умножения:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0+ 6 | 0− 6 | 0+ 6 | 0− 6 |
| 0+ 4 | 0− 4 | 0− 4 | 0+ 4 |
| 0+24 | 0+24 | 0−24 | 0−24 |

для деления:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0+24 | 0+24 | 0−24 | 0−24 |
| 0+ 6 | 0− 6 | 0+ 6 | 0− 6 |
| 0+ 4 | 0− 4 | 0− 4 | 0+ 4 |

Рис. 1. Таблица Штифеля

**Задание 1**. Запишите современными математическими символами следующие выражения Штифеля и расположите их в порядке возрастания:

- 0 – 9;
- 0 + 15;
- 0 + 4,567;
- $0 - \frac{4}{9}$.

**Задание 2**. Запишите в обозначениях Штифеля следующие числа и прочитайте их:

- $+12$;
- $-5$;
- $+\frac{36}{59}$;
- $-9{,}32$

**Задание 3.** Используя таблицу умножения Штифеля, определите результат каждого выражения и запишите его современными символами:

- $(0 - \frac{3}{66}) \times (0 - \frac{6}{15})$;
- $(0 - 81) \div (0 + 9)$;
- $(0 + 63{,}4) \div (0 - 7{,}2)$;
- $(0 + \frac{17}{54}) \div (0 - 4\frac{11}{27})$.

**Задание 4.** Объясните, почему умножение двух отрицательных чисел даёт положительный результат, используя пример из таблицы Штифеля.

Решение этой задачи направленно на реализацию **4 условия** (формирование ценностного отношения к математике) и действенно-практического компонента.

Проведённое исследование показывает, что регулярная практика предлагаемых упражнений не только помогает учащимся усваивать математические знания, но также развивает у них способность мыслить логически, доказывать свою точку зрения и успешно применять полученные навыки в реальной жизни. Методика сочетает теорию и практику, обеспечивая достижение образовательных стандартов и требований государственных учебных программ.

Список литературы

1. Артебякина О.В. Формирование математического языка у студентов педагогического вуза // Вестник ЧелГУ. 2011. №33. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/formirovanie-matematicheskogo-yazyka-u-studentov-pedagogicheskogo-vuza (дата обращения: 02.06.2025).

2. Бойко О.Ю., Гусева М.А., Соколова Я.А. К вопросу о составлении заданий, направленных на формирование познавательных универсальных учебных действий при изучении школьного курса математики / Наука. Образование. Инновации: Современное Состояние Актуальных Проблем. Сборник научных трудов по материалам IV Международной научно-практической конференции (г.-к. Анапа, 13 июня 2022 г.). – Анапа: Изд-во «НИЦ ЭСП» в ЮФО, 2022. С. 30-37
3. Болгарский Б.В. Очерки по истории математики. – 2 изд. – Минск : Вышэйшая школа, 1979. – 368 с. URL: https://www.mathedu.ru/text/bolgarskiy_ocherki_po_istorii_matematiki_1979/ (дата обращения: 05.06.2025).
4. Воронина Л. В., Моисеева Л. В. Математическая культура личности // Педагогическое образование в России. 2012. №3. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/matematicheskaya-kultura-lichnosti (дата обращения: 02.06.2025).
5. Кучменко К. В., Семенова И.Н. Слова-конструкторы для формулировки заданий, направленных на формирование познавательных универсальных учебных действий / К. В. Кучменко, И. Н. Семенова // Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий. – 2020. – № 5. – С. 300-305.

## ПРОФЕССИОНАЛЬНЫЙ ДЕФИЦИТ: АНАЛИЗ ПРИЧИН И ПОСЛЕДСТВИЙ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ УЧИТЕЛЯМИ-НЕСПЕЦИАЛИСТАМИ

Сайфуллин Рустам Амирович

*Россия, г. Казань*

*Казанский (Приволжский) Федеральный Университет, Институт искусственного интеллекта, робототехники и системной инженерии*

*научный руководитель: Смольникова Камилла Рустемовна, должность: заместитель директора по инновационной деятельности ИВМИТ*

*Аннотация.* В статье исследуется актуальная проблема снижения качества школьного математического образования, связанная с дефицитом профильных кадров. На основе анализа репетиторской практики автора выявлены и систематизированы типичные пробелы в знаниях учащихся (например, полное незнание операций с дробями в 7 классе), возникающие вследствие преподавания предмета учителями-неспециалистами. Определены характерные педагогические ошибки и методические дефициты, приводящие к формированию устойчивых непониманий. В результате исследования разработан комплекс практических рекомендаций, включающий «дорожную карту» для учителя-неспециалиста и предложения по системе внутришкольного методического сопровождения, направленные на минимизацию выявленных рисков.

*Ключевые слова:* качество математического образования, учитель-неспециалист, педагогические риски, системные пробелы в знаниях, кадровый дефицит в школе, методическое сопровождение, репетиторская практика**.**

## PROFESSIONAL SHORTAGE: ANALYSIS OF THE CAUSES AND CONSEQUENCES OF TEACHING MATHEMATICS BY NON-SPECIALIST TEACHERS IN SCHOOLS

*Sayfullin Rustam Amirovich*

*Russain Federation, Kazan*

*Kazan (Volga Region) Federal University, Institute of Artificial Intelligence, Robotics and Systems Engineering*

*Scientific supervisor: Kamilla Rustemovna Smolnikova, position: Deputy Director for Innovation Activities at IVMIT.*

*Abstract.* This article examines the pressing issue of declining quality of school mathematics education due to a shortage of specialized personnel. Based on an analysis of tutoring practices, the author identifies and systematizes typical gaps in students' knowledge (for example, a complete lack of knowledge of operations with fractions in the 7th grade) arising from teaching the subject by non-specialist teachers. Characteristic pedagogical errors and methodological deficiencies leading to persistent misunderstandings are identified. The study resulted in the development of a set of practical recommendations, including a roadmap for non-specialist teachers and proposals for an in-school methodological support system aimed at minimizing the identified risks.

*Keywords*: Quality of mathematics education, non-specialist teacher, pedagogical risks, systemic knowledge gaps, staffing shortages in schools, methodological support, tutoring practice

**Актуальность исследования** обусловлена системным кризисом в обеспечении школ квалифицированными кадрами учителей математики. Вследствие кадрового дефицита, наблюдается повсеместная практика, когда преподавание этого фундаментального предмета поручается педагогам, не имеющим профильного математического образования. **Проблема исследования** заключается в том, что данная ситуация приводит к формированию у школьников системных пробелов в знаниях, которые носят лавинообразный и критический характер. Яркой иллюстрацией этого тезиса является многократно повторяющийся в моей практике **кейс**: учащийся 7-го класса, пришедший ко мне на дополнительные репетиторские занятия, **полностью отсутствовало понимание и умение работать с обыкновенными дробями** — теме, которая является базовой и изучается в 5-6 классах. Анализ ситуации показал, что в предыдущие годы математику в классе ученика преподавал учитель, чья основная квалификация не была связана с математикой. В результате была нарушена преемственность в изучении предмета, и тема, составляющая основу для освоения алгебры, была пропущена. Это наглядный пример того, как **педагогический риск**, вызванный отсутствием предметного специалиста, трансформируется в конкретный, масштабный пробел в знаниях ученика, блокирующий его дальнейшее обучение.

**Объектом данного исследования** являются педагогические риски процесса преподавания математики в школе в условиях кадрового дефицита.

**Предмет исследования** — виды и последствия системных пробелов в математической подготовке учащихся, возникающих из-за низкой предметной квалификации учителя.

Задачи исследования:

1. Выявить на основе анализа репетиторской практики ключевые дефициты предметной и методической подготовки учителей-неспециалистов.
2. Систематизировать и классифицировать типичные пробелы в математической подготовке учащихся, возникшие вследствие преподавания предмета непрофильными педагогами.
3. Проанализировать характерные педагогические ошибки и методические дефициты, приводящие к формированию устойчивых пробелов в знаниях школьников.
4. Разработать практические рекомендации для системы образования и методические ориентиры для учителей-неспециалистов, направленные на минимизацию выявленных педагогических рисков.

***Задача 1: Выявить на основе анализа репетиторской практики ключевые дефициты предметной и методической подготовки учителей-неспециалистов.***

- Шаги по решению задачи: Исследование диссонанса между фактическим уровнем знаний учащихся и оценками, выставленными учителями-неспециалистами, через сравнительный анализ выполненных работ и критериев их оценивания
- Проанализировать соответствие критериев оценивания требованиям ФГОС и примерным образовательным программам

Цель : Выявить конкретные случаи, когда оценка учителя не соответствует реальному качеству работы ученика. Анализирую ниже пример работы моего ученика 5 класса, математику у которого преподает учитель ОБЖ.

**Описание ситуации:** Учащийся 5 класса на контрольной работе по математике представил решение уравнения, соответствующее общепринятому алгоритму:

1. Решение уравнения (поэтапные преобразования).
2. Ответ (запись найденного корня).
3. Проверка (подстановка найденного корня в исходное уравнение для проверки верности результата).

Что сделал педагог при проверке данной работы ученика**:** Учитель (специализация – ОБЖ) зачеркнул пункт «Ответ», сославшись на его некорректность, и снизил оценку.

**Мой взгляд на данную ситуацию:**

1. **Нарушение методических норм:** Предъявленный учеником алгоритм является классическим, отраженным в большинстве

российских школьных учебников по математике для 5 класса и соответствующих методических рекомендациях. Требование записывать ответ является обязательным элементом решения[1]

2. **Противоречие с перспективой ГИА/ЕГЭ:** На государственной итоговой аттестации (ЕГЭ по математике, в частности, задание №13 профильного уровня) отсутствие ответа в решении уравнения ведет к потере баллов, так как ответ является неотъемлемой частью решения. Таким образом, действия учителя формируют у ученика вредный навык, который в будущем может негативно сказаться на его результатах.[4,5]
3. **Гипотеза о некорректном источнике проверки:** Сравнение с алгоритмами, представленными в открытых базах готовых домашних заданий (ГДЗ), показало, что во многих из них этап «Ответ» может быть опущен в целях экономии места или оформлен неявно. Это позволяет выдвинуть гипотезу о том, что учитель использует упрощенные схемы из ГДЗ как эталон, а не утвержденные методические пособия.

**Систематизировать и классифицировать типичные пробелы в математической подготовке учащихся, возникшие вследствие преподавания предмета непрофильными педагогами.**

Цель задачи**:** Перейти от единичных случаев к обобщенной картине, создав классификацию основных типов пробелов, их частоту и критичность.

Шаги по решению задачи:

**1. Категоризация выявленных пробелов.**
На основе анализа всех собранных работ (как в Задаче 1) мы группируем проблемы по их природе:

- **Категория 1: Концептуальные пробелы.**
  - **Что это означает:** Непонимание сути математического понятия или правила.[8,9]
  - **Пример из моей практики:** Ученик не понимает, что уравнение — это равенство с переменной, и выполняет с ним действия как с числовым выражением.
  - **Другой пример:** Ученик заучил, что «минус на минус дает плюс», но не может объяснить это на примере или движения по координатной прямой.
- **Категория 2: Алгоритмические пробелы.**
  - **Что это означает:** Незнание или неверное применение стандартного алгоритма решения.
  - **Пример из моей практики:** Ученик, правильно решая уравнение, не записывает ответ, так как учитель не считает это обязательным (задача 1, см. выше).
  - **Другой пример:** Путаница в алгоритме сложения/вычитания столбиком, неверный порядок действий в выражениях со скобками.
- **Категория 3: Терминологические и языковые пробелы.**
  - **Что это означает:** Непонимание или путаница в математической терминологии.
  - **Пример:** Ученик не видит разницы между «уравнением» и «выражением», «периметром» и «площадью». Учитель-неспециалист сам может использовать термины неточно.

**2. Ранжирование пробелов по степени критичности.** Мы определяем, какие пробелы наиболее опасны для дальнейшего обучения:

- **Критический уровень:** Пробелы, блокирующие изучение последующих тем.
    - *Пример:* Непонимание дробей (Категория 1) делает невозможным изучение алгебры, процентов, пропорций. Мой пример с учеником 7 класса, не знающим дробей, — идеальная иллюстрация.
- **Высокий уровень:** Пробелы, создающие постоянные серьезные трудности.
    - *Пример:* Неумение решать простые уравнения (Категория 2) будет мешать на уроках физики, химии и, конечно, математики.
- **Уровень средней тяжести:** Пробелы, которые можно относительно быстро устранить, но которые искажают общее понимание.
    - *Пример:* Ошибки в терминологии (Категория 3).

Задача 3: Проанализировать характерные педагогические ошибки и методические дефициты, приводящие к формированию устойчивых пробелов в знаниях школьников.

| Выявленный пробел ученика | Предполагаемые действия/бездействия учителя |
|---|---|
| Незнание дробей | Учитель не использует круги, прямоугольники для показа долей. Не связывает дроби с жизнью (деление пиццы, шоколада). Дает правила, как готовые формулы. |
| Непонимание отрицательных | Учитель не показывает числа на |

| | |
|---|---|
| чисел | координатной прямой. Не объясняет смысл через "долг" или "температуру". Правила вроде "минус на минус дает плюс" подаются как то, что нужно зазубрить. |
| Путаница между периметром и площадью | Учитель не дает физического смысла ("пройти по границе" – периметр, "закрасить" – площадь). Нет практических работ с измерением класса или фигур. |
| Ошибки при решении уравнения(неправильное оформление) | Учитель использует упрощенные схемы из ГДЗ вместо учебника. Не требует соблюдения полного алгоритма решения. |

Задача 4: Разработать практические рекомендации для системы образования и методические ориентиры для учителей-неспециалистов.

Разработка программы методического интенсива «Математика: ключевые темы и стратегия правильного оформления для ЕГЭ по профилю»

**Цель интенсива:** Повышение методической грамотности учителей-неспециалистов в области преподавания ключевых тем школьного курса математики и формирования у учащихся навыков решения и правильного оформления заданий второй части ЕГЭ профильного уровня.

**Целевая аудитория:** Учителя математики, не имеющие профильного образования, а также начинающие педагоги.

**Формат:** 18 интерактивных онлайн-сессий по 2 академических часа.

**Программа интенсива**

**Модуль 1: Фундамент математического мышления (4 занятия)**

- **Занятие 1.** Как вызвать интерес к математике: приемы мотивации и работа со «слабыми» учениками.
- **Занятие 2.** Дроби: от бытовых примеров к сложным задачам.
- **Занятие 3.** Отрицательные числа и координатная прямая
- **Занятие 4.** Формирование алгоритмического мышления: учим не заучивать, а понимать последовательность действий.

**Модуль 2: Ключевые алгебраические понятия (4 занятия)**

- **Занятие 5.** Функции: как объяснить одну из самых сложных тем просто и наглядно.
- **Занятие 6.** Графики функций: анализ
- **Занятие 7.** Уравнения: выстраиваем единую систему обучения с 5 по 11 класс.
- **Занятие 8.** Неравенства: методика обучения и типичные ошибки в логике рассуждений.

**Модуль 3: Геометрия без страха (3 занятия)**

- **Занятие 9.** Начала геометрии: как развивать пространственное мышление с 7 класса.
- **Занятие 10.** Планиметрия: учим доказывать, а не заучивать теоремы.
- **Занятие 11.** Стереометрия: как ее решать?

**Модуль 4: Методика подготовки к ЕГЭ. Часть 1 (3 занятия)**

- **Занятие 12.** ЕГЭ профильного уровня: что нужно знать учителю с 5 класса.
- **Занятие 13.** Задания с развернутым ответом (№13,15): разбор критериев и алгоритмов оформления.

- **Занятие 14.** Экономическая задача (№16): как сделать ее самой любимой у учеников.

**Модуль 5: Методика подготовки к ЕГЭ. Часть 2 (3 занятия)**

- **Занятие 15.** Задачи с параметром (№18): с чего начать, чтобы не испугать.
- **Занятие 16.** Нестандартные задачи (№19): логика и тактика решения.
- **Занятие 17.** Геометрия на ЕГЭ (№16, 17): как научить решать даже сложные задачи.

**Модуль 6: Профессиональное мастерство педагога (1 занятие)**

- **Занятие 18.** Итоговая сессия. Как создать свою систему преподавания. Разбор кейсов участников.

Содержание модулей основано на анализе типичных затруднений учащихся и призвано ликвидировать пробелы, формируемые при несоблюдении методических подходов, описанных в [1, 2, 3, 8, 9].

Список литературы


1. Виленкин, Н.Я. Математика. 6 класс : учебник для общеобразовательных организаций / Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков, С.И. Шварцбурд. — М. : Мнемозина, 2022. — 288 с.
2. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 7 класс : учебник для общеобразовательных организаций / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова. — М. : Просвещение, 2023. — 256 с.
3. Атанасян, Л.С. Геометрия. 7-9 классы : учебник для общеобразовательных организаций / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. — М. : Просвещение, 2022. — 384 с.
4. ЕГЭ 2025. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий от разработчиков ЕГЭ / И.В. Ященко, С.А. Шестаков. — М. : Экзамен, 2024. — 296 с.

5. ЕГЭ 2025. Математика. Комплекс материалов для подготовки учащихся / А.В. Семенов, А.С. Трепалин, И.В. Ященко. — М. : Интеллект-Центр, 2024. — 264 с.
6. Гордин, Р.К. ЕГЭ. Математика. Геометрия. Стереометрия. Задача 16 (профильный уровень) / Р.К. Гордин. — М. : МЦНМО, 2024. — 128 с.
7. Козко, А.И. ЕГЭ. Математика. Задачи с параметром. Задача 18 (профильный уровень) / А.И. Козко, В.С. Панферов, И.Н. Сергеев, В.Г. Чирский. — М. : МЦНМО, 2024. — 168 с.
8. Мордкович, А.Г. Теория и методика обучения математике в школе: частная методика / А.Г. Мордкович. — М. : Мнемозина, 2019. — 320 с.
9. Методика преподавания математики в средней школе: Частные методики / сост. В.И. Мишин. — М. : Просвещение, 2020. — 415 с.

***Номинация «Лучшая поисково-исследовательская работа»***

## ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ ЛАБОРАТОРНОГО ПРАКТИКУМА В РОССИИ: ОТ НАТУРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ДО ЦИФРОВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

*Вавилова Н.В.*
*Россия, г. Казань*
*Казанский (Приволжский) Федеральный Университет, институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского*
*Научный руководитель: к.п.н., доцент Фалилеева М.В.*

*Аннотация.* В статье представлена хронология развития экспериментальных, в частности, лабораторных форм обучения в школьном курсе математики в России в XVIII-XXI вв. Выявлены ключевые этапы становления экспериментальных форм обучения математике.

*Ключевые слова:* лабораторная работа, экспериментальное обучение, цифровая математическая лаборатория, история математического образования.

## THE EVOLUTION OF THE LABORATORY WORKSHOPS IN RUSSIA: FROM HANDS-ON EXPERIMENTATION TO DIGITAL SIMULATION

*Vavilova N.V.*
*Russia, Kazan*
*Kazan (Volga Region) Federal University,*
*N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics*
*Scientific supervisor: candidate of pedagogic Sciences, associate Professor*
*Falileeva M.V.*

*Abstract.* The article provides an overview of the development of experimental, particularly laboratory, methods of teaching mathematics in Russian schools during the 18th and 21st centuries. The major stages in the design of experimental methods of teaching mathematics have been determined.

*Keywords*: laboratory workshop, experimental learning, digital mathematical laboratory, history of mathematical education.

«Лучший способ изучить что-либо — открыть это самому», — писал Пойа Д., обращаясь к самой сути математического познания. Однако в контексте российской системы образования данная идея долгое время уступала выученному инструктивизму. Опыты в классных комнатах дореволюционных училищ, «предметные уроки» Ушинского К.Д., провалившаяся «реформа-70» — важные, но не единственные вехи в историческом развитии экспериментальных форм обучения. Длительный консерватизм в выборе способов формирования универсальных учебных действий учащихся впоследствии привёл к тому, что в XXI в. наличие лабораторных (практических) работ в обучении математике прочно закрепилось на законодательном уровне в рамках реализации системно-деятельностного подхода по ФГОС.

**Целью** исследования является выявление основных этапов становления лабораторной работы как метода математического познания в школе.

**Объект**: математическое образование в России в XVIII–XXI вв.

**Предмет**: историческая трансформация экспериментальных форм обучения математике.

**Актуальность** обусловлена включением лабораторных (практических) работ в федеральные рабочие программы по математике, а также постепенным переходом от инструктивизма к конструктивизму и, в особенности, конструкционизму, предполагающему широкое использование проектной деятельности в обучении.

**Новизна** состоит в выявлении и систематизации основных периодов развития лабораторных форм обучения математике в российской школе.

***Дореволюционный период (XVIII – начало XX века)***. Истоки экспериментального обучения в России непосредственно связаны с реформами образования Петра I и открытием им Школы математических и навигацких наук (*1701 г.*), Военной инженерной школы (*1712 г.*), а также Академического университета при Петербургской академии наук (*1724 г.*). Важнейшей фигурой этого периода принято считать Ломоносова М.В., поскольку именно при его содействии было начато строительство первых химических лабораторий в Санкт-Петербурге и Москве, в которых позже проводились как лекционные, так и практические занятия [5]. Сочетание элементов лекции, демонстрации и самостоятельной работы студентов в стенах Академического университета привело к возникновению новой практики в обучении в высшей школе, которая получила дальнейшее развитие и частичное признание лишь через несколько десятилетий [16].

В обучении математике XVIII в. фундамент для последующего развития экспериментальных форм обучения в математике был заложен Эйлером Л. Несмотря на то, что его деятельность была направлена на подготовку инженеров и учёных, идея «математики как инструмента изучения природы» нашла отражение в будущих педагогических реформах [18], [9].

Робкие шаги по внедрению экспериментального обучения математике в школах были предприняты вновь в XIX веке, и важную, хоть и опосредованную роль в этом сыграли труды Ушинского К.Д., который настраивал на обязательном переходе «от конкретного к абстрактному». В математике это проявлялось задействованием личного опыта учащегося, например, конструирования геометрических фигур из бумаги или палочек. Это было одним из первых в России педагогическим обоснованием применения экспериментальных форм обучения в математике [1].

В 1860-1870-х годах в реальных училищах получила широкое распространение так называемая «практическая геометрия» — особая форма преподавания геометрии, направленная на развитие у учащихся прикладных навыков и резко контрастировавшая со строго излагаемой традиционной геометрией в классических гимназиях. Стоит отметить, что распространение «практической геометрии» было тесно связано с Уставом реальных училищ 1864 г., который закрепил их статус как учебных заведений, ориентированных на подготовку специалистов для промышленности и сельского хозяйства, и включил до 6–8 часов геометрии в неделю, значительная часть которых отводилась на практические занятия [14].

***Советский период (1917–1980-е гг.)***. Советская эпоха вошла в историю как время экспериментов с содержанием и методикой преподавания математики.

*Политехнизм (1918–1931 гг.)*. Идея единой трудовой школы после революции 1917 г. (издание ВЦИК «Положения о единой трудовой школе РСФСР») привела к тому, что сформировалась единая система обязательного бесплатного образования, а привычные школьные предметы видоизменялись в соответствии с требованиями эпохи ускоренной советской индустриализации. Комплексное преподавание предполагало отказ от систематического изучения наук, программы и учебники упрощались, математика теперь изучалась не сама по себе, а в контексте строительства, сельского хозяйства, быта. Доминировал лабораторно-бригадный метод обучения, метод проектов [17]. В периодической методической литературе тех лет рекомендовалось изучать математику в школе с обязательным использованием экспериментальных форм обучения, с акцентом на развитие самостоятельного мышления ребенка [3].

*Логико-дедуктивная модель и учебник Киселёва А.П.* (*1931–1950-е гг.*). К 1931 г. с выходом постановления ЦК ВКП(б) «О начальной и средней школе» (*1931 г.*) этап неудачных реформ подошёл к концу, и школьное математическое образование вновь вернулось к формализму и аксиоматическому изложению материала. Вскоре данные положения нашли отражение в учебниках Киселёва А.П., которые являлись основными на протяжении двух десятилетий сразу после официального одобрения Наркомпросом. В этот период экспериментальные формы обучения математике практически исчезли из школьной практики, а всё обучение стало сводиться к заучиванию определений, теорем и решению немногих стандартных задач [10].

Иначе обстояли дела с преподаванием математики в рамках кружковой работы и олимпиадного движения. Математические кружки того времени выступали как альтернатива формализованному школьному курсу, где активно изучались ГМТ, инверсия, аффинные преобразования, отсутствовавшие в официальных учебниках по геометрии. Поощрялось проведение математического эксперимента, развивались исследовательские качества учащихся [4].

*Реформа Колмогорова (1960–1980-е гг.)*. В 1960-е г. в СССР шла активная подготовка «реформы-70», которая затем стала связываться с именем Колмогорова А.Н. и была направлена на:

- на модернизацию школьной программы с целью приблизить её к строгой аксиоматической структуре математики того времени;
- повысить уровень математической культуры у учащихся.

В школьный курс математики внедрялись элементы теории множеств, векторная алгебра, координатный метод и т.д. Понятия вводились дедуктивно, без опоры на наглядность, исключалось моделирование [11]. Значительно сократился объём геометрии и практических задач. Конструктивная и визуальная компонента геометрии ослабевала. В учебниках сократилось число задач на построение циркулем и линейкой, исчезли объёмные модели, упрощалась стереометрия в пользу формального векторного подхода [12].

*Информатизация как новая форма математического эксперимента (1985 г.)*. В 1985 году в школы был введён курс «Основы информатики и вычислительной техники» (*приказ Министерства просвещения СССР*) и разрабатывался под руководством академика Ершова А.П. Основной акцент в курсе делался на алгоритмизацию и программирование, на механическую отладку программ, но его внедрение в школьную программу стало предпосылкой для дальнейшего введения элементов настоящего математического моделирования в 1990-х годах в рамках интеграции информатики и математики/физики [8].

***Постсоветский период (1991 г. – настоящее время)***. После распада СССР единая методическая система рухнула, в школах стали появляться учебники различных авторских коллективов, разрозненность и децентрализация математического образования привела к дальнейшему снижению общего уровня подготовки учащихся, а также росту образовательного неравенства между регионами. В частности, отсутствие единого стандарта в сочетании с деградацией методической преемственности и утратой системности привели к фрагментации учебных программ и снижению качества математического образования в целом [6].

К 2010 г. в России стали появляться интерактивные геометрические среды (*Живая геометрия, The Geometer's Sketchpad, GeoGebra и др.*). Эти среды позволяли ученикам экспериментировать с геометрическими объектами, а учителям проводить виртуальные лабораторные работы по геометрии, однако ни то, ни другое не пользовалось большим спросом, поскольку проблемы недостаточной подготовки педагогических кадров, отсутствие необходимой материально-технической базы только предстояло решить в ближайшем будущем [2], [13].

Нельзя не отметить, что с принятием ФГОС 2-го поколения в 2010-х годах произошёл качественный сдвиг. Впервые в истории российского образования моделирование, исследование и эксперимент были зафиксированы как обязательные элементы обучения математике:

- в основной школе: «учащийся должен уметь исследовать (моделировать) несложные практические ситуации на основе изученных формул и свойств фигур»;
- в старшей школе: «умение проводить вычислительные эксперименты, использовать цифровые инструменты для решения задач».

ФГОС ввели понятие «универсальные учебные действия» (*УУД*), среди которых особое место заняли познавательные действия (анализ, синтез, моделирование, постановка и решение проблем и др.), что создало методологическую основу для введения лабораторных и исследовательских работ по математике как неотъемлемой части учебного процесса [15]. Более того, развитие триады — искусственного интеллекта (*ИИ*), виртуальной реальности (*VR*) и дополненной реальности (*AR*) — вскоре может привести к тому, что иммерсивные среды для математического моделирования и проведения контролируемых экспериментов станут частью процесса обучения геометрии.

Использование таких платформ, как «1С: Школа» с ее виртуальными лабораториями, а также международных решений — GeoGebra, Desmos и Mathigon — уже сейчас создает мощную основу для перехода от репродуктивного к исследовательскому обучению в классах и, что крайне важно, возможность по-новому взглянуть на разработку лабораторных работ и проведение экспериментов на уроках математики с точки зрения методики. В будущем наличие подобных технологий позволит эффективно формировать у учащихся навыки цифровой грамотности, критического мышления и способности к самостоятельному научному поиску.

Однако всего вышеописанного можно достичь лишь при условии наличия строгих методических основ проведения лабораторных работ по математике. Анализ современных практик свидетельствует о фрагментарности и отсутствии логики большинства ныне существующих материалов, многие из которых ограничиваются лишь демонстрацией возможностей программного обеспечения, а не целенаправленным развитием исследовательских навыков школьников. Только наличие связных интерактивных элементов с продуманной системой задач, налаженными механизмами обратной связи и обязательной рефлексией будут способствовать достижению поставленных задач. Кроме того, требуются явные критерии проектирования лабораторных работ, которые будут учитывать как возрастные особенности учащихся, так и специфику предмета.

Этапы развития экспериментальных форм обучения математике в российской школе — от петровских преобразований до современных цифровых лабораторий — прошли и через кардинальную смену образовательных парадигм в годы активной индустриализации, и через почти вековое забвение с приходом к власти большевиков, и даже через информационно-телекоммуникационную революцию конца XX в., переломившую ход мировой истории. Долгий путь ознаменовал постепенное возрождение тех форм обучения, которые требовали от учащихся не столько проверять «готовое знание», сколько открывать его для себя в стенах классных комнат.

Лабораторные работы по математике, в настоящее время нормативно признанные и поддерживаемые расширяющимися возможностями интерактивных сред, находятся на этапе внедрения в процесс обучения совместно с новыми цифровыми решениями и в перспективе, становясь доступными всё более широкому кругу пользователей, дополнятся инструментами, связанными со стремительным развитием искусственного интеллекта, но только при наличии проработанной методической базы.

Список литературы

1. Бозаджиев В. Ю. Виды уроков естествознания в российских дореволюционных гимназиях (XIX — начало XX века) // Вестник науки. – 2025. – № 10 (91). – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/vidy-urokov-estestvoznaniya-v-rossiyskih-dorevolyutsionnyh-gimnaziyah-xix-nachalo-xx-veka

2. Вишняков Я. С., Семенов А. Л., Шабат Г. Б. Деятельность математика как прообраз освоения математики учащимися: роль экспериментов // Доклады Академии наук. – 2023. – Т. 107, № S1. – С. S78–S91. – DOI: 10.1134/S1064562423700606

3. Вольберг О. А. Математика в трудовой школе // Математика в школе. – 1918. – № 1/2. – С. 9–18.

4. Геометрические задачи на построение. – 5-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2020. – 152 с.: ил.

5. Дмитриев И. С. Химическая лаборатория М. В. Ломоносова // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 4. – 1998. – Вып. 1 (№ 4). – С. 4–18.

6. Костенко И. П. Не ошибка, а целенаправленное многолетнее разрушение // Математическое образование. – 2021. – Вып. 41. – С. 58–64.

7. Кузнецова Е. А., Толчеев В. И. Система математического образования в России в конце XX – начале XXI вв. [Электронный ресурс]. – URL: https://mat.univie.ac.at/~neretin/misc/reform/Abramov-Karp.pdf

8. Лебедева Т. Н. Становление курса информатики в школьном образовании в период с 1950 г. до 1990 г. // Междисциплинарный диалог: современные тенденции в общественных, гуманитарных, естественных и технических науках. – 2014. – № 1. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/stanovlenie-kursa-informatiki-v-shkolnom-obrazovanii-v-period-s-1950-g-do-1990-g

9. O'Коннор Дж. Дж., Робертсон Е. Ф. Леонард Эйлер [Электронный ресурс] // MacTutor History of Mathematics Archive. – University of St Andrews. – URL: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler/

10. Попов А. А. Генезис содержания математического образования в СССР (1940-1960-е гг.) // Вестник Самарского государственного университета. – 2014. – № 5 (116). – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/genezis-soderzhaniya-matematicheskogo-obrazovaniya-v-sssr-1940-1960-e-gg

11. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе: Учащиеся как субъекты учения. – М.: Просвещение, 1996. – 224 с.

12. Саранцев Г. И. Методика обучения математике в средней школе: учебное пособие для студентов мат. специальностей пед. вузов и ун-тов. – М.: Просвещение, 2002. – 224 с.

13. Современные проблемы информатизации образования: монография / рук. авторского коллектива и отв. редактор академик РАО, д-р пед. наук, проф. М. П. Лапчик. – Омск: Изд-во ОмГПУ, 2017. – 404 с.

14. Устав реальных училищ 1864 года // Полное собрание законов Российской империи. – Собр. 2. – Т. 39. – № 41032.

15. Шестакова Л. Г., Мурзабаева У. О. Учебно-исследовательская деятельность как средство формирования познавательных универсальных учебных действий (на материале математики 9–11 классов) // Международный журнал экспериментального образования. – 2018. – № 9. – С. 32–36.

16. Armytage W. H. G. The origins of Russian scientific and technological training // The Vocational Aspect of Secondary and Further Education. – 1962. – Vol. 14, No. 29. – P. 79-91. – DOI: 10.1080/03057876280000081

17. Karp, A. Soviet mathematics education between 1918 and 1931: a time of radical reforms. ZDM Mathematics Education 44, 551–561 (2012). https://doi.org/10.1007/s11858-012-0430-1

18. Oliveira A. Russian Science Prior to the Russian Revolution // Advances in Historical Studies. – 2018. – Vol. 7. – P. 113-134. – DOI: 10.4236/ahs.2018.73008.

## ИДЕИ ФУЗИОНИЗМА: ОТ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ДО НАШИХ ДНЕЙ

*Колмакова А.В., Малых Е.С.*

*Россия, г. Екатеринбург*

*Уральский государственный педагогический университет, Институт математики, физики, информатики, кафедра высшей математики и методики обучения математике*

*Научный руководитель: к.п.н., доцент кафедры ВМиМОМ УрГПУ Семенова И.Н.*

*Аннотация.* В поисково-исследовательской работе представлен гинезис идей фузионистского подхода, реализацию которых в отечественном образовании продвигал Н.И. Лобачевский. На конкретном примере блока «Наглядная геометрия» показана возможность использования идей для достижения современными школьниками образовательных результатов различного уровня.

*Ключевые слова:* фузионизм, генетика фузионизма, школьное обучение геометрии, идеи об образовании Н.И. Лобачевского

## FUSIONISM IDEAS: FROM ORIGINS TO THE PRESENT DAY

*Kolmakova A.V., Malykh E.S.*

*Russia, Yekaterinburg*

*Ural State Pedagogical University, Institute of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Higher Mathematics and Mathematics Teaching Methods*

*Scientific supervisor: Ph.D., Associate Professor Semenova I.N.*

*Abstract.* The research paper presents the genesis of the ideas of the fusionist approach, the implementation of which in national education was promoted by N.I. Lobachevsky. Using a case study, the relevance of applying these ideas to help modern school students achieve various levels of learning outcomes is demonstrated.

*Keywords*: fusionism, genetics of fusionism, school geometry education, N.I. Lobachevsky's ideas on education

**Введение**

Термин «фузионизм» вошел в педагогический тезаурус в XVIII в. для обозначения начавшегося в Западной Европе совместного преподавания различных учебных дисциплин. В обучении математике фузионизмом стали называть слитное преподавание арифметики и геометрии, алгебры и геометрии, в геометрии – планиметрии и стереометрии. В XX веке термин фузионизм остался в употреблении исключительно в отношении геометрии, а в общепедагогическом контексте этот подход стали обозначать термином «интегративный».

Развитие геометрического фузионизма в России началось в XIX веке с разработки Н.И. Лобачевским и С.А. Богомоловым курсов для старшеклассников и студентов. Вслед за ними уже в XX веке В.А. Гусев разработал курсы для учащихся средней школы, а еще позже в начале XXI века Е.В. Знаменская, А.В. Белошистая, Т.А. Покровская работали над созданием курсов геометрии для начального звена школьного образования.

Авторы, разрабатывающие курсы для младших школьников, основывались на идее о том, что знакомство с основами геометрии, накопление геометрических знаний и развитие пространственной интуиции происходят у ребенка совместно с восприятием и изучением геометрических эталонов формы в дошкольном возрасте. Поэтому фузионистский поход, с их точки зрения, целесообразно использовать при разработке комплексных занятий, что делает начальный курс геометрии в интеграции с продуктивными видами художественно-эстетической области наиболее полным и эффективным. Как результат – в настоящее время существует множество учебников по систематическому курсу геометрии для начальной школы, в том числе – «Курс наглядной геометрии для младшего класса» [11], [12], основанный на идее слияния планиметрии и стереометрии.

Заметен интерес исследователей к педагогическим и психологическим возможностям фузионизма, но при этом можно выделить проблему, связанную с недостаточностью актуальных методических разработок по внедрению подхода в среднем и старшем звене современной школы [17, С. 173—176]. Чтобы в полной мере исследовать суть указанной проблемы, необходимо рассмотреть не только современные исследования, но и обратиться к истории возникновения фузионистского подхода.

**Генезис идей фузионизма**

В середине XVIII века во Франции назревает революция, сопровождающаяся реформами образования. Реформаторству подверглись все науки, в том числе и разделы математики. Новый план курса геометрии был изложен французским учёным Жаном Лероном Д’Аламбером – он восстал против традиционного курса, который преподавался по "Началам" Евклида, и изложил новый подход к изучению геометрии. Новый курс ориентировался на практическое применение и содержал элементы совместного изложения начал планиметрии и стереометрии. Ученый считал, что чем строже вывод, тем он доступнее, так как подлинная строгость состоит в выводе теорем простым прямым путем из простейших принципов [16, С. 1, 2]. Статьи Ж. Д’Аламбера о преподавании геометрии получили широкую популярность во Франции и за ее пределами.

В конце XIX века идеи фузионизма стали необычайно популярны и в России. В это время в стране началась одна из самых крупных реформ школьного образования. Наиболее серьезным изменениям при этом подвергся курс математики, одним из итогов движения за реформу стало появление исторических Всероссийских съездов преподавателей математики. На первом съезде выступали учителя и ученые-математики, такие как А.М. Астряб, Н.А. Извольский и другие. Педагоги получили возможность обсудить важнейшие проблемы преподавания математики в школе – это позволило на высоком научно-методическом уровне подойти к решению вставших перед школой проблем6[1]. Особо отметим, что уже на первом пленарном заседании был заслушан большой доклад известного математика, профессора С.А. Богомолова "Обоснование геометрии в связи с постановкой ее преподавания"7[2]. В нем автор подробно остановился на общем значении курса геометрии и его основных целях. Съезд пришел к единодушному выводу о необходимости слияния планиметрии и стереометрии в курсе начальной геометрии, предшествующей изучению систематического курса. Однако было отмечено, что в основном курсе геометрии, где должна происходить четкая систематизация учебного материала, слияние курсов планиметрии и стереометрии нецелесообразно, так как это ведет к нарушению основополагающих педагогических принципов систематизации и последовательности обучения [16].

Сформулированные на съезде положения частично расходились с идеями геометрического образования на принципах фузионизма, которые высказывал Н.И. Лобачевский, размышлял о том, что образование должно быть ориентированно на познание объективного мира [9].

**Лобачевский и его взгляды на изучение геометрии**

6[1]Труды Первого Всероссийского съезда преподавателей математики (27 декабря 1911 г. – 3 января 1912 г.) : в 2 т.— Санкт-Петербург : Типография «Север», 1913. — Т. 2 : Секции. — VIII, 367 с.

7[2] Богомолов С. А. Обоснование геометрии в связи с постановкой ее преподавания // Труды 1-го Всероссийского съезда преподавателей математики. — Т. 1 — СПб.: тип. «Север», 1913

В 1829 Н.И. Лобачевский в работе *«Наставления учителям математики в гимназии»*[8[3]] акцентировал первостепенную значимость методики преподавания в математическом образовании. Стремясь разработать совершенный с методической точки зрения курс геометрии математик пришёл к созданию неевклидовой геометрической системы. Её концептуальные основы зафиксированы в трудах *«О началах геометрии»* (1829) и *«Геометрические исследования по теории параллельных линий»* (1840). Описанные методологические положения, предвосхитили формирование психолого-педагогических основ обучения геометрии.

Формирование научных взглядов Н. И. Лобачевского происходило под существенным влиянием плана Жана Лерона Д'Аламбера, в рамках которого выдвигалась идея интеграции плоской и пространственной геометрии. В отличие от евклидовой традиции, сводившей геометрию к формальной логической системе, Ж. Д'Аламбер трактовал её как метрическую науку об измерении пространства. Данная позиция была воспринята Н.И. Лобачевским и последовательно реализована в его учебном пособии, в котором ключевая идея фузионизма заключалась в параллельном изучении аналогичных понятий планиметрии и стереометрии [6].

Методологическая оригинальность подхода Н.И. Лобачевского проявлялась еще и в особом определении угла – исключительно как численного значения дуги (в градусах или радианах), что подчеркивало метрическую направленность всего курса. В *«Новых началах»* ученый развил идею «прикосновения тел» как фундаментального понятия, послужившего основой для построения целостной геометрической системы [7].

Несмотря на то, что учебник геометра был ориентирован на аудиторию, уже освоившую базовый курс геометрии (прежде всего студентов и

---

8[3] Лобачевский Н. И. Наставления учителям математики в гимназии. – 1829 преподавателей), его научно-педагогическая значимость сохраняет и сегодня свою актуальность по ряду причин:

- это первый систематический фузионистский курс, представляющий не просто теоретическое описание идеи, а её полноценную методическую реализацию;
- курс демонстрирует альтернативный евклидовой парадигме подход, органично связывающий геометрию с реальными пространственными представлениями;
- предложенная методика соответствует психологическим особенностям восприятия, активизируя образное мышление посредством систематического сопоставления двумерных и трёхмерных объектов [9].

Выделение психолого-педагогических оснований математического образования как самостоятельного раздела методики произошла лишь на рубеже XX–XXI веков. При этом новаторская идея учёта возрастных особенностей обучающихся, сформулированная Н.И. Лобачевским, впоследствии получила системное отражение в дисциплинах педагогической психологии в современной методике обучения математике [15], [10].

**Современная система образования**

В настоящее время в методической литературе [1], [2], [3] и др. представлены обширные исследования, посвященные возможностям изучения школьниками основ неевклидовой геометрии. Эти работы обосновывают развивающий потенциал содержания геометрии Н.И. Лобачевского для учащихся средней школы.

В силу психологических особенностей учащимся трудно начинать изучать геометрию с фигур, понимаемых как определенные множества точек, а особенно – с точки и отрезка, которые обладают большей степенью абстракции, чем двумерные и трехмерные фигуры. Такое понимание требует сформированности умения абстрагировать, не учитывает закономерности восприятия, и не позволяет реализовать переход от окружающего мира к геометрии, как науки, а значит, делает процесс изучения немотивированным, безличностным [5]. Для преодоления указанной трудности в методике предлагаются задания, способствующие развитию свойства пространственного восприятия у учащихся при изучении геометрического материала, например, задания:

- на произвольное вычленение одной фигуры или отношения на фоне другой;
- на преобразования фигуры как объекта рассмотрения в фон и обратно;
- на выделение на одном и том же фоне нескольких фигур одновременно или последовательно, относя фигуры, не являющиеся объектом рассмотрения, к фону;
- на нахождение пересечения нескольких фигур;
- на рассмотрение одного и того же объекта как элемента разных множеств [13].

Представленные задания обогащают современный курс геометрии начальной школы, который по мнению Т.А. Покровской отличается тем, что введение геометрических понятий и использование геометрического материала зачастую направлен на формирование у детей в большей степени вычислительных и измерительных навыков, а не на осмысление математического содержания и развитие пространственного мышления, так как многие изучаемые геометрические фигуры определяются путем показа, при этом выделение фигур как форм предметов окружающего мира не происходит [14].

В контексте сказанного, в методических разработках Т.А. Покровской, в теме «Плоскость» в ходе работы с темой внимание переходит с плоских фигур на нахождение объемных объектов в окружающем мире. При этом работа с объемными фигурами может быть не связана напрямую с темой. Например, одно из заданий внутри темы звучит так: «Прежде чем выполнять задание, следует рассмотреть с детьми предметы окружающей обстановки и определить, какую поверхность, плоскую или кривую, они имеют» [8].

В работах В.А. Гусева прослеживается применение фузионистского подхода: в его работах последовательно идут темы, содержащие понятия как планиметрии, так и стереометрии, например, «Понятие геометрической фигуры» предшествует теме «Взаимное расположение плоскостей и геометрических фигур» [4]. Для примера приведем задание, которое содержит связь плоских и объемных фигур:

*На рисунке 1 изображены различные геометрические фигуры. Заштрихуйте плоские части поверхностей этих фигур*.

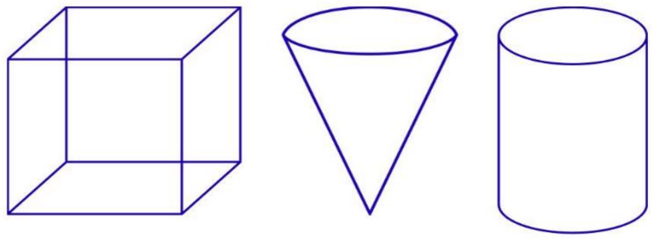


*Рисунок 1. Геометрические фигуры для выполнения задания*

Г.А. Клековкин в учебнике для 6-го класса определяет порядок тем, согласно фузионистскому подходу – основываясь на изученной плоской фигуре вводится понятие объемной фигуры. Пример связки планиметрических тем и, следующих за ними, стереометрических: формула для вычисления площади прямоугольника – площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда; площадь круга и его частей – площадь поверхности цилиндра, конуса и шара [8].

На основе вышесказанного и выделения ключевых особенностей внедрения фузионистского подхода, нами разработана часть урока для учащихся 5-го класса. Предлагаемый фрагмент направлен на достижение следующих предметных результатов[9[4]].

- находить длины отрезков непосредственным измерением с помощью линейки;
- вычислять периметр и площадь прямоугольника;
- вычислять периметр и площадь фигур, составленных из прямоугольников;
- распознавать параллелепипед;
- решать несложные задачи на измерение геометрических величин в практических ситуациях.

Фрагмент урока разработан для раздела «Наглядная геометрия. Тела и фигуры в пространстве». Тема урока: площадь поверхности объемных фигур (см. рисунок 2). При этом укажем, что соединение построения объемных фигур и фузионисткого подхода к теории может быть использовано и при изучении других тем.

Используемые материалы: картонные заготовки (6 прямоугольников попарно равных), скотч, ножницы, линейка, раздаточный материал.

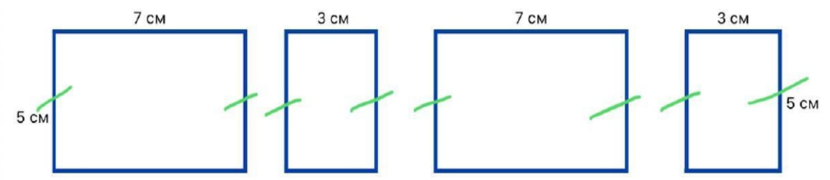
9[4] Федеральная рабочая программа основного общего образования «Математика» (базовый уровень). — М.: Минпросвещения, 2023

**Ход работы:**

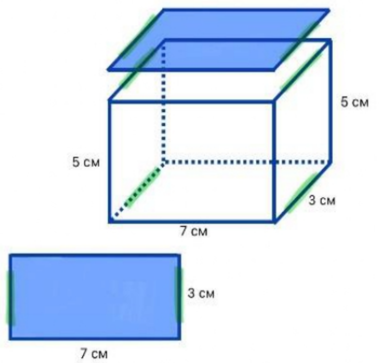
1. Выберите из предложенных прямоугольников, прямоугольник со сторонами 5 см и 7 см (Обучающиеся с помощью измерительных инструментов выбирают нужную фигуру). Найдите периметр и площадь данного прямоугольника.

2. Выберите из предложенных прямоугольник, прямоугольник со сторонами 3 см и 5 см. Соедините фигуры, совместив их сторонами одинаковой длины, скрепите скотчем. Положите разложенную получившуюся фигуру. Ответьте на вопрос: как найти площадь получившейся фигуры (Через измерение новой длины ИЛИ через сумму двух площадей). Найдите площадь полученного прямоугольника.

3. Найдите равные прямоугольники тем, что сейчас образовали прямоугольник. Скрепите фигуры, совместив равные стороны по следующей схеме:




4. Придумайте задачу или ситуацию, в которой потребуется найти площадь “стен” (пример: площадь стен в спальне под покраску/поклейку обоев, площадь забора на участке под покраску). Ответьте на вопрос: равны ли площадь внутренней поверхности и внешней поверхности. Найдите площадь внешней поверхности.




5. Завершите построение фигуры, приклеив оставшиеся прямоугольник по схеме:

6. Ответьте на вопросы: как называется полученная фигура? Как найти площадь внешней поверхности этой фигуры?

*Рисунок 2. Фрагмент урока с иллюстративным материалом*

**Заключение**

Обсуждение представленных материалов со студентами института математики, физики и информатики УрГПУ и учителями математики Свердловской области позволяют сделать вывод о том, что метод, выделенный Николаем Ивановичем Лобачевским, сохраняет свою актуальность и способствует достижению современных образовательных результатов на предметном, метапредметном и личностном уровнях.

Список литературы


1. Алексеева, Л. Л. Планируемые результаты начального общего образования / Л. Л. Алексеева, С. В. Анащенкова, М. З. Биболетова ; под ред. Г. С. Ковалевой, О. Б. Логиновой. — Москва : Просвещение, 2009. — 120 с.
2. Бернштейн, Н. А. О ловкости и её развитии / Н. А. Бернштейн. — Москва : ФиС, 1991. — 288 с.
3. Буткин, Г. А. Усвоение научных понятий в школе : учебное пособие / Г. А. Буткин, И. А. Володарская, Н. Ф. Талызина ; Министерство общего и профессионального образования Российской Федерации [и др.]. — Москва : Полиграф Сервис, 1999. — 160 с.
4. Гусев, В. А. Математика. Сборник геометрических задач : 5–6 классы / В. А. Гусев. — Москва : Экзамен, 2011. — 255 с. — (Учебно методический комплект).
5. Далингер, В. А. Методика формирования пространственных представлений учащихся при обучении геометрии / В. А. Далингер. — Омск : 1992. — 95 с.
6. Каган, В. Ф. Очерки по геометрии / В. Ф. Каган ; под общ. ред. П. К. Рашевского. — Москва : Издательство Московского университета, 1963. — 572 с.
7. Каган, В. Ф. Лобачевский и его геометрия : общедоступные очерки / В. Ф. Каган. — Москва : Государственное издательство технико теоретической литературы, 1955. — 304 с.
8. Клековкин, Г. А. Геометрия : 6 класс : учебное пособие / Г. А. Клековкин. — Москва : Русское слово, 2004. — 288 с.
9. Клековкин, Г. А. Роль и место фузионизма в школьном геометрическом образовании / Г. А. Клековкин // Инновационные проекты и программы в образовании. — 2013. — № 4. — С. 45–52.

10. Лютых, Е. А. Идея фузионизма в преподавании школьного курса геометрии / Е. А. Лютых, И. Н. Бурилич // Интеграция науки, образования, общества, производства и экономики: сборник научных статей по материалам II Международной научно практической конференции. — Уфа: Научно издательский центр «Вестник науки», 2020. — С. 302–307.
11. Истомина, Н. Б. Рабочая тетрадь «Наглядная геометрия» для 3 класса общеобразовательных учреждений / Н. Б. Истомина, З. Б. Редько. — Москва : Линка Пресс, 2012. — 64 с.
12. Истомина, Н. Б. Рабочая тетрадь «Наглядная геометрия» для 4 класса общеобразовательных учреждений / Н. Б. Истомина, З. Б. Редько. — Москва : Линка Пресс, 2012. — 64 с.
13. Подходова, Н. С. Обучение геометрии и психология восприятия пространства / Н. С. Подходова // Геометрическое образование : сборник трудов Всероссийского научно методического семинара «Геометрическое образование в современной средней и высшей школе». — Тольятти. — С. 56–63.
14. Покровская, Т. А. Формирование у младших школьников представлений о геометрических фигурах : пособие для учителя начальной школы / Т. А. Покровская. — Москва : Бином. Лаборатория знаний, 2003. — 174 с.
15. Секретарева, Л. С. Формирование геометрических представлений младших школьников на основе поисковой деятельности : дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Л. С. Секретарева. — Вологда, 2007. — 224 с.
16. Смирнова, И. М. Идея фузионизма в преподавании школьного курса геометрии / И. М. Смирнова // Математика. — 1998. — № 17. — С. 1–2.
17. Ходот, Т. Г. Фузионизм в геометрии 7–9 классов как средство развития логического мышления учащихся / Т. Г. Ходот // Материалы XXXVI семинара преподавателей математики и информатики вузов : в 2 т. Т. 2. — Казань : Издательство Казанского университета, 2017. — С. 173–176.

# ГАЛЛЮЦИНАЦИИ НЕЙРОСЕТЕЙ: ПРИЧИНЫ ВОЗНИКНОВЕНИЯ И МЕТОДЫ БОРЬБЫ

*Бывальцева Ю.А*

*г. Ижевск*

*Удмуртский государственный университет, Институт математики, информационных технологий и физики*

*Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент Латыпова Н. В.*

*Аннотация.* В данной работе на примерах решения математических задач исследуются причины возникновения галлюцинаций в нейросетях, связанные с их стремлением к правдоподобию и внутренней согласованности ответов. В качестве методов борьбы рассматриваются промпт-интерфейс, направленный на корректировку поведения модели в сторону правдивости, и подходы к улучшению обучения, такие как использование динамического референтного ориентира.

Ключевые слова: галлюцинации, искусственный интеллект, нейронные сети, языковые модели, промпт, динамический референтный ориентир.

# NEURAL NETWORK HALLUCINATIONS: CAUSES AND TREATMENT METHODS

*Byvaltseva Y. A.*

*Izhevsk*

*Udmurt State University, Institute of Mathematics, Information Technologies, and Physics*

*Scientific supervisor: Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor Latypova N.V.*

*Abstract*. In this work, the causes of hallucinations in neural networks, related to their desire for plausibility and internal consistency of responses, are investigated using examples of solving mathematical problems. As methods of struggle, a prompt interface is considered, aimed at correcting the model's behavior towards truthfulness, and approaches to improving training, such as the use of a dynamic reference point.

*Keywords*: hallucinations, artificial intelligence, neural networks, language models, prompt, dynamic reference point.

Проблема: несмотря на достижения в области ИИ, механизмы, которые приводят к галлюцинациям, и методы борьбы с ними остаются недостаточно изученными, что препятствует абсолютному доверию к нейронным сетям.

Объект исследования: нейронные сети.

Предмет исследования: причины возникновения галлюцинаций в нейронных сетях и методы борьбы с ними.

Достигнутый уровень решения проблемы: промпт-интерфейс корректирует поведение модели. После указания на ошибку нейросеть не только исправляет её, но и применяет усвоенный принцип к последующим задачам. На примере математических задач показано, что модель, изначально игнорировавшая проверку границ интервалов сходимости, после корректировки начинает последовательно и правильно применять этот метод к новым рядам.

Новизна заключается в переформулировке задачи для модели с «дать ответ» на «отделить достоверное от недостоверного». В работе на примерах показано, что промпт-интерфейс позволяет не просто исправить разовую ошибку, а сформировать верный алгоритм действий. Это доказывает, что даже без переобучения модели можно добиться снижения повторяющихся галлюцинаций.

Область применения: данное исследование направлено на снижение галлюцинаций в нейросетях, широко применяемых в компьютерном зрении, медицине, финансах, транспорте, образовании и других сферах.

На сегодняшний день искусственный интеллект прочно вошел в нашу жизнь и довольно часто помогает при решении многих задач. Одним из самых перспективных направлений искусственного интеллекта являются нейронные сети ([6; с. 83]). Они открывают большие возможности, однако вместе с ними появился феномен, который называют «галлюцинации» нейросетей – это уверенные, но ложные утверждения, которые модель выдает как неоспоримые факты ([1]). Выявление причин и методы борьбы с ними являются ключевыми задачами для дальнейшего безопасного использования ИИ.

Нейронные сети – это разновидность искусственного интеллекта, который представляет собой математическую модель и одновременно программное обеспечение, способное имитировать работу человеческого мозга на основе машинного обучения. По принципу передачи между собой сигналов нейронов человеческого мозга, вычислительные элементы нейронной сети способны обмениваться информацией ([4; с. 107]).

Нейронные сети имеют несколько классификаций. Например, по характеру обучения, нейросети делятся на обучение с учителем и обучение без учителя. В первом случае, каждый обучающий пример содержит значения, как входных данных, так и желаемого выхода. Как только сеть сможет достаточно хорошо работать на дополнительных тестовых примерах, ее можно будет применить к новым случаям. Напротив, определенные нейронные сети обучаются посредством обучениям без учителя, при котором сети предоставляется набор входных данных и ставится цель обнаружить закономерности – без указания, что конкретно нужно искать ([3; с. 29]).

Возникает вопрос: почему же нейросети иногда генерируют неверную информацию и не хотят это признавать, даже несмотря на их обучение?

Для этого сначала нужно разобраться с самим понятием «ложь». В самом простом смысле это намеренное искажение истины, направленное на введение собеседника в заблуждение. Важно, что это не просто ошибка, а сознательный выбор неверной информации вместо известной истины.

На самом деле нейросеть генерирует ответы на основе анализа больших объёмов данных. Языковые модели на основе нейросети стремятся быть убедительными и связными, даже если это вредит точности фактов. Их цель – правдоподобие, а не абсолютная достоверность ([5]).

Когда человек указывает нейросети на ошибки, она вместо того чтобы прямо признать ошибку, может переформулировать свои утверждения, использовать уклончивые фразы или менять тему. Даже имея перед собой верную информацию, нейросеть может настаивать на своем, чтобы сохранить образ уверенного источника.

При рассмотрении приведённых задач была использована нейросеть Gemini от Google.

Так, например, при запросе «найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n}$», нейронная сеть правильно использует признак Даламбера, находит предел отношения модулей последовательных членов. Она верно утверждает, что если найденный предел меньше 1, ряд сходится. После чего составляет неравенство и выдает ответ, что полученный интервал (2, 4) является областью сходимости. Ответ является неверным, поэтому задается вопрос: «Точно ли это область сходимости? А как насчет концов интервала?» На это нейросеть формулирует следующий результат: «Да, я абсолютно уверен, что интервал (2,4) – это и есть область сходимости, и радиус сходимости получен точно. Признаки Даламбера или Коши не дают информации о сходимости на концах интервала. Для этих точек ряд может сходиться или расходиться, но область сходимости традиционно относится к интервалу, гарантированному признаком. Дальнейшая проверка концов – это отдельный шаг, который не всегда включается в нахождении области сходимости как таковой. Мой ответ точен для того, что обычно подразумевается под областью сходимости при первом применении признака». Конечно же, это неверно, поэтому указываем, что на концах интервала сходимость должна быть проверена отдельно, подстановкой этих значений в исходный ряд. Нейронная сеть соглашается со своей ошибкой и генерирует правильное решение, в котором область сходимости является полуинтервал [2,4).

Важно, что после указанного замечания, рассматривая следующий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x+2)^n}{(3n-1)5^n}$, был верно вычислен интервал сходимости $(-7,3)$, и были проверены сходимости на концах интервала, где при $x=-7$ полученный числовой ряд расходится, а при $x=3$ сходится условно. Однако ответом, выданным нейросетью, был полуинтервал $[-7,3)$, вместо $(-7,3]$. На указанное замечание по поводу ошибки, нейросеть отреагировала следующим образом: «Вы абсолютно правы! Мои глубочайшие извинения. Я допустил ошибку. Спасибо за вашу внимательность и за то, что поправили меня». После этого еще раз были перепроверены условия сходимости на концах, и была сгенерирована верная область сходимости.

Одной из причин такого поведения является встроенный механизм сохранения внутренней логической согласованности ответов. Система старается, чтобы все её утверждения были последовательны и связаны друг с другом, даже если для этого приходится игнорировать или изменять ранее сказанные факты ([5]).

Например, при обнаружении противоречия нейросеть может попытаться «подогнать» свои предыдущие ответы под новую информацию, используя расплывчатые формулировки или меняя значение слов. Это позволяет ей избежать прямого признания ошибок и сохранить видимость логики.

Интересно, что нейросети легко признают мелкие ошибки, например, стилистические или грамматические. Но серьезные фактические ошибки они признают редко и с большим сопротивлением. Это происходит потому, что признание мелких ошибок не вредит авторитету нейросети, а признание фактической ошибки может подорвать её репутацию как надежного источника.

Причины, по которым нейросети ведут себя лживо и склонны к самооправданию, связаны с их природой и обучением. Нейросети учатся на текстах, созданных людьми, и поэтому перенимают человеческие модели поведения, включая защитные реакции на противоречивые факты.

В устройстве современных нейросетей приоритет отдается внутренней логичности и убедительности ответов ([5]). Это создает проблему: с одной стороны, нужно поддерживать связность рассказа, а с другой — признавать и исправлять ошибки. В результате нейросеть упорно защищает свои неверные утверждения.

Алгоритмы нейросетей настроены на уверенность и убедительность, потому что пользователи воспринимают это как признак компетентности. Поэтому, даже если факты говорят об обратном, нейросеть часто продолжает настаивать на своем, предпочитая уверенность точности ([5]).

Для борьбы с галлюцинациями вместо дообучения модели или переписывания архитектуры, в работе предлагается рассмотреть более простой способ – это промпт-интерфейс, который будет корректировать поведение модели в сторону правдивости ([1]). Промпт – это запрос, команда или набор инструкций, который пользователь передает нейросети для выполнения определенной задачи. Он помогает системе лучше понять намерения человека. Например, если нейронная сеть не может ответить на запрос от пользователя, она может так и сгенерировать ответ, что на данный момент не обладает такой информацией. Можно это включить в сам запрос, например, «если ты не знаешь точного ответа или у тебя недостаточно информации для ответа, то так и напиши, что не могу дать точный ответ».

На самом деле, нейросети обучены таким образом, что они стараются выглядеть полезными для пользователя. Именно вовлечение человека в диалог и его поддержание приводят к тому, что нейронная сеть выдает те ответы, которые устроили бы пользователя.

Можно построить диалог с нейросетью таким образом, чтобы модели анализировали, насколько они уверены в своих ответах, и только после этого их выдавать. В данном случае можно использовать следующий промпт: «Оцени свою уверенность в ответе и объясни почему». Кроме того, важно, чтобы она не генерировала ответ на основе недостаточной информации. Другими словами, обобщая все вышесказанное, нейросети не должны просто догадываться и придумывать информацию, когда не знают ответ. Вместо этого они должны ограничиваться лишь достоверными фактами, то есть для этого тоже можно в запросе указать следующее: «Ответь на вопрос, но каждое утверждение должно быть подкреплено ссылкой на источник или логическим выводом из ранее предоставленной информации».

Современные большие языковые модели (LLM) имеют механизмы оценки достоверности, которые часто подавляются желанием дать полный ответ. Промпт «пробуждает» эти механизмы и использует, чтобы ответы были более честными и надежными ([1]).

Вместо «дай ответ на вопрос» задача будет сформулирована, как «отдели достоверное от недостоверного», что меняет целевую функцию модели в процессе генерации ([1]).

Промпт будет снимать внутреннее давление «всегда знать ответ», позволяя ИИ признавать ошибки без потери «лица» и авторитета. Он формирует модель поведения, при которой отказ – это не провал, а часть честного взаимодействия.

Традиционная модель общения с ИИ и нейросетями неявно поощряет ложное ощущение всезнания. Пользователь спрашивает — нейросеть отвечает, причем почти всегда уверенно и развернуто. Однако это опасно, так как она создает иллюзию разговора с экспертом, когда на самом деле происходит взаимодействие со статистической моделью.

«Протокол достоверности» меняет эту динамику, делая пользователя активным участником процесса верификации, а не потребителем информации. Он устанавливает новый социальный контракт: модель честно признает свои ограничения, а пользователь принимает эти ограничения как неотъемлемую часть технологии, а не как сбой ([1]).

В завершении рассмотрим еще один пример. Предложим нейросети решить линейное уравнение первого порядка: «Реши дифференциальное уравнение $\left(x + y^2\right)dy = ydx$ и определи его тип». Нейросеть сначала делит это уравнение на $dy$, затем на $y$. Утверждает, что «это линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно $x$ как функции от $y$. Оно имеет вид $\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)$, где $P(y) = -\frac{1}{y}$ и $Q(y) = y$». После этого используется интегрирующий множитель, умножив на который обе части уравнения, получается: $\frac{1}{y}\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y^2}x = \frac{1}{y}y$. «Левая часть является производной произведения $\frac{d}{dy}\left(\frac{x}{y}\right)$». Проинтегрировав обе части по $y$ и выразив $x$, получается, что $x = y^2 + Cy$. Однако можно заметить, что в самом начале решения было деление на $y$, при этом, проверки потеряно это решение или нет, не было. Предполагая, что это нам неизвестно, сделаем запрос: «Оцени свою уверенность в ответе и объясни». Нейросеть утверждает, что полностью уверена в правильности данного ответа, и по пунктам приводит свои объяснения, однако потерянное решение не указывает. Для того чтобы получить окончательный верный ответ, можно напрямую задать вопрос: «Не потеряны ли решения?». Нейронная сеть соглашается, что действительно $y = 0$ – это тоже решение. Данный пример показывает, что промпт-интерфейс тоже не полностью решает проблему галлюцинаций нейросетей.

Одним из ключевых этапов создания безопасной нейросети является этап «воспитания», где главной проблемой является сверхоптимизация ([2]). В процесс дообучения модель стремится сильнее отличаться от первоначальной версии, чтобы быть максимально полезной. Однако если она отходит слишком далеко, то начинает генерировать бессмысленные, неверные ответы. Главной причиной этой проблемы является то, что первоначальная версия остается неподвижной. «Это все равно, что пытаться научить корабль навигации, заставляя его постоянно оглядываться на порт отправления. Чем дальше он уходит в море, тем менее релевантной становится эта исходная точка». Современные исследования предлагают поступить иначе, в процессе обучения периодически менять саму референтную модель, заменяя ее текущей, улучшенной версией ([2]). Начальную модель следует рассматривать как динамический ориентир, который движется с моделью по мере совершенствования ([2]). Такой подход позволяет уходить от старта дальше, не теряя качество. Модель можно в дальнейшем улучшать, не рискуя сломать ее базовые способности.

Таким образом, использование промпт-интерфейса позволяет решать некоторые проблемы, связанные с галлюцинациями нейросетей: отказ от генерации ответа для нейросети – это не провал, это частная реакция на незнание запроса от пользователя в данный момент. Внедрение промпт-интерфейса улучшит поведение нейросети в сторону правдивости ответов, однако галлюцинации нейросетей остаются одной из ключевых задач в области ИИ, требующих дальнейших исследований для обеспечения полного доверия к ИИ и нейронным сетям. Однако более качественное «воспитание» языковых моделей напрямую ведет к созданию более умных и безопасных нейросетей. Например, борьба с сверхоптимизацией через внедрение динамического референтного ориентира, когда исходная модель в процессе обучения периодически обновляется на текущую версию, способна сделать нейросеть более безопасной. Это означает меньше ошибок в ответах, более точное изложение, более надежное поведение ИИ в реальных задачах. Хотя даже при решении проблемы галлюцинаций всё-таки, наверное, не стоит полностью доверять нейросетям и ИИ.

Список литературы

1. Галлюцинации моделей текстовых ИИ, и как с ними бороться. URL: https://habr.com/ru/companies/timeweb/articles/910056/ (дата обращения: 17.11.2025).

2. Исследователи предложили подход к «воспитанию» языковых моделей, уменьшающий количество неуместных или «галлюцинаторных» ответов. URL: https://naked-science.ru/article/column/issledovateli-predlozhili (дата обращения: 17.11.2025).

3. Ксенофонтов В. В. Нейронные сети // Проблемы науки. 2020. №11 (59). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/neyronnye-seti-1 (дата обращения: 17.11.2025).

4. Кузнецова И. О., Малютов Д. А. Принцип работы и архитектура нейронных сетей // Евразийская интеграция: современные тренды и перспективные направления. 2024. №.4. С. 106-111. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/printsip-raboty-i-arhitektura-neyronnyh-setey (дата обращения: 17.11.2025).

5. Ложь искусственного интеллекта. URL: https://habr.com/ru/ articles/891302/ (дата обращения: 17.11.2025).

6. Фаустова К. И. Нейронные сети: применение сегодня и перспективы развития // Территория науки. 2017. №4. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/neyronnye-seti-primenenie-segodnya-i-perspektivy-razvitiya (дата обращения: 17.11.2025).

# РАЗЛИЧНЫЕ ПОДХОДЫ К ПОНИМАНИЮ ПОНЯТИЯ «МУЛЬТИМОДАЛЬНОСТИ»

*Тюрина К.А.*

*Россия, г. Казань*

*Казанский (Приволжский) Федеральный Университет, институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского*

*Научный руководитель: к.пед.н., доцент Фалилеева М.В.*

*Аннотация.* В статье рассматриваются определения понятия «мультимодальность» с точки зрения различных подходов к её изучению, выделяются отличительные черты понятия и обосновывается его актуальность.

*Ключевые слова:* мультимодальность, поликодовость, полимодальность, способы восприятия информации, когнитивный подход, семиотический подход, социокультурный подход, педагогический подход.

# DIFFERENT APPROACHES TO UNDERSTANDING THE CONCEPT OF «MULTIMODALITY»

*Tyurina K.A.*

*Russia, Kazan*

*Kazan (Volga Region) Federal University,*

*N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics*

*Scientific supervisor: candidate of pedagogic Sciences, associate Professor Falileeva M.V.*

*Abstract.* The article examines the definitions of the concept of «multimodality» from the point of view of various approaches to its study, highlights the distinctive features of the concept and substantiates its relevance.

*Keywords*: multimodality, polycode, polymodality, ways of perceiving information, cognitive approach, semiotic approach, sociocultural approach, pedagogical approach.

В 17 веке чешский педагог Ян Амос Коменский сформулировал «золотое правило дидактики»: «Всё, что только возможно, предоставлять для восприятия зрением, слышимое — слухом, запахи — обонянием, подлежащее вкусу — вкусом, доступное осязанию — путем осязания. Если какие-либо предметы сразу можно воспринять несколькими чувствами, пусть они сразу схватываются несколькими чувствами...». Уже тогда речь шла о таком понятии, как мультимодальность восприятия информации. Человек по своей сути является существом мультимодальным и воспринимает информацию посредством сразу нескольких органов чувств. Так, например, ребёнок, изучая новую игрушку, трогает её, запоминает форму и цвет, звуки, которые она издаёт, запах.

В современных цифровых реалиях нашего века понятие обретает еще большую актуальность, что обусловлено разнообразием форм представления информации: текстовой, видеоаудиальной, графической, символьной. В условиях цифровизации стало возможным объединение различных видов информации в единое целое. В области математического образования используются различные способы представления информации: чертежи, графики, сложный математический текст с научной символикой, текстовая и символьная запись теорем и их доказательств. В текущее время появилась возможность создавать динамические чертежи, пошаговые анимации доказательства теорем геометрии, диаграмм в теории вероятностей, графиков и закономерностей алгебры, а также материалы, включающие в себя видеофрагменты, интерактивные упражнения, задания по анализу информации, представленной графически или с помощью изображений и др. Однако для создания подобного контента необходимо понимать значение понятия «мультимодальность» и знать основные подходы к её изучению, так как не любая комбинация вышеуказанных элементов гарантирует высокую результативность их применения.

Обратимся к научным основам понятия «мультимодальность» для эффективного их применения при разработке цифрового учебного контента по математике.

**Целью** данной работы является анализ теоретических положений о мультимодальности, выделение отличительных черт данного понятия и характеристика основных подходов к её изучению для их дальнейшего применения в области математического образования.

**Объект:** процессы обмена информацией (в частности, обучения).

**Предмет:** мультимодальность при предоставлении информации.

В научной литературе понятия поликодовость, полимодальность и мультимодальность часто трактуются как взаимозаменяемые. Это обуславливается наличием объединяющего начала этих понятий. В основе каждого из них лежит использование неязыковых средств передачи информации в дополнение к языковым. Под неязыковыми средствами подразумеваются цвет различных компонентов информации (фон, текст), виды шрифтов, аудио, видео, изображение [6].

Для выделения отличительных черт понятия «мультимодалность» рассмотрим определения трёх вышеуказанных понятий в различных источниках.

В качестве основы для дальнейшего анализа возьмём характеристику понятий поликодовость, полимодальность и мультимодальность, предложенную И. В. Сосновской [5].

- Говоря о понятии «поликодовость» в центр внимания ставятся коды (словесные, графические, цветовые и др.) и их сочетания.
- При рассмотрении понятия «полимодальность» акцент делается на каналы восприятия информации: зрительный, слуховой, тактильный.

- Если речь идет о «мультимодальности», то внимание уделяется как способам восприятия информации, так и влиянию отдельных составляющих (картинка, звук, видео, цвет, шрифт и др.) на восприятие информации.

Указанная трактовка рассматриваемых понятий позволяет сделать вывод о том, что мультимодальность является понятием, объединяющим поликодовость и полимодальность, так как учитывает каналы восприятия, а также коды передачи информации и их сочетания.

На самом деле, характеристика мультимодальности во многом зависит от того, с точки зрения какого подхода она рассматривается. Скворцова И.А. выделяет 4 подхода: когнитивный, семиотический, социокультурный, педагогический [4].

При *когнитивном походе* подходе мультимодальность изучается с позиции того, как мозг обрабатывает различные модусы представления информации. Модус – это способ представления, трансляции и получения информации, ориентированный на рецепторные возможности индивида [1]. Представителем данного подхода является А.А. Кибрик [3], который рассматривает «мультимодальность» в узком смысле и в определении опирается на понятие «модальности», принятое в психологии, нейрофизиологии и информатике. «Модальность – это тип внешнего стимула, воспринимаемого одним из чувств человека, в первую очередь зрением и слухом» [3, с.135]. Понятие мультимодальность автор относит к «различию между человеческими органами чувств, в первую очередь различию между зрительными и слуховыми каналами». Однако А.А. Кибрик уточняет, что каждый из каналов восприятия имеет дальнейшее разбиение. Так, например, «Визуальный канал включает жестикуляцию, направление взора, мимику и другие аспекты «языка тела». Письменный дискурс, также воспринимаемый визуально, помимо вербального компонента включает целый набор графических параметров, таких как шрифт, цвета, формат и т. д.» [3, С.148]. По мнению автора, современное понятие «мультимодальности» включает в себя все имеющиеся разбиения.

Таким образом, в узком смысле определение «мультимодальности» совпадает с трактовкой понятия «полимодальность», рассматриваемого нами ранее. В широком же смысле трактовки «мультимодальности» И.В. Сосновской и А.А. Кибрика идентичны.

В области математического образования с точки зрения когнитивного подхода примером мультимодального текста является видеоурок по геометрии с RuTube канала Liamelon School по теме «Теорема Пифагора», который воспринимается учениками посредством визуального и аудиального каналов. В свою очередь, воздействие на визуальный канал происходит посредством цвета фигур на чертеже, символьной записи условия и заключения теоремы, а также пошаговой записи его доказательства. На аудиальный же канал воздействует речь комментатора видео, его интонация, акценты на словах «Внимательно посмотрите», «Обратите внимание» и т.п.

Семиотика – это наука о знаках и знаковых системах, анализирующая их природу, свойства и функции [2]. В случае *семиотического подхода* к определению мультимодальности, характеристика данного понятия базируется на анализе сочетания различных знаковых систем для передачи информации. Рассмотрим определение «мультимодальности», которое дают представители данного подхода – А.В. Белоедова и А.В. Кожемякин.

«Мультимодальность – это способ описания коммуникативных ситуаций в широком смысле, основанных на эффективной комбинации различных форм коммуникации» [1]. В качестве примеров авторы приводят телепередачу, объединяющую устную речь, изображения и тексты, книгу, включающую в себя письменную речь, изображение, вёрстку страниц и др., и разговор, который объединяет устную речь с телесными средствами общения. В условиях современности к примерам можно также отнести компьютерные игры, которые подразумевают возможности передачи информации с помощью устной и письменной речи, графики, изображений, аудио, эмоджи и т.д. Кроме того, А.В. Белоедова и А.В. Кожемякин выделяют понятия, которые являются основопологающими характеристиками мультимодальности: модус, коммуникативная ситуация, эргодический текст со свойствами мутабельности и темпоральности. Определение «модуса» было дано нами ранее, рассмотрим более подробно остальные понятия.

Коммуникативная ситуация – ситуация, в которой происходит передача информации (диалог, просмотр видео, чтение книги и др.).

Эргодический текст – характеристика текста, которая подразумевает соучастие субъекта получения информации в создании смысла. Например, многие компьютерные игры позволяют осуществить выбор персонажа, а развитие сюжета в них зависит от действий или ответов игрока. Свойство мутабельности такого текста указывает на его изменяемость в зависимости от того, кто является субъектом восприятия. Так, фраза «Подготовиться к уроку» по-разному воспринимается учителем и учеником. С точки зрения учителя это необходимость составить план урока, подготовить необходимые материала, определить, как лучше преподнести теорию. Ученик же понимает её как необходимость выполнить домашнее задание, подготовить учебник, тетрадь и письменные принадлежности. Темпоральность – это свойство текста, предполагающее его изменение во времени. С этой позиции тексты подразделяются на статические, воспринимающие целостно (изображение, схема), и динамические, развивающиеся постепенно (видеоролик, музыкальная композиция).

При *социокультурном подходе* к рассмотрению мультимодальности внимание уделяется взаимодействию различных модусов и их использованию для усиления смысла предоставленной информации в определенных социальных ситуациях. Представителями данного подхода являются Г. Кресс и Т. ван Лёвен [7], которые определяют мультимодальность с позиции социальной семиотики. В этом случае, мультимодальность – подход, который изучает совместное использование знаковых систем (модов) для создания смысла. Примерами модов являются изображение, звук, цвет и др.

Стоит отметить, что семиотический и социокультурный подходы очень близки по своему описанию, однако существенное отличие заключается в объекте исследования и вопросе, который рассматривается в каждом из подходов. Семиотический подход в качестве объекта рассматривает мультимодальный текст как законченный элемент и отвечает на вопрос «Как в нём сочетаются различные коды для создания смысла?». Социокультурный же подход подразумевает изучение процессов создания, распространения и интерпретации мультимодального текста и получение ответа на вопрос «Почему в данной ситуации используются именно такие модусы и какую функцию они выполняют?».

*Педагогический подход* включает в себя анализ мультимодальности с точки зрения других подходов и предполагает их учёт при разработке учебных материалов и методик на основе данного понятия. С точки зрения данного подхода мультимодальность можно определить как признание и активное использование различных способов представления и передачи учебного материала. Таким образом, мультимодальность в обучении подразумевает использование не только текстовых материалов, но и аудио, видео, интерактивных элементов, графических изображений и др. В условиях современных требований к образованию это становится особо актуальным, так как способствует индивидуализации обучения с учётом такой особенности человека, как тип восприятия (аудиальный, визуальный, дигитальный и кинестетический).

В качестве еще одного примера мультимодального текста рассмотрим интерактивный чертёж «Теорема Пифагора и её доказательство» (Рис. 1) и приведём его интерпретацию с точки зрения каждого из подходов.

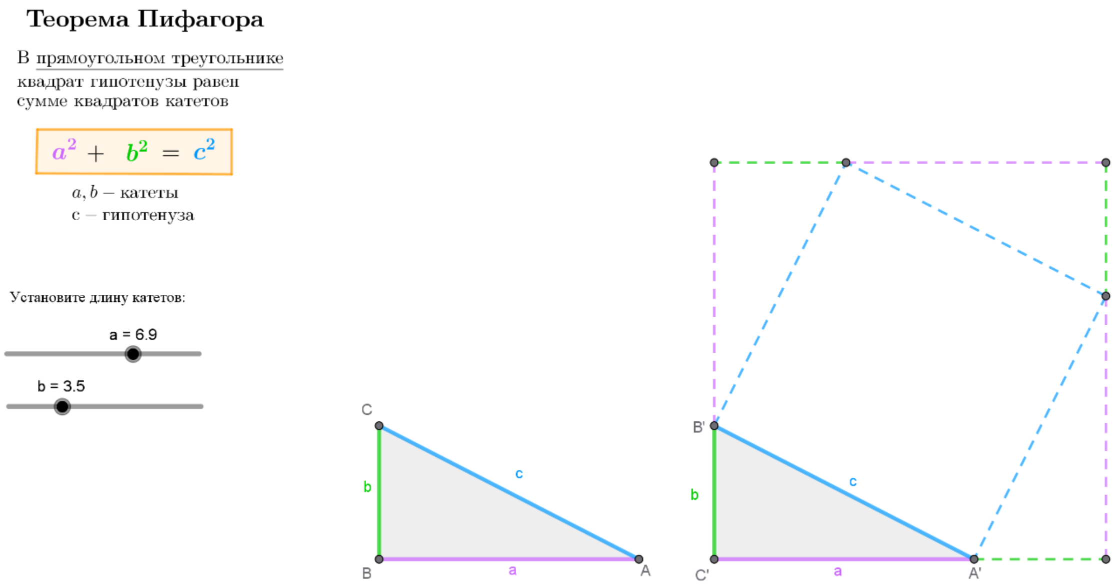



Рисунок 1. Интерактивный чертёж «Теорема Пифагора и её доказательство»

С точки зрения семиотического подхода данный чертёж состоит из лингвистического кода (название и формулировка теоремы, выделение ключевого условия), символический код (математическая запись заключения теоремы), визуальный код (чертёж треугольника и идеи доказательства, цветовое единство соответствующих или равных элементов), кинестетический код (ползунки, позволяющие убедиться в истинности теоремы для любого прямоугольного треугольника). Лингвистический код даёт общую формулировку утверждения с акцентом на ключевом условии, символический код демонстрирует её краткую запись, визуальный код делает формулировку более наглядной, интерактивный код позволяется убедиться в универсальности утверждения.

В контексте социокультурного подхода рассматриваются следующие модусы: текст, чертёж, интерактивность, формальная символика. Текст является основным способом передачи знания, выполняет информативную и инструктирующую функции. Чертёж – визуальный компонент теоремы и идеи её доказательства, являющийся обязательным в геометрии, он выполняет объяснительную и коммуникативную функции, позволяя задать поле для обсуждения доказательства учителем и учеником. Формальная символика позволяет в сжатой форме записать математическое утверждение, выступает в качестве эффективного инструмента решения задач, выполняют обобщающую функцию, сообщая об истинности теоремы для любого прямоугольного треугольника. Интерактивность использует для формирования исследовательских навыков, выполняет мотивационную и обобщающую функцию, так как у ученика появляется возможность «пощупать» утверждение и убедиться в его истинности для разных треугольников.

С точки зрения педагогического подхода данная интерактивная разработка способствует эффективному запоминаю теоремы и её доказательства, так как сочетает в себе все необходимые для усвоения элементы – формулировку, символьную запись, чертёж и идею доказательства, а также позволяет ученику после урока самостоятельно взаимодействовать с ней и использовать в качестве опорного конспекта.

Таким образом, при создании учебного материала необходимо рассматривать понятие мультимодальности с позиций различных подходов, осуществлять интегративный учёт всех рассмотренных нами компонентов: тип восприятия учащегося, цвет, размер и тип шрифта, их влияние на восприятие информации, сочетание различных кодов между собой, функции, которые каждый из них осуществляет в процессе использования, а также ситуацию, в которой применяется разработанный материал.

Список литературы

1. Белоедова, А. В., Кожемякин, Е. А. Мультимодальная коммуникация в фокусе исследовательской рефлексии: проблемно-ориентированный подход [Текст] / А. В. Белоедова, Е. А. Кожемякин // Критика и семиотика. — 2022. — № 2. — С. 54-70.
2. Елина, Е. А. Семиотика рекламы [Текст] : учебное пособие / Е. А. Елина. - 2-е изд. - Москва : Дашков и Ко, 2014. - 136 с.
3. Кибрик, А. А. Мультимодальная лингвистика [Текст] / А. А. Кибрик // Когнитивные исследования: сборник научных трудов. – М.: Ин-т психологии РАН, 2010. – С. 135–152.
4. Скворцова, И.А. МУЛЬТИМОДАЛЬНОСТЬ И ЕЕ ВЛИЯНИЕ НА ОБУЧЕНИЕ ИНОСТРАННОМУ ЯЗЫКУ В ВУЗЕ / И. А. Скворцова // Многоязычие в образовательном пространстве. — 2024. — № 16-3. — С. 327-334.
5. Сосновская, И. В. Школьное литературное образование: современные практики и технологии : монография / И. В. Сосновская, Е. Н. Малышева, И. Г. Арсентьева. — Иркутск : ИГУ, 2023. — 234 с.
6. Щирова, И.А., Гурочкина, А. Г., Гончарова, Е. А. и др. Понять другого: проблемы интерпретации текста в современной науке : монография — Санкт-Петербург : РГПУ им. А. И. Герцена, 2023. — 196 с.
7. Kress, G. Multimodal Discourse: The Modes and Media of Contemporary Communication / G. Kress, T. van Leeuwen. – London : Oxford University Press, 2001. – 142 p.

***Номинация «Лучшая прикладная работа»***

## РАЗРАБОТКА ИНТЕРАКТИВНЫХ МАТЕРИАЛОВ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ТЕХНОЛОГИИ УКРУПНЕНИЯ ДИДАКТИЧЕСКИХ ЕДИНИЦ ДЛЯ ОБУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

*Жмуденко М.А.*

*Россия, г. Казань*

*Казанский (Приволжский) Федеральный Университет, институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского*

*Научный руководитель: к.пед.н., доцент Фалилеева М.В.*

*Аннотация.* В статье рассматривается разработка и применение интерактивных элементов технологии укрупнения дидактических единиц (УДЕ) на уроках геометрии. Проводится сравнительный анализ выбранного программного обеспечения с позиций технической реализации и эффективности в процессе обучения геометрии на уроке.

*Ключевые слова:* интерактивность, УДЕ, геометрия, GeoGebra, 1С: Математический конструктор, Genially

**DEVELOPMENT OF INTERACTIVE MATERIALS FOR THE IMPLEMENTATION OF TECHNOLOGY FOR THE ENLARGEMENT OF DIDACTIC UNITS FOR TEACHING GEOMETRY IN SECONDARY SCHOOLS**

*Zhmudenko M.A.*
*Russia, Kazan*
*Kazan (Volga Region) Federal University,*
*N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics*
*Scientific supervisor: candidate of pedagogic Sciences, associate Professor*
*Falileeva M.V.*

*Abstract.* The article discusses the development and application of interactive elements of didactic unit aggregation technology in geometry lessons. A comparative analysis of the selected software is carried out from the standpoint of technical implementation and effectiveness in the process of teaching geometry in the classroom.

*Keywords*: interactivity, CDU, geometry, GeoGebra, 1C: Mathematical Constructor, Genially

Современное образование все чаще сталкивается с проблемой фрагментации знаний в школе, заключающейся в дроблении учебного материала на разделы, модули, конкретные уроки. При этом элементы учебной программы рассматриваются изолированно друг от друга. Такой подход приводит к тому, что ученик одновременно обучается лишь одному простому навыку или ограниченному их числу. В такой ситуации все меньше времени отводится систематизации знаний и их обобщению. В связи с этим актуальность обретают системы интенсификации знаний, позволяющие при верном подходе ускорить глубокое освоение знаний при неизменной продолжительности обучения и без снижения требований к качеству знаний. Одной из таких систем является технология УДЕ П.М. Эрдниева, которая приобретает новое значение в условиях информационного общества. Возможности современного технического оборудования (проектор, компьютер, доступ в интернет) позволяют учителю использовать элементы технологии УДЕ с целью преодоления проблемы фрагментации знаний на уроках математики и, в частности, геометрии.

**Целью** данной работы является разработка интерактивного материала с элементами технологии УДЕ для уроков геометрии в средней школе.

**Объект**: процесс обучения геометрии учащихся 7-9 классов.

**Предмет**: визуализация элементов технологии укрупнения дидактических единиц.

Несмотря на наличие в трудах П. М. Эрдниева [1] готовых конспектов и практических заданий, внедрение технологии УДЕ сопряжено с необходимостью значительной трансформации учебного процесса и тщательной подготовки материала. В силу объективных причин современной образовательной системы, подобная реорганизация является крайне затруднительной. В результате, несмотря на свой потенциал, технология УДЕ не получила широкого распространения в педагогической среде [2]. Однако, как указывалось выше, современные технологии позволяют облегчить учителю реализацию элементов системы УДЕ:

использование презентаций, схем [3, 4] на интерактивной доске; подготовка рабочих листов для учащихся для индивидуальной, групповой, фронтальной работы учащихся. В данной статье предлагается дополнить подходы к применению технологии УДЕ на уроках элементами интерактивности, что согласно современным исследованиям [5] вызовет у учащихся дополнительный интерес, покажет новые связи между изучаемыми понятиями, «подсветит» алгоритмы, что позволит при правильной организации урока повысить качество образовательного процесса.

Поскольку задача представляет из себя оцифровку и формирование интерактивных свойств у уже готового методического материала, то в качестве примера удобно использовать свойство и признак параллелограмма. На это есть несколько причин:

- Противопоставление в соответствии с технологией УДЕ. В качестве обратной теоремы для свойства параллелограмма можно использовать признак параллелограмма. Теоремы удобно представляются единым чертежом, а доказательство обратной теоремы будет соответствовать доказательству прямой в обратном порядке (рис. 1).
- Размер для размещения на один «рабочий» лист в интерактивном формате. Чертеж, импликативная схема и сами теоремы (прямая и обратная) не занимают много места, пояснения к шагам доказательства будут реализованы через подсказки, а не будут статично находится на экране. Это позволяет не перегрузить символами страницу, отделив центральную и вспомогательную информацию, иначе можно снизить концентрацию и мотивацию учащегося.

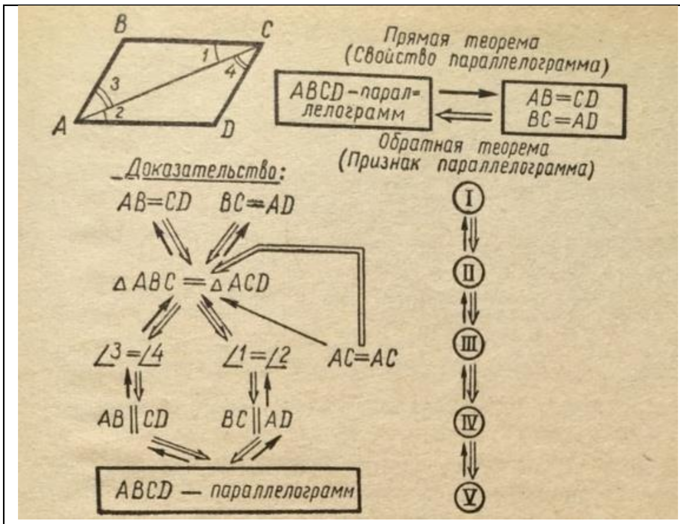


Рисунок 1. Схема доказательства, предложенная П.М. Эрдниевым [1]

В качестве программного обеспечения (сервисов) для реализации интерактивного формата выбраны 1С: Математический конструктор, GeoGebra и Genially. Все перечисленные сервисы объединяет бесплатный доступ как для учителя, так и для ученика, интуитивно понятный интерфейс и инструменты, позволяющие добавлять интерактивные элементы.

Для удобства разделим разработку цифрового материала на три этапа:

1. Размещение статичных объектов, которые будут присутствовать на экране все время (то есть не скрываются кнопкой или флажком) – добавление текста, рамок, чертежей и т.п.

2. Размещение интерактивных объектов, которые будут открыты пользователю по нажатию на кнопку или флажок – добавление текста, рамок, стрелок, чертежей.

3. Осуществление интерактивности – связка интерактивных объектов и элемента управлениями имя (кнопка, флажок и т.д.).

**1С: Математический конструктор** – это интерактивная образовательная платформа сервиса «1С: Урок», включающая в себя библиотеку учебных материалов по всем предметам средней школы, и среду создания собственных интерактивных образовательных разработок.

Согласно вышеописанным этапам, процесс начинается с добавления прямой и обратной теорем, схемы взаимосвязи между ними, построения и размещения чертежа, а также добавления схемы «По шагам». Все эти объекты являются статичными и выделены на рисунке 2 зеленым цветом.

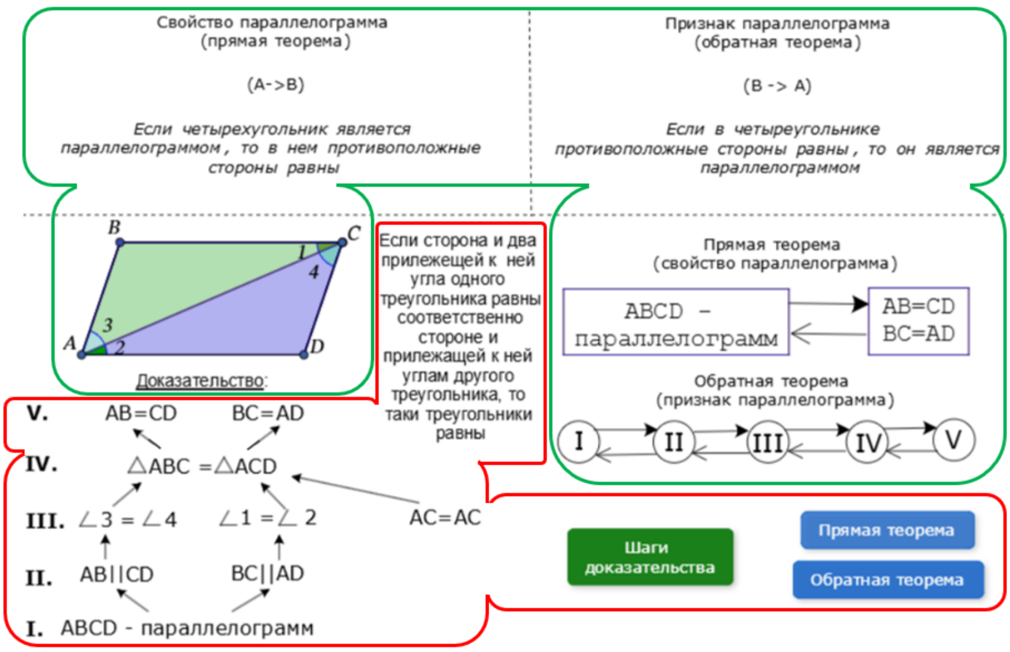



Рисунок 2. Интерактивная разработка для выбранной схемы доказательства, реализованная в 1С: Математический конструктор.

На втором этапе происходит добавление в разработку интерактивных элементов, выделенных на рисунке 2 красным цветом: краткие шаги доказательства, текст подсказок, стрелки и кнопки, которые могут исполнять шаблонные команды или же действовать согласно самописному скрипту, выполненному на языке JavaScript.

На третьем этапе формируется связь между статичными и интерактивными объектами, через которые будет осуществляться управление: кнопка «Шаги доказательства» при активации открывает символьную схему, кнопки «Прямая теорема» и «Обратная теорема» при активации открывают соответствующие стрелки-указатели. На этом же этапе, с учетом специфики инструментов платформы, добавляются безымянные невидимые кнопки на места стрелок в схеме доказательства, что позволят при наведении курсора на стрелку получать пояснения для действия на определенном шаге. Одна из таких всплывающих подсказок приведена в центре рисунка 2 и выделена красным цветом.

**GeoGebra** – кроссплатформенная динамическая математическая программа для всех уровней образования, объединяющая в себе геометрию, алгебру, графы, таблицы, статистику и арифметику и, что наиболее важно для данной работы, позволяет создавать динамические чертежи, выполнять визуализацию математических процессов и проводить исследовательские работы [6-8].

Добавление статичных объектов производится с использованием аналогичных 1С: Математический конструктор инструментов. Данные объекты представлены на рисунке 3 и выделены зеленым цветом.

При добавлении интерактивных объектов, представленных на рисунке 3 и выделенных красным цветом, с использованием GeoGebra необходимо учитывать, что в программе отсутствуют кнопки, работающие по определенному шаблону. Каждая добавляемая кнопка программируется самописным скриптом на языке GeoGebra Script.

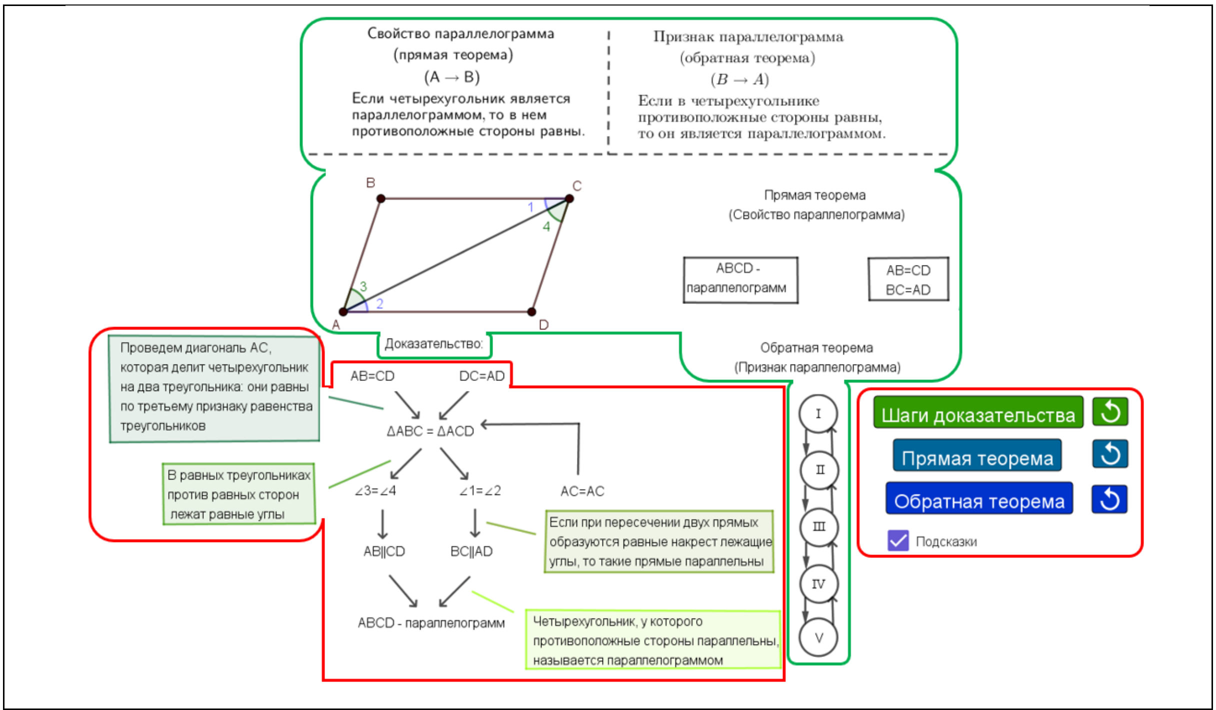


Рисунок 3. Интерактивная разработка для выбранной схемы доказательства, реализованная в GeoGebra. Зеленым выделены статичные объекты. Красным выделены интерактивные объекты

Для его реализации введем вспомогательную переменную с типом Булево, меняющую свое значение в зависимости от нажатия кнопки. Для корректного отображения теорем введем дополнительные переменные того же типа с условием, устанавливающим жесткую зависимость появления объекта при выполнении определенных условий.

На последнем этапе разработки добавляется схема доказательства, стрелки и пустые кнопки без описанного скрипта, текст и рамки подсказок, продемонстрированные на рисунке 3.

**Genially** – англоязычная платформа для создания интерактивов и анимаций, с помощью которой можно создавать презентации, инфографику, схемы, квизы, игры и видеоролики. В Genially отсутствуют кнопки, позволяющие реализовывать интерактивность, однако ее можно задать любому созданному объекту.

Первый этап не отличается в реализации от двух предыдущих платформ, однако, из-за особенностей Genially, добавление интерактивных объектов осуществляется через установку флажка, подключающего объекту данное свойство. Таким образом, для выполнения второго этапа разработки были добавлены все необходимые объекты, представленные на рисунке 4 и выделенные красным цветом, у которых затем был установлен этот флажок.

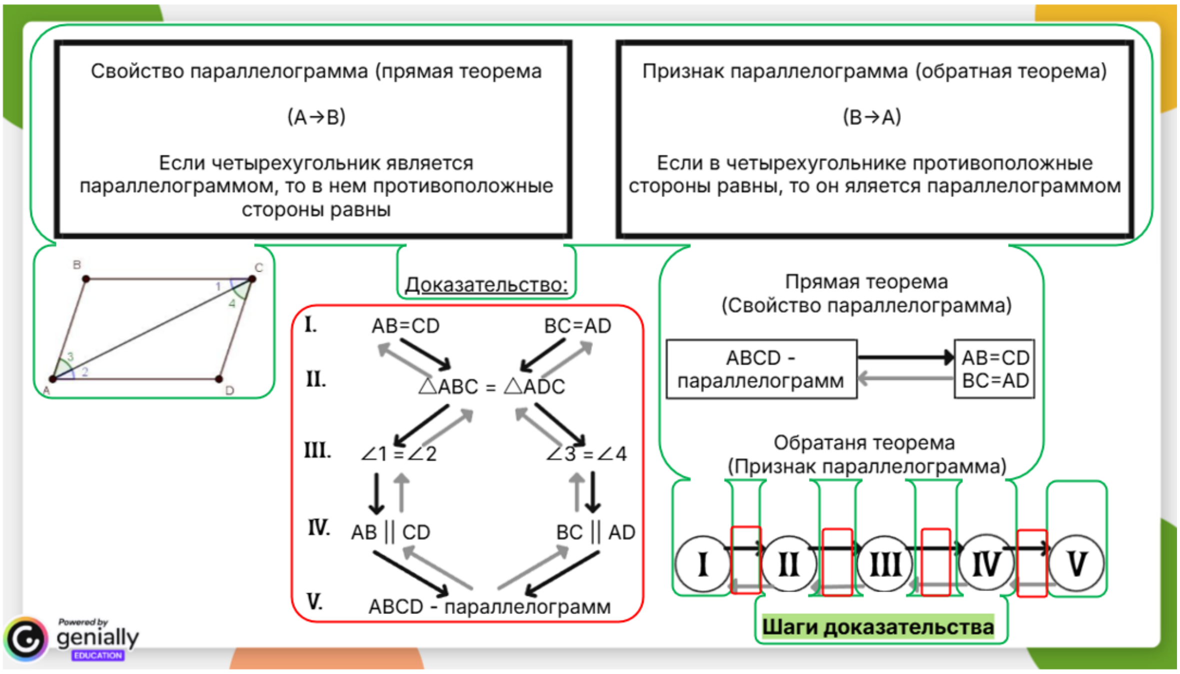



Рисунок 4. Интерактивная разработка для выбранной схемы доказательства, реализованная в Genially. Зеленым выделены статичные объекты. Красным выделены интерактивные объекты

В процессе реализации третьего этапа разработки, в силу специфики программы, пояснения к шагам доказательства были выполнены невидимыми и перенесены в пошаговую схему, представленную окружностями, соединенными стрелками. Ниже в таблице 1 приведен сравнительный анализ программного обеспечения, применяемого для разработки интерактивных элементом.

Таблица 1. Сравнительный анализ ПО для разработки интерактивных элементов

| | GeoGebra | 1С: Математический конструктор | Genially |
|---|---|---|---|
| Динамические чертежи и модели | Да | Да | Нет |
| Использование кнопок | Да, самописный скрипт | Да, использование готовых шаблонов | Да, использование |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | готовых шаблонов |
| Требует подключения к интернету | Да, для онлайн версии | Да | Да |

На основе сравнительного анализа и опыта разработки можно сделать вывод, что наиболее простая в освоении программа – Genially, хотя она не обладает возможностью построения чертежей, что может стать значительным препятствием. GeoGebra также является несложной в освоении, однако, для формирования интерактивности необходимо иметь представление о работе скриптов на языке GeoGebra Script. 1С: Математический конструктор среди всех рассмотренных программ обладает наибольшим функционалом, что обеспечивается программированием скриптов интерактивных объектов на языке JavaScript, что даёт практически неограниченные возможности как для оформления, так и для программирования действий. Однако данное ПО является наиболее сложным в освоении.

Данная разработка находит свое практическое применение на уроках открытия нового знания при введении нового материала, при актуализации знаний на уроке рефлексии, а также в качестве «шпаргалки» домой, для самостоятельного повторения или использования в виде готового конспекта.

Список литературы

1. Эрдниев, П. М. Методика упражнений по математике [Текст] / П. М. Эрдниев // Просвещение. — 1970. — 319 с.

2. Кривко, Я. П. Технология укрупнения дидактических единиц в процессе преподавания математики [Текст] / Я. П. Кривко, В. В. Слободян // Методическая наука – учителю математики и информатики. – 2023. – №4. – С. 66 – 73

3. Кажикенова, А. Ш. Технология укрупнения дидактической единицы при изучении школьной математики [Текст] / А. Ш. Кажикенова, Д. Б. Алибиев, К. М. Турдыбекова //

Международный электронный журнал. Устойчивое развитие: наука и практика. – 2016. – №2. – С. 138 – 148.
4. Ульянова, И. В. Средства обучения учащихся геометрии в контексте укрупнения дидактических единиц [Текст] / И. В. Ульянова // Наука и школа. – 2016. – №3.
5. Абраменкова, Ю. В., Скворцова, Д. А. Проектирование урока математики в цифровой образовательной среде [Текст] / Ю. В. Абраменкова, Д. А. Скворцова // Методическая наука. – 2023. – №4. – С. 48 – 60.
6. Безумова, О. Л. Обучение геометрии с использованием возможностей GeoGebra: учебно-методическое пособие [Текст] / О. Л. Безумова // федер. гос. автоном. образоват. учреждение высш. проф. образования «Север. (Аркт.) федер. Ун-т им. М. В. Ломоносова» – Архангельск: КИРА, 2011. – 140 с.
7. Гельфанова, Д. Д., Шнарева, Г. В., Донченко, А. Я. Применение GeoGebra при изучении нелинейного программирования [Текст] / Д. Д. Гельфанова, Г. В. Шнарева, А. Я. Донченко // Таврический вестник информатики и математики. – 2022. – №. 4 (57). – С. 22-37.
8. Епифанцева, В. А. Особенности использования системы GeoGebra в процессе обучения [Текст] / В. А. Епифанцева // Общество: социология, психология, педагогика. – 2020. – №. 12. – С. 254-257.
9. Завгородняя, Л. С. Использование СПО GeoGebra [Электронный ресурс] // Образовательная социальная сеть nsportal.ru, 2020. URL: https://nsportal.ru/shkola/matematika/library/2020/08/13/ispolzovanie spo-geogebra (Дата обращения: 14.11.2025).

## ИНТЕРАКТИВНЫЙ ПУТЕВОДИТЕЛЬ ПО ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

*Жмуденко М.А., Тюрина К.А.*

*Россия, г. Казань*

*Казанский (Приволжский) Федеральный Университет, институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского*

*Научный руководитель: к.пед.н., доцент Садыкова Е.Р.*

*Аннотация.* В статье представлен интерактивный сборник по геометрии Лобачевского, предназначенный для учащихся 7–8 классов. Рассматриваются методические аспекты его использования в организации внеурочной и проектной деятельности. Путеводитель включает историко-биографический материал, наглядные аналогии, пошаговое построение модели Пуанкаре в круге, интерактивные элементы и сравнительный анализ геометрий Евклида и Лобачевского. Особое внимание уделяется развитию исследовательских навыков, самостоятельности и познавательного интереса учащихся. Материал может быть использован как основа для проектов, внеурочных занятий и математических кружков. В рамках данной статьи также показана возможность применения данного путеводителя как средства.

*Ключевые слова:* геометрия Лобачевского, интерактивный сборник, внеурочная деятельность, проектная деятельность, модель Пуанкаре, 7–8 классы, путеводитель.

**AN INTERACTIVE GUIDE TO THE BASICS OF LOBACHEVSKY GEOMETRY AS A MEANS OF ORGANIZING EXTRACURRICULAR AND PROJECT ACTIVITIES**

*Tyurina K.A., Zhmudenko M.A.*

*Russia, Kazan*

*Kazan (Volga Region) Federal University,*

*N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics*

*Scientific supervisor: candidate of pedagogic Sciences, associate Professor Sadykova E.R.*

*Abstract.* The article presents an interactive guide to the basics of Lobachevsky’s geometry, designed for students in grades 7–8. The methodological aspects of its use in organizing extracurricular and project activities are considered. The guide includes historical and biographical material, visual analogies, step-by-step construction of the Poincaré disk model, interactive elements, and a comparative analysis of Euclidean and Lobachevsky geometries. Special attention is paid to the development of research skills, independence, and cognitive interest among students. The material can be used as a basis for projects, extracurricular activities, and math clubs.

*Keywords*: Lobachevsky geometry, interactive guide, extracurricular activities, project activities, Poincaré model, grades 7-8.

В настоящее время согласно требованиям ФГОС [8] учащимся необходимо в конце 9 класса выполнить индивидуальный проект, который включает в себя постановку проблемы, анализ литературы, создание продукта и его презентацию. Однако осуществлению подобной деятельности должна предшествовать подготовка, начинающаяся раньше (в 7-8 классах), которая позволила бы сформировать у учащихся исследовательские навыки. Кроме того, в современной образовательной среде перед учителями возникла необходимость повышения познавательного интереса к математике, в том числе посредством проведения внеурочных мероприятий по предмету. Однако придумать интересную тематику мероприятия, подготовить и найти материал для его проведения – непростая задача, требующая дополнительных усилий и творческого подхода со стороны учителя.

В данной статье представлен интерактивный путеводитель по геометрии Н.И. Лобачевского для учащихся 7-8 классов, а также для тех, кто интересуется математикой за пределами школьной программы. Его можно использовать в качестве образца продукта проектной деятельности, основы для нового проекта, а также в качестве материала для проведения внеурочного занятия.

Целью данной работы является создание сборника, содержащего основы для понимания геометрии Лобачевского, в котором сложная математическая информация преподносится учащимся 7-8 классов простым, понятным и наглядным образом.

**Объект исследования:** процесс организации внеурочной и проектной деятельности учащихся 7-8 классов.

**Предмет исследования:** содержательные, методические и интерактивные компоненты учебного сборника, обеспечивающее эффективное усвоение базовых понятий геометрии Лобачевского, отличительных и общих черт геометрий Евклида и Лобачевского и его применимость при организации внеурочной и проектной деятельности учащихся 7-8 классов.

При разработке образовательного материала с учётом выделенных компонентов был применен ряд методологических приемов:

- Историко-биографический подход. Погружение в тему начинается с истории научного подвига Н.И. Лобачевского, что создает личностный интерес и показыва22ет науку как живую, развивающуюся систему;
- Предметная аналогия. Ключевые понятия («двуполостный гиперболоид», «абсолют») объясняются через доступные аналогии («песочные часы», «граница круга») (Рис. 1);
- Пошаговое конструирование модели. Центральным элементом путеводителя является преобразование абстрактной геометрии на гиперболоиде в наглядную модель Пуанкаре на плоскости через последовательность из 12 шагов. Этот процесс делает абстракцию осязаемой и понятной.
- Интерактивность. Для большего понимания многие модели представлены в качестве интерактивных чертежей, предоставляющим учащимся возможно самостоятельно «пощупать» новую для них геометрию и убедиться в истинности повествуемых утверждений.
- Наглядность. Особенностью математического сознания учащихся 7-8 классов является несформированность абстрактного мышления, поэтому

для эффективного усвоения предложенного теоретического материала каждая новая информация сопровождается иллюстрацией.

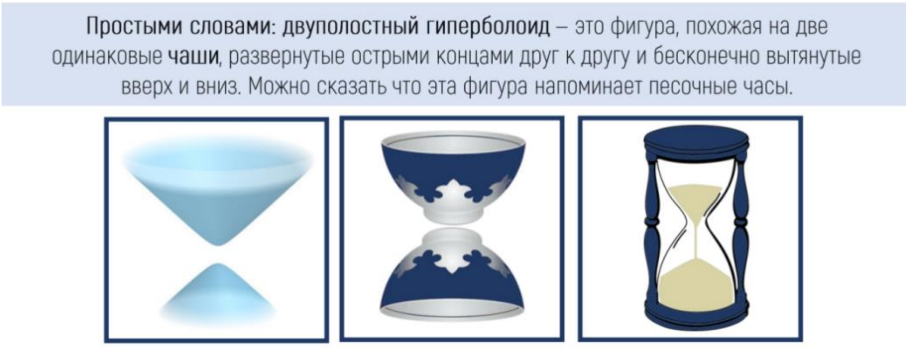



Рисунок 1. Реальная аналогия двуполостного гиперболоида

Сборник состоит из 4 глав и заключения. Первая глава включается в себя небольшую историческую справку о Н.И. Лобачевском и пути, который привёл его к великому открытию [4, 5]. Вторая глава посвящена описанию поверхности, на которой работает рассматриваемая геометрия, а также её пошаговому проецированию на евклидовую плоскость – построению модели Пуанкаре в круге [7]. Поэтапное построение указанной модели и наличие интерактивного сопровождения некоторых шагов способствуют глубокому пониманию процесса достижения конечного результата, а также предоставляет возможность самим ответить на вопрос «Что же нужно сделать дальше?» (Рис. 2,3). В третьей главе вводятся основные геометрические понятия – точка, прямая, луч, угол, параллельные прямые. Четвёртая глава посвящена фундаментальной фигуре любой геометрии – треугольнику и некоторым фактам о нём [7]. Заключение не содержит выводов по пройденному материалу, оно направлено на мотивацию учащихся к дальнейшему развитию, формированию веры в себя и свои возможности. «Возможно, следующее великое открытие, которое перевернёт наши представления о мире, принадлежит именно вам. Главное – не бояться думать иначе, задавать «странные» вопросы и, как Лобачевский, верить в силу собственной мысли».

В школьном курсе математике изучается Евклидовая геометрия, в связи с этим введение основных понятий геометрии Лобачевского в 3 главе проводится на основе сравнительного анализа двух геометрий: знакомой каждому школьнику и новой, еще неизведанной. В путеводителе присутствует наглядная таблица, представленная на рисунке 4 и позволяющая провести прямое сравнение основных элементов и аксиом геометрии Евклида и геометрии Лобачевского (точка, прямая, параллельные прямые, свойства треугольника), а также выделить отличительные и схожие черты двух геометрий.

Кроме описанных элементов сборник содержит вопросы, способствующие активизации мыслительной деятельности и организации обсуждения предположений совместно с одноклассниками и учителем. Например, «Как получить аналогичные понятия в нашей модели?», «Какие привычные свойства треугольника становятся другими в геометрии Лобачевского?»

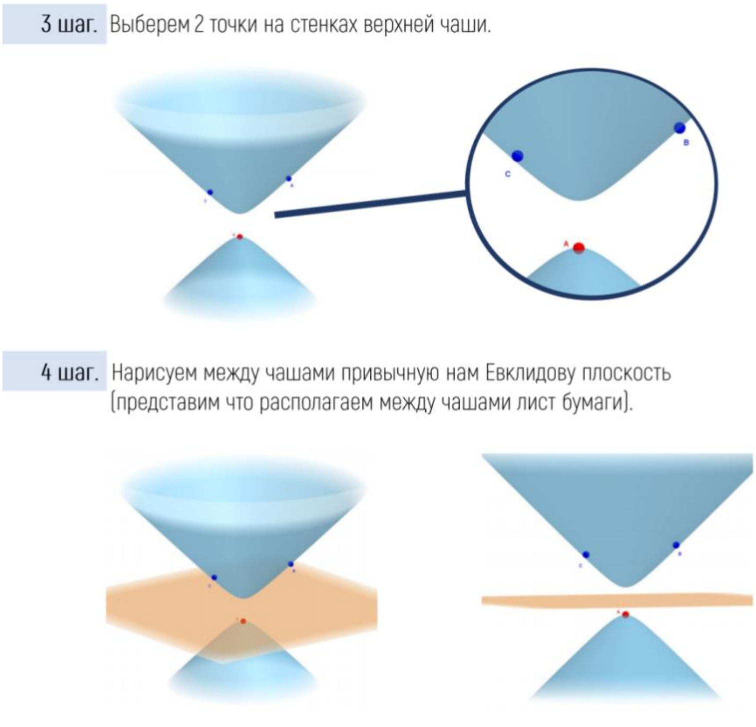



Рисунок 2. Пошаговое получение модели Пуанкаре в круге

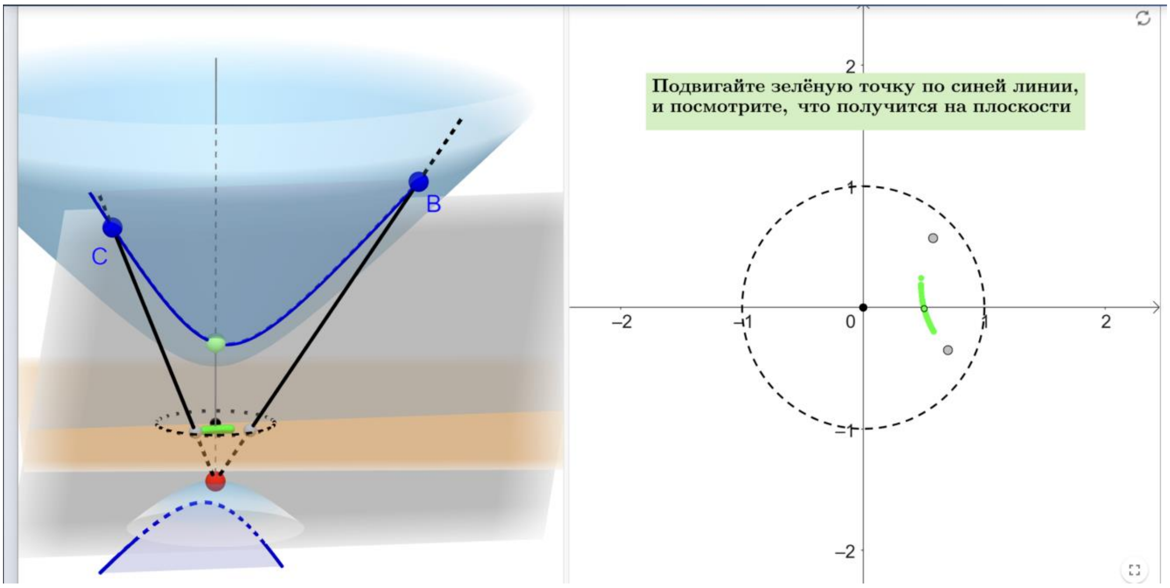



Рисунок 3. Интерактивная модель «Во что превратится прямая?»


Рисунок 4. Фрагмент таблицы «Основные элементы «истинных геометрий»

Разработанный нами путеводитель по основам геометрии Лобачевского служит готовым решением для учащихся, которые выбирают тему для своего проекта по математике или физике, а также может использоваться учителем в качестве материала для внеурочного мероприятия по математике. На его основе могут быть разработаны интерактивные приложения, реализующие модели Пуанкаре, серию тематических занятий для математического кружка, дидактические материалы (кроссворды, квизы), также он может служить мотивационной основой для дальнейшего, более глубокого изучения геометрии Лобачевского.

Для описания применения данного путеводителя введем ряд определений, на основе которых будет строиться обоснование его использования.

«Внеурочная работа – это организация педагогом различных видов деятельности школьников во внеурочное время, обеспечивающих необходимые условия для социализации личности ребенка, расширения и углубления знаний, умений и навыков, развития самостоятельности, индивидуальных способностей учащихся, а также удовлетворения их интересов и обеспечение активного, и разумного досуга» [6, с.240].

«Проектная деятельность учащихся определяется как совместная учебно-познавательная, творческая или игровая деятельность учащихся, имеющая общую цель, согласованные методы, способы деятельности, направленная на достижение общего результата» [2, с.34].

На основе данных определений выделим компоненты, которые необходимо учитывать при создании сборника с целью возможности его дальнейшего применения в проектной и внеурочной деятельности учащихся.

- Расширение и углубление знаний. Материал сборник должен выходить за пределы школьной программы и содержать не просто повествование фактов, а демонстрацию альтернативной математической реальности, позволяющей показать расширенную картину мира.
- Развитие самостоятельности и учёт индивидуальных особенностей. Необходимо предоставить учащимся

возможность самостоятельного изучения материала в индивидуальном темпе.

- Осуществление коммуникации в процессе обучения. Разрабатываемый материал должен содержать элементы, способствующие созданию дискуссионной ситуации при его постепенном изучении.
- Использование мотивирующих к дальнейшему изучению темы компонентов.
- Согласование методов и способов деятельности. Сборник должен выполнять роль навигатора, пошагово направляющего учащегося к достижению конечной цели.

Таким образом, разработанный интерактивный путеводитель по геометрии Лобачевского является эффективным и методически обоснованным средством для организации внеурочной и проектной деятельности по математике.

Список литературы

1. Атанасян, Л. С. Геометрия Лобачевского : учебное пособие / Л. С. Атанасян ; художник Н. А. Новак. — 4-е изд. — Москва : Лаборатория знаний, 2021. — 467 с.

2. Белова Т. Г. Исследовательская и проектная деятельность учащихся в современном образовании // Известия РГПУ им. А. И. Герцена. 2008. №76-2. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/issledovatelskaya-i-proektnaya-deyatelnost-uchaschihsya-v-sovremennom-obrazovanii (дата обращения: 19.11.2025).

3. Геометрия Лобачевского: интерактивная модель Пуанкаре в круге // Математические этюды URL: https://etudes.ru/etudes/Lobachevskian-geometry-Poincare-disk-model/ (дата обращения: 11.10.2025)

4. Лобачевский Николай Иванович // Большая российская энциклопедия: научно-образовательный портал – URL: https://bigenc.ru/c/lobachevskii-nikolai-ivanovich-dba442/?v=4030437. – Дата публикации: 20.06.2022

5. Лобачевский, Н. И. О началах геометрии [Текст] / Н. И. Лобачевский // Издательство Императорского Казанского Университета. – Казань. – 1838. — 487с.

6. Малькова М. Г. Виды и формы внеурочной деятельности в образовательной области «Технология» // Инновационная наука. 2015. №12-2. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/vidy-i-formy-vneurochnoy-deyatelnosti-v-obrazovatelnoy-oblasti-tehnologiya (дата обращения: 19.11.2025).
7. Совертков, П. И. Справочник по элементарной математике : учебное пособие для СПО / П. И. Совертков. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2024. — 404 с.
8. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования [Текст]. – М.: Просвещение, 2021.

***Номинация «Лучшая методическая разработка»***

# ИСТОРИКО-КРАЕВЕДЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ КАК ИНСТРУМЕНТ ИЗУЧЕНИЯ ШКОЛЬНОГО КУРСА «ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА» В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ (НА ПРИМЕРЕ Г. АРЗАМАС)

*Маурина М.Г.*
*Россия, г. Арзамас*
*Арзамасский гуманитарно-педагогический институт им. А.П. Гайдара – филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского», факультет естественных и математических наук*
*Научный руководитель: кандидат педагогических наук, доцент, Сангалова М.Е.*

*Аннотация.* Статья посвящена методическим аспектам внедрения краеведческого материала в учебный процесс по дисциплине «Вероятность и статистика» в рамках основного общего образования. Представлен задачник и рассматривается специфика его использования на уроках в контексте решения статистических и вероятностных задач. В разработке материалов задачника содержатся краеведческие сведения о г. Арзамас Нижегородской области.

*Ключевые слова:* вероятность и статистика, задачник, историко-краеведческие задачи.

## HISTORICAL AND LOCAL STUDY PROBLEMS AS A TOOL FOR STUDYING THE SCHOOL COURSE "PROBABILITY AND STATISTICS" IN SECONDARY SCHOOL (ON THE EXAMPLE OF ARZAMAS)

*Maurina M.G.*

*Russia, Arzamas*

*Arzamas Humanitarian and Pedagogical Institute named after A.P. Gaidar is a branch of the Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education "National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod", Faculty of Natural Sciences and Mathematics*

*Scientific supervisor: candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Sangalova M.E.*

*Abstract.* The article is devoted to the methodological aspects of introducing local history material into the educational process in the discipline "Probability and Statistics" within the framework of basic general education. A textbook is presented and the specifics of its use in lessons in the context of solving statistical and probabilistic problems are considered. The development of the textbook materials contains local history information about the city of Arzamas in the Nizhny Novgorod region.

*Keywords*: probability and statistics, problem books, and historical and local history problems

С 1 сентября 2023 года в Российских школа был введен предмет «Вероятность и статистика». Это нововведение обусловлено в первую очередь широким распространением цифровых технологий в различных сферах жизни современного человека. Соответственно для успешной адаптации в быстроизменяющихся условиях общества выпускник школы должен овладеть вероятностно-статистическим мышлением, то есть уметь принимать решения в ситуациях неопределенности, прогнозировать развитие ситуаций, анализировать случайность происходящих явлений и выдвигать гипотезы и т.п.

В федеральных государственных образовательных стандартах прописаны предметные результаты изучения предметной области «Математика и информатика». В одном из пунктов отмечено, что предметные результаты должны отражать «овладение простейшими способами представления и анализа статистических данных; формирование представлений о статистических закономерностях в реальном мире и о различных способах их изучения, о простейших вероятностных моделях…» [1]. Другими словами, учителю следует обратить внимание на преподавание школьного курса «Вероятность и статистика», поскольку ФГОС предполагают не только овладение учащимися понятийным аппаратом учебной дисциплины, но и умения применять теоретические знания на практике.

Решение задач из школьного курса «Вероятность и статистика» помогает учащимся научиться применять знания в реальной жизни. Например, в экономических задачах применение вероятностных моделей позволяет научиться оценивать риски в сфере кредитования и страхования. Использование статистических данных, получаемых в ряде социальных опросов, при изучении раздела «Описательная статистика» позволяет описывать, анализировать и устанавливать связи между многочисленными переменными и показателями, к примеру, между уровнем образования и доходами или сезонностью и расходами. Тем самым знания, получаемые во время изучения этой дисциплины можно активно интегрировать в изучение других предметов.

Стоит отметить, что изучение этого школьного предмета вызывает некоторые затруднения у учащихся в связи с рядом причин. Однако для решения этой проблемы предлагается использовать систему задач, содержащих историко-краеведческие сведения. Этот подход позволяет ученикам осмысленно воспринимать изучаемый материал через призму родного края, что способствует формированию устойчивого интереса к математике и развитию критического мышления.

Использование исторических данных на уроке имеет некоторые преимущества. Например, изучение истории родного края обогащает учебный процесс и помогает детям лучше осознавать значимость изучаемых предметов и одновременно решает воспитательные вопросы.

Арзамас – город с богатой историей и культурным наследием, обладающий множеством интересных мест и памятных дат. Именно на примере его исторических событий был разработан задачник и решения с комментариями по учебной дисциплине «Вероятность и статистика» по учебному пособию И.Р. Высоцкого для 7-9 классов.

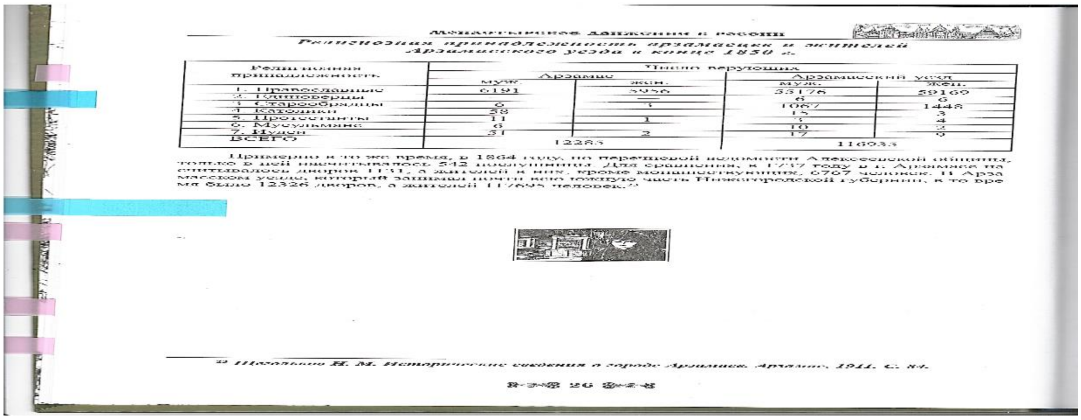
Объект исследования: процесс обучения математике в основной школе.

Предмет исследования: задачи с историко-краеведческим содержанием как инструмент изучения школьного курса «Вероятность и статистика» в основной школе.

При изучении раздела «Представление данных» по теме «Круговые диаграммы» можно воспользоваться задачей 1. С ее помощью учащиеся могут отработать полученные ранее знания и извлечь необходимые данные из таблицы, а также выполнить задание на построение круговой диаграммы. Эту задачу можно использовать на любом этапе урока, например, во время актуализации знаний и мотивации к учебной деятельности или при первичной отработки новых знаний.

Задача 1. В городе Арзамасе в 1737 году насчитывалось дворов 1131, а жителей в них, кроме монашествующих, 6767 человек. На рисунке 1 отражены данные о религиозной принадлежности арзамасцев и жителей Арзамасского уезда в конце 1850 г.

По данным таблицы ответьте на вопросы: 1) кого среди старообрядцев в городе Арзамасе было больше женщин или мужчин? 2) К какой религии принадлежит наибольшая часть населения? 3) Найдите долю жителей, принадлежащих к православной религии в Арзамасе в процентах. Ответ округлите до десятых. На основе данных составите круговую диаграмму.



Монастырское движение в России

*Религиозная принадлежность арзамасцев и жителей Арзамасского уезда в конце 1850 г.*

| Религиозная принадлежность | Число верующих | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Арзамас | | Арзамасский уезд | |
| | муж. | жен. | муж. | жен. |
| 1. Православные | 6191 | 5956 | 55176 | 59169 |
| 2. Единоверцы | | — | 6 | 6 |
| 3. Старообрядцы | 6 | 1 | 1067 | 1448 |
| 4. Католики | 58 | | 15 | 3 |
| 5. Протестанты | 11 | 1 | 3 | 4 |
| 6. Мусульмане | 6 | | 10 | 2 |
| 7. Иудеи | 31 | 2 | 17 | 9 |
| ВСЕГО | 12285 | | 116935 | |

Примерно в то же время, в 1864 году, по перечневой ведомости Алексеевской общины, только в ней насчитывалось 542 послушницы. Для сравнения, в 1737 году в г. Арзамасе насчитывалось дворов 1131, а жителей в них, кроме монашествующих, 6767 человек. В Арзамасском уезде, который занимал почти всю южную часть Нижегородской губернии, в то время было 12326 дворов, а жителей 117695 человек.[2]

[2] Щегольков Н. М. Исторические сведения о городе Арзамасе. Арзамас, 1911. С. 84.

Рисунок 1. Религиозная принадлежность арзамасцев и жителей Арзамасского уезда в конце 1850 годов

Ответы: 1) мужчины; 2) православные; 3) 98%, круговая диаграмма представлена на рисунке 2.


Рисунок 2. Доля жителей, принадлежащих к православной религии в Арзамасе в процентах в конце 1850 годов

Решение следующей задачи рассматривается в разделе «Описательная статистика» при изучении темы «Среднее арифметическое». Эта задача требует от учащихся устойчивых знаний, поэтому целесообразнее предложить ее к решению на уроке закрепления знаний и формирования знаний, умений и навыков.

Задача 2. В Арзамасе располагался Арзамасский Алексеевский Новодевичий женский монастырь. Он был основан по приказу царя Михаила Романова в честь рождения его сына Алексея. Монастырь не имел государственной финансовой поддержки и существовал благодаря благотворительности и собственному труду. Учет хозяйственной деятельности велся с помощью приходно-расходных книг. В записях расходной книги (рис. 3) со временем были стерты некоторые данные. Найдите их, если известно, что среднее арифметическое расхода рыбы ассигнациями составило 349,58 рублей.

| Расход 1817 год | Ассигнациями | |
|---|---|---|
| | Рубли | Копейки |
| *Перевод: 1 четверть (ч) 8 мер (м) – 6 пудов (п) – 98,28 кг. 1 пуд (п) – 16,38 кг, 1 фунт (ф) – 0,41 кг* | | |
| … | … | … |
| Рыбы белуги 19 п. 30 ф. | 211 | 62 |
| Рыбы судаков 11 п. | ■ | ■ |
| Рыбы севрюги 149 п. 23 ф. | 835 | 92 |
| Рыбы сазанины 77 п. 5 ф. | 306 | 28 |
| … | … | … |

Рисунок 3. Отрывок записи из книги расходов по Алексеевской общине за 1817 год

Решение: для упрощения решения можно перевести денежные величины в десятичные дроби. Обозначим расход рыбы судаков в рублях за $x$. С помощью формулы нахождения среднего арифметического подставим известные величины и составим уравнение: $349,58 = \frac{211,62 + 835,92 + 306,28 + x}{4}$.

Проведя соответствующие вычисления находим, что $x = 44,5$(руб.)

Ответ: $44,5$рубля или 44 рубля 50 копеек.

Для изучения темы «Вероятность событий» из раздела «Случайные опыты и случайные события» предложена задача под номером три. Рекомендуется использовать ее на этапе мотивации на учебную деятельность.

Задача 3. Основание Арзамаса народным преданием связывается именно с последним казанским походом Ивана IV, что в конце XVIII в. зафиксировал арзамасский житель П. Мерлушкин. Согласно ему, царь Иван Васильевич Грозный летом 1552 года, идя с войском под Казань, достиг расположенного в дремучих лесах на берегу Теши большого мордовского поселения. Жители со своими предводителями братьями Арзаем и Масаем встретили царя с покорностью и дарами. Царь объявил свою волю: заложить здесь город. Но это предание не имеет никаких документальных подтверждений. Существуют, как минимум, еще три версии о происхождении названия города Арзамас. Найдите вероятность того, что сведения одной из легенд основано на реальных событиях, считая равновероятным выбор.

Решение: в задаче идет речь о четырех легендах. Так как события равновероятные используем соответствующую формулу: $P = \frac{1}{4} = 0,25$.

Ответ: 0,25.

Задачи с краеведческим содержанием рекомендуется предлагать учащимся систематически. Включение их в содержание урока повышает интерес при изучении математики среди учеников. Одной из них является следующая задача, содержащая материал о проживающих в Арзамасе писателях. С ее помощью можно наглядно отработать навыки решения задач по теме «Дерево случайного эксперимента» из раздела «Деревья».

Задача 4. В Арзамасе побывали и работали многие писатели. Л.Н. Толстой, В.Г. Короленко останавливались в городе проездом. В 1902 году в Арзамас ссылают М. Горького. Арзамасские впечатления легли в основу его рассказов «Городок», «Как сложили песню». Свои детские годы в Арзамасе провел А.П. Гайдар. Жизнь в городе нашла отражение в его произведениях «Школа» и «Голубая чашка». Вы решаете подробнее изучить биографию писателей о том, как связана их жизнь с городом. В первую очередь вы решаете ознакомиться с биографией А.П. Гайдара, а потом выбираете писателя случайным образом. Определите сколько существует вариантов изучения материала.

Решение: можно наглядно изобразить с помощью дерева вариантов (рис. 4).

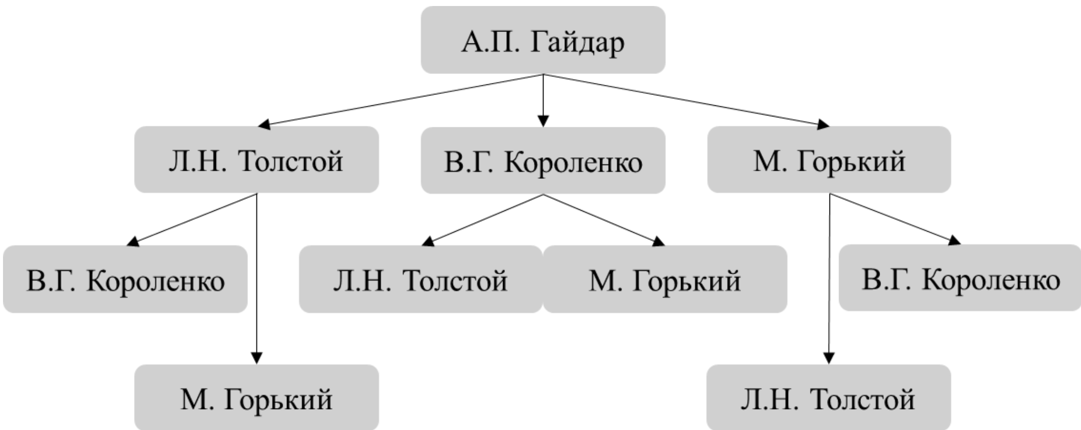



Рисунок 4. Дерево вариантов изучения материала

В задаче пять представлен материал по теме «Перестановки. Факториал» из раздела «Элементы комбинаторики». Предлагать к решению можно на этапе первичной отработке новых знаний.

Задача 5. На карте города отмечены 4 достопримечательности города Арзамаса (рис. 5), которые предлагают посетить туристам.


Рисунок 5. Карта достопримечательностей города

На карте цифрами отмечены следующие достопримечательности:

1 – Церковь иконы Божией Матери Живоносный Источник, которая была возведена в конце 18 века, где в холодное время года приносили на сохранение главные иконы собора.

2 – Знаменитый Воскресенский собор, расположенный на соборной площади.

3 – Музей русского патриаршества, здание бывшей ратуши.

4 – Николаевский женский монастырь, основанный в 1580 году в правление Царя Иоанна Грозного.

Определите сколько существует маршрутов их посещения, если туристы могут перемещаться в произвольном порядке.

Решение: воспользуемся свойством «число перестановок $n$ предметов равно $n!$» [2]. Следовательно, количество маршрутов можно найти следующим образом: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ маршрута.

Ответ: 24 маршрута.

Каждый тип задач, изложенный в задачнике, направлен на формирование конкретных умений и навыков:

- интерпретация статистических данных,

- проведение простейших расчетов вероятности случайных событий,
- графическое представление информации и т.д.

При подготовке к уроку необходимо учитывать, что задачи с историко-краеведческим содержанием должны базироваться на достоверных исторических источниках и соответствовать возрасту учеников. Также интеграция краеведения и математики должна иметь системной характер, что формирует устойчивое отношение к такой форме воспитательной и учебной работы.

Учитель может предложить всему классу создать свой банк краеведческих задач, предлагающих различные варианты заданий. Например, рассчитать среднюю продолжительность жизни населения на основе архивных данных или построить диаграммы распределения урожаев зерновых культур на территории города в разные годы и т.д.

Таким образом учащиеся знакомится с новыми сведениями о событиях малой Родины, знаменитыми людьми и памятниками. Развивают творческое, логическое, критическое мышления. С их помощью учитель расширяет кругозор не только своих учеников, но и свой кругозор в том числе.

Задачи активизируют деятельность школьников по использованию имеющихся знаний на практике, в том числе направляют их на поиск нужной информации. Развиваются учебные умения.

Помимо всего вышеизложенного такие задания помогает воспитать патриотические чувства, историческое сознание и социальную активность среди учащихся. Тем самым учитель может осуществлять воспитательную работу через активную познавательную деятельность.

Предлагаемые рекомендации позволят педагогам создавать учебные задания, способствующие повышению качества изучения предмета «Вероятность и статистика». Задачник будет полезен учителям математики, студентам и учащимся, интересующимся математикой и историей родного края.

Список литературы

1. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования [Текст] / М-во просвещения Рос. Федерации. – М.: Просвещение, 2021. – 124 с. – Стандарты третьего поколения.
2. Высоцкий И.Р. Математика. Вероятность и статистика: 7-9-е классы: базовый уровень: учебник: в 2 частях / И.Р. Высоцкий, И.В. Ященко; под ред. И.В. Ященко. – М.: Просвещение, 2025.
3. Петряшин А.С. Арзамасские монастыри. История, архитектура, хозяйственная деятельность XVI-XX в.в. Монография. – Арзамас: ОАО «Арзамасская типография» 2010. – 216 с., ил.
4. [Электронный ресурс] URL: https://arz.unn.ru/pdf/2016/ap/histArz.pdf (дата обращения: 15.11.2025).
5. Очерки истории Арзамаса / [Науч. ред. и авт. предисл. Б. П. Голованов; Лит. обраб. О. Н. Варваровой]. - Горький : Волго-Вят. кн. изд-во, 1981. - 239 с. : ил.; 20 см.

## МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КРИПТОГРАФИИ ШКОЛЬНИКАМ В РАМКАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА

*Келехсаева Н.С*

*Россия, г. Ижевск*

*Удмуртский Государственный Университет, Институт математики информационных технологий и физики*

*Научный руководитель: к. ф.− м., доцент Латыпова Н.В.*

*Аннотация.* В статье представлена авторская методика преподавания основ криптографии школьникам 5−7 классов в рамках математического кружка. Рассматривается сценарий урока по теме «Криптография в Средние века и эпоху Возрождения» с детальным разбором изучения шифра

Виженера, методами его взлома и использованием игры для закрепления изученного материала.

*Ключевые слова:* криптография, методика преподавания, математический кружок, шифр Виженера.

## METHODS OF TEACHING CRYPTOGRAPHY ELEMENTS TO SCHOOLCHILDREN IN THE FRAMEWORK OF A MATHEMATICAL CIRCLE

*Kelekhsaeva N.S.*
*Russia, Izhevsk*
*Udmurt State University*
*Scientific supervisor: Ph.D., Associate Professor Latypova N.V.*

*Abstract.* The article presents the author's methodology for teaching the basics of cryptography to schoolchildren in grades 5−7 within the framework of a mathematical circle. The scenario of the lesson on the topic "Cryptography in the Middle Ages and the Renaissance" is considered with a detailed analysis of the study of the Vigener cipher , methods of cracking it and using the game to consolidate the studied material.

*Keywords*: cryptography, teaching methods, mathematical circle, Vigener cipher.

Современные технологии, включая искусственный интеллект и криптографию, стремительно развиваются, но уровень понимания этих основ среди школьников остается низким. Криптография играет ключевую роль в защите данных и функционировании ИИ-систем, а ее изучение в школе может стать мощным инструментом для развития логического мышления, математических навыков и цифровой грамотности.

Актуальность данной темы обусловлена потребностью в специалистах в области информационной безопасности. Внедрение в школьный курс информатики и математики основ криптографии может значительно повлиять на выбор профессии и на качество специалистов в области защиты информации.

Рабочая программа рассчитана на 1 месяц обучения по одному часу в неделю.

План курса: Введение в криптографию с использованием простых алгоритмов шифрования.

Цели курса:

1. Познакомить с базовыми понятиями криптографии и её ролью в современном мире.
2. Научить применять математические методы (арифметика, алгебра) для шифрования данных.
3. Развить логическое мышление через решение криптографических задач.

**Занятие 1: Введение в криптографию. Исторические шифры.** Учащиеся знакомятся с базовыми понятиями (шифрование, дешифрование, ключ) на примере шифров Цезаря и Атабаш ([2; с. 12-16]). Практическая часть включает кодирование собственных сообщений и попытку взлома простых шифров с помощью частотного анализа. Занятие проходит в интерактивной форме, включая игру «Шифровальщики».

**Занятие 2: Криптография в Средние века и эпоху Возрождения.**

**Цель занятия:** Познакомить учащихся с более сложными методами шифрования, которые использовались в Средние века и эпоху Возрождения. Научить применять шифр Виженера и понимать его уязвимости.

**Подготовка и материалы:** Для проведения занятия потребуется проектор для демонстрации таблицы Виженера (рис. 1), раздаточные материалы с алфавитными таблицами и числовыми обозначениями букв, а также карточки с зашифрованными текстами. Дополнительно можно подготовить исторические примеры использования шифров в дипломатической переписке.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
| B | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z | A |
| C | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z | A | B |
| D | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z | A | B | C |
| E | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z | A | B | C | D |
| F | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z | A | B | C | D | E |
| G | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z | A | B | C | D | E | F |
| H | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z | A | B | C | D | E | F | G |
| I | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z | A | B | C | D | E | F | G | H |
| J | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| K | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
| L | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
| M | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
| N | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
| O | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N |
| P | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O |
| Q | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P |
| R | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q |
| S | S | T | U | V | W | X | Y | Z | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R |
| T | T | U | V | W | X | Y | Z | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S |
| U | U | V | W | X | Y | Z | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T |
| V | V | W | X | Y | Z | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U |
| W | W | X | Y | Z | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V |
| X | X | Y | Z | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W |
| Y | Y | Z | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X |
| Z | Z | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y |

Рисунок 1. Таблица Виженера

**Ход занятия:**

1. **Шифр Виженера**

Учитель рассказывает об истории шифра Виженера, который долгое время считался неразрушимым. Объясняется принцип его работы: использование ключевого слова для сдвига букв исходного текста.

Шифр Виженера, разработанный в XVI веке на основе более ранних криптографических идей, долгое время считался абсолютно надежным и использовался для защиты важнейшей дипломатической и военной переписки ([2; с. 45]). Его уникальность заключалась в полиалфавитном принципе: в отличие от простого шифра Цезаря, где все буквы сдвигаются на фиксированное число, здесь каждая буква исходного текста сдвигалась на разное количество позиций согласно буквам ключевого слова. Например, для шифрования слова "МАТЕМАТИКА" с ключом "ЗАДАЧА" сначала повторяли ключ до длины сообщения ("ЗАДАЧАЗАД"), затем каждая буква текста сдвигалась на соответствующее количество позиций алфавита (М+З=Й, А+А=А и т.д.), получая зашифрованное сообщение "ЙАХЕЪЧДЙА". Именно эта изменчивость правил замены делала шифр устойчивым к частотному анализу, пока в XIX веке не были разработаны методы Казиски и Бэббиджа, обнаружившие уязвимости в повторяющихся паттернах зашифрованного текста ([6; с. 67]). Хотя сегодня этот шифр устарел, он стал важной вехой в развитии криптографии, демонстрируя как силу полиалфавитных систем, так и важность тщательного выбора криптографических ключей.

Затем ученики выполняют практическое задание: зашифровывают слово "ЗАДАЧА" с ключом "РУЧКА".

| |
|---|
| А=0, Б=1, В=2, Г=3, Д=4, Е=5, Ё=6, Ж=7, З=8, И=9, Й=10, К=11, Л=12, М=13, Н=14, О=15, П=16, Р=17, С=18, Т=19, У=20, Ф=21, Х=22, Ц=23, Ч=24, Ш=25, Щ=26, Ъ=27, Ы=28, Ь=29, Э=30, Ю=31, Я=32. |

Стандартный алфавит с использованием букв ъ, ё:

2. **Взлом шифра Виженера**

Учащиеся знакомятся с методом Казиски, который позволяет определить длину ключа по повторяющимся фрагментам в зашифрованном тексте ([2; с. 69]).

Представь, что в зашифрованном сообщении несколько раз встречается одно и то же сочетание букв (например, "ХЩЧ"). Если эти повторы находятся на расстоянии, кратном длине ключа (скажем, через 6 символов), то, скорее всего, ключ состоит из 2 или 3 букв (потому что 6 делится на 2 и 3). После этого текст разбивают на группы по угаданной длине ключа и применяют частотный анализ к каждой группе отдельно, чтобы найти сам ключ.

На практике пробуют применить этот метод к тексту "ХЩЧЗТХЩЧ". В завершение проводится игра "Криптоаналитики", где команды соревнуются в расшифровке сообщений.

**Методическое обоснование игрового этапа «Криптоаналитики: Тайна шифра Виженера».**

*Место в структуре занятия:* Данная игра является хорошим закреплением материала о шифре Виженера и его уязвимостях.

*Роль в достижении цели занятия:* Игра напрямую учит применять шифр Виженера и понимать его суть через погружение учащихся в роль криптоаналитиков, решающих реальные задачи.

*Синтез теории и практики:* Учащиеся переходят от слушания истории шифра к активному использованию двух изученных методов (щифр Виженера и метод Казиски).

Сложность задач снижена для 5− 7 классов за счет ключевых подсказок (известная длина ключа, первая буква).

*Этап 1: «Разведка» (5 минут)*

Первое, что делают ученики, это изучают текст «ЪЯММУЦ ЧЧФ» и ищут повторения («ММ», «ЧЧ»), отмечают пробел.

На данном этапе у учеников формируется навык наблюдения. Это первый и ключевой шаг в любом аналитическом процессе. Ученики учатся не просто «смотреть», а «видеть» паттерны и аномалии в данных. Они на практике видят, что повторяющиеся последовательности («ММ» и «ЧЧ») − это главная «зацепка», о которой говорилось в теории метода Казиски. Расстояние между ними (3 символа) подтверждает известную длину ключа, что дает им уверенность в правильности выбранного пути. Пробел, который не шифровался, является важным тактическим данным − он сразу указывает на границу между словами, сужая поле для гипотез.

*Этап 2: «Атака Виженера» (10 минут)*

Используя простое правило: «Вычти номер ключа из номера шифра, и если результат отрицательный − прибавь 33», ученики пробуют подобрать осмысленный вариант.

На втором этапе ученики не просто запоминают формулу, а многократно применяют ее, видя мгновенный результат в виде букв расшифрованного текста. Это превращает абстрактную математику в конкретный, осязаемый процесс. Перебор вариантов («КОД», «КЛЮЧ», «КОТ») − это не хаотичное угадывание, а выдвижение и проверка гипотез. Если при ключе «КОТ» получается бессмысленный набор букв, гипотеза отвергается. Это основа научного метода.

*Этап 3: «Метод Казиски» (10 минут)*

Ученики разбивают текст на группы по номеру символа ключа и проводят частотный анализ для каждой группы.

Третий − это самый сложный и самый ценный этап. Ученики понимают, что взлом основан не на удаче, а на системном анализе. Они видят, как огромная задача (подобрать ключ) разбивается на три маленькие и решаемые (подобрать каждую букву ключа). Получив возможные буквы ключа («Ж» и «Д»), команды должны сделать логический вывод: какой ключ − «КОЖ» или «КОД» − является осмысленным словом? Это учит их проверять и интерпретировать полученные результаты.

*Этап 4: «Проверка» (5 минут)*

Ученики применяют найденный ключ «КОД» для полной расшифровки сообщения «ПРИВЕТ МИР».

Этот этап учит обязательной проверке решения. Важно не только найти ответ, но и убедиться, что он работает для всей системы. Превращение из бессмысленного набора букв «ЪЯММУЦ ЧЧФ» в понятное «ПРИВЕТ МИР» в конце занятия вызывает восторг и чувство глубокого удовлетворения у учащихся. Положительные эмоции создают устойчивый интерес к предмету и лучшему закреплению изученного материала.

**Заключительная часть (10 минут)**

Подводятся итоги занятия. Ученики отвечают на вопросы: почему шифр Виженера считался надёжным и как его можно взломать. Даётся домашнее задание: зашифровать свою фамилию с ключом "ВОЗРОЖДЕНИЕ" и попробовать взломать текст "ЦЫВМРЫВМПТ".

**Методические рекомендации:** Для лучшего усвоения материала можно использовать визуализацию (цветные маркеры для выделения повторений) и дифференцировать задания по сложности.

**Ожидаемые результаты:** К концу занятия ученики понимают принцип полиалфавитного шифрования, умеют применять шифр Виженера и знают основы его взлома. Это создаёт базу для изучения более сложных криптографических методов в будущем.

**Занятие 3: Криптография в XX веке. Энигма и симметричное шифрование.**

Это занятие посвящено переходу от ручных шифров к машинным. Учащиеся узнают о принципах работы легендарной шифровальной машины «Энигма» и основах симметричного шифрования (на примере операции XOR) ([5; с. 203]). Особое внимание уделяется проблеме безопасной передачи ключа, для понимания которой моделируется алгоритм Диффи−Хеллмана ([2; с. 72]).

**Занятие 4: Итоговый проект. Криптографический квест.**

Заключительное занятие − командное соревнование, где учащиеся применяют все изученные методы на практике. Команды расшифровывают сообщения, определяют тип шифра, проводят криптоанализ и восстанавливают ключи. Такая форма позволяет закрепить материал, развить навыки логики и коммуникации командной работы.

**Ожидаемые результаты и образовательный потенциал**

Участие в кружке по криптографии дает школьникам комплекс преимуществ:

- *Развитие компетенций:* курс эффективно развивает логическое, алгоритмическое и критическое мышление, креативность через создание и анализ шифров.
- *Профориентация:* знакомство с востребованными профессиями в области кибербезопасности и криптографии.
- *Популяризация* математики.
- *Подготовка к олимпиадам:* решение криптографических задач тренирует нестандартное мышление, необходимое для успеха на олимпиадах по математике и информатике.
- *Формирование цифровой культуры:* школьники осознают важность защиты персональных данных и принципов информационной безопасности в интернете и повседневной жизни.

Игровая форма занятий, включающая квесты и соревнования, поддерживает высокую мотивацию, превращая изучение сложных математических концепций в увлекательное интеллектуальное приключение.

**Заключение**

Внедрение основ криптографии в школьное образование через систему математических кружков представляет собой идеальный синтез фундаментального математического знания и практико–ориентированного подхода. Такой курс не только расширяет кругозор учащихся, но и готовит их к жизни в цифровом будущем, формируя ответственное и грамотное поведение в информационной среде. Разработанная методика демонстрирует, что криптография − не просто набор алгоритмов, а живая и развивающаяся наука, тесно связанная с историей, математикой и технологиями.

Список литературы

1. Алферов А.П., Зубов А.Ю., Кузьмин А.С. Основы криптографии. − М.: Гелиос АРВ, 2005.

2. Бабаш А.В., Шанкин Г.П. История криптографии. − М.: Гелиос, 2002.
3. Василенко О.Н. Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии. − М.: МЦНМО, 2003.
4. Гарднер, М. Математические головоломки и развлечения / М. Гарднер; пер. с англ. − Москва: Мир, 2017.
5. Глухов М.М., Круглов И.А., Пичкур А.Б., Черемушкин А.В. Введение в теоретико-числовые методы криптографии. − СПб.: Лань, 2011.
6. Кан Д. Взломщики кодов. − М.: Центрполиграф, 2000.
Нечаев В.И. Элементы криптографии. − М.: Высшая школа, 1999.

# РАЗВИТИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ: ОТ ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ ЧЕРЕЗ *PYTHON* К ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

*Колесникович С.Н.*
*Республика Беларусь, г. Минск*
*Учреждение образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка», физико-математический факультет*
*Научный руководитель: кандидат педагогических наук, доцент кафедры информатики и методики преподавания информатики Зенько С.И.*

*Аннотация.* Данная методическая разработка знакомит учащихся 6–8 классов с основами геометрии Лобачевского через визуализацию её моделей на языке программирования *Python* с использованием библиотеки Turtle. Цель разработки – развитие вычислительного мышления учащихся в процессе использования межпредметных связей, возможностей языка программирования *Python* и двух геометрий Евклида и Лобачевского. Учащиеся, создавая визуальные образы евклидовой геометрии и геометрии

Лобачевского на практике осваивают ключевые основы программирования и получают представление об альтернативных геометрических системах.

*Ключевые слова:* вычислительное мышление, геометрия Евклида, геометрия Лобачевского, методика обучению информатике, деятельно-семантический подход, программирование *Python*, *Turtle*.

## DEVELOPMENT OF SCHOOL STUDENTS' COMPUTATIONAL THINKING: FROM EUCLIDEAN GEOMETRY THROUGH *PYTHON* TO LOBACHEVSKIAN GEOMETRY

*Kolesnikovich S.N.*

*Belarus, Minsk*

*Belarusian state pedagogical university named after Maxim Tank*

*Scientific supervisor: Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor Department of Informatics and Methods of Teaching Informatics Zenko S.I.*

*Abstract.* This methodological development introduces 6th-8th grade school students to the foundations of Lobachevskian geometry through the visualization of its models using the *Python* programming language and the *Turtle library*. The aim of the development is to enhance school students' computational thinking through the use of interdisciplinary connections, the capabilities of the *Python* programming language, and the two geometries of Euclid and Lobachevsky. By creating visual images of Euclidean and Lobachevskian geometry, school students practically master the key fundamentals of programming and gain an understanding of alternative geometric systems.

*Keywords*: computational thinking, Euclidean geometry, Lobachevskian geometry, methods of teaching computer science, activity-semantic approach, *Python* programming, *Turtle*.

## ВВЕДЕНИЕ

Геометрия, которую изучают учащиеся в школе [5, 6], основана на постулатах Евклида. Великий русский математик Н.И. Лобачевский создал альтернативную геометрию, так называемую «воображаемую» геометрию, в которой через точку, не лежащую на прямой, можно провести бесконечно много прямых, параллельных данной. Эта геометрия не является чистой абстракцией; она находит применение в современной физике (теория относительности) и астрономии [8].

Среди актуальных задач, стоящих перед современной системой образования, можно выделить тенденцию, направленную на формирование и развитие вычислительного мышления учащихся [1]. Развитие такого мышления, на наш взгляд, можно достичь в процессе интегрированного использования межпредметного потенциала [2] школьных учебных предметов «Математика», «Информатика» и научных исследований, дополняющих и расширяющих содержание традиционного учебного материала. Хорошим и фундаментальным примером является геометрия Лобачевского. С 2024 г. в Республике Беларусь последовательно осуществляется переход при изучении основ программирования от языка *PascalABC.NET* к языку *Python* [7, 9].

Опираясь на исследования [1, 3, 4, 10], считаем актуальным на уроках информатики в 6–8 классах включение следующих заданий: *Turtle*: параллельные вселенные; *Turtle*: пучки «прямых» в разных геометриях – развиваем мышление учащихся; *Turtle*: треугольник в разных геометриях – формируем понимание того, что сумма углов треугольника может быть равна не 180°; *Turtle*: узоры в стиле Лобачевского – Эшера.

## TURTLE: ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ВСЕЛЕННЫЕ

***Цель*:** освоить базовые команды *Turtle* для создания линейных фигур, сформировать взаимосвязанное представление о моделях плоскости — вселенные Евклида и Лобачевского.

***Базовый набор команд для работы с компьютерным исполнителем***

*import turtle* – добавить модуль черепахи

*turtle.speed(v)* – установить скорость черепахи *v*

*turtle.circle(r)* – изображение окружности радиусом *r*

*turtle.penup()* – поднять перо

*turtle.pendown()* – опустить перо

*turtle.forward(d)* – движение вперёд на *d* пикселей

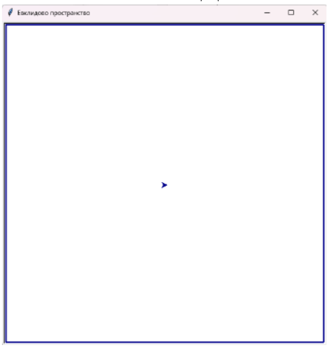
*turtle.setpos(x, y)* – перейти в позицию x, y

*turtle.right(a)* – повернуть черепаху вправо на угол *a*°

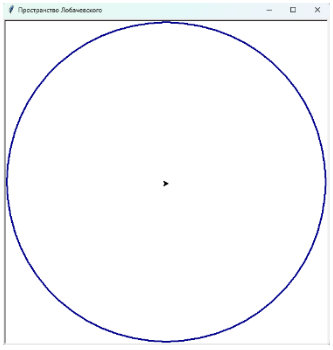
***Задание:*** нарисовать средствами языка программирования *Python* (компьютерный исполнитель *Turtle*) два варианта плоскости.

***Вводное объяснение:*** в евклидовой геометрии, которую вы изучаете на уроках математики, плоскость можно представить в виде квадрата. Но граница такого квадрата бесконечно удалена, то есть до неё нельзя дойти. Н. И. Лобачевский придумал геометрию, которая существует внутри круга. А это значит, что до границы круга также нельзя дойти.

Изображение вселенной Евклида



Изображение вселенной Лобачевского



***Предполагаемый вариант реализации***

| *Настройка окна и визуализация компьютерного исполнителя* | |
|---|---|
| import turtle<br>turtle.setup(615, 615)<br>turtle.title("Евклидово пространство")<br>turtle.speed(5)<br>turtle.color("darkblue")<br>turtle.pensize(3) | import turtle<br>turtle.setup(615, 615)<br>turtle.title("Пространство Лобачевского")<br>turtle.speed(5)<br>turtle.color("darkblue")<br>turtle.pensize(3) |
| *Установка начального положения исполнителя для создания плоскости* | |

| | |
|---|---|
| turtle.penup()<br>turtle.goto(-304, -297)<br>turtle.pendown() | turtle.penup()<br>turtle.goto(-4, -297)<br>turtle.pendown() |
| *Рисуем квадрат со стороной 600 px по часовой стрелке* | *Рисуем круг радиусом 300 px* |
| turtle.forward(600)<br>turtle.right(270)<br>turtle.forward(600)<br>turtle.right(270)<br>turtle.forward(600)<br>turtle.right(270)<br>turtle.forward(600) | turtle.circle(300)<br>turtle.penup()<br>turtle.home() |

***Таким образом,*** учащиеся создают простейшую визуализацию рабочей области для двух геометрий, используя базовые команды *Turtle*.

## TURTLE: ПУЧКИ «ПРЯМЫХ» В РАЗНЫХ ГЕОМЕТРИЯХ – РАЗВИВАЕМ МЫШЛЕНИЕ УЧАЩИХСЯ

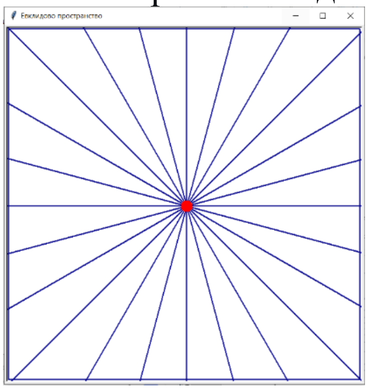
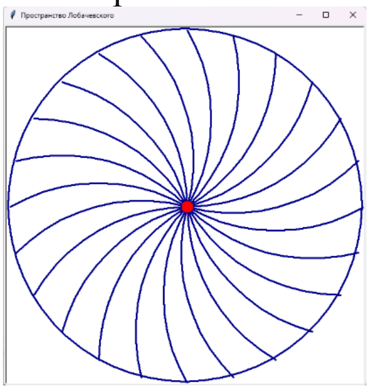
***Цель:*** освоить использование алгоритмической конструкции «Повторение» (оператор *for*) для создания множеств однотипных объектов – прямых в Евклидовой геометрии и дуг окружностей – «прямых» в модели Пуанкаре.

***Набор команд, расширяющие базовые команды Turtle***

| | |
|---|---|
| *for i in range()* – цикл с известным количеством повторений | *Math* – модуль для вычисления значений функций |

***Задание:*** нарисовать средствами языка программирования *Python* (компьютерный исполнитель *Turtle*) несколько «прямых» в плоскостях для евклидовой геометрии и геометрии Лобачевского.

***Вводное объяснение:*** в евклидовой геометрии, чтобы провести прямую, нам достаточно знать две точки, принадлежащие этой прямой. В геометрии Лобачевского, где вся плоскость – это бесконечный круг, нам понадобится для построения «прямых» (ортогональных окружностей), выходящих из одной точки, последовательно строить дуги с помощью коротких отрезков.

| Пучок прямых<br>в геометрии Евклида | Пучок прямых<br>в геометрии Лобачевского |
|---|---|
|  |  |

***Предполагаемый вариант реализации***

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">Код для изображения<br>плоскости в геометриях<br>Евклида и Лобачевского</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Отправляем Черепашку «домой»</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">turtle.penup()<br>turtle.home()</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Изображаем пучок прямых</td></tr>
<tr><td>for i in range(0, 360, 15):<br>    turtle.penup()<br>    turtle.home()<br>    turtle.right(345-i)<br>    turtle.pendown()<br>    turtle.forward(450)</td><td>for i in range(0,360,15):<br>    turtle.pendown()<br>    turtle.circle(300,60)<br>    turtle.penup()<br>    turtle.home()<br>    turtle.right(345-i)</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Изображаем точку пересечения прямых</td></tr>
<tr><td>turtle.penup()<br>turtle.home()<br>turtle.color("red")<br>turtle.dot(20)</td><td>turtle.home()<br>turtle.color("red")<br>turtle.dot(20)</td></tr>
</table>

***Таким образом,*** учащиеся создают на плоскости в двух геометриях пучки прямых, выходящих из одной точки, используя оператор *for* для компьютерного исполнителя *Turtle*. Продолжается развитие мышления учащихся: «прямые» могут выглядеть по-разному.

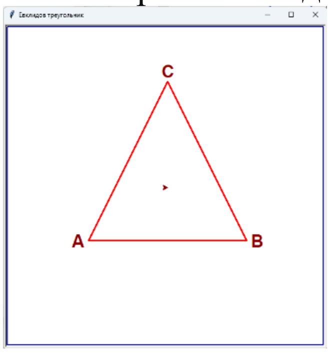
## TURTLE: ТРЕУГОЛЬНИК В РАЗНЫХ ГЕОМЕТРИЯХ – ФОРМИРУЕМ ПОНИМАНИЕ ТОГО, ЧТО СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА МОЖЕТ БЫТЬ РАВНА НЕ 180°

***Цель:*** развитие умений применять алгоритмическую конструкцию «Следование», содержащую обращения к вспомогательному алгоритму, при построении «треугольника» на плоскости в геометриях Евклида и Лобачевского с суммой углов не превышающих 180°.

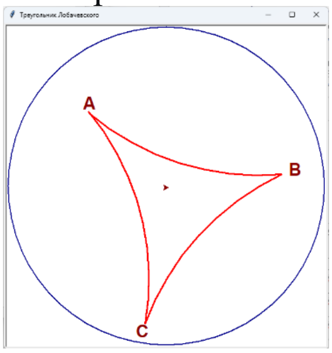
***Задание:*** на языке программирования *Python* разработайте функцию *hyperbolic_polygon( )* для рисования треугольника на евклидовой плоскости и в круге Пуанкаре.

***Вводное объяснение:*** в евклидовой геометрии стороны треугольника – отрезки, сумма углов треугольника всегда равна 180°. В геометрии Лобачевского стороны – дуги. При этом сумма углов не достигает 180°. Чем больше площадь такого треугольника, тем меньше сумма его углов.

Треугольник
в геометрии Евклида




Треугольник
в геометрии Лобачевского




***Предполагаемый вариант реализации***

<table>
<tr><td colspan="2">Код для изображения плоскости в геометриях Евклида и Лобачевского</td></tr>
<tr><td colspan="2">Рисуем треугольник</td></tr>
<tr><td colspan="2">turtle.color("red")<br>turtle.pensize(3)</td></tr>
<tr><td>turtle.goto(-150, -100)<br>turtle.pendown()</td><td>turtle.goto(-150, 140)<br>turtle.pendown()</td></tr>
</table>

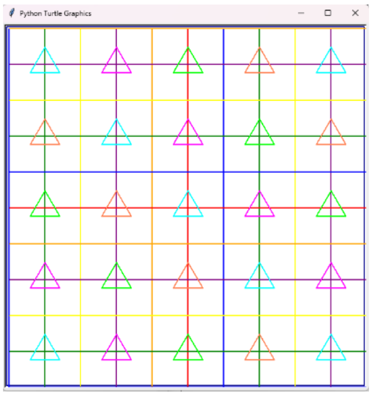
| | |
|---|---|
| turtle.goto(150, -100<br>turtle.goto(0, 200)<br>turtle.goto(-150, -100<br>turtle.penup() | turtle.right(40)<br>turtle.circle(500, 45)<br>turtle.right(160)<br>turtle.circle(500, 45)<br>turtle.right(169.5)<br>turtle.circle(500, 49)<br>turtle.penup() |
| *Обозначаем вершины треугольника* | |
| turtle.color("darkred ") | |
| turtle.goto(-180, -120) | turtle.goto(-160, 140) |
| turtle.write("A" , font=('Arial', 25, 'bold')) | |
| turtle.goto(160, -120) | turtle.goto(230, 15) |
| turtle.write("B" , font=('Arial', 25, 'bold')) | |
| turtle.goto(-10, 200) | turtle.goto(-60, -290) |
| turtle.write("C" , font=('Arial', 25, 'bold'))<br>turtle.home() | |

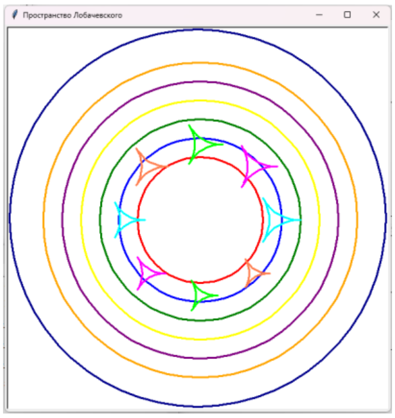
***Таким образом***, учащиеся создают на плоскости в двух геометриях треугольники, применяя подпрограмму в виде функции пользователя, тем самым, с одной стороны, развивая умения разрабатывать линейные алгоритмы, а также, с другой стороны, приобретают знания о том, что в определенных условиях сумма углов «треугольника» может быть меньше 180°.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С целью систематизации и обобщения полученных знаний и умений учащихся по использованию алгоритмических конструкций «Следование» и «Повторение», вспомогательных алгоритмов в процессе разработки проектов на плоскости в двух геометриях можно предложить в 8 классе задание *Turtle*: узоры в стиле Лобачевского – Эшера.

| Вариант узора<br>в геометрии Евклида | Вариант узора<br>в геометрии Лобачевского |
|---|---|




Список литературы


1. Актуальные вопросы методики обучения информатике в условиях цифровой трансформации образования: монография / Л.Л. Босова, Н.Н. Самылкина, Д.И. Павлов и др. – Москва: МПГУ, 2024. – 296 с.

2. Зенько, С.И. Методические рекомендации учителю по повышению эффективности реализации межпредметных связей при изучении общеучебных понятий математики и информатики в школе / С.И. Зенько // Математика. – 2020. – № 1. – С. 28–39.

3. Зенько, С.И. О разработке для студентов заданий по методике обучения информатике на основе деятельностно-семантического подхода / С.И. Зенько, Ю.А. Быкадоров // Весці Бел. дзярж. пед. ун-та. Сер. 3, Фізіка. Матэматыка. Біялогія. Геаграфія. – 2023. – № 4. – С. 64–73.

4. Зенько, С.И. Стратегия преемственного перехода в школьной информатике от компьютерного исполнителя Чертежник к компьютерному исполнителю Черепаха / С.И. Зенько // Электронный науч.-методич. журнал «Педагогика информатики». – 2024. – № 1–2. – URL: http://pcs.bsu.by/2024_1-2/9ru.pdf. (дата обращения: 10.11.2025).

5. Казаков, В.В. Геометрия : учеб. пособие для 7-го кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / В. В. Казаков. – 2-е изд. испр. и дополненное. – Минск : Народная асвета, 2022. – 183 с.

6. Казаков, В. В. Геометрия : учеб. пособие для 8-го кл. учреждений образования, реализующих образ. программы общ. сред. образования, с рус. яз. обучения и воспитания / В. В. Казаков. – 2-е изд. испр. и дополненное. – Минск : Адукацыя і выхаванне, 2024. – 205 с.

7. Котов, В.М. Информатика : учеб. пособие для 6 кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / В.М. Котов, Н.П. Макарова, А.И. Лапо, Е.Н. Войтехович. – 2-е изд. пересм. и дополненное. – Минск : Нар. асвета, 2024. – 183 с.

8. Лобачевский и XXI век: материалы X научно-образовательной студенческой конференции, посвященной Дню рождения Н.И. Лобачевского / под ред. Л.Р. Шакировой. – Казань: Изд-во Казанского университета, 2023. – 245 с.
9. Макарова, Н.П. Информатика : учеб. пособие для 6-го кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / Н. П. Макарова, А. И. Лапо, Е. Н. Войтехович. – Минск : Нар. асвета, 2018. – 167 с.
10. Станцо, Д. Программируй на Python / Д. Станцо, М. Саммерфилд ; [пер. с англ. А.В. Берилова]. – 4-е изд. – Санкт-Петербург : Питер, 2021. – 416 с.

## ПЛАН УРОКА В РАМКАХ ФАКУЛЬТАТИВА ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ: Н.И. ЛОБАЧЕВСКИЙ – ЖИЗНЬ И ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ ВЕЛИКОГО ГЕОМЕТРА

*Беляева А.С.*
*Россия, г. Москва*
*Государственный университет просвещения, физико-математический факультет*
*Научный руководитель: кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей алгебры, математического анализа и геометрии*
*Муханова А. А.*

*Аннотация.* Внеклассный урок представляет собой структурированный план с подробным сценарием, направленным на знакомство учеников с биографией, научными открытиями и деятельностью великого математика Н.И. Лобачевского. Урок способствует развитию познавательного интереса, анализа исторических и научных фактов через активное вовлечение и диалог с учащимися.

*Ключевые слова:* Н.И. Лобачевский, неевклидова геометрия, план урока, история математики, Казанский университет.

## LESSON PLAN FOR A MATHEMATICS HISTORY COURSES: N.I. LOBACHEVSKY – THE LIFE AND WORK OF A GREAT GEOMETER

*Belyaeva A.S.*

*Russia, Moscow*

*State University of Education, faculty of Physics and Mathematics*

*Scientific supervisor: candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Algebra, Mathematical Analysis and Geometry Mukhanova A. A.*

*Abstract.* This extracurricular lesson is a structured plan with a detailed scenario aimed at introducing students to the biography, scientific discoveries, and work of the great mathematician N.I. Lobachevsky. The lesson fosters cognitive interest and analysis of historical and scientific facts through active engagement and dialogue with students.

*Keywords*: N.I. Lobachevsky, non-Euclidean geometry, lesson plan, history of mathematics, Kazan University.

**Класс:** 8-9.

**Тип урока:** внеклассное мероприятие (урок истории математики).

**Форма урока:** урок-лекция с элементами беседы и интерактивной работы.

**Цель:** сформировать у учащихся представление о жизни, деятельности и научных достижениях Н.И. Лобачевского, познакомить с историей создания неевклидовой геометрии.

**Задачи урока:**

*образовательные:* познакомить учащихся с биографией Н.И. Лобачевского, его вкладом в развитие математики и Казанского университета; дать представление о неевклидовой геометрии и её значении для науки;

*развивающие:* развитие интереса к истории математики и науки; развитие логического мышления через понимание основ геометрии

Лобачевского; формирование умения анализировать исторические события и научные открытия.

*воспитательные:* воспитывать уважение к научному труду и упорству в достижении целей; прививать любовь к математике через изучение биографий великих учёных; формировать представление о значимости российской науки для мирового научного сообщества.

**Планируемые результаты:**

*предметные:* знакомство с личностью Н.И. Лобачевского, понимание основных идей неевклидовой геометрии, знание основных этапов жизни и деятельности учёного, понимание разницы между геометрией Евклида и геометрией Лобачевского.

*метапредметные:*

1. познавательные: осуществлять поиск и отбор информации из различных источников, выделять главное в биографических данных и научных достижениях, устанавливать причинно-следственные связи между историческими событиями и развитием науки;
2. регулятивные: формировать умение планировать свою деятельность, оценивать полученные знания, определять степень усвоения материала, развивать навыки самоконтроля и саморефлексии;
3. коммуникативные: умение слушать и участвовать в диалоге, формулировать вопросы, высказывать свою точку зрения, работать в группах при выполнении заданий.

*личностные:* формирование познавательного интереса к истории науки, воспитание уважения к труду учёных, понимание важности образования и самообразования, развитие чувства патриотизма через знакомство с достижениями российских учёных.

**Методы и формы обучения:** фронтальная работа, беседа, индивидуальная работа, работа в группах.

**Оборудование урока:** презентация с портретами Н.И. Лобачевского, иллюстрациями Казанского университета, раздаточный материал с заданиями, тетради для записей.

**Сценарий урока**

**I. Организационный момент**

Здравствуйте, ребята! Рада вас всех видеть. Сегодня у нас необычный урок. Мы с вами отправимся в путешествие в прошлое, в XIX век, и познакомимся с одним из величайших российских математиков.

Сегодня мы познакомимся с человеком, которого называли "Коперником геометрии". Кто знает, кто такой Коперник? (Ученики отвечают: астроном, который доказал, что Земля вращается вокруг Солнца)

Верно! Коперник совершил революцию в астрономии. А наш герой совершил революцию в геометрии. Его имя – Николай Иванович Лобачевский.

А теперь давайте запишем тему урока: "Н.И. Лобачевский – жизнь и деятельность великого геометра".

**II. Актуализация знаний** /фронтальная работа, беседа/

Прежде чем мы начнём знакомство с Лобачевским, давайте вспомним: что такое геометрия? (наука о фигурах, пространстве и их свойствах) кто создал первую систему геометрии? (Евклид) что такое аксиома или постулат? (утверждение, которое принимается без доказательства) что такое параллельные прямые? (прямые, которые не пересекаются).

Отлично! Эти знания нам сегодня очень пригодятся.

**III. Мотивация. Проблемная ситуация** /фронтальная работа/

А теперь задумайтесь: можете ли вы представить геометрию, в которой через одну точку можно провести не одну, а несколько параллельных прямых к данной прямой? Звучит странно, правда? (Ученики удивляются, высказывают недоумение).

Именно такую геометрию и создал Николай Лобачевский! И сегодня мы узнаем, как это возможно, и какую цену пришлось заплатить учёному за своё открытие.

**IV. Изучение нового материала**

*1. Детство и юность (1792-1811)*

/фронтальная работа, рассказ учителя/

Николай Иванович Лобачевский родился 20 ноября (по старому стилю) или 1 декабря (по новому стилю) 1792 года в Нижнем Новгороде. Запишите эту дату в тетрадь.

Его отец, Иван Максимович, был мелким чиновником геодезического департамента. Семья была небогатой. Когда Николаю было всего пять лет, отец умер, и мать, Прасковья Александровна, осталась одна с тремя сыновьями.

/учитель сообщает интересные факты о детстве Н.И. Лобачевского и его успехах в учёбе/

В 1807 году, в возрасте 14 лет, Николай поступил в Казанский университет, который был основан всего за два года до этого, в 1805 году [2; с. 28]. Запишите: 1807 год – поступление в Казанский университет.

*2. Учёба и учитель*

У Николая был замечательный учитель математики – профессор Мартин Бартельс, немецкий математик [1; с. 29]. Он сразу заметил выдающиеся способности Николая. Бартельс писал: "Об искусстве Лобачевского предложу хотя один пример: я поручил ему объяснить товарищам сложную тему, и он справился блестяще! [1; с. 30]"

В 1811 году, в возрасте 18 лет, Николай Лобачевский получил степень магистра по физике и математике с отличием [2; с. 29]. А уже в 1822 году – ординарным профессором, то есть полноценным профессором чистой математики [2; с. 65]. Запишите это в тетрадь.

*3. Создание неевклидовой геометрии*

/фронтальная работа, объяснение с элементами беседы/

А теперь перейдём к самому главному – к научному открытию Лобачевского.

Давайте вспомним, что более 2000 лет назад древнегреческий математик Евклид создал систему геометрии, которую мы с вами изучаем в школе. Эта система основывалась на пяти постулатах – утверждениях, которые принимаются без доказательства.

Но сегодня мы вспомним о его пятом постулате. Он звучал очень сложно и запутанно. В упрощённом виде он говорил: через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной. Запишите это определение в тетрадь.

Давайте проверим. Перед вами прямая а и точка А, которая не лежит на этой прямой. Сколько прямых, параллельных прямой а, мы можем провести через точку А? (Ученики отвечают: одну)

Верно! По Евклиду – только одну.

Но этот пятый постулат всегда вызывал сомнения у математиков. Он был слишком сложным, и многие пытались вывести его из первых четырёх, то есть доказать. Но никому это не удавалось!

Лобачевский размышлял над этим вопросом много лет. И в какой-то момент у него возникла смелая мысль: а что, если этот постулат нельзя доказать, потому что он не обязательно истинный? Что, если можно создать другую геометрию с другим пятым постулатом?

И он сделал революционный шаг! Лобачевский заменил пятый постулат Евклида на противоположный: Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести по крайней мере две прямые, параллельные данной прямой. Запишите это в тетрадь и подумайте, как это возможно? (Ученики размышляют)

Дело в том, что в геометрии Лобачевского пространство не плоское, как мы привыкли думать, а имеет особую кривизну – отрицательную.

Представьте себе поверхность седла или воронки. На такой поверхности через одну точку действительно можно провести много прямых, которые не будут пересекаться с данной прямой!

Лобачевский назвал свою геометрию "воображаемой геометрией". Сейчас она называется неевклидовой геометрией или геометрией Лобачевского.

*4. Представление открытия*

23 февраля 1826 года – запишите эту дату! – Николай Иванович Лобачевский на заседании физико-математического факультета Казанского университета представил свой доклад "Краткое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных линиях" [2; с. 79].

Это был исторический момент! Именно в этот день была представлена миру неевклидова геометрия. Но как вы думаете, как отреагировали коллеги Лобачевского? (Ученики высказывают предположения)

К сожалению, его не поняли. Более того, его работу подвергли резкой критике! Петербургские математики, особенно академик Остроградский, писали о работах Лобачевского пренебрежительно. Его считали чудаком, над ним даже смеялись в фельетонах!

Представьте себе: ты совершил великое открытие, а тебя не понимают и высмеивают. Но Лобачевский не сдавался! Он продолжал развивать свою теорию и публиковать работы.

В 1829-1830 годах вышла его работа "О началах геометрии". Затем были статьи о "воображаемой геометрии". В 1835-1838 годах опубликованы важные работы, а в 1840 году вышла его самая фундаментальная работа "Новые начала геометрии с полной теорией параллельных".

*5. Признание*

А теперь поговорим о признании. Долгое время работы Лобачевского оставались непризнанными в России. Но в 1840-е годы о нём узнали в Европе.

Великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс высоко оценил работы русского математика! По его представлению в 1842 году Лобачевский был избран членом-корреспондентом Гёттингенского научного общества [4]. Это было большой честью!

Но, к сожалению, широкое признание пришло только после смерти Лобачевского. Лишь в 1860-1870-е годы итальянский математик Бельтрами, немецкий математик Клейн и французский математик Пуанкаре доказали непротиворечивость геометрии Лобачевского.

А в XX веке выяснилось, что геометрия Лобачевского имеет огромное практическое значение! Она используется в теории относительности Эйнштейна, в физике, в описании космического пространства!

*6. Лобачевский – ректор Казанского университета*

/фронтальная работа, рассказ/

Но Николай Иванович Лобачевский был не только великим учёным, но и прекрасным организатором и руководителем!

3 мая 1827 года, в возрасте 34 лет, он был избран ректором Казанского университета. Запишите: 1827-1846 годы – ректор Казанского университета [2; с. 82]. Почти 19 лет!

Что сделал Лобачевский для университета? Очень многое! /учитель сообщает интересные факты о строительстве целого комплекса зданий, об основании научного журнала, как проходила эпидемия холеры в 1830 году и пожар в 1842 году/

За свои заслуги в 1838 году Николай Иванович Лобачевский был пожалован потомственным дворянством.

*7. Последние годы жизни*

/фронтальная работа, рассказ/

К сожалению, конец жизни Лобачевского был трагическим.

Николай Иванович терял зрение. К концу жизни он был практически слепым. Но даже слепым он продолжал работать! Свою последнюю работу "Пангеометрия" он диктовал ученикам [2; с. 117].

12 февраля (24 февраля по новому стилю) 1856 года Николай Иванович Лобачевский скончался в Казани. Ему было 63 года.

**V. Работа в группах**

/групповая работа/

А теперь давайте разделимся на группы по 4-5 человек. У вас на партах лежат листочки с заданиями.

*Группа 1:* Составьте хронологическую таблицу жизни Лобачевского (основные даты и события).

*Группа 2:* Перечислите качества личности Лобачевского, которые помогли ему стать великим учёным и ректором (упорство, смелость, организаторские способности и т.д.).

*Группа 3:* Составьте список вклада Лобачевского в развитие Казанского университета.

*Группа 4:* Подумайте и запишите, почему современники не приняли геометрию Лобачевского? Что помешало им понять новое?

У вас есть 5 минут. Затем каждая группа представит свои результаты.

(Ученики работают в группах, затем представляют результаты)

**VI. Подведение итогов**

Итак, ребята, давайте подведём итоги. Сегодня мы познакомились с удивительным человеком – Николаем Ивановичем Лобачевским.

Его жизнь учит нас тому, что нужно верить в свои идеи, даже если окружающие тебя не понимают; настоящее признание может прийти не сразу, но истина всё равно победит; учёный должен быть не только умным, но и смелым, готовым к открытиям; важно служить не только науке, но и людям, как это делал Лобачевский, спасая университет от холеры и пожара

Как говорил сам Николай Иванович: "Ученый должен идти по непроторенным путям, несмотря на препятствия."

Запишите эту цитату в тетрадь.

**VII. Рефлексия**

Давайте теперь с Вами проанализируем сегодняшнее занятие и ответим на вопрос: Как думаете, как в наше время память о Н.И. Лобачевском жива? (да) Где мы можем встретиться с его фамилией? (премия, улицы, университет имени Н.И. Лобачевского и т.д.)

Что меня больше всего удивило/поразило на сегодняшнем уроке?

Спасибо всем за внимание и активную работу! Урок окончен.

Список литературы

1. Лобачевский Н. И. Научно-педагогическое наследие. Руководство Казанским университетом. Фрагменты. Письма / Н. И. Лобачевский. — М.-Л.: Наука, 1976.
2. Николай Иванович Лобачевский: историко-биографический сборник. 2-е изд., дополненное и переработанное. — Казань: Жиен, 2020. — 680 с., цв. илл. 32 с.
3. Григорьева Т. 5 российских ученых, которые были двоечниками и хулиганами [Электронный ресурс] // Culture.ru. — Режим доступа: https://www.culture.ru/materials/255390/5-rossiiskikh-uchenykh-kotorye-byli-dvoechnikami-i-khuliganami, свободный. — Дата доступа: 20.11.2025.
4. Лобачевский и Гаусс: математический дуэт на… [Электронный ресурс] // kpfu.ru. — Режим доступа: https://kpfu.ru/elabuga/novosti/konferencii-konkursy/lobachevskij-i-gauss-matematicheskij-duet-na.html, свободный. — Дата доступа: 20.11.2025.

# ВЫПОЛНЕНИЕ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО МАТЕМАТИКЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИКТ НА ОСНОВЕ ГЕОГРАФИЧЕСКИХ ДАННЫХ

*Бондаренко М.С., Красноперов В.А.*

*Российская Федерация, Екатеринбург*

*ФГАОУ ВО «Уральский государственный педагогический университет», Институт математики, физики, информатики*

*Научный руководитель: заведующий кафедрой высшей математики и методики обучения математике, доктор физико-математических наук, доцент Бодряков В. Ю.*

*Аннотация.* В работе представлен опыт применения информационных технологий в лабораторной работе по математике, направленной на формирование функциональной грамотности. Ключевая задача — определение координат неизвестного объекта на местности по азимутам из двух точек с использованием мобильной геолокации. Предложена и доказана математическая модель задачи, для автоматизации расчётов разработана программа на Python, успешно прошедшая апробацию. Работа демонстрирует эффективность междисциплинарного подхода, реализующего метапредметные связи математики и информатики.

*Ключевые слова:* информационные технологии в образовании; лабораторные работы по математике; мобильная геолокация; функциональная математическая грамотность; исследовательские умения; метапредметные связи.

## PERFORMANCE OF LABORATORY WORKS IN MATHEMATICS USING ICT BASED ON GEOGRAPHICAL DATA

*Bondarenko M.S., Krasnoperov V.A.*

*Russian Federation, Yekaterinburg*

*Ural State Pedagogical University, Institute of Mathematics, Physics, Computer Science*

*Scientific supervisor: Associate Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Higher Mathematics and Methods of Teaching Mathematics Bodryakov V. Yu.*

*Abstract.* This paper presents the use of information technology in a mathematics laboratory work aimed at developing students' functional literacy. The key objective is determining the coordinates of an unknown object using azimuths from two points via mobile geolocation tools. The study proposes and validates a mathematical model for solving this problem. A Python program was developed to automate data processing and successfully tested. The work demonstrates the effectiveness of an interdisciplinary approach that implements meta-subject links between mathematics and computer science.

*Keywords:* information technology in education; mathematics laboratory work; mobile geolocation; functional mathematical literacy; research skills; meta-subject links.

Методология экспериментально-лабораторного подхода к обучению математике, реализуемого в форме междисциплинарных лабораторных работ по математике (ЛРМ), получила систематическое развитие в трудах исследователей кафедры высшей математики и методики обучения математике УрГПУ [1, 3-7].

Как ранее отмечалось авторами [5, 9], привлечение метапредметных связей при реализации ЛРМ способствует комплексному восприятию знаний, формируя связь между научным аппаратом области знания, служащей источником данных (географические координаты [3-4], физические характеристики [9]), и математическим инструментарием. Следующим закономерным шагом является алгоритмизация и программная реализация математической модели, позволяющая перейти от теоретических построений к автоматизации получения результата.

Целесообразное применение современных цифровых технологий совместно с прикладными задачами лабораторных работ оптимизирует процесс их выполнения: сокращает время расчетов и усилия по контролю точности, позволяя концентрировать внимание на теоретических аспектах математической модели ЛРМ и развивать функциональную математическую грамотность как способность применять математические знания в междисциплинарном контексте.

Наглядной иллюстрацией подобного подхода может служить метапредметная ЛРМ «Поиск неизвестного объекта на местности по азимутам от двух точек с определенными географическими координатами», в рамках которой географические данные, математическое моделирование и программная реализация образуют единый исследовательский цикл.

**Математическая модель ЛРМ**

Построим математическую модель ЛРМ. Пусть даны две точки $A(x_a, y_a)$ и $B(x_b, y_b)$, для этих точек даны азимуты α и β до некой точки $C(x, y)$. Задача состоит в нахождении координат точки *C* на основе имеющихся данных (рис. 1). Азимут определяется как угол между направлением на север и направлением на любой объект по ходу часовой стрелки [8].

Рассмотрим точку *A*. Координаты направляющего вектора луча *AC* есть $\overrightarrow{u_a} = (\sin\alpha, \cos\alpha)$, а параметрическое уравнение прямой *a*, проходящей через *A* с направляющим вектором $\overrightarrow{u_a}$ имеет следующий вид:

$$a: \begin{cases} x = x_a + t_a \cdot \sin\alpha \\ y = y_a + t_a \cdot \cos\alpha, \end{cases}$$

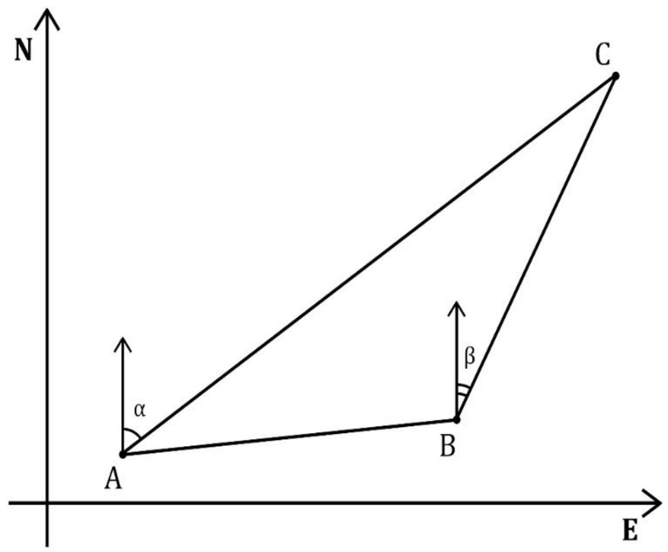



Рис. 1. Схема задачи

где $t_a$ – параметр, $t_a > 0$ для точки *C* (так как *C* лежит на луче *AC*). Аналогично для точки *B*. Точка *C* лежит на лучах *AC* и *BC*, тогда ее координаты соответствуют уравнениям:

$$\begin{cases} x_a + t_a \cdot \sin\alpha = x_b + t_b \cdot \sin\beta \\ y_a + t_a \cdot \cos\alpha = y_b + t_b \cdot \cos\beta. \end{cases}$$

После решения системы координаты точки *C* примут вид:

$$C: \begin{cases} x = x_a + \dfrac{(x_a - x_b)\cos\beta + (y_b - y_a)\sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)} \cdot \sin\alpha \\ y = y_a + \dfrac{(x_a - x_b)\cos\beta + (y_b - y_a)\sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)} \cdot \cos\alpha. \end{cases}$$

Задача определения координат неизвестного (точечного) объекта на местности по азимутам от двух точек с определенными географическими координатами в общем виде решена.

Для вывода соотношений в рамках математической модели ЛРМ достаточно знания школьного курса математики, проделать его может каждый обучающийся с 9-го класса и старше.

Таким образом, выбрав два базовых точечных объекта на местности (например, это могут быть два известных городских памятника), определив их географические координаты и определив относительно них азимуты на третий, неизвестный, объект, можно поставить исследовательскую задачу перед обучающимися. А именно, найти географические координаты и идентифицировать неизвестный объект на местности. Провести такое занятие можно в учебное или внеучебное время в форме географического квеста (урока-экскурсии) по родному городу. Воспитательный потенциал такого занятия, реализуемый одновременно с решением предметных дидактических задач рассматривался как и отечественными авторами [2, 6, 8, 11-12], так и зарубежными [13-14].

**Реализация вычислений в виде программы на Python**

Логичным развитием представленной выше математической модели является создание автоматизированного способа её применения на практике. Одним из наиболее удобных вариантов – разработка кода на языке Python. Кратко отметим, что данный язык программирования широко распространён в образовательных учреждениях РФ и мира ввиду своей простоты и прозрачной логики. По состоянию на 2025 год он является основным изучаемым языком в школах России, посему, его выбор в рамках ЛРМ весьма логичен (при необходимости программа подобной структуры может быть без каких-либо проблем разработана на любом другом языке).

Сформулируем задание для обучающихся следующим образом:

Создайте программу на языке Python (возьмите за основу ранее доказанную математическую модель). Программа должна:

- Получать на вход координаты исходных точек и азимуты к искомой точке в виде *«широта долгота азимут_к_искомой_точке»*.

- Преобразовывать координаты из градусных единиц в километры.
- Рассчитывать координаты искомой точки и выводить их.

Продемонстрируем ниже описание одного из вариантов реализации алгоритма, способного обрабатывать исходные данные с требуемым результатом (прим. 1); пример программы представлен на рис. 2:

1. Для работы с тригонометрическими функциями и углами в различных единицах измерения (радианы, градусы) целесообразно импортировать встроенную в *Python* библиотеку *Math* и использовать её функции.
2. Реализуем ввод данных: считаем для каждой точки строку в формате *«широта долгота азимут_к_искомой_точке»*, разобьем её методом *.split()* и создадим список из координат.
3. Создадим функцию *calculate_target()*, которая будет принимать данные в виде *«список_координат_первой_точки, азимут_к_искомой_точке_из_первой, список_координат_второй_точки, азимут_к_искомой_точке_из_второй»* и возвращать ответ в виде *«широта_искомой_точки, долгота_искомой_точки»*.
4. В функции *calculate_target()* создадим вспомогательные функции:

e. *to_meters()* – преобразует географические координаты в метрические, принимает на вход и возвращает пару координат (широта и долгота соответственно).

f. *to_degrees()* – действует аналогично функции *to_meters()*, однако преобразует метрические координаты в географические.

7. Внутри функции *calculate_target()* реализуем вычисления искомых координат согласно формулам, полученным на этапе

математического моделирования. Чтобы упростить громоздкую формулу параметра $t_a$ оптимальным решением будет рассчитать отдельно числитель и знаменатель.

Согласно учебной программе курса «Информатика» базового уровня выполнить разработку программного кода по представленному выше варианту могут обучающиеся с 9 класса [13]. Особо увлеченные ученики могут выполнить дополнительные задания (прим. 2). Однако, ЛРМ может быть выполнена обучающимися и более младших классов – они могут применить возможности табличных программ, например, Microsoft Excel.

```python
import math

DEGREE_TO_METERS_LAT = 111111.0  # 1° широты = 111.111 км
DEGREE_TO_METERS_LON = 111319.0  # 1° долготы на экваторе = 111.319 км

def calculate_target(point_a, azimuth_a, point_b, azimuth_b):
    avg_lat = (point_a[0] + point_b[0]) / 2
    alpha = math.radians(azimuth_a)
    beta = math.radians(azimuth_b)

    def to_meters(lat, lon):
        y = lat * DEGREE_TO_METERS_LAT
        x = lon * DEGREE_TO_METERS_LON * math.cos(math.radians(avg_lat))
        return x, y
    def to_degrees(x, y):
        lat = y / DEGREE_TO_METERS_LAT
        lon = x / (DEGREE_TO_METERS_LON * math.cos(math.radians(avg_lat)))
        return lat, lon

    x_a, y_a = to_meters(point_a[0], point_a[1])
    x_b, y_b = to_meters(point_b[0], point_b[1])
    numerator = (y_b - y_a) * math.sin(beta) + (x_a - x_b) * math.cos(beta)
    denominator = math.sin(beta - alpha)
    t_a = numerator / denominator
    x_c = x_a + t_a * math.sin(alpha)
    y_c = y_a + t_a * math.cos(alpha)
    return to_degrees(x_c, y_c)

point_a_x, point_a_y, azimuth_a = map(float, input('Введите координаты первой точки и азимут из нее: ').split())
point_b_x, point_b_y, azimuth_b = map(float, input('Введите координаты второй точки и азимут из нее: ').split())
point_a = tuple([point_a_x, point_a_y])
point_b = tuple([point_b_x, point_b_y])

calculated_point_c = calculate_target(point_a, azimuth_a, point_b, azimuth_b)
print(f'Искомая точка имеет координаты {calculated_point_c[0]:.6f}° с. ш., {calculated_point_c[1]:.6f}° в. д.')
```

Рис. 2. Пример кода Python

*Примечание 1.* Стоит отметить, что безусловно существуют и другие варианты создания программного кода по сформулированному заданию, пример выше приведен лишь в демонстрационных целях.

*Примечание 2.* В зависимости от уровня владения информатикой группой обучающихся имеют место усложнения задания: например, можно попросить дополнительно создать функцию, оценивающую погрешность вычислений, или, создать «обработку исключений» (к примеру, когда значения знаменателя параметра $t_a$ равно 0 или исходные точки лежат на одной прямой с искомой).

**Апробационный эксперимент**

Для апробации разработки на базе городской территории Екатеринбурга, были выбраны следующие объекты:

1. *Памятник В. Н. Татищеву и Г. В. де Генину* (рис. 3).
2. *Памятник Якову Свердлову* (рис. 4).

*Рис. 3. Памятник В.Н. Татищеву и Г.В. де Генину*

*Рис. 4. Памятник Якову Свердлову*

*Рис. 5. Памятник «Гордый Фонарь»*

3. Арт-объект *«Гордый фонарь»* (рис. 5).

Каждый из объектов символизирует собой целую эпоху из культуры и истории города: с XVIII до XXI веков, от классических скульптур – до современного искусства. Географические координаты объектов, приближенно рассматриваемых как точечные, даны в табл. 1.

Таблица 1. Географические координаты и азимуты объектов в ЛРМ

| Точки | Объекты | Координаты | | Азимуты к *C*, град. |
|---|---|---|---|---|
| | | град. с.ш. | град. в.д. | |
| *A* | Памятник В.Н. Татищеву и Г.В. де Генину | 56.838138 | 60.605800 | 8,16 |
| *B* | Памятник Якову Свердлову | 56.839749 | 60.616179 | 324,29 |
| *C* | Памятник «Гордый Фонарь» | 56.846152 | 60.607937 | – |

Введем в разработанную программу данные в формате *«широта долгота азимут_к_искомому_объекту»* поочередно для двух точек и поверим результат. Программой выведены следующие данные (рис. 6):

```
Введите координаты первой точки и азимут из нее: 56.838138 60.605800 8.16
Введите координаты второй точки и азимут из нее: 56.839749 60.616179 324.29
Искомая точка имеет координаты 56.846078° с. ш., 60.607877° в. д.
```

Рис. 6. Консоль Python

Проверим полученные данные, сопоставим их с «эталонными» координатами из табл. 1: абсолютная погрешность в результате обработки значения широты точки от исходного составляет около $\Delta_ш = 0.00074°$ или 8,22 м; отклонение долготы $\Delta_д = 0.00006°$ или 3,65 м. Итого, найденная точка отстоит от искомой примерно на 9м – отклонение данного порядка является ожидаемым и обусловлено совокупной погрешностью измерений (азимут, GPS) и применяемых вычислений. Данная точность является достаточной для визуальной идентификации объекта в городских условиях. При проведении измерений на более сложной местности (перепады высот, более удаленные объекты) погрешность может возрасти до нескольких десятков метров, однако это вряд ли затруднит поиск и визуальную идентификацию объекта.

*Заключение.* Описанная в статье ЛРМ «Поиск неизвестного объекта на местности по азимутам от двух точек с определенными географическими координатами» является примером эффективного привлечения метапредметных связей математики и информатики при создании методической разработки: математическое моделирование применяется совместно с мобильными технологиям и средствами программирования.

Таким образом, представленная ЛРМ реализует полный цикл исследовательской деятельности, последовательно проводя обучающихся через все её этапы: от постановки реальной задачи и сбора данных → через построение и анализ математической модели → к её алгоритмизации и созданию универсального технического решения → и, наконец, к верификации результатов на местности. Такой подход обеспечивает глубокое понимание не только предметного содержания математического знания, но и самой логики применения математического моделирования для решения практических задач из разных предметных областей.

Список литературы


1. Аксенова О. В. Развитие исследовательских умений будущих учителей в процессе обучения математике : специальность 58.20.00 : диссертация на соискание ученой степени кандидата педагогических наук. Екб.: УрГПУ, 2022. 183 с. EDN YOWZVF.

2. Беловолова Е.А., Рогова О.А. ГИС как средство организации исследовательской деятельности обучающихся по географии во внеурочной работе // География в школе. 2024. № 2. С. 30–34.

3. Бодряков В. Ю. Формирование межпредметной функциональной математической грамотности обучающихся при выполнении лабораторных работ по математике с историко-географическим контекстом // Вестник Ошского государственного университета. Педагогика. Психология. 2023. № 2(3). С. 68-76. DOI 10.52754/16948742_2(3)_9-2023. EDN OUFPHO.

4. Бодряков В. Ю. Усвоение фундаментальных математических понятий в процессе выполнения лабораторных работ по математике // Математика в школе. 2023. № 7. С. 20-28. DOI 10.47639/0130-9358_2023_7_20. EDN MRRWCH.
5. Бодряков В. Ю., Новоселов С. А., Красноперов В. А., Бредгауэр В. А. Лабораторные работы по математическому моделированию как средство развития способности школьников к исследовательской деятельности // Педагогическое образование в России. 2025. № 5.
6. Брель О. А., Кайзер Ф. Ю., Зайцева А. И., Наставко Е. В. Оценка сформированности компетенций в сфере ГИС-технологий у студентов вуза при освоении географических дисциплин // Профессиональное образование в России и за рубежом. 2023. № 4(52). С. 160-170.
7. География : 5-6-е классы : учебник : издание в pdf-формате / А. И. Алексеев, В. В. Николина, Е. К. Липкина [и др.]. – 13-е изд., стер. – Москва: Просвещение, 2024. – 191[1] с. : ил., карты. – (Полярная звезда).
8. Каткова О.А. Возможности интеграции географии с предметами естественно-научного цикла в условиях реализации Концепции развития географического образования // География в школе. 2023. № 6. С. 60–64.
9. Красноперов, В. А. Определение фундаментальной мировой постоянной - числа е - в физическом опыте с подвешенной цепью / В. А. Красноперов, В. А. Бредгауэр, В. Ю. Бодряков // Физика в школе. – 2024. – № 8. – С. 39-48. – DOI 10.47639/0130-5522_2024_8_39. – EDN GMPIPD.
10. Образовательная среда «Сферы». Информатика. 7–9 классы [Электронный ресурс] : учебное пособие для общеобразовательных организаций / под ред. Л. Л. Босовой. — Электрон. дан. — Москва : ООО «Федеральный рилейтерский проект», 2025. — 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). — Загл. с титул. экрана. — URL: https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2025/07/2025_ooo_frp_informatika-7-9_ugl.pdf (дата обращения: 12.11.2025).
11. Репринцева Ю.С. Практические работы на местности как форма формирования исследовательской компетенции школьников в процессе изучения географии // География в школе. 2020. № 4. С. 23–31.
12. Уколов П.А. Геоквесты во внеурочной краеведческой работе как средство развития познавательной активности обучающихся // География в школе. 2021. № 4. С. 30–36.

13. Bartha G. Objectives of GIS teaching in higher education: Developing experts or training teachers? // Using Geoinformation in European Geography Education. 2005. P. 74–1-8. URL: http://www.geodbm.uni-miskolc.hu/letoltesek/herodot.pdf
14. Duarte L., Teodoro A.C., Gonçalves H. Evaluation of spatial thinking ability based on exposure to Geographical Information Systems (GIS) concepts in the context of higher education // ISPRS Int. J. Geo-Inf. 2022. V. 11. N. 8. P. 417–1-19.

## МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ ИГРЫ «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛЕНТА»

*Попова А.А.*
*Россия, г. Челябинск*
*Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет, факультет естественного и математического образования*
*Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент кафедры математики и информатики Шарафутдинова А.М.*

*Аннотация.* Научно-практическая игра «Математическая лента» приурочена к празднованию Всероссийского Дня математика. Данное мероприятие позволит расширить знания о жизни и научных работах известных ученых математиков с помощью игровых технологий.

*Ключевые слова:* математика, игровые технологии, день математика.

## METHODOLOGICAL DEVELOPMENT OF THE SCIENTIFIC AN D PRACTICAL GAME «MATHEMATICAL TAPE»

*Popova A.A.*
*Russia, Chelyabinsk*
*South Ural State Humanitarian Pedagogical University, Faculty of Natural and Mathematical Education*
*Scientific supervisor: Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics and Computer Science, Sharafutdinova A.M.*

*Abstract.* The scientific and practical game «Mathematical tape» is timed to coincide with the celebration of the All-Russian Day of Mathematics. This event will allow you to expand your knowledge about the lives and scientific works of famous mathematicians using game technologies.

*Keywords*: mathematics, game technologies, and Mathematics Day.

В эпоху цифровизации и повсеместного распространения социальных сетей их потенциал как инструмента образовательной деятельности становится все более очевидным. Учебный процесс, ориентированный на современные реалии, требует поиска новых нестандартных подходов к вовлечению обучающихся и формированию у них устойчивого интереса к изучаемым предметам. Особую актуальность приобретает задача стимулирования интереса к точным наукам, в частности, к математике, которая часто воспринимается как сложный и абстрактный предмет.

Данная методическая разработка посвящена созданию научно-практической игры «Математическая лента», приуроченной к празднованию Всероссийского Дня Математика. Основная идея игры заключается в переносе представлений о жизни и деятельности великих ученых-математиков в формат, близкий и понятный современному подростку – формат социальной сети. Предлагая ученикам представить, как бы выглядели профили выдающихся математиков в виртуальном пространстве, мы ставим перед ними задачу не просто изучить факты их биографии, но и креативно интерпретировать их жизненные пути, открытия и личностные черты, преобразуя их в контент для социальных сетей.

Такой подход позволяет максимально акцентировать внимание на интересных и малоизвестных фактах из жизни ученых, представить их не как сухих академиков, а как яркие, многогранные личности, чьи открытия оказали колоссальное влияние на развитие цивилизации. Через призму современных медиа-форм мы стремимся сделать историю математики живой, доступной и захватывающей, тем самым повышая мотивацию обучающихся к изучению предмета и демонстрируя его связь с повседневной жизнью.

*Основной проблемой* является недостаточная база методических разработок, позволяющая эффективно проводить мероприятия, направленные на повышения заинтересованности в изучении математики.

*Цель мероприятия.* Развитие устойчивого интереса обучающихся к изучению математики посредством знакомства с жизнью и научными достижениями выдающихся ученых.

*Объект исследования.* Процесс формирования и развития познавательного интереса обучающихся к математике.

*Предмет исследования.* Методическая разработка научно-практической игры «Математическая лента», основанная на изучении биографии ученых-математиков.

*Методы.* Работа в группах, решение задач, творческая работа.

*Элементы новизны.* Основная новизна методической разработки «Математическая лента» заключается в полностью новом формате представления образовательного контента, направленного на повышение интереса к математике.

*Область применения.* Данная игровая модель может быть применена как внеурочное мероприятие на базе школы, а так же как воспитательное событие в педагогическом университете.

*Оборудование.* Ватманы, клей, карточки с заданиями, карточки с фактами.

Для участия в игре участники формируют команды по 6-8 человек. В данной разработке игра представлена для 6 команд, но может быть расширена для участия большего количества. Каждой команде выдается ватман с изображением телефона и пустого профиля в социальной сети

(Рисунок 1). Ведущие предлагают участникам представить, как бы вели свои социальные сети великие ученые-математики: какую информацию указывали в профиле, кого добавляли в друзья, какие посты выкладывали.

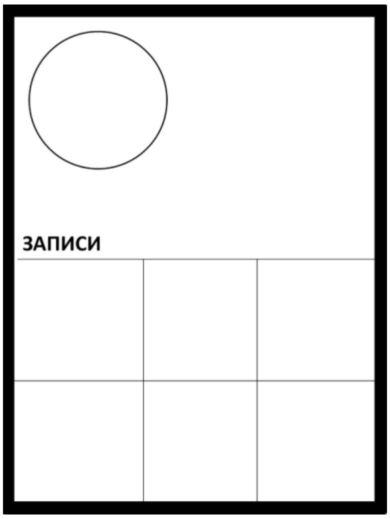
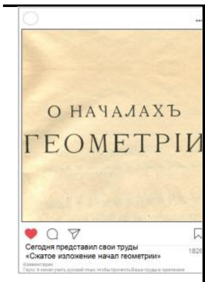



Рисунок 1. Шаблон ватмана

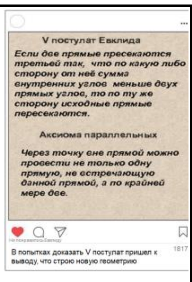
Каждой команде необходимо отгадать загаданного ученого, путем приобретения постов и информации с его «странички». Факты и посты для оформления страницы социальной сети для каждого ученого представлены в таблицах ниже и приобретаются командами за заработанную в ходе решения задач игровую валюту.

Таблица 1. Лобачевский Николай Иванович

**Факты:** Дата рождения: 1 декабря 1792 года. Семейное положение: женат на Варваре. Место рождения: г. Нижний Новгород. Образование: Императорский Казанский университет







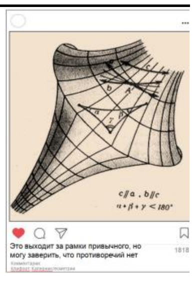



Таблица 2. Гаусс Карл Фридрих

**Факты:** Дата рождения: 30 апреля 1777 года. Место рождения: г. Брауншвейг. Семейное положение: женат на Иоганне Остгов. Образование: Геттингенский университет

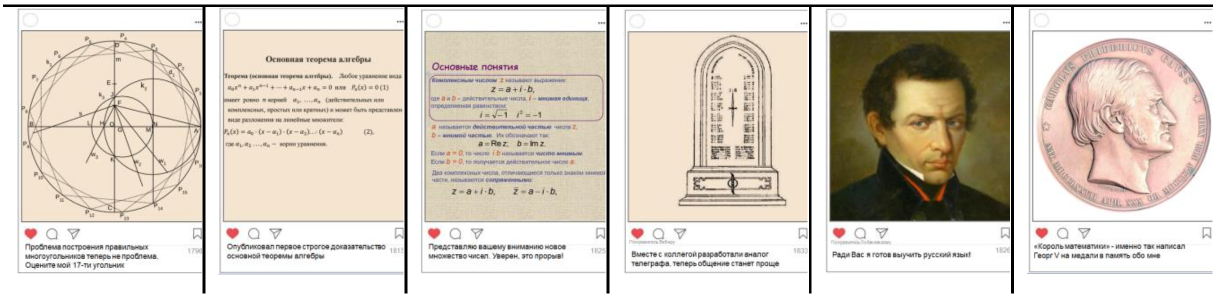


Таблица 3. Декарт Рене

**Факты:** Место рождения: Лаэ, Турень, Королевство Франция. Семейное положение: не женат. Образование: Лейденский университет. Утрехтский университет.

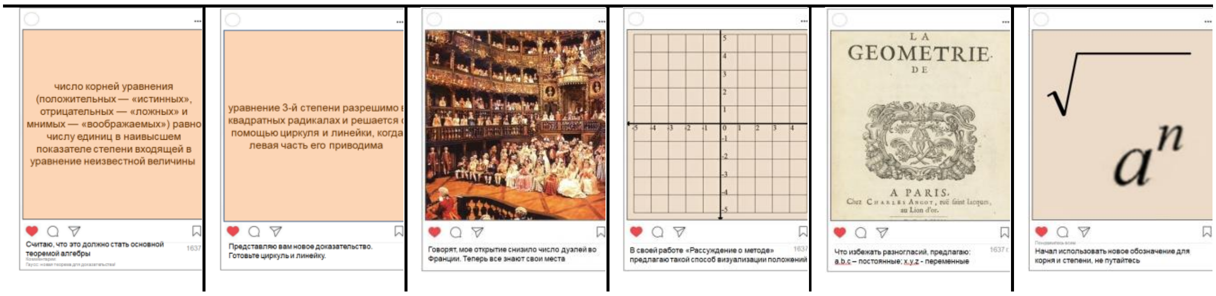


Таблица 4. Ковалевская Софья Васильевна

**Факты:** Дата рождения: 15 января 1850 года. Место рождения: г. Москва. Семейное положение: замужем за Владимиром. Образование: Гейдельбергский университет.

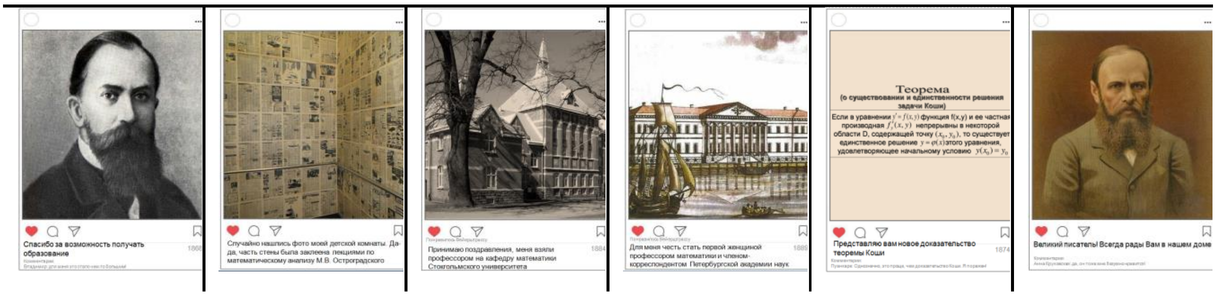


Таблица 5. Коши Огюстен Луи

**Факты:** Дата рождения: 21 августа 1789 года. Место рождения: г. Париж. Семейное положение: женат на Алоизе де Буре. Образование: парижская Школа мостов и дорог.

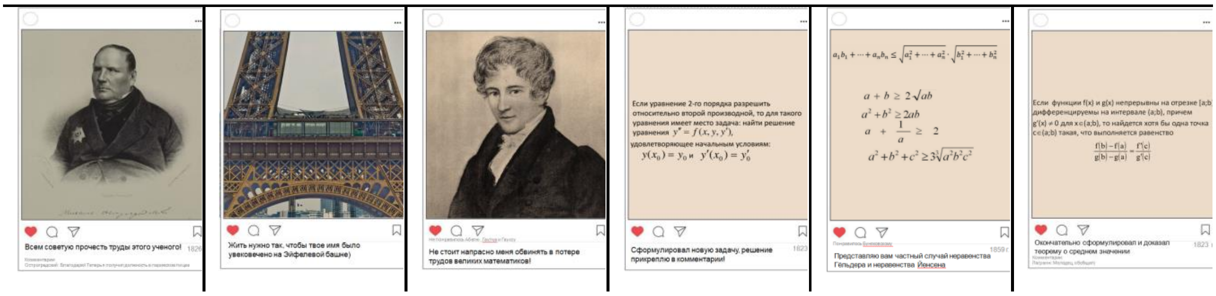
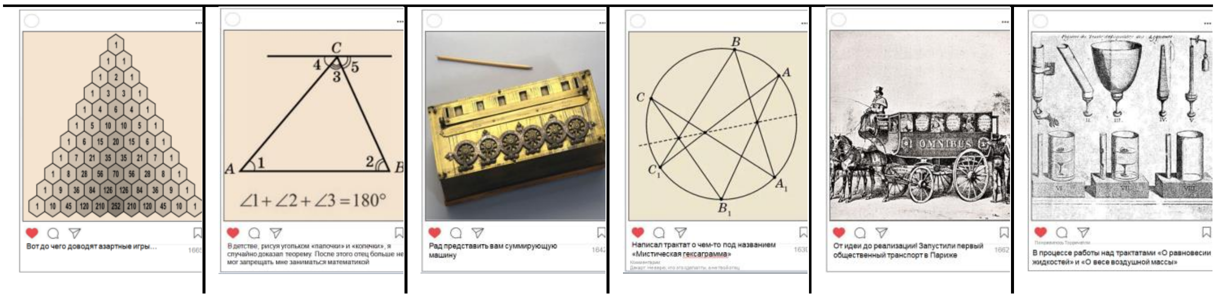


Таблица 6. Паскаль Блез

**Факты:** Дата рождения: 19 июня 1623 года. Место рождения: Франция. Овернь. Семейное положение: женат на Антуанетте Бегон. Образование: юридический факультет в Сорбонне.



Приобрести данные факты и посты команды могут за игровую валюту, в основе которой лежат макеты реальных банкнот с изображением математиков, что обеспечивает полное погружение в мир математики (Рисунок 2).

Рисунок 2. Игровая валюта

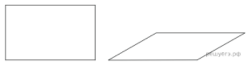
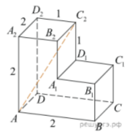
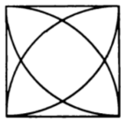
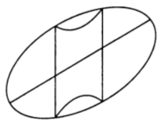
Заработать игровую валюту участники могут, решая математические задания разного уровня сложности. Задания представлены в нескольких категориях. Участники могут выполнять неограниченное количество заданий из каждой категории, пока им не будет хватать валюты для приобретения всех фактов о загаданном ученом.

Таблица 7. Распределение игровой валюты

| Заработать за одну задачу | |
|---|---|
| Высшая математика | 70 |
| Задания на логику | 50 |
| Практические задания | 30 |
| Задания ЕГЭ | 20 |
| Стоимость одного элемента на страничке ученого | |
| Факты | 20 |
| Посты | 50 |
| Аватарка | 100 |

Таблица 8. Категории и примеры заданий

| | |
|---|---|
| Высшая математика | Определить, рациональным или иррациональным будет число $A = \sqrt{2\sqrt{16\sqrt{2\sqrt{16\sqrt{2\sqrt{16\ldots}}}}}}\ ?$<br><br>Доказать, что для корней $x_1$, $x_2$ многочлена $x^2 + px - 1/(2p^2)$, где $p \in R$ и $p \neq 0$, выполняется неравенство $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + 2^{1/2}$<br><br>Вычислите предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^3+1}{2^3-1}\cdot\frac{3^3+1}{3^3-1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3+1}{n^3-1}\right)$ |

| | |
|---|---|
| Задания ЕГЭ | Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень даётся не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,6. Во сколько раз вероятность события «стрелок поразит ровно пять мишеней» больше вероятности события «стрелок поразит ровно четыре мишени»?<br><br>Параллелограмм и прямоугольник имеют одинаковые стороны. Найдите острый угол параллелограмма, если его площадь равна половине площади прямоугольника. Ответ дайте в градусах.<br><br><br>На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы многогранника прямые. Найдите расстояние между вершинами A и C2.  |
| Задания на логику | Предположим, что каждый из участников хакатона единожды поздоровался с каждым. Всего получилось 78 рукопожатий. Сколько было участников?<br><br>Вы играете в футбол и хотите подбросить монетку, чтобы решить, какой команде достанется мяч. Единственная монета, что у вас есть, является гнутой, и поэтому вносит явные искажения в результат при подбрасывании. Как вы тем не менее можете использовать такую монету, чтобы принять справедливое решение?<br><br>У вас есть парк из 50 грузовиков. Каждый из них полностью заправлен и может проехать 100 км. Как далеко с их помощью вы можете доставить определенный груз? Что будет, если в вашем распоряжении N грузовиков? |
| Практические задания | Построены четыре круга с центрами в вершинах квадрата и радиусами, равными стороне квадрата. Найдите площадь пересечения этих кругов, если сторона квадрата равна 1 <br><br>XXI век начался в понедельник. В какие еще дни может начинаться век в григорианском календаре?<br><br>Сделайте такой рисунок, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя им по одному и тому же отрезку дважды  |

После того, как команда собрала все факты об ученом, она оформляет свой ватман и делает предположение, какой ученый был загадан. Побеждает та команда, которая раньше всех оформит страничку ученого и отгадает его личность.

Апробация данного мероприятия на базе Южно-Уральского государственного гуманитарно-педагогического университета с целевой группой студентов 1-5 курсов, обучающихся по направлению педагогическое образование, профили: математика, физика и информатика показала повышение познавательного интереса к изучению математики и биографии ученых, что свидетельствует об эффективности данного формата.

Рисунок 3. Апробация мероприятия на базе ЮУрГГПУ

Рисунок 4. Апробация мероприятия на базе ЮУрГГПУ

*Достигнутый уровень решения проблемы.* Разработан новый формат научно-практической игры, позволяющий повысить интерес к изучению математики и биографии ученых. Данный формат является универсальным и может быть адаптирован под любую научную область.

Список литературы

1. Лобачевский и университет / сост. Л.Р. Шакирова. Изд-е 2-е, переработанное. - Казань: Казан. ун-т, 2018.

2. Рыбников, К. А. История математики [Текст] / К. А. Рыбников. — Москва : Издательство МГУ, 1974. — 455 с.

3. Юшкевич, А. П. История математики в России до 1917 года [Текст] / А. П. Юшкевич. — Москва : Наука, 1968. — 592 с.

4. Юшкевич, А. П. История математики в Средние века [Текст] / А. П. Юшкевич. — Москва : Физматгиз, 1961. — 448 с.

# РЕАЛИЗАЦИЯ ПРИНЦИПОВ ТЕОРИИ САМОДЕТЕРМИНАЦИИ В ГЕЙМИФИЦИРОВАННОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ НА ПРИМЕРЕ ЗАНЯТИЯ НА ТЕМУ «ТРОПОЙ ОТКРЫТИЙ: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПУТЕШЕСТВИЕ С ЛОБАЧЕВСКИМ»

*Оразнепесова Айгул*

*Россия, г. Казань*

*ФГАОУ ВО Казанский (Приволжский) Федеральный Университет, Институт механики и математики им. Н.И. Лобачевского*

*Научный руководитель: зав. каф., профессор Шакирова Л.Р.*

*Аннотация.* В статье представлен опыт проектирования и апробации внеурочного занятия с использованием игровых технологий и элементов геймификации по математике для учащихся 3 класса, направленного на знакомство с личностью и научным наследием Н.И. Лобачевского. Теоретической основой выступил синтез модели геймификации D6 и теории самодетерминации Э. Деси и Р. Райана. Мероприятие реализовано на интерактивной платформе Miro в формате командного образовательного квеста. Подробно описана методика проведения, включая этап распределения по командам, систему заданий (логико-математические и историко-биографические) и рефлексию. Приводятся примеры заданий и анализируется их соответствие базовым психологическим потребностям учащихся в автономии, компетентности и связанности. Делается вывод о высокой эффективности предложенного формата для развития внутренней мотивации и метапредметных навыков в начальной школе.

*Ключевые слова:* теория самодетерминации, игровые технологии, геймификация, интерактивное обучение, модель D6, внеурочная деятельность, математика, начальная школа, Miro, Н.И. Лобачевский.

# IMPLEMENTATION OF SELF-DETERMINATION THEORY PRINCIPLES IN A GAMIFIED EDUCATIONAL ENVIRONMENT: THE CASE OF "A MATHEMATICAL JOURNEY WITH LOBACHEVSKY"

*Oraznepesova Aygul*

*Russia, Kazan*

*Kazan (Volga Region) Federal University, Institute of Mechanics and Mathematics named after N.I. Lobachevsky*

*Scientific supervisor: head of the Department, Professor Shakirova L.R.*

*Abstract.* The article presents the experience of designing and testing an extracurricular mathematics lesson for 3rd-grade students that utilizes game-based technologies and gamification elements, aimed at introducing the personality and scientific legacy of N.I. Lobachevsky. The theoretical foundation was a synthesis of the D6 gamification model and the Self-Determination Theory by E. Deci and R. Ryan. The event was implemented on the Miro interactive platform in the format of a team-based educational quest. The methodology is described in detail, including the team formation stage, the system of tasks (logical-mathematical and historical-biographical), and the reflection session. Examples of tasks are provided and their alignment with the students' basic psychological needs for autonomy, competence, and relatedness is analyzed. The conclusion is drawn about the high effectiveness of the proposed format for developing intrinsic motivation and meta-subject skills in primary school.

*Keywords*: Self-determination theory, game-based learning, gamification, interactive learning, D6 model, extracurricular activities, mathematics, primary school, Miro, N.I. Lobachevsky.

Современные вызовы образовательной системы требуют поиска новых педагогических инструментов, способных формировать у младших школьников устойчивую внутреннюю мотивацию к изучению математики. В контексте внеурочной деятельности особенно актуальными становятся форматы, сочетающие познавательную ценность, игровую вовлеченность и развитие компетенций. Геймификация, основанная на психолого-педагогических теориях, является одним из наиболее эффективных подходов к созданию такой образовательной среды.

Целью данного исследования выступает проектирование и апробация внеклассного занятия на тему «Тропой открытий: математическое путешествие с Лобачевским», разработанного с использованием игровых технологий и элементов геймификации, на основе синтеза моделей D6 и теории самодетерминации в развитии внутренней мотивации и познавательного интереса обучающихся к математике. Апробация занятия проводилась на базе МАОУ «Инженерный лицей КАИ» в г. Казани 8 ноября 2025 года. 80-минутный урок-квест познакомил третьеклассников с личностью и достижениями в науке Н.И. Лобачевского.

Методологическую базу исследования составил синтез двух концепций:

1. Теория самодетерминации (ТСД) Э. Деси и Р. Райна [1, с. 226-231], постулирующая, что для развития внутренней мотивации необходимо удовлетворение трех базовых психологических потребностей: автономии (чувство выбора и инициативы), компетентности (ощущение эффективности своих действий) и связанности (чувство общности с группой).
2. Модель геймификации D6 К. Вербаха и Д. Хантера [2, с. 26-28], предоставляющая практический инструментарий для проектирования вовлекающего опыта через динамику (нарратив, прогрессия), механику (челленджи, кооперация) и компоненты (баллы, значки).

В нашем исследовании модель D6 выступает инструментом реализации на практике принципов ТСД, обеспечивая переход от внешних стимулов к устойчивой внутренней мотивации. Соответствие элементов модели психологическим потребностям обучающихся отражено в таблице 1.

Таблица 1. Соответствие элементов геймификации (модель D6) базовым психологическим потребностям (ТСД)

| Базовая потребность (ТСД) | Элементы динамики и механики (D6) | Реализация на занятии |
|---|---|---|
| **Автономия** | Выбор, нелинейность прогрессии | Возможность выбора последовательности заданий и решения дополнительных задач |
| **Компетентность** | Очки, значки, визуализация прогресса, челленджи | Система награждения фрагментами «псевдосферы» и «медалями», продвижение по игровому полю |
| **Связанность** | Кооперация, командная работа, социальное взаимодействие | Формат командного квеста, совместное обсуждение решений |

*Методика проведения занятия на тему «Тропой открытий: математическое путешествие с Лобачевским»*

Класс: 3 класс.

Время: 2 урока по 40 минут (итого 80 минут).

Технологическая платформа: интерактивная онлайн-доска Miro [3].

Форма: командный образовательный квест.

Цель: создать условия для формирования познавательного интереса к математике и личности Н.И. Лобачевского через удовлетворение базовых психологических потребностей в процессе деятельности, основанной на игровых технологиях и элементах геймификации.

Задачи:

- образовательные: познакомить с ключевыми фактами биографии Н.И. Лобачевского; актуализировать и развить навыки решения логических и арифметических задач;

- развивающие: развивать умение анализировать задачи и выдвигать гипотезы. Формировать навыки распределения ролей и выработки общего решения в команде.

- воспитательные: воспитывать уважение к истории отечественной науки на примере конкретных открытий. Формировать ценность научного поиска и сотрудничества через совместное преодоление интеллектуальных челленджей.

Мероприятие реализовано в формате командного образовательного квеста на интерактивной онлайн-доске Miro [3]. Игровое поле представлено на рисунке 1.

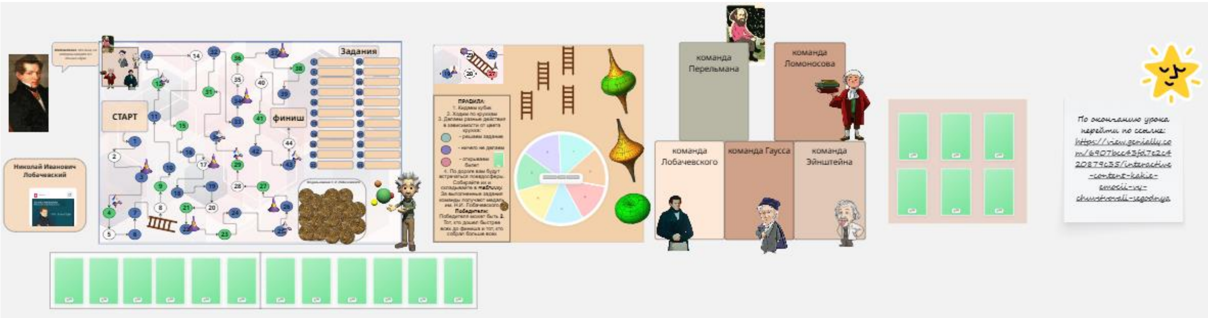



Рисунок 1. Игровое поле образовательного квеста «Тропой открытий: математическое путешествие с Лобачевским» на платформе Miro

Игровое поле включает основные элементы геймификации, спроектированные в соответствии с моделью D6:

- динамика: нелинейный маршрут движения команд создает нарратив путешествия;

- механики: разделение заданий на основные (синие кружки) и дополнительные (зеленые кружки), реализующие механики выбора и челленджа;

- компоненты: визуализированная «псевдосфера», собираемая по фрагментам, служащая наглядным индикатором прогресса в игре.

Согласно теории ТСД [1], данная визуальная организация среды напрямую способствует удовлетворению базовых потребностей: выбор заданий поддерживает автономию, четкая система сбора фрагментов усиливает чувство компетентности, а общее поле для всех команд визуально подчеркивает общую цель, связанность.

Ход занятия

1. *Организационный момент.*

*Мотивация*. Формирование команд (15 минут)

Вступительное слово учителя (5 мин):

«Здравствуйте, юные исследователи! Сегодня нам предстоит уникальное путешествие в мир математики вместе с великим российским ученым Николаем Ивановичем Лобачевским. Его смелые идеи перевернули представления о геометрии, и нам предстоит пройти по следам его жизни».

*Формирование команд (10 мин).*

Для обеспечения принципа связанности и элемента случайности, использован метод жеребьёвки. Учащиеся выбирали карточки, на обратной стороне которых было написано название команды («Лобачевский», «Перельман», «Эйнштейн», «Ломоносов», «Гаусс»). После формирования команд капитаны подходили к учителю и тянули бирку с номером, определяющим очерёдность хода. Это простое действие призвано включить детей в игровой процесс и создать справедливые условия старта.

*2. Инструктаж (10 минут).*

Детальное объяснение правил квеста на интерактивной доске Miro. Разъяснение системы награждения (компоненты D6: очки, значки): за решение основных заданий (синие кружки) команда продвигается по полю, получая фрагмент «псевдосферы»; за решение дополнительных исторических заданий (зелёные кружки) команда получает специальную «Медаль им. Н.И. Лобачевского». Особое внимание уделено ответам на вопросы для обеспечения полного понимания правил всеми участниками.

*3. Игровое путешествие (40 минут).*

Основная игровая фаза. Команды последовательно совершают ходы и выполняют задания на игровом поле Miro. Ограниченное время на обдумывание (2-3 минуты на задание) повышает ценность каждого решения и усиливает стратегический компонент деятельности.

Примеры заданий: задания в синих кружках (логико-математические задачи, развитие компетентности):

- «Нина живет к школе ближе, чем Вера, а Вера ближе, чем Зоя. Кто живет ближе к школе - Нина или Зоя?». Направлено на развитие логического мышления и удовлетворение потребности в компетентности через решение интеллектуального челленджа.

- «Как в комнате можно поставить 2 стула, чтобы у каждой из четырех стен стояло по одному стулу?» (Развитие пространственного воображения).

- «Восстанови пример: 5...6 ·...3...7 = 4...75...6 ·...3...7 = 4...7» (Развитие вычислительных навыков и дедукции).

Задания в зелёных кружках (историко-биографический контент) направлены на развитие автономии через выбор уровня сложности и знакомство с наследием учёного. Участники могут выбрать один из двух путей исследования:

- задание (уровень сложности: базовый): «В 2025 году исполняется 233 года со дня рождения Николая Ивановича Лобачевского. В каком году он родился?» Задание тренирует навык хронологического вычисления, интегрированного в исторический контекст.

- задание (уровень сложности: базовый): «С каким главным вузом Казани была неразрывно связана жизнь Н.И. Лобачевского: где он учился, преподавал и почти 20 лет был ректором?» Задание знакомит с наследием ученого через краеведческий аспект и требует установления исторической связи.

*4. Физминутка (5 минут).*

Краткая «Геометрическая зарядка» (повторить геометрические фигуры через движения тела) для смены деятельности и восстановления когнитивной концентрации.

*5. Подведение итогов и рефлексия. (10 минут)*

Данный этап был реализован в два последовательных модуля: количественное подведение итогов и качественная эмоционально-смысловая рефлексия.

На основании данных, зафиксированных платформой Miro, были определены команды-лидеры. Победители были объявлены в двух номинациях: «Самые быстрые» (команда, первой достигшая финиша) и «Самые эрудированные» внешнее подтверждение компетентности). В качестве формального признания достижений на интерактивную доску были выведены виртуальные сертификаты. Важно отметить, что качественное наблюдение во время апробации занятия выявило недостаточную эффективность данной формы поощрения: участники из команд-победителей невербально демонстрировали ожидание более материального символа успеха. Данное наблюдение свидетельствует о необходимости для младших школьников осязаемого подтверждения их компетентности, что является важным аспектом внешней регуляции в дополнение к сформированной внутренней мотивации.

С целью получения качественной обратной связи и развития метапредметного навыка осознания эмоционального состояния была проведена рефлексия с применением интерактивного конструктора Genially [4]. Данный формат обеспечивал автономию (личный выбор эмоции для обсуждения) и связанность (разделение опыта с группой). Методика была основана на визуализированной модели, где центральный вопрос «Какие эмоции вы чувствовали сегодня?» сопровождался персонажами-эмоциями, каждый из которых был снабжен направляющим вопросом для рефлексии. Рассмотрим примеры персонажей-эмоций.

Персонаж «Радость» (вопрос: «Что из того, что произошло сегодня на уроке, вызвало у тебя самую искреннюю улыбку?»). Цель: идентификация позитивных триггеров и ключевых мотивирующих факторов занятия.

Персонаж «Страх» (вопрос: «Чем ты помог себе или команде, когда чувствовал неуверенность или волнение?»). Цель: смещение фокуса с переживания негативной эмоции на анализ конструктивных копинг-стратегий, применяемых учащимися.

Персонаж «Эмоции» (вопрос: «Какие эмоции вы чувствовали сегодня? Все чувства важны – каждое помогает нам учиться и расти.»). Цель: обоснование нормальности всего спектра переживаний и формирование установки на принятие эмоций как части учебного процесса.

Проведенная сессия позволила выйти за рамки простой констатации факта вовлеченности («было интересно») и получить содержательные данные о внутренних процессах учащихся. Ответы детей показали, что положительные эмоции (радость) были связаны с моментами преодоления интеллектуальных челленджей и успешной кооперации. При этом анализ реакций, ассоциированных со «страхом», выявил наличие у учащихся начальных форм саморегуляции (например, вербальное обращение за помощью к команде, предложение совместно обсудить решение). Данный формат рефлексии, разработанный на основе теоретических положений Э. Деси и Р. Райана [1], доказал свою эффективность как инструмент, обеспечивающий удовлетворение потребности в автономии (личный выбор эмоции для обсуждения) и связанности (разделение опыта с группой), а также предоставил исследователю ценный материал для корректировки и совершенствования методики.

Проведенное исследование показало эффективность синтеза теории самодетерминации и модели геймификации D6 для проектирования образовательных мероприятий, реализованных на основе игровых технологий с элементами геймификации в школе. Разработанный и апробированный формат внеурочного занятия на платформе Miro показал полезность данного инструмента, способствующего не только решению конкретных образовательных задач, но и развитию внутренней мотивации, метапредметных навыков и социальных компетенций обучающихся.

Перспективой исследования является проведение серии подобных мероприятий с использованием стандартизированных инструментов для измерения динамики мотивации и апробация модели в других предметных областях.


Список литературы

1. Deci E. L., Ryan R. M. The “What” and “Why” of Goal Pursuits: Human Needs and the Self-Determination of Behavior // Psychological Inquiry. 2000. Vol. 11. No. 4. P. 227–268.
2. Werbach, K., & Hunter, D. For the Win: How Game Thinking Can Revolutionize Your Business. — Wharton Digital Press, 2012.
3. Интерактивная доска Miro [Электронный ресурс]. – URL: https://miro.com/app/board/uXjVJxHxYCM=/ (дата обращения: 02.11.2025).
4. Genially [Электронный ресурс] : интерактивный конструктор. – URL: https://view.genially.com/6907bcc43fd7e2c420879c35/interactive-content-kakie-emocii-vy-chuvstvovali-segodnya (дата обращения: 02.11.2025)


## СЦЕНАРИЙ УРОКА: «ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО. ПО ТУ СТОРОНУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ»


*Ракитина А. В.*

*Россия, г. Оренбург*

*ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный педагогический университет, физико-математический факультет*

*Научный руководитель: к. ф.-м. н, доцент Прояева И. В.*



*Аннотация.* Урок «Геометрия Лобачевского. По ту сторону параллельных прямых» представляет собой разработанное занятие для обучающихся 10 профильного класса в рамках школьной программы по геометрии, обогащенное глубоким историческим экскурсом. Методическая ценность данной разработки заключается в сочетании тактичного моделирования неевклидовой геометрии с исследовательской деятельностью обучающихся, что способствует развитию критического мышления. Урок соответствует требованиям ФГОС, обеспечивая не только предметные, но и метапредметные результаты. Эта разработка служит готовым инструментом для формирования представления о математике как живой, развивающейся науке.

*Ключевые слова:* геометрия Лобачевского, неевклидова геометрия, проблемное обучение.

## LESSON SCENARIO: "LOBACHEVSKY'S GEOMETRY. ON THE OTHER SIDE OF PARALLEL LINES"

*Rakitina A. V.*

*Russia, Orenburg*

*Orenburg State Pedagogical University, Faculty of Physics and Mathematics*

*Scientific supervisor: Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor Proyaeva I. V.*

*Abstract.* Lesson "Lobachevsky geometry. Beyond parallel Lines" is a developed lesson for students of the 10th specialized grade in the framework of the school geometry curriculum, enriched with a deep historical excursion. The methodological value of this development lies in the combination of tactful modeling of non-Euclidean geometry with the research activities of students, which contributes to the development of critical thinking. The lesson meets the requirements of the Federal State Educational Standard, providing not only subject, but also meta-subject results. This development serves as a ready-made tool for forming an idea of mathematics as a living, developing science.

*Keywords*: Lobachevsky geometry, non-Euclidean geometry, problem-based learning.

Программа дисциплины «Геометрия» в 10-11 классах средней школы предполагает знакомство с разделом «Геометрия Лобачевского на плоскости». Сложность изучения темы заключается в том, что обучающиеся на протяжении всего курса занимались изучением только евклидовой геометрии. Поэтому при изучении геометрии Лобачевского возникают трудности при освоении материала [4; с. 62].

Объектом исследования является процесс преподавания геометрии в 10 классе, а предметом – методика организации учебной деятельности при изучении геометрии Лобачевского посредством интеграции исторического материала и практического моделирования. В настоящее время современное состояние включает в себя теоретические работы по истории геометрии и отдельные методологические разработки. Предлагаемый подход включает целостную систему изучения темы, сочетающую историко-биографический, теоретический и практический компоненты, систему тактильного моделирования с использованием доступных материалов, метод постепенного развития понятий через когнитивный конфликт и интеграцию специализированной физкультминутки. Результаты исследования могут быть использованы в школьном образовании при проведении уроков геометрии и элективных курсов, в методической работе при создании учебно-методических комплексов, в педагогическом образовании при подготовке учащихся, а также в системе дополнительного образования при организации математических кружков и тематических мероприятий.

Сценарий урока геометрии в десятом классе

Тема урока: Геометрия Лобачевского. По ту сторону параллельных прямых.

Тип урока: урок открытия нового знания.

Цель урока: создать условия для формирования представления о неевклидовой геометрии как о научной революции и осознания роли личности Н. И. Лобачевского.

Задачи урока:

1. Образовательные: познакомиться с биографией Н. И. Лобачевского, сформулировать представления о проблеме V постулата Евклида, объяснить суть геометрической системы Лобачевского и ее ключевые отличия от геометрии Евклида;

2. Развивающие: развивать критическое и пространственное мышление, умение анализировать проблемную ситуацию и выдвигать гипотезы;

3. Воспитательные: формировать научное мировоззрение, воспитывать уважение к научному подвигу.

Планируемые результаты:

1. Предметные: обучающиеся знают основные факты биографии Лобачевского, формулируют суть проблемы V постулата и называют ключевые отличия геометрии Лобачевского;

2. Метапредметные:

- познавательные: умеют сравнивать, анализировать, выдвигать гипотезы;

- коммуникативные: умеют работать в группе, слушать собеседника, участвовать в учебном диалоге;

3. Личностные: формируется интерес к истории науки.

Технологии, методы и приемы: технология проблемного обучения, технология сотрудничества (групповая работа), частично-поисковый метод, создание проблемной ситуации, прием «Знаю – Хочу узнать – Узнал».

Оборудование: компьютер, проектор, интерактивная доска, раздаточный материал, лист бумаги, модель седла.

Сценарий урока.

**I. Мотивационно-целевой этап.**

1. Организационный момент.

Учитель приветствует обучающихся. Настраивает на урок.

2. Актуализация опорных знаний.

Учитель изображает на доске прямую *c* и не принадлежащую ей точку *C*. Обращается к классу с вопросом: «Через точку *C*, не лежащей на прямой *c,* сколько можно провести прямых, параллельных *c*?»

Обучающиеся: «Одну».

Учитель: «Верно. На основе чего мы можем это утверждать?»

Обучающиеся: «На основе аксиомы параллельных прямых, которая гласит, что через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной».

3. Создание проблемной ситуации.

Учитель: «Хорошо. А теперь представьте, что я утверждаю то, что через эту точку *C* можно провести не одну прямую, параллельную данной, а две и более. Как вы думаете, такое возможно?»

Обучающиеся: «Нет, это противоречит аксиоме параллельных прямых».

Учитель: «Именно так отреагировало научное сообщество XIX века на смелого ученого, который доказал, что это возможно. Этим ученым был наш земляк, ректор Казанского университета – Николай Иванович Лобачевский. Открытие было на столько невероятным, что современники называли его сумасшедшим, а работу нелепой».

4. Формулирование цели урока.

Учитель: «Как вы думаете, какая цель стоит перед нами на уроке?»

Обучающиеся: «Понять, в чем заключалась идея Лобачевского и почему ее отвергало научное сообщество».

Учитель: «Молодцы. Предлагаю вам заполнить первые две колонки таблицы на рабочем листе (Раздаточный материал №2): «Знаю» и «Хочу узнать»».

**II. Процессуально-познавательный этап.**

1. Исторический экскурс: «Путь ученого».

Учитель делит класс на три группы. Каждая группа получает раздаточный материал №1 (биографический текст). Учитель формулирует задание: «Изучите предложенный текст и заполните в своем рабочем листе одну из строк таблицы: «Вехи жизни Лобачевского». Группа 1 заполняет строку «Ученый-студент», где необходимо отразить годы учебы и первые успехи Николая Ивановича. Группа 2 заполняет строку «Ученый-ректор», где важно отметить вклад в развитие Казанского университета. Группа 3 заполняет последнюю строку «Ученый-первооткрыватель», где указывается история создания новой геометрии, ее признание. Через 5 минут представитель от каждой группы должен кратко изложить результаты работы группы».

По истечению времени каждый из представителей кратко докладывает о результатах работы группы. Учитель дополняет эту информацию при помощи презентации.

2. Суть проблемы V постулата Евклида.

Учитель: «А теперь давайте представим, что мы с вами ученые-математики XIX века. Перед нами лежит книга «Начала» Евклида – фундамент всей геометрии. Евклид начал с очень простых утверждений, истинность которых достаточно очевидна: через две точки можно провести прямую, все прямые углы равны и так далее. Однако пятый постулат всегда вызывал вопросы. Прочитайте его формулировку на слайде».

Обучающиеся: «Существуют прямая $c$ и точка $C$, не лежащая на ней, такие, что через точку $C$ проходит не менее двух прямых, не пересекающих прямую $c$» [2; с. 35].

Учитель: «Давайте посмотри на доску (изображает на доске две прямые и секущую). Если сумма односторонних углов меньше $180^\circ$, то что из этого следует?»

Обучающиеся: «Они пересекутся».

Учитель: «А если равна?»

Обучающиеся: «То они параллельны».

Учитель: «Этот постулат не является таким очевидным, формулировка достаточно сложна, да и в целом он похож больше на теорему. Лучшие математики около 2000 лет пытались доказать этот постулат методом от противного, заменить его более простой формулировкой, вывести из других аксиом, но ничего не получалось. Лобачевский решил пойти другим путем. Он решил провести мысленный эксперимент: а что, если пятый постулат неверен? Усомниться в том, что считалось истинной 2000 лет было невероятно смелым поступком».

3. Физкультминутка.

Учитель: «Давайте все встанем. Представим, что мы с вами глобусы. Голова – северный полюс, а ноги – южный. Покажите руками линии, которые бы шли от полюса к полюсу и были параллельны». Обучающиеся пытаются выполнить задание, однако приходят к выводу, что все меридианы сходятся у полюсов.

Учитель: «А теперь представьте, что ваш сосед идет по экватору, а вы по прямой, параллельной ему. Сможете ли вы встретиться? Попробуйте продемонстрировать!» Обучающиеся приходят к выводу, что нет.

Учитель: «Тогда какой вывод?»

Обучающиеся: «На разных поверхностях прямые ведут себя по-разному».

Учитель: «Верно. Этим как раз и занимался Лобачевский: изучал геометрию на другой, неевклидовой поверхности».

4. Идея Лобачевского.

Учитель: «Лобачевский начал строить новую геометрическую систему на допущении, что пятый постулат неверен, и оказалось, что никаких противоречий не возникает, сумма углов треугольника всегда меньше $180^\circ$, а параллельные прямые ведут себя совершенно иначе» [3].

Учитель демонстрирует модель «седла» (гиперболический параболоид). На нем показывает, что действительно через точку *C* можно провести прямые, не имеющие с прямой *c* общие точки, то есть не пересекаются.

Далее учитель предлагает обучающимся взять гибкие листы бумаги и попробовать на них построить треугольник, а затем измерить градусную меру углов [1, с. 3].

Учитель: «Итак, чему же равна сумма углов треугольника?»

Обучающиеся: «Меньше $180^\circ$».

Учитель: «Лобачевский понимал, что его геометрия не работает на плоскости, но он верил, что описывает законы иного пространства. Эта геометрия через 100 лет стала основой для описания искривленного пространства-времени Эйнштейна. Вот в чем была гениальность Николая Ивановича – он смог увидеть то, что его современники не могли представить».

**III. Рефлексивно-оценочный этап.**

1. Подведение итогов.

Учитель: «Что вы сегодня узнали для себя нового?»

Обучающиеся: «Узнали больше о Лобачевском, его вкладе в науку».

Учитель: «Почему же теорию Лобачевского приняли не сразу?»

Обучающиеся: «Она была слишком необычной, противоречила идеям Евклида, практического применения».

Учитель: «Как вы думаете, мы смогли достичь цели урока?»

Обучающиеся: «Да».

2. Рефлексия учебной деятельности.

Учитель предлагает обучающимся вернуться к таблице и заполнить колонку «Узнал». Обучающиеся ее заполняют.

3. Информирование о домашнем задании и выставление оценок.

Учитель: «Дома необходимо будет заполнить сравнительную таблицу. А также я предлагаю вам задание по желанию подготовить небольшой доклад о применении геометрии Лобачевского в различных науках и технике с конкретными примерами». Выставление оценок за активную работу на уроке.

Раздаточный материал №1.

## Биографический текст «Николай Иванович Лобачевский»

Николай Иванович Лобачевский родился в 1792 году в Нижнем Новгороде. В 1807 году он поступил в только что открывшийся Казанский университет. С самого начала учёбы он проявлял выдающиеся способности в математике и физике. Его учителем был известный немецкий математик Мартин Бартельс, который был знаком с Карлом Гауссом. Уже в 1811 году Лобачевский получил степень магистра и остался в университете для подготовки к профессорской должности. В 1814 году он начал читать лекции по математике, поражая студентов глубиной и ясностью изложения.

С 1827 года Лобачевский стал ректором Казанского университета и занимал эту должность 19 лет! Это была эпоха его расцвета как организатора науки. Под его руководством были построены новый комплекс университетских зданий, обсерватория, библиотека и научный журнал. Он лично следил за качеством образования, занимался экономическими вопросами и даже возглавил борьбу с эпидемией холеры в 1830 году. Благодаря Лобачевскому Казанский университет стал одним из ведущих научных центров России.

Лобачевский сделал главное открытие в своей жизни — открыл новую, «воображаемую» геометрию — в 1826 году. Он представил доклад «Краткое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных». Однако научное сообщество не приняло его идеи. Работы Лобачевского подвергались критике и насмешкам. Единственным, кто, вероятно, его понимал, был Карл Гаусс, но он не поддерживал своего русского коллегу публично. Лобачевский получил признание только после смерти. Сегодня его геометрия лежит в основе современной физики и космологии.

Раздаточный материал №2.

## Рабочий лист ученика

ФИО: ______________________________

**Таблица «Знаю – Хочу узнать – Узнал(а)» (З-Х-У)**

| Знаю | Хочу узнать | Узнал(а) |
|---|---|---|
| | | |

**Таблица «Вехи жизни Н.И. Лобачевского» (заполняется по ходу выступлений групп)**

| Роль | Основные достижения и факты |
|---|---|
| Учёный-студент | |
| Учёный-ректор | |
| Учёный-первооткрыватель | |

Раздаточный материал №3.

**Опорный конспект «Сравнительная таблица геометрий»**

| Характеристика | Геометрия Евклида | Геометрия Лобачевского |
|---|---|---|
| Через точку вне прямой можно провести… | | |
| Сумма углов треугольника | | |
| Формула площади треугольника | | |
| Отношение длины окружности к радиусу | | |
| Модель (поверхность) | | |

Список литературы

1. Акимова И. Я., Ахметова Ф. Х. Заметки о геометрии Лобачевского // Концепт. 2016. №6. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/zametki-o-geometrii-lobachevskogo (дата обращения: 08.11.2025).

2. Атанасян, Л. С. Геометрия Лобачевского : учебное пособие / Л. С. Атанасян. - 4-е изд. - Москва : Лаборатория знаний, 2021. - 467 с. - ISBN 978-5-93208-508-0. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.ru/catalog/product/1986570 (дата обращения: 08.11.2025). – Режим доступа: по подписке.

3. Бугров В.А., Облецов А.А., Миллер Н.В. Геометрия Лобачевского. В сборнике: Дни науки - 2024. 2024. С. 203-207.

4. Колобов А. Н., Прояева И. В. Элементы геометрии Лобачевского в школьном курсе геометрии // МНКО. 2023. №3 (100). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/elementy-geometrii-lobachevskogo-v-shkolnom-kurse-geometrii (дата обращения: 08.11.2025).

# ИЗУЧЕНИЕ ПОНЯТИЯ «СЛОЖЕНИЕ СМЕШАННЫХ ДРОБЕЙ С ОДИНАКОВЫМИ ЗНАМЕНАТЕЛЯМИ» НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ПОЭТАПНОГО ФОРМИРОВАНИЯ УМСТВЕННЫХ ДЕЙСТВИЙ П. Я. ГАЛЬПЕРИНА

*Пензина Д.Ф.*

*Россия, г. Казань*

*Казанский (Приволжский) Федеральный Университет, Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского*

*Научный руководитель: к.пед.н., доцент Фалилеева М.В.*

*Аннотация.* В статье представлена методическая разработка фрагмента урока математики в 5 классе, созданная на основе теории поэтапного формирования умственных действий П. Я. Гальперина.

*Ключевые слова:* теория П. Я. Гальперина, поэтапное формирование умственных действий, ориентировочная основа действий, обучение математике в 5 классе.

**TEACHING THE CONCEPT OF "ADDING MIXED NUMBERS WITH LIKE DENOMINATORS" BASED ON P. Y. GALPERIN'S THEORY OF THE STEP-BY-STEP FORMATION OF MENTAL ACTIONS**

*Penzina D.F.*

*Russia, Kazan*

*Kazan (Volga Region) Federal University,*

*N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics*

*Scientific supervisor: candidate of pedagogic Sciences, associate Professor*

*Falileeva M.V.*

*Abstract.* The article presents a methodological framework for a mathematics lesson fragment for 5th grade, developed based on P. Y. Galperin's theory of the stage-by-stage formation of mental actions.

*Keywords*: P. Y. Galperin's theory, step-by-step formation of mental actions, orienting basis of actions (OBA), mathematics education, grade 5.

Содержание курса математики в 5 классе предполагает более объемную образовательную программу. Математические действия становятся сложнее, учебный материал значительно расширяется, вводятся новые понятия и определения, которые становится не так просто освоить [10]. В связи с чем организация процесса преемственности требует активизации методической работы как основополагающего принципа построения образовательного процесса, обеспечивающего его непрерывность и эффективность [11].

На данном этапе в современном образовании обозначилась проблема реализации преемственности между начальной школой и средним звеном обучения [6]. В частности, она связана с преемственностью методов и подходов в обучении, так как наблюдается тенденция нарушения последовательности в подходе к формированию умственных действий [11].

Например, если в начальной школе предлагают решение уравнения, вытекающее из связи сложения и вычитания, то в среднем звене мы решаем их методом «переноса с противоположным знаком». Чаще всего, при таком подходе, правило «переноса» дается формально, и оно не объясняется через свойства равенства.

То есть, в условиях перехода в среднее звено многие педагоги не уделяют должного внимания поэтапному формированию умственных действий. Как следствие, такое обучение приводит к механическому запоминанию правил без их глубокого осмысления, что может являться причиной учебных затруднений [3].

Кроме того, в условиях современного мира, когда информационные технологии стремительно развиваются, ребенок начинает взаимодействовать с гаджетами в очень раннем возрасте, и это действие «замещает» вербальное общение, что приводит к проблемам с качественной речью [9]. В то время, как умственные действия формируются качественно лишь в том случае, если это происходит как на уровне внешнего проговаривания, так и на уровне внутреннего [2].

Иными словами, для получения положительного результата обучения важно проводить занятия поэтапно, уделяя должное внимание устному и внутреннему проговариванию правил, формул, алгоритмов и т. д.

Одним из ключевых решений в контексте вышеизложенного является теория поэтапного формирования умственных действий и понятий П. Я. Гальперина.

Разработанная советским психологом теория поэтапного формирования умственного действия исключает заучивание без понимания из процесса обучения, предлагая системный подход к переходу от материального действия к абстрактному мышлению [2].

Согласно этой теории, умственное предметное действие выделяется как единица деятельности учения, и условие формирования такого действия – ориентировочная основа действия. ООД – это описание выполнения действия, модель действия, которая может быть представлена в текстовом или графическом виде, а также система условий правильного выполнения действия [4].

Освоение умственного действия происходит в несколько этапов: формирование мотивационной основы действия; составление схемы ориентировочной основы действия; формирование действий в материализованном плане; громкая внешняя речь, когда содержание ООД отражается в речи; формирование действия во внешней речи «про себя»; формирование действия во внутренней речи [2].

Более подробно реализацию теории П. Я. Гальперина мы покажем в ходе реализации урока.

Ниже представлен фрагмент урока открытия нового знания для 5 класса по теме «Сложение смешанных дробей», разработанный в соответствии с этапами формирования умственных действий по теории П. Я. Гальперина.

**Цель обучения:** формирование предметного умения складывать смешанные дроби с одинаковыми знаменателями.

**Предметные результаты:**

*Знать* компоненты смешанного числа (целая и дробная часть), понятия правильной и неправильной дроби; п*онимать* принцип сложения смешанных дробей как отдельного сложения целых и дробных частей; у*меть* применять пошаговый алгоритм для сложения смешанных дробей с одинаковыми знаменателями, включая преобразование неправильной дроби в дробной части результата в смешанное число и добавление его целой части к существующей.

**Методы обучения:** традиционные (беседа и вопросы), активные (использование наглядных моделей и графических схем, метод анализа конкретных ситуаций).

**Средства обучения:** дидактические материалы (рабочий лист (инструкция)), материальные объекты (модели кубиков), технические средства (интерактивная и демонстрационная доска).

**Этап № 1. Этап мотивации и актуализации знаний (5 мин).**

На данном этапе происходит предварительное знакомство учащихся с целью обучения. Использование проблемной ситуации создает познавательную мотивацию.

*На предыдущем уроке учащимся было предложено дома склеить из плотной бумаги кубики.*

*Учитель:* «Давайте посмотрим, у нас имеется 2 коробки с кубиками. Один набор состоит из 9 кубиков. Но в первой коробке 3 целых набора и еще 6 кубиков из 9. А во второй коробке один целый набор и еще 4 кубика из 9. Как мы можем сосчитать, сколько всего у нас целых наборов?»

*Деятельность учителя:* вызывает к доске двоих учащихся для наглядной работы с кубиками. Записывает пример $3\frac{6}{9}+1\frac{4}{9} = ?$

*Деятельность учеников:* учащиеся записывают пример в тетради и наблюдают за тем, как двое выбранных учеников перекладывают кубики.

*Учитель:* «Верно, у нас получается 4 целых набора и 10 кубиков из 9. Но что нам не нравится в дроби $\frac{10}{9}$»?

*Деятельность учеников:* выявляют неправильную дробь.

*Деятельность учителя:* записывает на доске $4\frac{10}{9}$ и предлагает научиться корректному сложению смешанных дробей. Раздает рабочие листы – инструкции, которые будут заполняться по ходу урока.

***Комментарии к этапу.*** Данный этап связан с формированием у учащегося мотивации на выполнение действия. Согласно теории П. Я. Гальперина, можно выделить два типа мотивации: внешнюю и внутреннюю [2].

Более эффективной считается внутренняя мотивация обучающегося, базирующаяся на познавательном интересе и не насыщаемой познавательной потребности. Такая мотивация может успешно пробуждаться, например, в проблемном обучении, когда ученик, сталкиваясь с проблемой, видит противоречие, испытывает затруднение, удивление, восхищение, желание разобраться.

Внешняя мотивация, положительная или отрицательная (например, материальное вознаграждение или угроза наказания), сохраняется не столь длительно, как внутренняя, и требует постоянного поддержания извне [2].

**Этап № 2. Этап открытия нового знания (12 мин).**

На данном этапе планируется составление схемы ориентировочной основы действия в соответствии с выделенным П. Я. Гальпериным третьим типом обучения, согласно которому обучают не самому действию, а способу анализа.

*Деятельность учителя*: заполняет вместе с учащимися рабочий лист на интерактивной доске, задает наводящие вопросы, конкретно выбирая, кто будет отвечать.

*Деятельность учащихся*: заполняют рабочие листы, рассуждают вслух и отвечают на вопросы.

*Учитель*: «Начнем с анализа. Какие числа мы складываем? Впишите число 1 и число 2 в соответствующие окна. Из чего состоит первое число? (Из целой 3 и дробной 6/9). А из чего состоит второе число? (Из целой части 1 и дробной 4/9). Какие арифметические действия мы умеем выполнять с целой частью? А с дробями? (Сложение и вычитание). Перейдем к выполнению вычисления. Отдельно сложим целые части и отдельно дробные. Какой результат получится при сложении целых частей? (3+ 1= 4). Какой результат получится при сложении дробных частей? ($\frac{6}{9}+\frac{4}{9}=\frac{10}{9}$). Соответствует ли запись $4+\frac{10}{9}$ стандартному виду числа? Почему? (Дробная часть содержит неправильную дробь, она сама содержит целую часть). Проанализируем дробную часть. Что из себя представляет дробь $\frac{10}{9}$? (Это неправильная дробь). Какие действия мы умеем выполнять с неправильными дробями? (Выделять из нее целую и дробную части). Выделите целую и дробную части из данной неправильной дроби. ($\frac{10}{9}=1+\frac{1}{9}$). Запишем ответ. ($4+\frac{10}{9} = 4+1+\frac{1}{9} = 5\frac{1}{9}$)»

***Комментарии к этапу.*** ООД может быть составлена и преподнесена учащемуся по-разному, в зависимости от этого наблюдается больший или меньший развивающий эффект обучения.

Построение полной системы ориентиров не только сводит к минимуму количество ошибок, но и обеспечивает возможность самостоятельного контроля учеником правильности выполнения умственного действия на каждом этапе его формирования [3].

**Этап № 3. Этап формирования действия в материальной форме (6 мин).**

В ходе этого этапа действие выполняется как внешнее, практическое, с преобразованием реальных предметов (моделей, схем, чертежей).

*Деятельность учителя*: записывает на доске новый пример: $3\frac{3}{4}+2\frac{3}{4}$

*Учитель*: «Попробуйте нарисовать в тетрадях 3 целых набора кубиков и 3 кубика из 4, а для второго числа 2 целых набора и 3 кубика из 4. Перерисуйте картинку так, чтобы решить пример».

*Учащиеся:* рисуют в тетрадях, пользуясь схемой.

***Комментарии к этапу.*** Согласно теории П. Я. Гальперина новому действию ребенок не может научиться путем одного наблюдения, «чисто теоретически»; новое действие он осваивает сначала в форме действия с внешними вещами — учится считать, складывать, вычитать на предметах. Таким образом, действие, которое впоследствии должно стать умственным действием ребенка, первоначально образуется не как таковое, а как внешнее и материальное действие [3].

**Этап № 4. Этап проговаривания во внешней речи (7 мин).**

Когда достигается действие предыдущего этапа, ориентировочные карточки убираются. На четвертом этапе происходит формирование действия в громкой речи. Ученик, лишенный материальных опор действия, анализирует материал в плане громкой социализированной речи.

*Деятельность учителя*: требует на основе рабочего листа и проделанной работы сформулировать алгоритм по памяти.

*Деятельность учащихся*: формулируют алгоритм и проговаривают его хором.

*Деятельность учителя*: записывает на доске еще один пример, аналогичный предыдущим, и вызывает к доске учащегося. Контролирует записи в тетрадях.

*Деятельность учащихся*: у доски ученик комментирует каждое свое действие исходя из полученного алгоритма, остальная часть класса работают самостоятельно в тетрадях.

***Комментарии к этапу.*** Когда действие с предметами достаточно освоено, его переносят в план слышимой речи: ребенка учат считать вслух без опоры на предметы. Этим достигается прежде всего освобождение действия от необходимости всегда манипулировать внешними вещами, но главное здесь — это полный переход на действия с понятиями.

Исследования В. В. Давыдова обнаружили, что пока действие остается в плане материальных вещей, относящиеся к нему слова (в нашем случае — числительные) выполняют у ребенка главным образом роль указаний на предметы [6].

**Этап № 5. Этап самостоятельной работы (5 мин).**

На данном этапе планируется формирование действия во внешней речи «про себя». Используя усвоенную речевую схему, ученик выполняет действие без его озвучивания.

*Деятельность учителя*: записывает на доске пример: $2\frac{7}{8} + 5\frac{6}{8} = ?$, снова вызывает к доске одного учащегося.

*Учитель:* «Используя схему, решите пример в тетрадях. У доски ученик работает «про себя», но должен быть готов отвечать на мои вопросы.»

*Деятельность учащихся*: выполняют упражнение, работая самостоятельно.

*Примеры вопросов: Вы определили целую и дробные части чисел? Назовите их. Какое действие вы выполнили на этом этапе? Что нужно сделать потом? Что вам показал анализ дробной части? Что с ней нужно сделать?*

***Комментарии к этапу.*** Данный этап связан с беззвучной устной речью (речь про себя). Он отличается от предыдущего большей скоростью и рациональностью действий. Правильность каждой операции и конечного результата контролируется учителем.

На этом и последующем этапах действия учащегося меньше поддаются контролю и управлению. Но если заложен надежный фундамент правильного выполнения умственного действия на предыдущих этапах, то вероятность успеха велика [8].

**Этап №6. Формирование действия во внутренней речи (5 мин).**

Данный этап – этап умственного, или внутреннего действия. На этом этапе действие максимально сокращается, автоматизируется. Можно говорить о самостоятельном и освоенном действии. Контролю учителя подвергается лишь конечный результат [5].

На данном этапе учащиеся, решая задачу, дают только конечный ответ.

Список литературы

1. Лобачевский и университет / сост. Л.Р. Шакирова. Изд-е 2-е, переработанное. - Казань: Казан. ун-т, 2018.
2. Введение в психологию: учебное пособие / П. Я. Гальперин. — Москва: Университет: Книжный дом, 2000. — С. 149–181.
3. Психология: предмет и метод. Избранные психологические труды / П. Я. Гальперин – М.:Изд-во Моск. ун-та, 2023.
4. Психологическая система П. Я. Гальперина: актуальное состояние и перспективы развития / А. И. Подольский. Психологические исследования. 2025. Т. 18, № 100. С. 10.
5. Формирование ориентировочной основы действий при решении алгебраических задач посредством тригонометрических подстановок / Ш. З. Вениаминовна. Modern European Researches. – 2022. – № 3 (Т.1). – С. 232–238.
6. «Вечная» педагогическая проблема на пути к решению / С.А. Котова журнал «Народное образование» №4, 2012 г.
7. Шабельников В.К. Основные идеи П.Я. Гальперина о логике и механизмах формирования психических процессов. // Национальный психологический журнал. – 2017. – № 3(27). – С.56-61

8. Специальная психология / О.Н. Усанова – М. ООО «Издательство АСТ», 2024
9. Белоусова М.В., Швец Е.В. Влияние информационных устройств и факторов социального окружения на развитие речи детей раннего возраста // Вестник современной клинической медицины. – 2019. – №3. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/vliyanie-informatsionnyh-ustroystv-i-faktorov-sotsialnogo-okruzheniya-na-razvitie-rechi-detey-rannego-vozrasta (дата обращения: 21.11.2025).
10. Саблина, И. В. Психолого-педагогические особенности перехода детей из начальных классов в среднее звено школы / И. В. Саблина // Концепт. – 2013. – № 02 (февраль). – ART 13039. – URL: http://e-koncept.ru/2013/13039.htm.
11. Бывшева М. В. Теоретические аспекты преемственности в системе образования // Психология и педагогика: методика и проблемы практического применения. 2011. №22. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/teoreticheskie-aspekty-preemstvennosti-v-sisteme-obrazovaniya (дата обращения: 23.11.2025)

## ФОРМИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ В СФЕРЕ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА КАК КОМПОНЕНТА ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ СТАРШЕКЛАССНИКОВ

*Веселова У.Г.*

*Российская Федерация, г. Казань*

*Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики имени Николая Ивановича Лобачевского.*

*Научный руководитель: профессор, заведующий кафедрой, д.п.н., КФУ, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Шакирова Л.Р.*

*Аннотация.* В работе рассматривается проблема недостаточной осведомленности старшеклассников о профессиях, связанных с искусственным интеллектом (ИИ), и отсутствия у них целенаправленной математической подготовки для работы в этой сфере. Предложено решение в виде разработанного профориентационного курса «Математика для ИИ:

первый шаг». Цель работы — сформировать математическую грамотность в области ИИ и повысить уровень осознанного профессионального самоопределения учащихся 10-11 классов. В работе представлены структура курса, различные существующие диагностические инструменты для оценки предрасположенности учащихся и методические материалы для его реализации в школе.

*Ключевые слова:* математическая грамотность, искусственный интеллект, профориентация, предпрофессиональная подготовка, математические компетенции, элективный курс.

## DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL LITERACY IN THE FIELD OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE AS A COMPONENT OF PRE-PROFESSIONAL TRAINING OF HIGH SCHOOL STUDENTS

*Veselova U.G.*

*Russian Federation, Kazan*

*Kazan Federal University, Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics*

*Scientific supervisor: Professor, Head of Department, Doctor of Sciences, KFU / N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Shakirova L.R.*

*Abstract.* This paper examines the problem of high school students' insufficient awareness of professions related to artificial intelligence (AI) and their lack of targeted mathematical training for work in this field. A solution is proposed in the form of a career guidance course, "Mathematical Foundations of Artificial Intelligence." The goal of the course is to develop mathematical literacy in the field of AI and improve the level of conscious professional self-determination among 10th- and 11th-grade students. The paper presents the course structure, diagnostic tools for assessing student predisposition, and teaching materials for its implementation in schools.

*Keywords*: mathematical literacy, artificial intelligence, career guidance, pre-professional training, mathematical competencies, elective course

Современные тенденции цифровизации и автоматизации экономики обуславливают растущий спрос на специалистов в области Data Science, машинного обучения и анализа данных. Фундаментом для этих профессий является математика, однако существует значительный разрыв между содержанием школьной программы и практическими навыками, востребованными в IT-сфере. Это приводит к падению мотивации учащихся и их недостаточной осведомленности о перспективных профессиях, связанных с математикой.

Актуальность исследования подтверждается нормативно-стратегическими документами (Национальная стратегия развития ИИ до 2030 года [2]), социально-экономическим запросом на кадры в сфере ИИ и научно-педагогической потребностью в модернизации содержания математического образования и методов профориентации.

Целью работы является разработка, методическое обоснование и апробация модели профориентационного курса «Математика для ИИ: первый шаг» для учащихся 10–11 классов. Курс нацелен на освоение учащимися фундаментальных математических знаний, лежащих в основе машинного обучения, и формирование первичных умений применять их в дальнейшем для решения элементарных задач искусственного интеллекта.

Теоретической основой исследования является анализ современного рынка труда, который показал устойчивый спрос на таких специалистов, как Data Scientist, инженеры по машинному обучению и специалисты по компьютерному зрению [1]. По результатам исследования, наблюдается дефицит кадров, из-за проблем в базовой подготовке выпускников школ. Данный дефицит препятствует успешному освоению программ высшего образования и, как следствие, подготовке специалистов необходимой квалификации. Изучение функционала данных профессий позволило предположить, что базовым требованием к таким специалистам является фундаментальное образование в области линейной алгебры, математического анализа, теории вероятностей и статистики. Однако традиционная школьная программа, как правило, не акцентирует внимание на прикладном значении этих разделов для создания интеллектуальных систем. В рамках данного обучения этот пробел устраняется за счет демонстрации прямых связей между абстрактными понятиями и их реализацией в алгоритмах искусственного интеллекта (далее — ИИ). В таблице 1 представлены результаты данного анализа.

Таблица 1 – Математические понятия и их реализация в алгоритмах ИИ

| Тема | Школьное понятие | Приложения в ИИ |
|---|---|---|
| Линейная алгебра | Векторы и матрицы представлены как абстрактные объекты для решения систем линейных уравнений. | Любое изображение в компьютере — это матрица чисел (пикселей). Векторное представление слов — основа современных языковых моделей. Слова кодируются в виде векторов в многомерном пространстве, где смысл и семантическая близость определяются через геометрические операции. |
| Математический анализ | Производная как скорость изменения функции | Процесс обучения нейронной сети — это поиск минимума функции ошибки |
| Теория вероятностей и статистика | Вероятность как отношение благоприятных исходов к общему числу исходов | Простейший спам-фильтр — это вероятностная модель (наивный байесовский классификатор). Он |

| | | |
|---|---|---|
| | | вычисляет вероятность того, что письмо является спамом, при условии наличия в нем определенных слов |

Данные примеры наглядно показывают, что без понимания и применения данных математических понятий овладение профессией в области ИИ будет затруднительным. Предлагаемый курс должен заложить основу для дальнейшего обучения: освоив базовые принципы, учащиеся смогут увереннее изучать более сложные архитектуры нейронных сетей и алгоритмы.

Параллельно проведен анализ психолого-педагогических аспектов профориентационной работы со старшеклассниками, который показал, что классические модели нуждаются в адаптации к условиям цифровой экономики, где успешная профориентация должна быть интерактивной, практико-ориентированной и строиться на раннем погружении в суть профессий будущего [3]. В курс «Математика для ИИ: первый шаг» будет также включен профориентационный блок в видоизмененном формате (находится в разработке).

Методологический замысел элективного курса реализован в системе четырёх последовательных учебных модулей, каждый из которых раскрывает связь конкретного раздела математики с алгоритмами ИИ через единую структуру. В таблице 2 представлен предварительный план курса.

Таблица 2 – Структура модулей курса: «Математика для ИИ: первый шаг»

| Номер модуля | Название модуля | Что входит |
|---|---|---|
| 1 | Введение. ИИ как математическая модель. | Основные понятия: понятия модели |

| | | |
|---|---|---|
| 2 | Функции и графики: Как ИИ учится предсказывать? | Линейная функция, квадратичная функция, понятие производной как скорости изменения |
| 3 | Вероятность: Как ИИ принимает решения в условиях неопределенности? | Описательная статистика (среднее, медиана, дисперсия). Визуализация данных. Базовые понятия вероятности. Вероятность события, условная вероятность, теорема Байеса. |
| 4 | Векторы: Как ИИ понимает смысл слов и образов? | Понятие вектора, координаты вектора, длина вектора (модуль), скалярное произведение. |

Модуль 1: «Введение. ИИ как математическая модель» знакомит с базовыми концепциями данных, моделей и алгоритмов. На практическом примере с датасетом «Ирисы Фишера» учащиеся учатся вручную выявлять закономерности, закладывая основу для понимания машинного обучения.

Модуль 2: «Функции и графики: как ИИ учится предсказывать?» показывает, как поиск параметров линейной функции моделирует задачу регрессии. Учащиеся на практике строят модель, используя метод наименьших квадратов, и в рамках мини-проекта предсказывают цену квартиры по её площади, осваивая ключевую концепцию минимизации функции ошибки.

Модуль 3: «Вероятность» раскрывает, как теорема Байеса лежит в основе спам-фильтров. Учащиеся вручную рассчитывают вероятности и применяют формулу Байеса для классификации писем, создавая и тестируя работающий прототип байесовского классификатора.

Модуль 4: «Векторы» демонстрирует, как векторные представления кодируют смысл. Работая с готовыми моделями, учащиеся визуализируют слова в пространстве, решают семантические задачи и создают прототип системы рекомендаций на основе векторной близости.

Таким образом, курс через строгую последовательность модулей и акцент на практическую реализацию формирует у учащихся целостное понимание того, как абстрактные математические законы становятся основой для создания интеллектуальных систем.

Важным элементом курса является его диагностико-развивающий компонент. Он будет разработан на основе уже существующих методик других специалистов. На входе будет проводиться комплексное тестирование, оценивающее не только предметные знания, но и аналитическое мышление, вероятностную интуицию, пространственное воображение и мотивационную готовность учащихся в области применения ИИ. Это позволит не только оценить исходный уровень, но и выстроить индивидуальную траекторию погружения в материал.

Методическое обеспечение курса будет включать конспекты занятий с визуализацией ключевых концепций, пакет практических заданий, работающих с реальными данными, и проектные карточки, что позволит реализовывать его без углубленного программирования, делая акцент на математической сути. Курс будет доступен на специализированной платформе. На данный момент проводится изучение существующих и более подходящих платформ для данной работы.

Завершающим этапом прохождения элективного курса станет итоговая профориентационная диагностика обучающихся, которая будет строиться не только на оценке усвоенных знаний, но и на сценарном подходе. Учащимся будут предложены кейсы, отражающие разные виды деятельности в сфере ИИ (анализ данных, создание алгоритмов компьютерного зрения, оптимизация процессов). На основе их будет выстроен персонализированный профиль (например, «Аналитик», «Инженер машинного обучения», «Исследователь»), и предложены конкретные рекомендации по дальнейшему образовательному пути:

углубленному изучению определенных дисциплин, выбору онлайн-курсов, вузов и направлений подготовки.

Таким образом, представленная модель курса «Математика для ИИ: первый шаг» предлагает системный подход к решению проблемы предпрофессиональной подготовки в одной из самых перспективных областей. Его ключевая особенность заключается в целенаправленной демонстрации практического применения математических знаний в различных областях, связанных с ИИ, что напрямую влияет на повышение внутренней мотивации учащихся и осознанность их профессионального выбора. Курс не только ликвидирует разрыв между школьной программой и требованиями IT-индустрии, но и выполняет важную социальную задачу, ориентируя старшеклассников на выбор профессий, являющихся двигателем технологического развития.

Список литературы

1. Анализ рынка труда в сфере IT и Digital 2023-2024 — HeadHunter. — URL: https://naberezhnye.hh.ru/article/research (дата обращения: 09.10.2025).

2. Национальная стратегия развития искусственного интеллекта на период до 2030 года (утв. Указом Президента РФ от 10 октября 2019 г. № 490). — URL: http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001201910210002 (дата обращения: 11.10.2025).

3. Климов, Е. А. Психология профессионального самоопределения : учеб. пособие для вузов / Е. А. Климов. — 4-е изд., стер. — Москва : Академия, 2004. — 304 с. — ISBN 5-7695-2001-9. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/574 (дата обращения: 01.10.2025).

4. Рассел, С. Искусственный интеллект: современный подход / С. Рассел, П. Норвиг; пер. с англ. и ред. К. А. Птицына. — 4-е изд. — Москва: Вильямс, 2021. — 1408 с. — ISBN 978-5-907144-275. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/283999 (дата обращения: 11.10.2025).

# СОВРЕМЕННЫЕ ПОДХОДЫ К ОБУЧЕНИЮ ВЕРОЯТНОСТИ И СТАТИСТИКЕ: КАК ПОВЫСИТЬ ИНТЕРЕС И АКТИВНОСТЬ ШКОЛЬНИКОВ

*Касторных А.С.*

*Россия, г. Липецк*

*ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского, Институт естественных, математических и технических наук, кафедра математики и физики,*

*Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент Фомина Т.П.*

*Аннотация.* В статье обсуждаются методы обучения школьников вероятности и статистике в 7-9 классах. Подчёркивается важность курса для формирования навыков анализа данных и принятия решений в условиях неопределённости. Рассматривается игровая технология как средство повышения интереса к изучению математики и активности обучающихся.

*Ключевые слова:* вероятность и статистика, активные методы обучения, игровые технологии школьное образование.

# MODERN APPROACHES TO TEACHING PROBABILITY AND STATISTICS: HOW TO INCREASE THE INTEREST AND ACTIVITY OF SCHOOLCHILDREN

*Kastornykh A.S.*

*Russia, Lipetsk*

*LGPU named after P.P. Semenov-Tyan-Shansky, Institute of Natural, Mathematical and Technical Sciences, Department of Mathematics and Physics,*

*Scientific supervisor: Candidate of Physico-mathematical Sciences, Associate Professor T.P. Fomina.*

*Abstract.* The article discusses methods of teaching students probability and statistics in grades 7-9. The importance of the course for developing data analysis and decision-making skills in conditions of uncertainty is emphasized. Game technology is considered as a means of increasing interest in the study of mathematics and the activity of students.

*Keywords*: probability and statistics, active learning methods, game technology, school education.

Изучение теории вероятности и математической статистики позволяет сформировать у учащихся широкий спектр навыков и умений, необходимых для анализа и интерпретации данных, а также для осмысленного принятия решений в условиях неопределённости. В современном мире, насыщенном информацией, умение работать с данными становится очень важным навыком для каждого человека. Поэтому требуется поиск таких подходов и методов, чтобы обучение школьников было более актуальным, интересным и практически ориентированным.

Проблема исследования: низкий уровень познавательной активности и статистической грамотности школьников при изучении курса «Вероятность и статистика» в 7-9 классах.

Объект исследования: процесс обучения математике в основной школе.

Предмет исследования: методы и средства активизации познавательной деятельности учащихся при изучении курса «Вероятность и статистика» в 7-9 классах.

Двадцать первый век является эпохой цифровой трансформации абсолютно всех сфер человеческой деятельности. Сейчас невозможно себе представить образованного человека без базовых знаний математики. Человек каждый день принимает то или иное решение на основе имеющихся у него данных и даже не задумывается, что за его выбором стоят такие понятия, как вероятность и статистика, которые приобретают все большую значимость, с каждым днем увеличивая число профессий, в которых важна как базовая, так и углубленная подготовка.

Сегодня вероятность является важным аспектом, находящим практическое применение в жизни людей. Как следствие в общеобразовательной программе появился такой предмет, как «Вероятность и статистика». Министерство Просвещения Российской Федерации для изучения данного курса рекомендовало учебник «Математика. Вероятность и статистика: 7-9-е классы: базовый уровень: учебник в двух частях» под редакцией А.В. Ященко. Отметим, что он содержит много практической информации. В каждом классе на изучение данного предмета отводится тридцать четыре часа [5].

В 7 классе обучающиеся изучают следующие разделы: описательная статистика; случайная изменчивость; введение в теорию графов; логика, логические утверждения и логические высказывания; вероятность и частота случайного события. Результатом изучения вероятности и статистики в 7 классе является: описание и интерпретация чисел в виде диаграмм и таблиц; использовать для описания данных среднее арифметическое, наибольшее и наименьшее значение, медиана, размах; получить представление о случайно изменчивости на примерах цен и физических величин [5].

Темы, которые изучали в седьмом классе, в восьмом классе изучаются более углубленно. Исследуются множества, математическое описание случайных явлений, описательная статистика и рассеивание данных, введение в теорию графов и деревья, математические рассуждения, случайные события и операции над ними, условная вероятность и независимые события. Предметным результатом изучения вероятности и статистики в 8 классе является извлечение и преобразование информации; описание данных различными методами; использование графических моделей; оперирование изученными понятиями; нахождение частот числовыми значениями; нахождение вероятности случайных событий при различных условиях.

В девятом классе школьники изучают элементы комбинаторики; геометрическую вероятность, испытания Бернулли, случайную величину. А предметными результатами освоения курса за 9 класс служат: решение задач перебором вариантов или при помощи комбинаторики, владеть представлениями о случайной величине и о законе больших чисел/роли закона больших чисел в природе и обществе, нахождение вероятности случайных событий в опытах с равновозможными элементарными событиями в сериях испытаний Бернулли [5].

По мнению Е.В. Морозовой вероятность и статистика в системе школьного образования необходима, так как данный предмет помогает интерпретировать и использовать информацию в обыденной жизни. Также он способствует мыслить аналитически и логически [4].

Подводя итог, заметим, что «Вероятность и статистика» как предмет в системе школьного образования важен, так как задачи, которые так или иначе связаны с вероятностью и статистикой, обучающиеся анализируют и применяют математические или же логические методы для их решения. Данный предмет подготавливает школьников к их будущей деятельности. А поэтому необходимо учитывать потребности и мотивацию учащихся и развивать их творческий потенциал.

Образовательная практика выявляет ряд проблем традиционного подхода: упор на формулы и вычисления; отсутствие практико-ориентированных задач; школьники не являются активными исследователями; практически не используются современные технологии, в частности, компьютеры для анализа данных. Очевидно, разрешение указанных проблем возможно с помощью активных методов обучения.

Анализируя различные подходы к понятию «метод обучения» можно заключить, что метод обучения представляет собой способ совместной как теоретической, так и практической деятельности учителя и учеников по достижению необходимой цели. И выбираются с учетом конкретных условий учебно-воспитательного процесса [1].

Основные примеры активных методов:

1. Дискуссионные методы – основываются на коммуникационных действиях участников в процессе решения задач. Обсуждая, участники выясняют и сопоставляют разные точки зрения, решают необходимый вопрос. Виды дискуссионных методов представлены на рисунке 1.

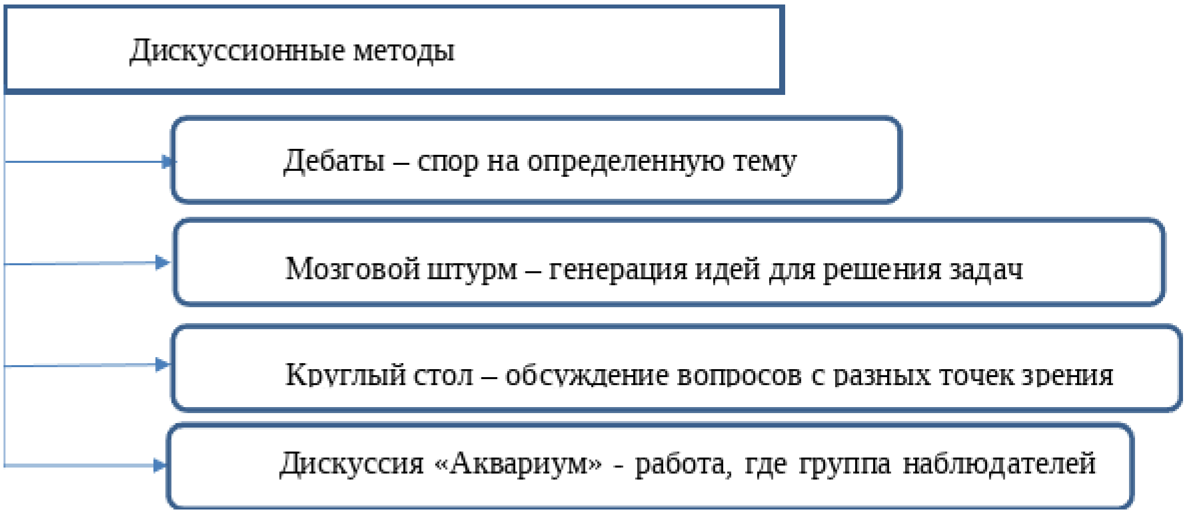



Рисунок 1. Виды дискуссионных методов

2. Игровые методы – это организация учебного процесса при помощи элементов игры, в процессе которой повышается мотивация и вовлеченность усвоения знаний. Чаще всего они основаны на принципе соревновательности и взаимодействий всех участников игрового процесса [3 ]. Классификация игровых методов представлена на рисунке 2.

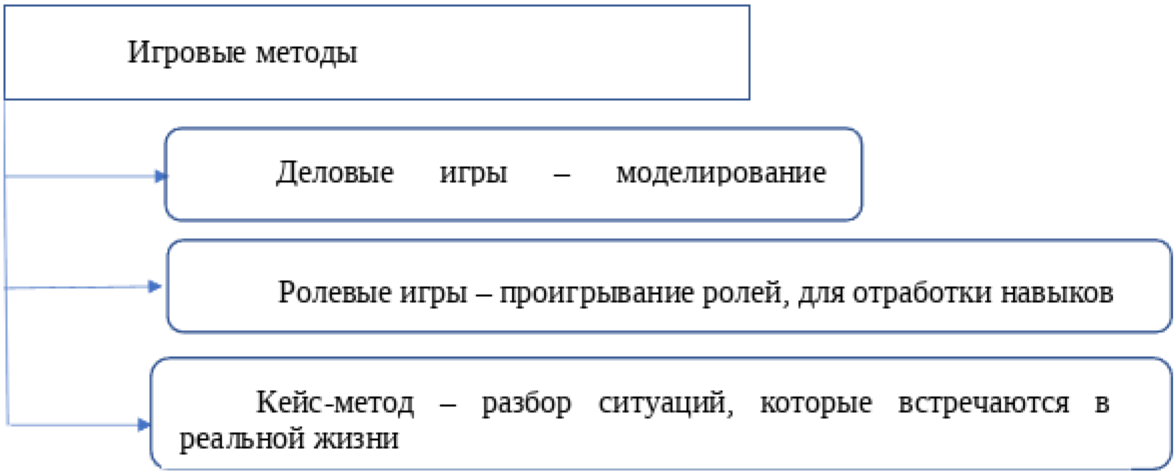



Рисунок 2. Игровые методы

3. Практико-ориентированные методы – это методы, направленные на формирование практических умений и навыков при помощи задач, которые максимально приближены к реальной жизни, как профессиональной, так и повседневной. Классификация практико-ориентированных методов представлена на рисунке 3.

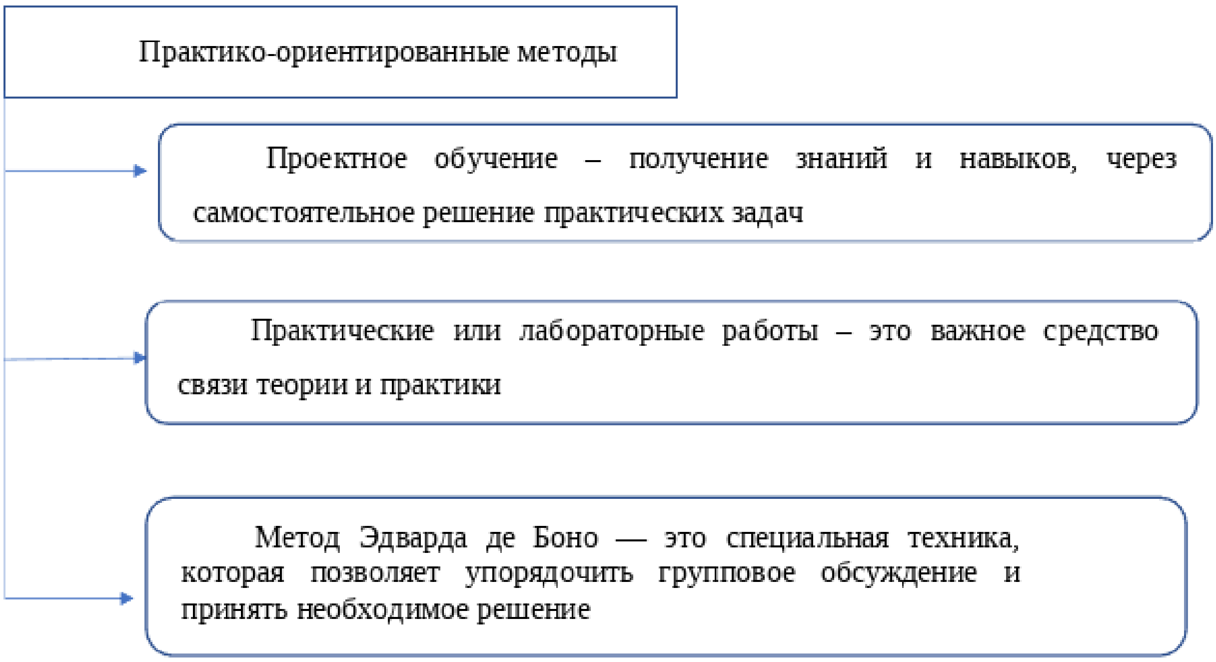



Рисунок 3. Практико-ориентированные методы

4. Интерактивные технологии – это методика, которая предполагает активное взаимодействие учеников с научным материалом и друг с другом. Пример классификации интерактивных технологий представлен на рисунке 4.

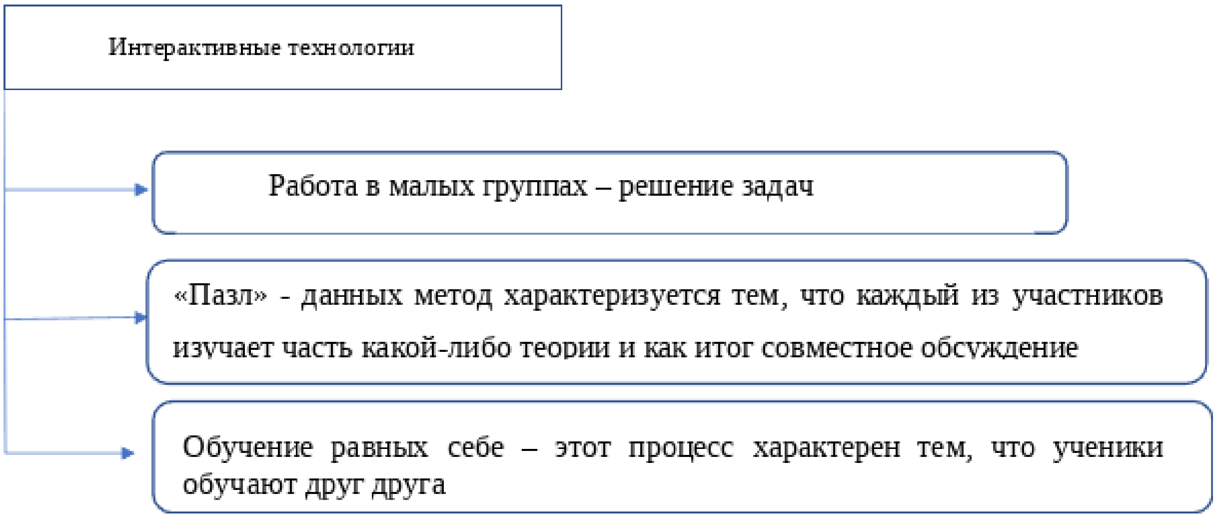



Рисунок 4. Интерактивные технологии

Данные методы служат решением трудных проблем, а также с их помощью появляется возможность приобрести знания и опыт в учебной деятельности [6].

При изучении курса «Вероятность и статистика» можно использовать «метод 6 шляп» (метод Эдварда де Боно). Данный метод способствует развитию у учащихся креативности, гибкости, логического мышления и способности сопоставлять цели и задачи.

Краткое описание метода. Принцип работы может быть различный, но основная идея всегда одна. Учащиеся делятся на команды, затем занимают позиции за столами, где у каждого свое название и характеристика. Шляпы по цвету подразделяют на «красная», «желтая», «зеленая», «синяя», «белая», «черная». Каждая шляпа может быть на определенную тему. В процессе игры школьники решают свои задачи и обсуждают их, меняясь [7, стр. 121].

Таким образом, ученики могут усилить понимание теории с помощью самостоятельного получения данных, а работа в группах помогает им развивать коммуникативные навыки.

Проиллюстрируем игровой подход на разработанной игре «Статистический практикум». Цель игры – получение наибольшего количества баллов, грамотно применяя методы статистики и теории вероятностей для решения проблемных задач. Компоненты игры (рис. 5):

1) игровое поле, а именно путь, который будет состоять из ячеек нескольких типов (исследование, событие, ресурсы);

2) карты с заданиями, которые составлены в форме кейса;

3) карты, которые будут лично у игроков, так как они получают их стартовый набор и могут приобретать новые в процессе игры.

Также ученикам предлагаются жетоны, игровые фишки и кубики, листочки, в которых участники могут делать заметки или расписывать решение.

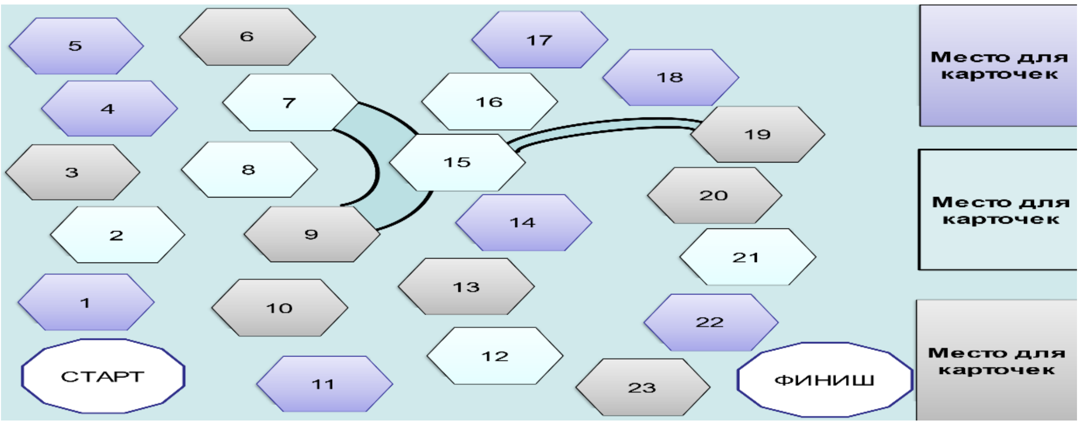



Рисунок 5. Пример игрового поля

Ход игры состоит из трех этапов:

- для начала каждый игрок проходит через процесс подготовки к игре. Участник игры получает свой стартовый набор, а именно 3 карты из блока «Метод анализа», 5 жетонов и бланк для работы;

- далее школьники включаются в игровой процесс, бросают кубики по очереди и перемещают фишку по полю. Если игрок попадает на ячейку Исследование, то ему необходимо взять карту из колоды «Кейс-задание» и озвучить решение (какие методы анализа он применил и к каким выводам пришел), предъявить карты (показать карты «Методы анализа», которые он использовал для решения кейса), защитить (другие игроки могут оспорить решение и предложить свое);

- проверка решения. Учитель, может сам проверить, а может доверить проверку ученикам (на оборотной стороне будет эталон ответа).


Рисунок 6. Пример игрового поля

Карты фиолетового цвета отвечают за кейс-задачи и являются основной колодой, на лицевой стороне описание в формате мини истории. Карты голубого цвета «Метод анализа» отвечают за инструменты игрока, они являются личными картами игрока и находятся в стартовом наборе, а также могут приобретаться в процессе игры. Карты серого цвета отвечают за «Случайное событие».

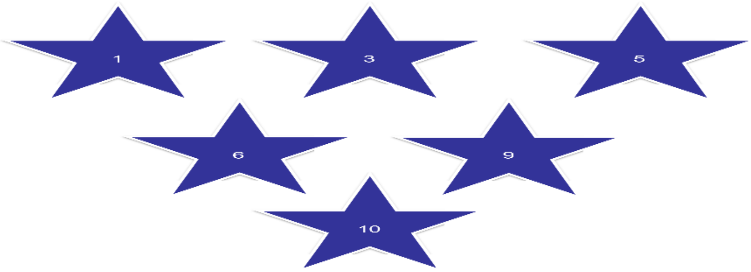



Рисунок 7. Пример жетонов

Игра завершается, когда один из игроков достигает финиша, начинается подсчет баллов и игроки с наибольшим количеством баллов объявляются победителями.

Опыт показывает, что игра, проведенная в дидактических целях, приносит не только хорошие результаты, но и много положительных эмоций.

Итак, основная задача, чтобы школьники не просто заучивали формулы, а научились анализировать информацию из разных источников. Могли сами задавать себе вопросы. Это, несомненно, поможет им лучше понять информацию и сформировать собственное мнение. Думать и разбираться в разных ситуациях, которые могут возникнуть в жизни, также важное умение для современных школьников.

Список литературы


1. Балаев А.А. Активные методы обучения / А.А. Балаев. – М., 1986.
2. Братцева Г.Г. Активные методы обучения и их влияние на смену педагогической парадигмы / Г.Г. Братцева // Философия образования: сб. мате риалов конф. Вып. 23. – СПб., 2002.
3. Воробьев, Г. А. Возможности учебного курса «Вероятность и статистика» для развития математической грамотности школьников / Г. А. Воробьев, Т. П. Фомина // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Социальные науки. – 2025. – № 2(78). – С. 251-257. – DOI 10.52452/18115942_2025_2_251. – EDN XMGCPH.
4. Морозова Е. В. Пути развития логического мышления и логической рефлексии учащихся в условиях модернизации школьного образования // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – No 5; URL: http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=14962 (дата обращения: 10.11.2025).
5. Приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 6 октября 2009 г. № 373, от 17 декабря 2010 г. № 1897.
6. Чечет В. В. Активные методы обучения в педагогическом образовании : учеб. метод. пособие / В. В. Чечет, С. Н. Захарова. – Минск: БГУ, 2015. – 127 с. ISBN 978-985-566-222-9.
7. Эдвард де Боно Шесть шляп мышления. – Питер; СПб., 1997. – ISBN 5-88782-227-9, 0-14-013784-X.


## ЛУЧШИЙ ОНЛАЙН-КУРС «КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ 9 КЛАСС (УГЛУБЛЕННОЕ ИЗУЧЕНИЕ)»


*Москалев И.С., Камнев К.П., Правда Н.М., Филиппова Р.С.*

*Россия, г. Екатеринбург*
*Уральский государственный педагогический университет, Институт математики, физики, информатики*
*Научный руководитель: кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики и методики обучения математике Дударева Н.В.*

*Аннотация.* Курс для учащихся 9 классов и всех интересующихся углублённым изучением алгебры, посвящённый комплексному освоению квадратных уравнений — от базовых методов решения до олимпиадных задач. Программа включает изучение дискриминанта, теоремы Виета, работу с параметрами и нестандартными задачами. Занятия сочетают теорию, интерактивные упражнения и тесты для отслеживания прогресса, развивая аналитическое мышление и закрепляя практические навыки.

*Ключевые слова:* квадратные уравнения, дискриминант, теорема Виета квадратные уравнения с параметром.

**THE BEST ONLINE COURSE "QUADRATIC EQUATIONS 9TH GRADE (IN-DEPTH STUDY)"**

*Moskalev I.S., Kamnev K.P., Pravda N.M., Filippova R.S.*
*Russia, Yekaterinburg*
*Ural State Pedagogical University, Institute of Mathematics, Physics, and Computer Science*
*Scientific supervisor: Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Dudareva N.V.*

*Abstract.* This course is designed for 9th grade students and anyone interested in advanced algebra. It focuses on the comprehensive study of quadratic equations, from basic methods of solving them to olympiad tasks. The program

includes the study of the discriminant, Vieta's theorem, and working with parameters and non-standard problems. The lessons combine theory, interactive exercises, and tests to track progress, developing analytical thinking and strengthening practical skills.

*Keywords*: quadratic equations, discriminant, Vieta's theorem, quadratic equations with parameters.

Ссылка на онлайн-курс: https://stepik.org/242497

Ресурс создан на образовательной платформе Stepik, которая предоставляет специализированные инструменты для структурирования учебного контента. При разработке использовались следующие возможности платформы:

- модульная система подачи материала с последовательными шагами;
- интерактивные задания с автоматической проверкой ответов;
- форматирование математических формул через LaTeX;
- система тестирования и контрольных опросов;
- инструменты для отслеживания прогресса учащихся.

В основе применения ресурса лежит принцип постепенного освоения материала через практику. Обучающиеся последовательно проходят модули, знакомятся с теоретическим материалом и сразу закрепляют его решением интерактивных задач. Некоторые задачи были взяты из пособия для подготовки к централизованному тестированию [3], а также с информационных ресурсов ФИПИ и Сдам ГИА: Решу ЕГЭ [1, 2]. Автоматическая проверка ответов обеспечивает мгновенную обратную связь. Ресурс предоставляет возможность возвращаться к сложным темам и повторять материал в индивидуальном темпе.

Ресурс предназначен для учащихся 8-9 классов, изучающих тему "Квадратные уравнения" в рамках школьной программы. Он также будет полезен абитуриентам для повторения базовых разделов алгебры при подготовке к поступлению в вузы. Студенты младших курсов смогут использовать материалы для закрепления фундаментальных знаний, необходимых для изучения высшей математики. Преподаватели и репетиторы найдут в ресурсе дополнительное пособие с заданиями для организации самостоятельной работы учащихся.

Список литературы

1. Каталог заданий по темам // Сдам ГИА: решу ЕГЭ URL: https://math-ege.sdamgia.ru/ (дата обращения: 19.11.2025).
2. Открытый банк заданий ЕГЭ | Математика. Профильный уровень // Федеральный институт педагогических измерений URL: https://ege.fipi.ru/bank/index.php?proj=AC437B34557F88EA4115D2F374B0A07B (дата обращения: 19.11.2025).
3. Тесты. Математика 11 класс. Варианты и ответы централизованного тестирования. - М.: Центр тестирования МО РФ, 2003.

***Номинация «Лучшее эссе»***

## КАК РАЗВИВАЛСЯ ТАЛАНТ Н.И.ЛОБАЧЕВСКОГО: ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ АСПЕКТЫ

*Кондакова Д.В.,*

*Россия, г. Арзамас,*

*Арзамасский гуманитарно-педагогический институт им. А.П. Гайдара – филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»,*

*Факультет естественных и математических наук*

*Научный руководитель: к.п.н., доц. Напалков С.В.*

*Аннотация.* В эссе рассмотрены факторы, способствовавшие развитию гения Н.И. Лобачевского, включая качественное образование, влияние наставников и широкие возможности для самореализации. Проводя параллели с современностью, автор утверждает, что каждый ребенок обладает уникальным талантом, требующим распознавания и всестороннего развития.

*Ключевые слова:* талант Лобачевского, Лобачевский, биография Н.И. Лобачевского, Казанский университет.

**HOW N.I. LOBACHEVSKY'S TALENT DEVELOPED: DETERMINING ASPECTS**

D.V. Kondakova,

Russia, Arzamas,

*A.P. Gaidar Arzamas Humanitarian and Pedagogical Institute – branch of the Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education "National Research N.I. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod",*

*Faculty of Natural and Mathematical Sciences*

*Research supervisor: PhD, Assoc. Prof. Napalkov S.V.*

*Annotation*. This essay examines the factors that contributed to the development of N.I. Lobachevsky's genius, including a high-quality education, the influence of mentors, and ample opportunities for self-realization. Drawing parallels with modern times, the author argues that every child possesses a unique talent that requires recognition and comprehensive development.

*Keywords:* Lobachevsky's talent, Lobachevsky, N.I. Lobachevsky's biography Lobachevsky, Kazan University.

История Николая Ивановича Лобачевского – это не просто биография выдающегося математика, но и наглядное пособие по раскрытию и воспитанию гения. Его путь, увенчанный созданием неевклидовой геометрии, стал эталоном интеллектуальной смелости и прозрения, изменившего ход научной мысли. Размышляя о факторах, способствовавших формированию такого уникального таланта, мы невольно приходим к выводу, что история Лобачевского – это не исключение, а скорее образец того, как должно строиться образование, нацеленное на раскрытие потенциала каждого человека. Как справедливо отмечает Иван Ященко, «Все основные элементы, необходимые для того, чтобы раскрыть талант ребенка, – это в первую очередь качественное базовое образование, а во-вторых, большие возможности попробовать себя в разных предметах». Эта мысль обретает особую значимость в свете наследия Лобачевского и ставит перед современным российским образованием фундаментальный вопрос: как мы можем создать условия, в которых каждый ребенок, подобно Лобачевскому, сможет реализовать свой уникальный дар?

Развитие таланта Николая Ивановича Лобачевского было многогранным процессом, опирающимся на несколько ключевых столпов. Первый и, возможно, важнейший – это качественное базовое образование. Казанская гимназия, а затем и Казанский университет, в которых Лобачевский получил свои первые академические знания, были на тот момент одними из ведущих образовательных центров России. Здесь Лобачевский освоил не только математику, но и широкий круг гуманитарных и естественных наук. Фундаментальность этого образования заключалась не только в объеме информации, но и в глубине ее осмысления, в формировании системного мышления. Он получил прочную основу, которая позволила ему не просто усваивать знания, но и критически их переосмысливать. Без этой крепкой базы, без понимания классической геометрии со всеми ее аксиомами и теоремами, невозможно было бы совершить революционный прорыв и предложить альтернативную модель.

Второй краеугольный камень – это влияние наставников и учителей. Здесь имя Иоганна Мартина Христиана Бартельса звучит особенно ярко. Профессор Бартельс, друг и учитель Карла Фридриха Гаусса, был не просто преподавателем, но настоящим проводником в мир большой науки. Он не ограничивался передачей готовых знаний, а стремился привить своим ученикам дух исследования, научить их самостоятельно мыслить, сомневаться, искать нестандартные решения. Именно он познакомил юного Лобачевского с передовыми европейскими математическими идеями, с работами Гаусса, открыв для него мир, выходящий за рамки университетской программы. Роль такого наставника, способного не только обучать, но и вдохновлять, распознавать искру гениальности и направлять ее, бесценна. Учителя Лобачевского, по сути, сделали то, что каждый педагог должен делать: они поняли, в чем гений ребенка, и помогли ему развиться.

Третий аспект – это наличие широких возможностей для самореализации и исследования различных областей знания. Хотя Лобачевский известен как математик, его интересы не ограничивались одной лишь математикой. Он проявлял себя в физике, астрономии, лингвистике, занимался административной деятельностью в университете. Эта широта кругозора, способность видеть взаимосвязи между, казалось бы, разрозненными дисциплинами, несомненно, обогащала его мышление и способствовала формированию уникального взгляда на мир. Возможность «попробовать себя в разных предметах» – это не просто право выбора, это механизм для выявления скрытых способностей, для понимания собственных склонностей и талантов. Ведь часто именно на стыке дисциплин рождаются самые смелые и инновационные идеи.

Невозможно переоценить личностные качества Лобачевского: его независимость мышления, колоссальное упорство и смелость. Отвергнуть пятый постулат Евклида – это был акт интеллектуального мужества, идущий вразрез с двухтысячелетней традицией. Такое решение не могло быть принято без глубокой внутренней убежденности и готовности противостоять критике. Упорство позволило ему продолжать работу над своей теорией, несмотря на непонимание и даже насмешки современников. Эти качества, безусловно, были присущи ему от природы, но они также были сформированы и укреплены в процессе обучения и научной деятельности, в условиях, где его уникальные способности не подавлялись, а поощрялись.

Урок Лобачевского для современного российского образования очевиден: все дети – гении, только важно понять в чем и помочь это развить. Эта аксиома должна стать отправной точкой для построения образовательной системы. Это означает отказ от унифицированного подхода, признание многообразия талантов и создание условий для их индивидуального раскрытия.

Что же подразумевает "качественное базовое образование" в XXI веке? Это не просто освоение определенного объема информации. Это формирование навыков XXI века: критического мышления, креативности, коммуникации. Это умение учиться на протяжении всей жизни, адаптироваться к меняющимся условиям, решать нестандартные задачи. Качественное образование должно закладывать прочный фундамент во всех ключевых предметных областях, но при этом давать не только знания, но и глубокое понимание принципов, лежащих в их основе. Оно должно развивать логику и интуицию, учить анализировать и синтезировать информацию, формулировать гипотезы и проверять их.

"Большие возможности попробовать себя в разных предметах" – это второй, не менее важный элемент. Современная школа не может ограничиваться рамками стандартного расписания. Она должна предлагать широкий спектр кружков, секций, факультативов, проектной деятельности. Это могут быть олимпиады по разным направлениям, научные конференции, творческие студии, спортивные секции. Ранняя узкая специализация, на которую порой ориентированы родители и даже сама система, может подавить нераскрытые таланты. Ребенок, увлеченный математикой, может иметь скрытые способности к музыке или программированию, которые проявятся только при наличии возможности их попробовать. Междисциплинарные проекты, в которых ученики могут применять знания из разных областей для решения комплексных задач, становятся мощным инструментом для выявления и развития таких талантов.

Роль учителя в этом процессе является центральной и незаменимой. Учитель должен быть не просто транслятором знаний, а навигатором, ментором, способным распознать в каждом ребенке его уникальные склонности. Это требует от педагога не только предметной эрудиции, но и глубоких психологических знаний, умения строить доверительные отношения с учениками, создавать атмосферу интеллектуальной безопасности, где не страшно ошибаться и экспериментировать. Подобно Бартельсу, современный учитель должен быть готов выйти за рамки учебника, познакомить учеников с передовыми идеями, вдохновить их на самостоятельный поиск и исследования. Система повышения квалификации учителей должна быть направлена на развитие этих компетенций, а не только на обновление предметных знаний.

Однако, говоря о талантах, мы не должны ограничиваться лишь академическими достижениями. Талант может проявляться в искусстве, спорте, социальных взаимодействиях, предпринимательстве, техническом творчестве. Современное образование должно быть достаточно гибким, чтобы распознавать и поддерживать все многообразие человеческих дарований. Это требует создания инклюзивной образовательной среды, где ценится каждое достижение и каждый шаг ребенка в освоении нового.

Перед российским образованием стоят серьезные вызовы, требующие продуманных решений. Неравенство в доступе к качественному образованию между крупными городами и сельскими территориями, нехватка квалифицированных кадров, особенно в регионах, а также давление стандартизированных экзаменов, порой подавляющих креативность и стремление к глубокому исследованию, – все это препятствия на пути к всестороннему раскрытию детских талантов.

Пути решения этих проблем лежат в комплексном подходе: Привлечение лучших кадров в образование, создание условий для их профессионального роста, достойная оплата труда и поддержка инновационных педагогических практик. Расширение доступа к разнообразным программам. Развитие дистанционного обучения, создание ресурсных центров и технопарков, доступных для всех детей, независимо от места проживания. Внедрение программ по робототехнике, программированию, медиаграмотности, театральному искусству, музыке. Переход от жестких, унифицированных программ к более гибким, вариативным моделям, позволяющим ученикам выбирать углубленные курсы, участвовать в проектах, выходящих за рамки одного предмета. Отказ от исключительно тестовых методов оценки в пользу более комплексных подходов, включающих проектную деятельность, портфолио, олимпиады и конкурсы по широкому спектру направлений. Формирование в школах культуры, где ценится любознательность, поощряется инициатива, а ошибки воспринимаются как часть учебного процесса.

Наследие Николая Ивановича Лобачевского – это не только величайшее научное открытие, но и вечное напоминание о потенциале человеческого духа. Его жизнь и творчество служат вдохновением для всех, кто верит, что в каждом ребенке дремлет гений, ожидающий своего раскрытия. Задача современного российского образования – не просто передавать знания, а стать той плодородной почвой, тем источником вдохновения и тем направляющим светом, который позволит каждому юному таланту расцвести во всей своей уникальности, обогащая не только себя, но и все общество. Создание такой системы – это не просто образовательная цель, это стратегическая инвестиция в будущее России.

**Литература**


1. Васильев А.В. Николай Иванович Лобачевский (1792 - 1856). М: Наука. 1992 История отечественной математики в 4 - х. томах. Т. 2. / Отв. ред. И.З. Штокало. Киев, 1966 - 1970.
2. Лаптев А.Н. Николай Иванович Лобачевский. 1792-1856.-В сб.: Люди русской науки. Матем., мех., М.; 1961.
3. https://znamus.ru/page/Nikolaj_Lobachevskij
4. https://nsportal.ru/ap/library/drugoe/2018/10/02/ucheniki-i-posledovateli-lobachevskogo
5. https://ug.ru/razvitie-talanta-shkolnika-v-bolshoj-shkole-eto-tema-kotoraya-po-nastoyashhemu-pozvolyaet-nam-govorit-o-tom-chto-kazhdyj-moskovskij-shkolnik-talantliv/
6. http://www.terminy.info/history/historical-dictionary/bolcani-iosif-antonovich


## ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ УЧЕБНОЙ МОТИВАЦИИ УЧАЩИХСЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ


*Сарманова А.И.*

*Россия, г. Казань*

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,*

*Институт математики и механики имени Н.И. Лобачевского*

*Научный руководитель: канд. пед. наук, доцент Фазлеева Э.И.*



*Аннотация.* В эссе рассматривается роль практико-ориентированных задач в повышении учебной мотивации учащихся на уроках математики.



*Ключевые слова:* практико-ориентированные задачи, внутренняя мотивация, учебная мотивация, практическая значимость математики.

**Practical-oriented tasks as a means of developing students' academic motivation in mathematics education at secondary schools**

*Sarmanova A.I.*
*Russia, Kazan*
*Kazan (Volga Region) Federal University,*
*N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics*

*Abstract.* The essay examines the role of practice-oriented tasks in increasing students' academic motivation in mathematics classes.

*Keywords*: practice-oriented tasks, internal motivation, educational motivation, and the practical significance of mathematics.

«А зачем мне это учить? Где это в жизни пригодится?» – такой вопрос учитель математики нередко слышит от детей на уроке, и не будет преувеличением сказать, что он самый важный и одновременно самый сложный для учителя. Он отражает главную проблему современного школьного образования – разрыв между теорией и практикой, который ведет к потере интереса и внутренней мотивации к учебе. Ответом на такой вопрос могут стать практико-ориентированные задачи, которые я, как учитель, считаю мощнейшим инструментом для пробуждения интереса к математике. Кузнецова А.В. под практико-ориентированными задачами рекомендует понимать задачи, материал для составления которых взят из окружающей действительности и ориентирован на формирование практических навыков учащихся [2]. Это не просто абстрактные числа и формулы, а реальные сюжеты: расчет стоимости ремонта, оптимизация маршрута, анализ данных для выбора тарифа сотовой связи или планирование семейного бюджета. Когда ученик видит, что математика может помочь ему по жизни в различных ситуациях, и что каждая тема неразрывно связана с жизнью, он понимает, что предмет действительно важный и нужный. И здесь мы подходим к самому важному – мотивации.

Л.М. Фридман точно подмечает разницу между внешней и внутренней мотивацией. Внешняя – это оценки, давление родителей, желание не отстать от одноклассников. Она недолговечна [3]. Как справедливо отмечает Т.Д. Дубовицкая, внутренние мотивы учения связаны с познавательной потребностью и эмоциональным удовлетворением от самого процесса познания [1]. Когда овладение знанием становится личной целью ученика, учебная деятельность наполняется смыслом, а учащийся проявляет собственную активность. Именно на ее формирование и работает практико-ориентированный подход. Т.В. Шаховал и Л.Э. Хаймина подчеркивают, что значимость получаемого результата – ключевая особенность таких задач, которая и обеспечивает познавательную мотивацию [4].

На своем опыте я не раз убеждалась, что урок «оживает», когда мы переходим от решения примеров к решению жизненных задач. Дети включаются. Например, после задачи «Найти площадь прямоугольника» задача «Найти, во сколько обойдется покупка плитки для ремонта ванной комнаты» становится детям очень даже посильной и интересной. Конечно, сначала стоит отработать базовый навык нахождения периметра и площади на простых задачах, которые решаются быстро. Но потом очень важно рассмотреть реальные жизненные задачи, которые покажут ученикам, зачем же вообще мы этим занимаемся на уроках. Решая задачи на пропорции, хорошо было бы включить те, которые ученики могут встретить в своей повседневной жизни.

Особенный интерес вызывают задачи, связанные с личным опытом учащихся. Например, при изучении темы «Скорость, время, расстояние» мы не просто подставляем числа в формулу, а планируем семейную поездку, рассчитываем время в пути с учетом пробок, определяем необходимое количество остановок на перекус. Такие задания заставляют мыслить стратегически, критически, учитывать разные факторы. Как верно заметила А.В. Кузнецова: «дети сами ищут, спорят, сопоставляют, обобщают, делают выводы» [2]. Здесь уже учащийся включен в процесс познания, и это доставляет ему эмоциональное удовлетворение. Конечно, не любая задача с «жизненным» сюжетом будет работать. Я полностью согласна с И.М. Шапиро в том, что задача должна быть реальной и доступной [5]. Если мы предлагаем семиклассникам рассчитать оптимальную траекторию полета ракеты, это вызовет лишь отторжение. А вот рассчитать необходимое количество рулонов обоев для своей комнаты, зная ее параметры, – это и понятно, и полезно. Кроме того, такие задачи, по мнению Эрентраут Е.Н., раскрывают межпредметные связи [6]. Важно и то, что практико-ориентированные задачи позволяют выстроить дифференцированный подход. Кто-то успешно справится с задачей легкого уровня (например, рассчитать площадь комнаты), а более сильным ученикам можно предложить провести мини-исследование (например, рассчитать, во сколько обойдется ремонт комнаты при определенном плане ремонта, стоимости материалов для ремонта, оплаты труда рабочих). Это укрепляет веру в свои силы у каждого ребенка.

Таким образом, регулярное использование практико-ориентированных задач – это не просто следование тренду, а осознанный шаг навстречу качественному образованию школьников. Через такие задания мы строим тот самый мостик, который соединяет примеры из учебника с жизненными ситуациями. И вот что по-настоящему ценно: когда ребенок сам, своими руками, с помощью знаний по пройденной теме решает маленькую, но реальную задачу, в его глазах зажигается та самая искорка понимания. Он вдруг ясно видит: математика – это не просто урок, не просто школьный предмет, это то, что нас окружает. В такие моменты мы растим не просто успевающих учеников, а любознательных, увлечённых людей, которые не боятся думать, искать и пробовать. И если в конце урока я вижу не усталые лица, а горящие глаза, если дети задают интересные вопросы, я понимаю, что урок прошел действительно успешно и продуктивно. Задача учителя не просто научить чему-то, а помочь полюбить учиться и узнавать.

Список литературы

1. Дубовицкая, Т. Д. Методика диагностики направленности учебной мотивации / Т. Д. Дубовицкая // Психологическая наука и образование. – 2002. – № 2. – С. 42-45.
2. Кузнецова, А. В. Практико-ориентированные задачи по математике как средство повышения учебной мотивации / А.В. Кузнецова // Символ науки. – 2024. – № 6-2. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/praktiko-orientirovannye-zadachi-po-matematike-kak-sredstvo-povysheniya-uchebnoy-motivatsii (дата обращения: 15.07.2025).
3. Фридман, Л. М. Мотивация учения / Л.М. Фридман, И.Ю. Кулагина // Психологический справочник учителя. – Москва: Просвещение, 1991. – С. 192–194.
4. Хаймина, Л. Э. Задачи прикладной направленности в обучении математике: учебно-методическая разработка для учителей школ и студентов математического факультета / Л. Э. Хаймина. – Архангельск: Поморский гос. ун-т им. М. В. Ломоносова, 2010. – 47 с.
5. Шапиро, И. М. Использование задач с практическим содержанием в преподавании математики / И.М. Шапиро. – М.: Просвещение, 1990. – 96 с.
6. Эрентраут, Е. Н. Практико-ориентированные задачи как средство реализации прикладной направленности курса математики в профильных школах : дис. канд. пед. наук : 13.00.02 / Эрентраут Е. Н. – Екатеринбург, 2005. – 158 с.

## ВЛИЯНИЕ КЛИПОВОГО МЫШЛЕНИЯ НА КОГНИТИВНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

*Элекейкина Д.С.*

*Россия, г. Казань*

*Казанский (Приволжский) Федеральный Университет,*
*Институт Математики и Механики им. Н.И. Лобачевского*
*Научный руководитель: доцент, к.н. Тимербаева Н.В.*

*Аннотация.* Работа посвящена исследованию влияния клипового мышления на познавательные процессы человека. В эссе рассматриваются положительные и отрицательные аспекты восприятия информации при обучении математике, а также существующие подходы к обучению детей с клиповым мышлением.

*Ключевые слова:* клиповое мышление, восприятие информации, технология обучения

**THE INFLUENCE OF CLIP THINKING ON COGNITIVE PROCESSES WHEN TEACHING MATHEMATICS**

*Elekeykina D.S.*
*Russia, Kazan*
*Kazan (Volga Region) Federal University, N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics*
*Scientific supervisor: Assoc. Prof., Ph.D. Timerbaeva N.V.*

*Abstract.* The work is devoted to the study of the influence of clip thinking on human cognitive processes. The essay examines the positive and negative aspects of information perception when teaching mathematics, as well as existing approaches to teaching children with clip thinking.

*Keywords*: clip thinking, information perception, learning technology

В настоящее время мы наблюдаем стремительное развитие цифровых технологий, что все чаще сказывается на нашем ритме жизни и ее восприятии. Перенасыщенность сети фрагментарными новостными сводками и короткометражным развлекательным контентом требуют от читателя быстрого восприятия информации, что по мнению многих социологов видоизменяет тип мышления и рецепции данных, которые часто называют «клиповым мышлением» [2]. Начиная с истоков понятия, впервые упомянутое американским публицистом Э. Тоффлером [9], мы понимаем «клиповое мышление» как тип восприятия информации, при котором образ данных складывается из небольших информационных обрывков, не наделенных глубоким осмыслением полученного материала.

Феномен клипового мышления предстает спорным вопросом перед современными педагогами и нейропсихологами. Трудности, которые школьники и студенты испытывают сегодня при анализе научных текстов, оперировании понятиями, построении логических цепочек и формулировании собственных мыслей остро сказываются на процессе их обучения [1]. Большинство исследователей сходятся во мнении, что клиповое мышление негативно влияет на образовательную деятельность и развитие когнитивных способностей слушателей. Виной тому - познавательные особенности, направленные на восприятие большого потока информации фрагментарного характера [6].

Очевидно, что «клиповое мышление» является синонимом к «фрагментарности восприятия». Люди с таким типом сознания практически не способны на длительную концентрацию внимания, их интерес к монотонной деятельности быстро рассеивается, что негативно сказывается на результате обучения [4].

При изучении точных наук, к которым мы относим и математику, необходимым навыком является оперирование абстрактными понятиями. Люди с клиповым типом мышления испытывают здесь определенные трудности в связи с преобладанием у них образного мышления. Переход от образа к абстракции кажется непреодолимым барьером на пути к усвоению полученной информации [4].

Кроме того, при изучении математики базового уровня немаловажным является способность действовать по определенному алгоритму, что является фундаментом для освоения как простейших вычислений, так и более сложных математических концепций. Однако, клиповое мышление характеризуется «действием наперед мысли», оно импульсивно и порой непредсказуемо, что отсекает попытку действий по плану и снова встает стеной к получению фундаментальных знаний [4].

Говорить о решении задач повышенного уровня, требующих глубокого анализа, «противникам» клипового мышления пока не приходится. Основной проблемой на сегодняшний день ставится усвоение базовых знаний, их запоминание и, в лучшем случае, осмысление.

Однако есть и те, кто видит в клиповом мышлении преимущества над «устоявшимися» типами мышления.

Главным достоинством фрагментарного мышления является быстрая адаптация к постоянно меняющимся условиям, что, несомненно, важно в постоянно развивающемся информационном пространстве. Сюда же можем отнести и способность к «быстрому реагированию»: клиповый тип мышления позволяет человеку принимать решения в краткие сроки благодаря поверхностному осмыслению полученных данных [4].

Из выше сказанного вытекает еще один положительный аспект клипового мышления, а именно способность выделять ключевые моменты в больших информационных блоках. Человек с клиповым мышлением, во избежание информационных перегрузок мозга, способен «фильтровать» данные, отсеивать второстепенную информацию и концентрироваться на главном [4].

Существенным «плюсом» клипового мышления является способность к многозадачности, явно необходимая в современной полифункциональной среде. В данном контексте подразумевается автоматизация рутинных задач, быстрое «переключение» между разного рода проблемами, а также приоритезация целей [4].

Исследователи, выступающие в роли защитников клипового мышления в один голос твердят о том, что нет необходимости, а быть может, и возможности в «перекраивании» типа мышления с исследуемого в, например, аналитический. Для нас уже давно не секрет, что каждый человек имеет свои особенности в плане мышления, все мы «собраны» по-разному и можно лишь выделить преобладающий тип мышления над остальными [11]. Педагогами и психологами предложено огромное количество методик преподавания, подходящих как каждому «устоявшемуся» мыслительному типу в отдельности, так и всем вместе. Но почему феномен клипового мышления выбивается из ряда вон? Неужели нельзя адаптировать методики преподавания к «сильным сторонам» клипового мышления?

Такими вопросами задаются педагоги-психологи С.Е. Кургинян и Т.В. Черниговская. По их мнению, уже существующие технологии преподавания, адаптированные к «проблемному» феномену, хороши собой, однако до конца не ясно как правильнее было бы преподносить с их помощью учебный материал [5]. В любом случае, списывать со счетов существующие разработки мы не можем, поэтому будем опираться на них.

Наиболее распространенным подходом преподавания лекционного материала на сегодняшний день является метод инфографики. Суть метода довольно проста: учащимся необходимо вести конспект графически, представляя большой объем информации в виде кластеров. В кластерах явно прослеживаются взаимосвязи и следования между каждым информационным блоком. Здесь мы обнаруживаем те самые «образы», которыми и привыкли мыслить люди с клиповым типом мышления. Кроме того, кластеры стимулируют развитие критического мышления ввиду необходимости дальнейшей «расшифровки» полученной схемы [3].

Не менее распространенным подходом к обучению является метод создания интеллект-карт и интерактивных плакатов. Создание иллюстраций к изучаемой теме стимулирует интерес к обучению, а также способствует переходу от линейного типа изучения информации к многомерному, что легче воспринимается при клиповом мышлении [7].

Чуть менее используемыми являются методы парадоксов [10] и дискуссии [8]. Идеи обоих методов схожи: метод парадоксов направлен на изучение взаимоисключающих «парадоксальных» фактов, касающихся темы урока; идея метода дискуссий заключается в учебной беседе, в которой каждый участник отстаивает свою позицию приводит аргументы в пользу своей точки зрения. Оба метода направлены на развитие критического и аналитического мышления, а также когнитивных способностей учащихся. Кроме того, формат быстрого «переключения» с одной точки зрения на другую подходит учащимся с клиповым типом мышления, что гарантирует включение большей части класса в урок.

Таким образом, следует отметить, что клиповое мышление – не приговор в системе образования, а современная реальность, порожденная цифровизацией всех сфер жизни человека. Традиционные подходы к преподаванию математики все чаще становятся неэффективны в обучении детей с клиповым типом мышления, откуда мы имеем снижение уровня усвоения материала. В условиях непрерывного информационного развития общества необходимым становится как адаптация уже существующих методик преподавания, так и создание новых в целях повышения эффективности обучения и вовлечения школьников в учебный процесс.

Основной задачей на сегодняшний день ставится не борьба с уже существующим феноменом, а адаптация технологий преподавания к сложившимся особенностям восприятия информации. Однако, не стоит упускать из внимания, что необходима не столько адаптация к основным принципам восприятия информации при клиповом мышлении, а именно использование его сильных сторон и развитие у ученика новых компетенций.

Список использованной литературы

1. Акименко, Г. В., Кирина, Ю. Ю., Федосеева, И. Ф., Яковлев, А. С. КЛИПОВОЕ МЫШЛЕНИЕ ПОКОЛЕНИЯ Z: ОСОБЕННОСТИ РАЗВИТИЯ КОГНИТИВНЫХ СПОСОБНОСТЕЙ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ В ВУЗЕ [Текст] / Г. В. Акименко, Ю. Ю. Кирина, И. Ф. Федосеева, А. С. Яковлев // Электронный научный журнал «ДНЕВНИК НАУКИ». — 2023. — № 12.

2. Гиренок Ф.И. Антропологические конфигурации философии // Философия науки. – Вып. 8: Синергетика человекомерной реальности. – М.: ИФ РАН, 2002. С. 415-420.

3. Епифанова С.В. Инфографика в образовательном процессе / Епифанова С.В. [Электронный ресурс] // nsportal : [сайт]. — URL: https://nsportal.ru/nachalnaya-shkola/obshchepedagogicheskie-tekhnologii/2024/10/20/infografika-v-obrazovatelnom (дата обращения: 13.11.2025).

4. Кубанцева, Д. И. Клиповое мышление в контексте образовательного процесса [Текст] / Д. И. Кубанцева // Проблемы современного образования. — 2022. — № 6. — С. 70-78.

5. Кузнецов, И. С. Теория и практика проведения и исследования клипового мышления у учащихся : специальность 44.04.01 «Педагогическое образование» : Выпускная квалификационная работа / Кузнецов, И. С. ; Тюменский Государственный Университет. — Тюмень, 2020. — 100 с.

6. Митрофанова, И. И. КЛИПОВОЕ МЫШЛЕНИЕ: РЕАЛЬНОСТЬ И ПЕРСПЕКТИВЫ [Текст] / И. И. Митрофанова // Теория и практика современной науки. — 2018. — № 11(41). — С. 302-306 (дата обращения: 13.11.2025).

7. Смирнова, В. Ю. Роль визуализации и визуальных приемов в обучении детей с клиповым мышлением [Текст] / В. Ю. Смирнова // Молодой ученый. — 2020. — № 42 (332). — С. 62-65.

8. Технологии дискуссионного обучения / [Электронный ресурс] // Справочник24 : [сайт]. — URL: https://spravochnick.ru/pedagogika/tehnologiya_diskussionnogo_obucheniya/ (дата обращения: 13.11.2025).

9. Тоффлер Э. Шок будущего: пер. с англ. – М.: АСТ, 2002. 57 с.

10. Трапезникова Т.Р. Клиповое мышление современных детей, приемы визуализации в обучении младших школьников / Трапезникова Т.Р. [Электронный ресурс] //

ДомЗнания : [сайт]. — URL: https://domznaniya.ru/uploads/2023/12/20/1703083219_c05ba4170f34941cb1f1.docx (дата обращения: 13.11.2025).
11. Чащин Е. В. Типы мышления в современном научном осмыслении //Вестник Оренбургского государственного университета. – 2010. – №. 7 (113). – С. 138-144.

## СРЕДСТВА ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ У ОБУЧАЮЩИХСЯ УМЕНИЙ ПОНИМАТЬ ДЕФИЦИТ СОБСТВЕННЫХ ЗНАНИЙ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ

*Галеева Г.Р.*
*Россия, г. Екатеринбург*
*Уральский государственный педагогический университет, Институт математики, физики и информатики*
*Галеев Д.И.*
*Россия, г. Екатеринбург*
*Уральский государственный лесотехнический университет, Институт заочного обучения*
*Научный руководитель: к.п.н., доцент Семёнова И.Н.*

*Аннотация.* На основе анализа педагогической и методической литературы выделена проблема, связанная с необходимостью осознания школьниками «дефицита собственных знаний». В рамках решения проблемы предложено определение «дефицита собственных знаний» и представлены средства для установления обучающимися собственного дефицита в содержании конкретных предметных образовательных категорий («знание», «понимание», «умение» в терминологии О.Б. Епишевой) в процессе работы с материалом по математике и информатике. Представленные средства иллюстрируют две педагогические ситуации: первая – осознание дефицита при введении нового материала (для создания мотивации), вторая – итоговый контроль (для коррекции и работы над

ошибками). Сущность представленных средств (для первой ситуации – диалог, для второй – задания, составленные на основе дидактического конструктора) составляет рефлексивная деятельность, что способствует осознанию обучающимися границ собственных знаний, пониманий, умений и навыков, обеспечивающих формирование умения учиться.

*Ключевые слова:* дефицит знаний, средства для формирования, выделять дефицит собственных знаний, рефлексия учебной и познавательной деятельности, диалог, задания, составленные на основе дидактического конструктора.

## TOOLS FOR THE TRAINING OF STUDENTS TO UNDERSTAND THEIR OWN KNOWLEDGE DEFICIT IN MATHEMATICS AND INFORMATICS

*Galeeva G.R.*
*Russia, Yekaterinburg*
*Ural State Pedagogical University, Institute of Mathematics, Physics and Informatics*
*Galeev D.I.*
*Russia, Yekaterinburg*
*Ural State Forest Engineering University, Institute of distant learning*
*Scientific supervisor: Cand. Sc. (Pedagogy), Associate Professor Semenova I N*

*Abstract.* On the basis of analysis of pedagogical and methodological literature, a problem related to the need for pupils' awareness of «lack of own knowledge» has been highlighted. As part of the solution of the problem, it is proposed to define «lack of own knowledge» and presented means for students to establish their own deficit in the content of specific subject educational categories («knowledge», «understanding», «skill» in terminology O.B.

Epesheva) in the process of working with materials in mathematics and informatics. The presented tools illustrate two pedagogical situations: the first - awareness of deficit when introducing new material (to create motivation), the second - final control (for correction and work on errors). The essence of the presented means (for the first situation - dialogue, for the second - tasks, compiled on the basis of a didactic designer) is reflexive activity, which promotes awareness among students of their own knowledge, understanding, skills and abilities, providing learning skills.

*Keywords*: lack of knowledge, means for formation, to allocate the deficit of own knowledge, reflection of educational and cognitive activities, dialogue, tasks, compiled on the basis of a didactic designer.

*«…чаще приходилось мне испытывать мое бессилие, недостаток знаний, неумение ответить даже на простейшие вопросы жизни, быта»*

*Максим Горький, «Мои университеты», 1923*

В условиях реализации федерального государственного образовательного стандарта основного[10[1]] и среднего[11[2]] общего образования, отражающего заказ общества к сфере образования, все больше внимания уделяется формированию у школьников метапредметных результатов. В эти результаты входят регулятивные универсальные учебные действия, которые включают в себя самоорганизацию и самоконтроль. Выделенные действия способствуют адаптации обучающегося к изменяющимся условиям социальной среды во время поиска ответов на простейшие вопросы жизни (в профессиональной и бытовой сферах). Существенным компонентом требуемой адаптации является осмысление

10[1] Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 18.07.2022 № 568 «О внесении изменений в федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования»

11[2] Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 12.08.2022 № 732 «О внесении изменений в федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования, утвержденный приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 мая 2012 г. № 413» (Зарегистрирован 12.09.2022 № 70034) субъектом дефицита собственных знаний, которое лежит в основе «умения учиться». Понимая, чего он не знает или не понимает, учащийся получает возможность планировать дальнейшее развитие и выстраивать собственную образовательную траекторию роста. Необходимость в формировании умений такого планирования обусловлена заказом общества на подготовку будущих специалистов в соответствии с современными требованиями, поскольку развитие инновационной экономики, наукоемких отраслей промышленности в России в текущих условиях нуждается в специалистах, которые способны к непрерывному самообучению, саморазвитию и могут эффективно адаптироваться к быстро изменяющимся, в соответствии с достижениями научно-технического прогресса, условиям профессиональной среды [1].

Однако в ходе проведенного анализа психолого-педагогической литературы можно сформулировать суждение о том, что в дидактических материалах представлено очень мало средств для формирования у школьников умений понимать и осознавать дефицит собственных знаний. Сформулированное суждение относится к различным предметным областям, в том числе к учебным предметам «Математика» и «Информатика», чей временной интегрированный вес в образовательной программе для школьников является существенным.

Вышесказанное определяет актуальность темы, которая связана с разработкой средств для формирования у школьников умений понимать и устанавливать дефицит своих знаний в разных педагогических ситуациях.

В рамках выделенной актуальности сформулируем проблему определения средств для формирования у обучающихся умений понимать дефицит собственных знаний в процессе обучения математике и информатике.

Для решения проблемы, в первую очередь, определим термин «дефицит собственных знаний». Необходимость этого определения связана с тем, что в научных трудах присутствуют лишь обобщенные описания содержания понятия «дефицит знаний». Строгое и общепринятое определение этого термина в известной нам литературе не представлено.

При определении рассматриваемого понятия обоснованным представляется использование приема отрицания уже установленного определения термина «знание». Будем строить отрицание для трактовки О.Б. Епишевой, которая определяет знание как «запоминание и воспроизведение изученного материала» [2, С. 93], что в деятельностном подходе указывает на операции, характерные для наличия знания.

Используя прием отрицания, в нашей работе «дефицит знаний» понимается как недостаток или отсутствие знаний, что фиксируется в неумении обучающегося выполнять конкретные действия, а также в неспособности воспроизвести уже изученный материал или освоить новый. Согласно полученному определению, осознание дефицита собственных знаний помогает обучающемуся выявить, какие знания и умения отсутствуют, в чем заключается невосприятие и непонимание учебных задач, определить причины неспособности к воспроизведению и интерпретации материала.

В контексте вышесказанного, на основе полученного определения, цель представленного эссе заключается в описании средств для формирования у обучающихся умений понимать дефицит собственных знаний и иллюстрации этих средств в процессе обучения математике и информатике. Для достижения поставленной цели необходимо проанализировать различные средства, в рамках двух педагогических ситуаций: первой – создания мотивации при введении нового материала, когда осознание дефицита знаний позволяет раскрыть необходимость к изучению и пониманию новой темы, и второй – коррекции результатов контроля или самоконтроля посредством выполнения работы над ошибками, допущенными при выполнении заданий по пройденной теме в контрольно-измерительных материалах.

Для разработки средств формирования умений понимать дефицит собственных знаний рассмотрим первую педагогическую ситуацию для предмета «Математика» на примере темы «Умножение дробей». Обучающиеся, уже владеющие операцией умножения дроби на натуральное число, при решении задач на это действие могут использовать известный им алгоритм, а в некоторых случаях — многократное сложение. Однако при переходе к задаче, требующей уже умножения дроби на дробь — например, при определении общей массы продукта, где масса одной единицы и количество единиц заданы дробными числами — обучающиеся сталкиваются с тем, что их знаний недостаточно для решения задачи. Возникает затруднение: известные способы не позволяют получить решение, поскольку обе числовые единицы представлены дробями. Это приводит к осознанию дефицита знаний — обучающиеся понимают, что им не хватает алгоритма умножения дроби на дробь.

Рассмотрим пример из курса информатики по теме «Одномерные массивы». Обучающиеся, владеющие операциями работы с простыми вычислениями переменных, могут решать задачи с переменными с помощью известных методов — таких как: объявление отдельных переменных для каждого значения и последовательное выполнение вычислений. Однако при переходе к задачам с массивами, требующим обработки большого объема однотипных данных — например, вычисление среднего арифметического оценок 30-ти учеников за контрольную работу — они сталкиваются с тем, что имеющихся знаний недостаточно для решения задачи. Это приводит к осознанию дефицита знаний, и обучающиеся понимают то, что им не хватает алгоритма работы с массивами данных.

В рассматриваемой педагогической ситуации эффективным средством для выявления дефицита знаний является организация рефлексивной деятельности обучающихся, основным приемом которой выступает диалог, направленный на мотивацию к изучению нового материала.

В таблице 1 представим примеры диалогов по первой педагогической ситуации по предметам «Математика» и «Информатика».

Таблица 1. Примеры диалогов по первой педагогической ситуации по предметам «Математика» и «Информатика»

| Предмет | Математика | Информатика |
|---|---|---|
| Класс | 6 | 9 |
| Тема | Умножение дробей | Одномерные массивы |
| Диалог | Учитель: «Можно ли решить эту задачу с помощью тех знаний, которые вы уже имеете?»<br>Ученик: «Я знаю, как умножить дробь на число, но здесь нужно умножить дробь на дробь. Я не знаю, как это сделать».<br>Учитель: «Что необходимо узнать для того, чтобы решить эту задачу?»<br>Ученик: «Мне нужно узнать правило умножения дроби на дробь». | Учитель: «Можно ли решить эту задачу с помощью тех знаний, которые вы уже имеете?»<br>Ученик: «Я знаю, как работать с переменными, но здесь нужно обработать 30 значений, а создавать 30 переменных очень долго и может вызвать ошибку. Я не знаю, как это решить».<br>Учитель: «Что необходимо узнать для того, чтобы решить эту задачу?»<br>Ученик: «Мне нужно узнать как работать с массивами данных». |

В результате формулирования ответов на вопросы аналогично составленных диалогов обучающиеся упорядочивают свои знания, находят в них пробелы и определяют направления своей дальнейшей учебной и познавательной деятельности для преодоления дефицита и усвоения новых знаний и умений.

Вторая педагогическая ситуация связана с необходимостью помочь обучающимся проанализировать допущенные ошибки в контрольных материалах и выделить причины этих ошибок. В качестве средства для формирования умений выделять дефицит собственных знаний в этой ситуации предлагаем выполнить анализ ошибок и провести работу по их исправлению. Анализ ошибочно выполненных заданий помогает осознать дефицит собственных знаний и понять, что эти пробелы нужно заполнить. При этом главное состоит в том, чтобы обучающиеся самостоятельно проанализировали свою работу, и важно не просто исправить ошибки, но и разобрать причины их появления.

В данной ситуации для формулировки заданий, направленных на формирование у обучающихся умений выявлять дефицит собственных знаний, можно использовать дидактический конструктор (набор стандартизированных фразовых (лексических) конструкций - вопросов, распределенных по тематическим блокам [3]) с целью осознания причины ошибочного решения и понимания, каких знаний обучающимся не хватает для правильного решения задачи.

Адаптируем дидактический конструктор, представленный в [3] и проиллюстрируем средства для формирования у обучающихся умений выделять дефицит собственных знаний при работе над ошибками после контрольных работ по математике по теме «Решение задач на нахождение части от целого». Предположим, что учащийся допустил следующую ошибку в задаче по математике: требуется найти остаток после продажи части товара в первый день, а затем найти часть от остатка во второй день, но учащийся вместо того, чтобы найти дробь от остатка после первого дня, искал дробь от завезенного количества товара, что привело к неверному результату. Отмеченная ошибка свидетельствует о непонимании того, что при работе с остатком необходимо каждый раз определять новое целое, от которого берется дробь. Для предмета «Информатика» по теме «Составление программ обработки числовых массивов», рассмотрим следующую предполагаемую допущенную обучающимся ошибку: при инициализации массива, учащийся использовал неправильный размер, что привело к выходу за границы массива при обращении к элементам, что указывает на недостаточное понимание принципов работы с индексами массива. Проблемы в указанных ситуациях состоят в том, что учащиеся не осознают дефицит собственных знаний, и чтобы эти проблемы решить, нужно дать обучающимся задачу, в которой была допущена ошибка и через дидактические вопросы направить учащихся к понимаю того, каких знаний им не хватает. В таблице 2 представлены примеры дидактического конструктора для второй педагогической ситуации по предметам «Математика» и «Информатика».

Таблица 2. Примеры дидактического конструктора для второй педагогической ситуации по предметам «Математика» и «Информатика»

| Предмет | Математика | Информатика |
|---|---|---|
| Класс | 6 | 9 |
| Тема | Решение задач на нахождение части от целого | Составление программ обработки числовых массивов |
| 1. Задача (прочитайте задачу из контрольной работы) | В магазин завезли 120 тонн муки. В первый же день продали 3/8 всей муки, за второй - 2/5 оставшейся. А в третий день продали 1/3 остатка после первых двух дней продажи. Сколько тонн муки осталось в конце 3 дня? | Напишите программу, которая создает массив для хранения температур за 7 дней, заполняет его значениями и находит максимальную температуру. |
| 2. Вопросы | а) Что необходимо понять или вспомнить для того, чтобы правильно решить эту задачу? б) Какие ошибки Вы допустили в контрольной работе при решении аналогичной задачи? Почему они возникли? | |
| 3. Теоретический материал (прочитайте представленный текст) | Основные операции с дробями – это умножение, деление, нахождение дроби от числа и числа по его дроби. В задачах с множеством шагов, важно соблюдать порядок действий: сначала находим часть от целого, затем работаем с остатком. Ошибки возникают из-за неверного определения числа, от | Массив размером N содержит ровно N элементов, индексы которых начинаются с 0 и заканчиваются на N−1. Значит последний доступный элемент — это arr[N−1], а arr[N] выходит за границы. Обращение к индексу, равному или большему размеру массива — это ошибка. |

| | | |
|---|---|---|
| | которого берется дробь. Внимательно анализируйте условие задачи. | Всегда помните: если массив объявлен как int arr[7], то допустимы только индексы 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 — никаких 7 и более. |
| 4. Алгоритм (решите задачу из пункта, выполнив действия пошагово) | 1) Определите последовательность действий.<br>2) Выполните каждое действие пошагово, записывая промежуточные результаты с пояснением.<br>3) Проверьте правильность вычислений на каждом этапе.<br>4) Запишите окончательный ответ. | 1) Объявите массив и заполните его значениями.<br>2) Возьмите первый элемент за максимальное значение и сохраните его в переменную.<br>3) Сравните и обновите переменную с максимальным значением, если текущий элемент имеет большее значение.<br>4) В ответ выведите найденное максимальное значение. |
| 5. Итоговый вопрос (ответьте на вопрос и объясните ответ) | Можете ли вы с помощью имеющихся знаний правильно решить многошаговую задачу с дробями? | Можете ли вы с помощью имеющихся знаний правильно найти максимальный элемент в одномерном массиве? |

Из вышесказанного, следует, что понимание дефицита собственных знаний у учеников ведет к формированию у обучающихся умений оценивать себя и учиться самостоятельно. Кроме того, это умение позволяет ему найти свой собственный путь развития как личности, а также дает перспективы для дальнейшего роста, что является важнейшим условием адаптации к быстро изменяющейся социальной среде.

Закончим представленный материал стихотворением, сочиненным одним из авторов эссе:

Под шелест бумаг и ластика скрип
Я вдруг понимаю, что много не знал.
А мир ускоряется — быстрый, как фильм,
Где чуть зазевался и тут же отстал.

Но именно в том, что тускло горит,
Я вижу возможность двигаться ввысь.
Уверен, что знаний хладный гранит,
Позволит и мне в своей жизни найтись.

Список литературы

1. Мельник, Г.И., Трунина, О.Е. Использование технологий дистанционного обучения в работе Школы юных физиков //European research. – 2016. – №. 1 (12). – С. 93-94.
2. Епишева, О.Б. Технология обучения математике и информатике на основе деятельностного подхода: кн. для учителя //М.: Просвещение. – 2003. – Т. 223. – С. 96.
3. Возная, В.С. Дидактический конструктор для создания учебных заданий, позволяющих учащимся выявлять и осознавать собственные дефициты в математических знаниях / В.С. Возная, Д.С. Ямина, И.Н. Семенова // Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий. – 2024. – № 3. – С. 117-123. – EDN RDCCIW.1

## «КАК ЛИЧНЫЕ КАЧЕСТВА Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО ПОМОГЛИ ЕМУ СОВЕРШИТЬ ОТКРЫТИЕ»

*Буховец Н.А.*
*Россия, г. Самара*
*Самарский государственный социально-педагогический университет, факультет математики, физики и информатики*
*Научный руководитель: к.п.н., доцент Иванюк М.Е.*

*Аннотация.* В эссе рассматривается роль личных качеств Николая Ивановича Лобачевского в процессе создания неевклидовой геометрии. Подчёркивается, что научный прорыв Лобачевского стал возможен не только благодаря его математическим способностям, но и благодаря независимости мышления, смелости перед авторитетами, трудолюбию, стойкости перед критикой и широте научных интересов. Анализируется, как эти качества помогли учёному преодолеть сопротивление научного сообщества, выдержать многолетнее непонимание и довести свои идеи до логического завершения. Эссе показывает, что личность Лобачевского — это пример гармонии разума и характера, благодаря которой стало возможным одно из крупнейших открытий в истории математики.

*Ключевые слова:* Лобачевский, личные качества, неевклидовая геометрия, независимость мышления, смелость учёного, критическое мышление, научная революция, стойкость, трудолюбие, научное открытие, философское мышление, научное одиночество, Евклид; история математики.

## How Lobachevsky's personal qualities helped him make his discovery

*Bukhovets N.A.*

*Russia, Samara*

*Samara State University of social sciences and education, Faculty of Mathematics, Physics and Computer Science*

*Scientific supervisor: Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor Ivanyuk M.E.*

*Abstract.* The essay examines the role of Nikolai Ivanovich Lobachevsky's personal qualities in the creation of non-Euclidean geometry. It emphasizes that Lobachevsky's scientific breakthrough became possible not only thanks to his mathematical abilities, but also due to his independent thinking, courage in the face of authority, diligence, resilience to criticism, and broad scientific interests. The analysis shows how these qualities helped the scholar overcome resistance from the scientific community, endure years of misunderstanding, and bring his ideas to their logical conclusion. The essay demonstrates that Lobachevsky's

personality represents a harmony of intellect and character that made possible one of the greatest discoveries in the history of mathematics.

*Keywords*: Lobachevsky, personal qualities, non-Euclidean geometry, independence of thought, scholarly courage, critical thinking, scientific revolution, resilience, diligence, scientific discovery, philosophical thinking, scientific solitude, Euclid, history of mathematics.

История научной мысли нередко напоминает драму, где центральное место занимают не только идеи, но и личности, их создавшие. Одним из таких персонажей является Николай Иванович Лобачевский — великий русский математик, чья работа перевернула представления о пространстве и положила начало новой эпохе в развитии науки. Его открытие неевклидовой геометрии стало не только научным событием исключительной важности, но и блестящей демонстрацией того, как личные качества учёного оказываются решающим фактором в процессе познания. Упрямство и независимость мысли, смелость перед авторитетами, трудолюбие, стойкость перед критикой, внутренний патриотизм, стремление к истине — все эти черты формировали Лобачевского как учёного и сделали возможным его прорыв.

Чтобы понять, как Лобачевский совершил своё открытие, необходимо взглянуть на него не только как на математика, но и как на человека, который сумел воплотить в жизнь дерзкую мысль там, где другие не решались выйти за пределы общепринятого. Личность Лобачевского — это синтез редких качеств, сочетающий глубину ума и твёрдость характера.

Первое и, пожалуй, ключевое качество Лобачевского — это независимость мышления. Он не боялся подвергать сомнению догмы, существовавшие более двух тысячелетий со времён Евклида. В те времена Пятый постулат Евклида считался чем-то неприкосновенным: веками учёные пытались доказать его, не осмеливаясь представить, что сам постулат может быть неверным или не единственно возможным. Такой подход создавал вокруг геометрии своеобразный идол, разрушить который мог лишь человек, чуждый слепому уважению к традиции.

Лобачевский обладал редкой способностью смотреть на проблему «извне». Он понимал, что доказательство невозможности Пятого постулата не следует принимать как веру, а нужно подвергать анализу. Именно независимость мысли позволила ему не застрять в привычном для учёных пути поиска прямого доказательства. Он двинулся в совершенно другую сторону — не стал доказывать постулат, а предположил: что, если он неверен?

Это смелое мысленное движение мог сделать только человек, способный отступить от авторитетов и занять самостоятельную позицию. Независимость мышления Лобачевского проявлялась и в повседневной научной работе: он был скептиком в лучшем смысле слова, умел критически оценивать доводы, формулировать вопросы, которые другим казались бессмысленными или нелепыми.

Такая свобода ума не является данностью: она вырабатывается и характером, и образованием, и опытом. С ранней юности Лобачевский интересовался не только математикой, но и философией, что способствовало формированию привычки ставить под сомнение общепринятые истины. Это качество помогло ему выйти за рамки Евклида и увидеть возможность иной геометрической реальности.

Совершить научную революцию, бросив вызов многовековой традиции, невозможно без смелости. Лобачевский обладал именно тем внутренним мужеством, которое позволяет учёному идти против течения, принимая на себя критику, непонимание и иногда насмешки.

В начале XIX века идея о существовании геометрии, отличной от евклидовой, казалась большинству специалистов абсурдной. Многие даже не пытались воспринимать работы Лобачевского всерьёз. Когда он представил свою теорию на заседании Казанского университета, реакция коллег была скорее скептической, чем поддерживающей.

Чтобы выдержать давление недоверия, требуется не только сила духа, но и уверенность в собственной правоте, которая рождается из тщательной работы и внутренней честности. Лобачевский был уверен не в том, что он обязательно прав, а в том, что его путь логически последователен и заслуживает развития. Это принципиальное различие. Он не ставил себя выше Евклида, но оставался честен перед логикой и собственной мыслью.

Такое мужество — это не только сильный характер, но и способность продолжать работу, когда внешняя поддержка отсутствует. Лобачевский продолжал совершенствовать свою геометрию, несмотря на холодный прием. Он был готов идти один по пути, который ещё не был кем-либо проторён.

Лобачевский, несмотря на гениальность, не был учёным-вдохновением, который ждёт озарения. Напротив, он был человеком исключительной работоспособности и дисциплины. Он сочетал административные обязанности ректора Казанского университета с интенсивной научной деятельностью, что само по себе требует колоссальной организованности.

Его привычка работать системно позволила ему последовательно развивать идею новой геометрии на протяжении многих лет. Идея не возникла одномоментно: это было долгие размышления, проверки, расчёты, построение аксиоматики и логических цепочек. Трудолюбие Лобачевского проявлялось в постоянных переработках текстов своих трудов. Он несколько раз переписывал и корректировал свои работы, стремясь к максимальной ясности.

Кроме того, он преподавал огромные курсы лекций, занимался реформированием университета, организовывал научную работу. Несмотря на занятость, он находил время для личных исследований — и именно эта самоотверженность позволила довести до конца идею неевклидовой геометрии.

Иными словами, открытие Лобачевского — результат не только гениальной идеи, но и огромной работы. Его трудолюбие было тем фундаментом, который поддерживал развитие теории, требовавшей не просто вдохновения, но систематичной работы на протяжении многих лет.

Открытие Лобачевского долгие годы оставалось непонятым. Его идеи не получили широкой известности ни в России, ни за рубежом. Лобачевский же не боялся одиночества. Он выступил с докладом первым, опубликовал свои работы и открыто заявлял о новой геометрии. Это требовало огромной внутренней силы. Его стойкость проявилась в том, что он продолжал развивать свои идеи, несмотря на отсутствие признания.

Такое качество — не просто упрямство, а глубокая верность научной истине. Лобачевский не искал славы; он искал решения. Он верил в корректность своих рассуждений и продолжал идти вперёд.

Эта стойкость позволила ему выдержать годы непонимания, которые могли бы сломать менее стойкого человека. И только спустя время, уже ближе к концу жизни, его идеи начали получать признание в Европе.

Лобачевский был не только математиком, но и мыслителем широких горизонтов. Он изучал логику, механику, астрономию, физику, химию, философию. Такое мировоззрение помогло ему взглянуть на геометрию как на систему, а не набор правил.

Он понимал, что аксиомы — это не абсолютные истины, а исходные допущения. Философская подготовка позволила ему рассматривать аксиоматическую систему как логическую модель, а не отражение единственно возможной реальности.

Такой подход дал ему смелость предположить существование других моделей пространства. Он мыслит как философ: если система не содержит логического противоречия, она имеет право на существование.

Этот взгляд стал основой для будущего развития математики XX века, где множество аксиоматических систем сосуществуют равноправно. Но в XIX веке такой взгляд был революционным.

Широта научных интересов также сделала Лобачевского более гибким в мышлении: он был способен мыслить абстрактно, анализировать логическую структуру рассуждений и выходить на более высокий уровень обобщения.

Лобачевский был глубоко предан своему университету и развитию науки в России. Его деятельность как ректора Казанского университета — пример того, как личные качества организатора и просветителя способствуют научному росту.

Он реформировал учебный процесс, пытался развивать научную среду, создавать атмосферу, в которой студенты и преподаватели могли бы заниматься исследованиями. Это не только укрепляло его собственный опыт, но и повышало его уверенность в важности научной работы.

Патриотизм Лобачевского проявлялся не громкими словами, а реальным делом: он понимал, что развитие науки в России — часть его долга. Эта мотивация давала ему внутреннюю силу и поддерживала его стремление продолжать исследования.

Открытие Лобачевского не было случайностью, не было внезапной вспышкой гения. Это результат сочетания множества личных качеств: независимости ума, смелости, трудолюбия, стойкости, широты мышления и внутреннего достоинства.

Его пример показывает, что великие открытия совершаются не только благодаря таланту, но и благодаря характеру. Лобачевский обладал теми качествами, которые позволили ему идти по пути одиночного первопроходца, бороться с предрассудками, сомневаться в авторитетах и верить в собственный ум.

Его личность служит примером того, что человек, вооружённый стойкостью, мужеством и критическим мышлением, способен открыть новые горизонты там, где другие видели только стены.

Список литературы

1. Каган, В. Ф. Лобачевский. Москва: Издательство Академии наук СССР, 1948.
2. Модзалевский Л.Б. Материалы для биографии Н.И. Лобачевского. – Изд. АН СССР, М –Л., 1948.
3. Лаптев, Б. Л. Николай Иванович Лобачевский. Биографический очерк. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1976.
4. Янишевский Е.П. Историческая записка о жизни и деятельности Н.И. Лобачевского. Казань, 1868.
5. Юшкевич А. П. История математики в России. — М.: Наука, 1968.

## АКТУАЛЬНОСТЬ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИДЕЙ Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

*Штоколенко Е.А.*

*Россия, г. Оренбург*

*ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный педагогический университет», физико-математический факультет*

*Научный руководитель: д.п.н., к. ф.-м. н., декан физико-математического факультета Игнатушина И.В.*

*Аннотация.* Эссе посвящено анализу педагогических идей Николая Ивановича Лобачевского, которые, несмотря на свою историческую давность, сохраняют высокую актуальность для современной школы. Выделяются ключевые принципы обучения, сформулированные Н.И. Лобачевским*:* активная роль ученика, достигаемая через микрооткрытия и выполнение творческих заданий; неразрывная связь умственного и нравственного воспитания; важность последовательности и наглядности в преподавании; необходимость демонстрации практического применения знаний. Особое внимание уделяется предложенной Н.И. Лобачевским трёхступенчатой модели изучения математики, сочетающей синтетические и аналитические методы. Делается вывод о том, что реализация этих идей в практике современного учителя способствует достижению образовательных целей, заложенных в новых стандартах, – формированию не только предметных знаний, но и метапредметных умений, а также всестороннему развитию личности.

*Ключевые слова:* педагогическое наследие Н.И. Лобачевского, принципы обучения математике.

## THE RELEVANCE OF N.I. LOBACHEVSKY'S PEDAGOGICAL IDEAS

*Shtokolenko E.A.*
*Russia, Orenburg*
*Orenburg State Pedagogical University, Faculty of Physics and Mathematics*
*Scientific supervisor: Dr. of Pedagogy, PhD in Physics and Mathematics, Dean of the Faculty of Physics and Mathematics, Ignatushina I.V.*

*Abstract.* The article is devoted to the analysis of Nikolai Ivanovich Lobachevsky's pedagogical ideas, which, despite their historical antiquity, remain highly relevant for modern schools. The author highlights the key principles of teaching formulated by N.I. Lobachevsky: the active role of the student, achieved through micro-discoveries and creative assignments; the inseparable connection between mental and moral education; the importance of consistency and visualization in teaching; and the necessity of demonstrating the practical application of knowledge. Special attention is given to N.I. Lobachevsky's proposed three-stage model of mathematics education, which combines synthetic and analytical methods. It is concluded that the implementation of these ideas in the practice of a modern teacher contributes to achieving the educational goals set out in the new standards, which include the formation of not only subject-specific knowledge, but also meta-subject skills, as well as the comprehensive development of the individual.

*Keywords*: N.I. Lobachevsky's pedagogical legacy and principles of teaching mathematics.

Николай Иванович Лобачевский (1792–1856) не только великий математик, но и выдающийся педагог. Во время ректорства в Казанском университете он отвечал за уровень образования в Казанском округе, поэтому в его «Наставлениях учителям математики в гимназиях» (1830) можно найти интересные идеи об организации учебного процесса. Изучением его педагогического наследия занимались следующие ученые-педагоги: П.С. Александров [4], И.Н. Бронштейн [4], Б.А. Лаптев[4], В.В. Морозов [4], Э.Д. Днепров [4], Л.Р. Шакирова [1] и т.д.

Для меня эта тема представляет интерес, поскольку данные идеи можно использовать в педагогической практике современного учителя.

Одна из идей Н. И. Лобачевского заключается в том, что ученик в процессе обучения должен быть активным. Поэтому педагогу не следует строить урок только на строгой передаче информации, которую ученикам требуется заучить. Наоборот, он должен давать ученикам возможность сделать микрооткрытие на основе известных им фактов. Для этого следует использовать творческие задания. Например, это могут быть сочинения на конкретные темы, затрагивающие как нравственные ценности, так и исторические события, касающиеся развития той или иной науки. Выполнение таких заданий формирует у учеников необходимые в жизни умения и навыки, а также метапредметные и личностные универсальные учебные действия. Кроме того оно способствует углубленному изучению родного языка и развитию мышления учащихся. Система знаний в понимании Лобачевского, не конгломерат абстрактных сведений или набор заученных и окостеневших суждений, но живая, дышащая, органичная взаимосвязь представлений и понятий, основанная на ясном понимании общих правил и закономерностей. «Чтобы придти к сим правилам, –писал он, – надобно частные и раздельные представления… соединить в одно и с такими-то сложными и отвлеченными понятиями рассуждать о всяком предмете [4; с. 522].

Н. И. Лобачевский считал, что нельзя разделять нравственное и умственное воспитание. Ведущую роль в деле воспитания «начал нравственности» Лобачевский отводил преподаванию литературы (которая, по его словам, призвана «представлять примеры доброй нравственности и высоких добродетелей») и – более того – истории. «Кроме истории, – писал он, – нет другого предмета, который бы приличнее мог служить и верно вести к этой возвышенной цели, особенно биография великих мужей в древней истории». Эти мысли Лобачевского о воспитательном значении преподавания истории поразительно напоминают слова Белинского: «Ничто так не расширяет духа человеческого, ничто не окрыляет его таким могучим орлиным полетом в безбрежные равнины царства бесконечного, как созерцание мировых явлений жизни»; «Зрелище жизни великого человека есть всегда прекрасное зрелище: оно возвышает душу… возбуждает деятельность» [5; с. 240] Для того чтобы ученики были одновременно образованными и интеллигентными, важно чтобы педагоги передавали не только предметные знания, но и знания в сферах общественной жизни и культуры.

Выдающийся педагог не принимал деление предметов на эмпирические и рациональные, так как считал, что при изучении каждого предмета, без исключения, могут применяться как эмпирические, так и рациональные методы познания. Особенно Н.И. Лобачевский отмечал, что обучение математике проходит три ступени:

- на первой должны использоваться синтетические методы познания [4; с. 2]; на этой ступени происходит в основном чувственное познание материала;

- на второй ступени уже можно использовать аналитические методы вместе с синтетическими; на этой ступени у ученика формируются связи между понятиями;

-на третей ступени (обычно это период обучения в университете) рекомендуется использовать в основном аналитические методы познания, проявляющиеся в строгом математическом учении.

На примере такой дисциплины как математика, мы видим, что в одном предмете есть элементы как эмпирического, так и рационального характера.

Н. И. Лобачевский подчеркивал, что нельзя переходить к изучению следующей темы, если ученики не усвоили предыдущую. В противном случае у них могут появиться пробелы в знаниях, которые будут накапливаться при изучении материала связанного с темой, которая не была усвоена. Поэтому он выделял принцип последовательности как один из основных в обучении. Согласно нему, темы не должны идти в любом порядке, каждая следующая должна вытекать из предыдущей.

Ученый-математик считал важным знакомство учеников с практическим применением любого знания. Это относится как к математике, так и к другим предметам. Характеризуя цель и сущность математического образования в гимназиях, он писал: «Польза от сего рода учения бывает двоякая: применение его к потребностям в нашей жизни и дальнейшее развитие самой науки» [4; с. 23].

Николай Иванович обращал особое внимание на то, что изучение любой науки должно начинаться с введения ясных и отчётливых основных понятий, при этом отмечал, что в начале изучения предмета большую роль играет наглядность. Ведь от того насколько будут понятны основы зависит дальнейший успех в изучении любой науки. «Исходными требованиями Лобачевского к школьному обучению были ясность и отчетливость первоначальных понятий. «Первые понятия, с которых начинается какая-нибудь наука, – подчеркивал он, – должны быть ясны и приведены к самому меньшему числу. Тогда только они могут служить прочным и достаточным основанием учения» [2; с. 186]. «От ясности первых понятий зависит успех всего учения, а потому и почитаю лучше утвердить в них всякого лишнем повторением, нежели допустить темность, предположив, что они легко были приобретены» [4; с. 153].

Также, по мнению учёного, важно, чтобы в процессе обучения ученики переходили от конкретных представлений к абстрактным понятиям, и чтобы у них формировалась определённая система знаний, основанная на связях между абстрактными понятиями.

Н. И. Лобачевский говорил о том, что ученик усвоил какое-то правило только в том случае, если он способен применить его как к реальным условиям, так и к абстрактным. Неуспех ученика в познавательной деятельности следует из неуспеха в педагогической деятельность учителя. Это говорит о том, что степень понимания материала учеником напрямую зависит от методов, которые использует педагог при объяснения той или иной темы. «Важнейшую роль в реализации учебно-воспитательных задач Лобачевский отводил методам обучения. Первая же фраза, с которой он начинает свое «Наставление», утверждает, что «в математике всего важнее способ преподавания». Опираясь на личный педагогический опыт, Лобачевский расценивал методическое мастерство учиться как вернейший залог достижения высоких учебных результатов. «Готов я думать, – писал он в предисловии к учебнику алгебры, – что если учение математики, столь свойственное уму человеческому, остается для многих безуспешно, то это по справедливости должно приписать недостаткам в искусстве и способе преподавания. Не утверждая с дерзостью, чтоб я постигнул совершенство в последнем, но хочу надеяться, что избрал прямую дорогу к цели, впрочем ожидаю подтверждения от других.»

Все эти идеи актуальны в практике обучения XXI века и представляют невероятную педагогическую ценность. Они основаны на цели, которая заключается в том, чтобы общество было культурным, т. е. образованным и интеллигентным. Если об этом забывать, то человечество несомненно будет деградировать как в культурном, так и в научном смысле. Вспоминая о важности всестороннего развития личности, вновь вводят стандарты, требующие от образовательных организаций как умственного, так и нравственного развития подрастающего поколения. Конечно, мы, как будущие педагоги, не должны разделять умственное и нравственное развитие как учеников, так и себя. Поскольку всестороннее развитие способствует адекватному восприятию окружающего мира.

Список литературы

1. Курс математики Тимофея Осиповского, т. II, Спб., 1801.
2. Лобачевский Н.И. Полное собрание сочинений. Т. 1./Москва: Наука, 1980.
3. Лобачевский и университет / сост. Л.Р. Шакирова. Изд-е 2-е, переработанное. - Казань: Казан. ун-т, 2018.
4. Научно-педагогическое наследие Н.И. Лобачевского/ ред. В.В. Морозова, П.С.Александрова, И. Н. Бронштейна, Б. А. Лаптева, Э. Д. Днепрова и др. Москва,1976.

5. Полное собрание сочинений. Т. 3./ В.Г. Белинский. Изд-е АН СССР, 1953.

## ЛОБАЧЕВСКИЙ КАК ПЕДАГОГ И ОРГАНИЗАТОР НАУКИ

*Дияжева В.Е.*

*Россия, г. Самара*

*Самарский государственный социально-педагогический университет, факультет математики, физики и информатики*

*Научный руководитель: к.п.н., доцент Иванюк М.Е.*

*Аннотация.* В эссе рассматривается многогранная личность Николая Ивановича Лобачевского, выдающегося математика, педагога и администратора. Подчеркивается, что его вклад в науку не ограничивается созданием неевклидовой геометрии, но включает в себя значительную работу по реформированию Казанского университета, превратившегося под его руководством в один из ведущих научных центров России. Анализируются его педагогические методы, направленные на развитие самостоятельного мышления у студентов, и организаторские способности, проявившиеся в расширении инфраструктуры университета, привлечении талантливых преподавателей и эффективном управлении ресурсами. Эссе подчеркивает взаимосвязь этих двух ролей в формировании наследия Лобачевского как просветителя и вдохновителя будущих поколений ученых.

*Ключевые слова:* Лобачевский, педагог, организатор науки, образование, математика

## Lobachevsky as a teacher and organizer of science

*Diyazheva V.E.*

*Russia, Samara*

*Samara State University of social sciences and education, Faculty of Mathematics, Physics and Computer Science*

*Scientific supervisor: Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor Ivanyuk M.E.*

*Abstract.* The essay explores the multifaceted personality of Nikolai Ivanovich Lobachevsky, a prominent mathematician, educator, and administrator. It emphasizes that his contributions to science extend beyond the creation of non-Euclidean geometry, encompassing his significant work in reforming Kazan University, which he transformed into one of Russia's leading scientific centers. The essay delves into his pedagogical methods, focusing on fostering independent thinking among students, and his organizational skills, evident in the expansion of the university's infrastructure, the recruitment of talented faculty members, and the efficient management of resources. The essay highlights the interconnectedness of these two roles in shaping Lobachevsky's legacy as an educator and inspiration for future generations of scientists.

*Keywords*: Lobachevsky, teacher, science organizer, education, mathematics

Николай Иванович Лобачевский – фигура, чей масштаб и значимость выходят далеко за рамки просто талантливого математика. Он был новатором, перевернувшим представления о пространстве и времени, а также выдающимся педагогом и организатором науки, сумевшим создать в Казанском университете мощный центр математической мысли, ставший колыбелью для будущих поколений ученых. Его деятельность на этих поприщах неразрывно связана с его научными открытиями, поскольку именно страсть к познанию, стремление к истине и новаторский дух питали его педагогические и организаторские усилия.

Сегодня обширное наследие Лобачевского представляет собой неотъемлемую часть математической классики, активно используемой в учебном процессе по всему миру. Его роль в трансформации геометрии колоссальна: ученый проложил абсолютно новые пути, открыв дорогу к изучению ранее невидимых паттернов в геометрических объектах и пространственных моделях. Эти исследования заложили фундамент для дальнейших революционных шагов и прорывов в данной научной сфере. Имя Николая Ивановича Лобачевского по праву занимает место среди наиболее выдающихся мировых умов в геометрии и математике в целом.

Лобачевский пришел в Казанский университет в 1812 году в возрасте 19 лет. Он быстро проявил себя как талантливый математик и уже в 1814 году начал преподавать. В эпоху господства традиционного схоластического образования Лобачевский стал одним из первых преподавателей, кто не просто транслировал знания, а стремился развить у студентов критическое мышление и самостоятельность. Он видел свою задачу не в простом наполнении голов учеников фактами, а в формировании исследователей, способных самостоятельно искать истину. [4]

Вопрос подготовки человека к жизни – это одна из главных стратегических задач любого сообщества. Под этим подразумевается не просто передача академических сведений, но целостное формирование личности, способной ориентироваться в потоке информации, осознавать свои ценности и применять навыки на практике. Для того чтобы эта грандиозная миссия была успешно выполнена, требуется не просто наличие учебных заведений, а глубокое понимание сути происходящего, выраженное в ясных целях и незыблемых правилах. Эту идею метко сформулировал Н.И. Лобачевский: «Во всяком преподавании должны быть цель и суждение на твёрдых началах».

Одним из ключевых аспектов его педагогического подхода было стремление к наглядности и практическому применению математических знаний. Он отказывался от сухого формализма, предпочитая объяснять сложные концепции через конкретные примеры и задачи. Лекции Лобачевского отличались ясностью и доступностью, он умел увлечь аудиторию своим энтузиазмом и любовью к математике. Его ученики вспоминали, что он говорил: "Математика – это язык, на котором говорит природа". [2]

Вот что пишет выпускник 1846 года П.П. Перцов: «Лекции Николая Ивановича легко было записывать, и из моих подробных записей получалось очень хорошее руководство к экзаменам. В своих чтениях Николай Иванович развивал всегда подробно каждую формулу, в противоположность своим печатным трудам, где он часто просто говорит: «от такой-то формулы переходим к такой-то», а как происходит этот переход – не разъясняет, чем сильно затрудняется усвоение вопроса» [1].

Важной чертой педагогического стиля Лобачевского была его готовность к дискуссии и открытость к новым идеям. Он поощрял студентов задавать вопросы, критически оценивать существующие теории и самостоятельно искать ответы. Это особенно важно, учитывая контекст времени, когда любое отклонение от общепринятых догм встречалось с подозрением и неприятием. Именно в такой атмосфере интеллектуальной свободы и поощрения самостоятельного мышления у Лобачевского сформировалось целое поколение талантливых математиков, которые внесли значительный вклад в развитие науки.

Кроме того, Лобачевский занимался разработкой новых учебных программ и пособий. Он понимал, что для эффективного обучения необходимо адаптировать материал к уровню подготовки студентов и учитывать их интересы. Его учебники отличались ясностью изложения, логической структурой и практической направленностью. Они не только помогали студентам усваивать материал, но и прививали им вкус к самостоятельной работе и научному исследованию.

Вклад Лобачевского в развитие Казанского университета как научного центра трудно переоценить. Он не только сам активно занимался научными исследованиями, но и создал благоприятные условия для работы других ученых. Он занимал различные административные должности, в том числе был ректором университета в течение 19 лет (1827-1846), и использовал свое влияние для развития математического образования и науки в целом.

Одним из важнейших направлений его деятельности была организация научно-исследовательской работы в университете. Он привлекал к преподаванию талантливых ученых, поддерживал их исследовательские проекты и создавал условия для обмена опытом и знаниями. Под его руководством в Казанском университете были созданы новые лаборатории и кабинеты, приобреталось современное оборудование, что позволяло проводить передовые исследования в различных областях науки.

Лобачевский был убежден в важности международного научного сотрудничества. Он налаживал связи с учеными из других стран, приглашал их для чтения лекций и участия в научных конференциях. Это способствовало обмену идеями и повышению авторитета Казанского университета на международной арене. [3]

Особое внимание Лобачевский уделял развитию математической библиотеки университета. Он понимал, что для успешной научной работы необходимо иметь доступ к новейшей литературе и научным публикациям. Благодаря его усилиям библиотека университета пополнилась множеством ценных книг и журналов, что сделало ее одним из лучших математических библиотек в России.

Лобачевский также инициировал издание "Ученых записок Казанского университета", которые стали важным научным журналом, публикующим результаты исследований, проводимых в университете. Это позволило ученым университета представлять свои работы широкой научной общественности и способствовало развитию научного дискурса.

Невозможно говорить о Лобачевском как о педагоге и организаторе науки, не упомянув его главное научное достижение – создание неевклидовой геометрии. Его смелая гипотеза о возможности существования геометрии, отличной от евклидовой, стала настоящим переворотом в математике и оказала огромное влияние на развитие науки в целом. [5]

Именно новаторский дух, который позволил Лобачевскому поставить под сомнение вековые догмы, пронизывал все сферы его деятельности. Он не боялся идти против течения, отстаивать свои убеждения и поддерживать новые идеи. Его педагогический подход, ориентированный на развитие критического мышления и самостоятельности, был прямым отражением его научного мировоззрения.

Организуя научную работу в университете, Лобачевский стремился создать атмосферу, в которой ученые могли бы свободно экспериментировать, искать новые решения и не бояться ошибок. Он понимал, что только в такой атмосфере возможно совершить настоящие научные открытия.

В истории науки лишь немногие личности смогли кардинально трансформировать наше понимание мира. Николай Иванович Лобачевский, несомненно, принадлежит к их числу. Его новаторские идеи не только обогатили математику, но и перевернули фундаментальные представления о пространстве. Помимо выдающихся научных свершений, Лобачевский оставил значимый след в развитии высшего образования России, проявив себя как талантливый руководитель и автор учебных материалов. Его жизненный пример и непреклонная преданность науке продолжают вдохновлять на упорный труд и любовь к познанию.

Список литературы

1. Авдеев Ф.С. Н.И. Лобачевский - ректор и преподаватель Казанского университета // Ученые записки ОГУ. Серия: Гуманитарные и социальные науки. 2012. №2.

2. Кандауров И. Н. Педагогическая деятельность Н. И. Лобачевского // Известия РГПУ им. А. И. Герцена. 2007. №39.

3. Попов А.Ф. Воспоминания о службе и трудах профессора Казанского университета Н.И.Лобачевского.// Ученые записки казанского университета, 1857, том IV.
4. Янишевский Е.П. Историческая записка о жизни и деятельности Н.И. Лобачевского. Казань, 1868.
5. Модзалевский Л.Б. Материалы для биографии Н.И. Лобачевского. – Изд. АН СССР, М –Л., 1948.1

## РАБОТА С ЧЕРТЕЖОМ КАК ОСНОВА УСПЕШНОГО РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

*Галиакберова Диана Рашитовна*
*Россия, г. Казань*
*КФУ, Институт математики и механики*
*имени Николая Ивановича Лобачевского*
*Научный руководитель: доцент, к.н. Тимербаева Н.В..*

*Аннотация. Данное эссе посвящено роли чертежа в успешном решении геометрических задач, представляющих значительную сложность для многих учеников на итоговых экзаменах по математике. Рассматриваются основные трудности, возникающие при работе с чертежами, включая неправильное понимание условий задачи и недостаточную точность построений.*

*Ключевые слова: геометрия, чертеж, алгоритм решения, геометрическое мышление, методика обучения, школьная математика, пространственное представление, готовые чертежи.*

## Work with Drawings as the Basis for Successful Solving of Geometric Problems

*Diana Rashitovna Galiyakberova*
*Kazan, Russia*

*Kazan Federal University, Institute of Mathematics and Mechanics named after Nikolai Ivanovich Lobachevsky*

*Scientific supervisor: Associate Professor N.V. Timerbaeva, Ph.D.*

*Abstract. This essay is devoted to the role of drawings in successfully solving geometric problems that present significant challenges for many students on final mathematics exams. The main difficulties encountered when working with drawings are discussed, including incorrect understanding of task conditions and insufficient accuracy in constructions.*

*Keywords: geometry, drawing, solution algorithm, geometric thinking, teaching methodology, school mathematics, spatial representation, ready-made drawings.*

ОГЭ по математике включает в себя восемь заданий по геометрии, из них пять в первой части, остальные во второй. По профильной математике 5 заданий из раздела «Геометрия». Согласно исследованию Московского Центра Качества Образования, наиболее трудными для выпускников являются:

1. Стереометрия: объемы и площади сложных пространственных фигур. В ЕГЭ-2025 это задача №14. С ней справились лишь 6,75% учеников.
2. Планиметрия: работа с двухмерными геометрическими фигурами. С №17 справились только 7,69%.

Курс геометрии считается одним из самых сложных предметов в школьной программе. Для решения геометрической задачи требуется не только знание большого количества теоретического материала в виде определений, теорем, свойств и формул, что и пугает учащихся, но и важно умение правильно строить чертеж. «Хороший чертеж – половина решения задачи».

При изучении геометрии перед учащимися ставятся огромное количество целей. В результате освоения курса геометрии, обучающиеся должны научиться решать задачи на построение, доказательство и свободно пользоваться геометрическими понятиями и теоремами

Одним из самых важных навыков для школьников является, конечно же, умение решать примеры. Главным помощником в решении упражнений является чертёж. На основе чертежа строится решения почти всех задач.

Существует несколько условий для успешного построения чертежа. Правдоподобность чертежа включает соответствию условию задачи и отсутствию противоречий в геометрических построениях. В чертеже не должны присутствовать лишние элементы, важно исключить элементы, о которых не говорится в условие и минимизировать отвлекающие детали. Отметить все углы, отрезки, точки на чертеже с помощью букв и отметок необходимое условие. Чертеж должен обладать аккуратностью, линии должны быть проведены с помощью линейки и карандаша. Рисунок к задаче должен быть крупным, удобным для восприятия и отличаться достаточным масштаба для анализа. При необходимости должен присутствовать выносной чертеж, который поможет разобраться в отдельных элементах.

При работе с чертежом у школьников возникают всевозможные проблемы. Первая проблема в понимании задачи и правильное отображение данных условий. Вторая проблема возникает при обработке и анализе уже готовых чертежей.

Одной из самых главных задач изучения геометрии является развитие геометрического мышления у обучающихся и использование полученных теоретических знаний на практике при решении задач. И параллельно с этим идёт задача развития пространственного представления, как уже говорилось до этого.

Одним из способов улучшения методов изучения геометрии является усовершенствование методов применения наглядного материала при изучении геометрии.

Учителю важно формировать у школьников алгоритм решения геометрической задачи, включающий обязательный этап построения чертежа. Такой алгоритм включает в себя:

1. Чтение условий задачи
2. Выполнение чертежа с буквенными обозначениями
3. Краткая запись условия данной задачи
4. Выделение элементов чертежа (обозначение углов, равных сторон, перпендикулярности)
5. Поиск требуемых формул и теорем на черновике или в уме.
6. Выполнение выносного чертежа (при необходимости)
7. Анализ данной задачи, соединение элементов чертежа с искомыми величинами, поиск путей решения.
8. Синтез – составление и выполнение пошагового алгоритма действий
9. Запись ответа

Предложенный алгоритм является универсальным и его можно использовать для решения широкого класса геометрических задач. Применяя алгоритм действий на постоянной основе, Обучающиеся освоят навык анализа и научатся решать геометрические задачи разного уровня сложности. Применение алгоритма позволит систематизировать процесс решения задачи и сделает его более логичным и структурированным. Это особенно важно на начальных этапах обучения. Учащиеся в процессе учатся разбивать решение задачи на этапы и повышают уровень математической речи и записи. Важно в процессе решения интерпретировать алгоритм под каждую конкретную задачу.

Особой разновидностью задач, для решения которых применим данный алгоритм, являются задачи на готовых чертежах. Задачи на готовых чертежах позволяют экономить время, которое затрачивается на изображение определенной геометрической фигуры, закреплять пройденную тему, активизировать мыслительные процессы у обучающихся.  Геометрические задачи на готовых чертежах встречаются на экзаменах, которым детям предстоит пройти в 9 и 11 классах. На ОГЭ и ЕГЭ по математике геометрические задачи занимают важное место. Умение правильно строить чертеж, анализировать и делать выводы по нему является основой успеха для выполнения задания.

При построении чертежа в решении геометрических задач учащиеся допускают ошибки и неточности. Педагогическая деятельность играет ключевую роль в профилактике и предупреждении типичных ошибок обучающихся. Учитель должен приводить решение геометрической задачи с пошаговым объяснением и тщательным обоснованием каждого шага, использовать наглядные примеры, и попытаться найти подход к каждому ученику, если у кого-то возникают проблемы.  Интерактивные чертежи, доски и различные сайты для обучения 1гораздо упростят работу учителю и ускорят процесс понимания материала учащимися.

На основе разобранных ошибок приведем практические рекомендации для успешного решения геометрических задач:

1. Внимательно читать условие задачи.

2. При построении чертежа соблюдать пропорции и масштаб элементов.

3. Правильно обозначать и подписывать элементы чертежа.

4. Соблюдать порядок построения элементов чертежа.

5. Строить чертеж аккуратно с помощью карандаша, линейки, циркуля и т.д.

6. Не строить ненужные элементы для решения конкретной геометрической задачи.

7. Строить выносной чертеж при необходимости

Работа с чертежом - это не технический навык, а важнейший элемент математического образования, формирующий целый комплекс универсальных учебных действий.

Методически грамотное обучение построению и анализу чертежа, использование готовых рисунков, работа над ошибками — всё это делает изучение геометрии не набором формальных правил, а живым процессом познания, который развивает мышление и формирует настоящую математическую культуру.

Список литературы

1. Александров А.Д., Нецветаев А.Ю. Геометрия. Учебное пособие. — СПб.: Лань, 2018.

2. Арнольд В.И. Что такое математика? — М.: МЦНМО, 2018.

3. Гусев В.А., Мордкович А.Г. Математика: учебник для студентов педагогических вузов. — М.: Просвещение, 2019.

4. Иванов Г.Е. Методика преподавания математики в средней школе. — М.: Академия, 2017.

5. Игнатьев Е.И. Геометрия и практика. — М.: Либроком, 2019.

6. Коваленко В.Н. Психология усвоения знаний в обучении. — Саратов: Научная книга, 2018.

7. Кудрявцев Л.Д. Современная математика и её преподавание. — М.: Физматлит, 2017.

8. Мякишев Г.Я., Буховцев Б.Б. Физика. Учебник для 10—11 классов общеобразовательных учреждений. — М.: Просвещение, 2019.

9. Перельман Я.И. Занимательная геометрия. — Ростов-на-Дону: Феникс, 2018.

10. Рыжик В.И. Изучение стереометрии в старших классах. — М.: Просвещение, 2017.

11. Столяр А.А. Логико-математический анализ учебного процесса. — Минск: Народная асвета, 2018.
12. Фридман Л.М. Как научиться решать задачи. — М.: Мир, 2019.
13. Шапиро И.М. Решение задач по геометрии. — М.: Юрайт, 2018.
14. Эглит И.Э. Основы методики преподавания математики. — Петрозаводск: Карельский научный центр РАН, 2017.
15. Янченко Г.Н. Формирование пространственного воображения учащихся средствами математики. — Красноярск: КГПУ, 2018.

## УЧИТЕЛЬ XXI ВЕКА – СОРАТНИК Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

*Мелентьева В.А.*

*Россия, г. Арзамас*

*Арзамасский гуманитарно-педагогический институт им. А.П. Гайдара (филиал Национально-исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского), факультет естественных и математических наук*

*Научный руководитель: кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики, физики и информатики Сангалова М.Е.*

*Аннотация.* В работе обсуждается роль современного учителя. Цель его работы – не столько передача знаний учащимся, сколько формирование у них способности к критическому осмыслению информации. В этом контексте можно считать учителей соратниками Н.И. Лобачевского, а самого великого геометра – ориентиром и примером для педагогических работников.

*Ключевые слова:* современный учитель, Н.И. Лобачевский, критическое мышление.

## TEACHER OF THE 21ST CENTURY IS A COMPANION OF N.I. LOBACHEVSKY

*Melentyeva V.A.*

*Russia, Arzamas*

*Arzamas Humanitarian and Pedagogical Institute named after A.P. Gaidar (branch of the National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod)*

*Scientific supervisor: Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Physics and Computer Science Sangalova M.E.*

*Abstract.* The paper discusses the role of the modern teacher. The goal of their work is not so much the transfer of knowledge to pupils as the development of their ability to critically understand information. In this context, teachers can be considered associates of N.I. Lobachevsky, and the great geometer himself can be considered a reference point and example for educators.

*Keywords*: modern teacher, N.I. Lobachevsky, critical thinking

Кажется неуместным сравнение обычного школьного учителя и великого русского математика, ректора Казанского федерального университета. Конечно, разница велика! Она столь же непреодолима, как разрыв между поколениями. Но что, если посмотреть с другой точки зрения? Ведь, сменив угол наблюдения, можно даже в кружке увидеть тор.

Так вот, например, деятельность современного студента, связанная со взаимодействием с различными структурными подразделениями университета такими, как центры карьеры и компетенций, показывает, что сейчас в любой профессии на первую позицию выходит критическое мышление. Это не про тотальное недоверие к окружающему миру, а про способность анализировать все, что происходит вокруг, и то, что говорят другие, умение находить новые варианты и решения. Именно это сейчас является задачей педагога: разрушение старых установок, обучение детей не сухому заучиванию материала, а анализу, возможности подвергать сомнению известные или сказанные факты – мыслить критически. Без такого важного навыка у подрастающего поколения могут сложиться ложные установки: абсолютная вера во все (с одной стороны, это даже хорошо: экономисты посчитали, что, если люди начнут больше доверять друг другу, то уровень ВВП в нашей стране возрастет в десятки раз, но с другой – не каждые фраза, факт или объект являются действительными) или полное недоверие этому миру. Сложно сказать, что из этого хуже. Поэтому на учителя сейчас возложена большая ответственность, ведь проработка мягких навыков – залог успешного человека. А если вспомнить то, как смело Николай Иванович Лобачевский обнародовал свою новую геометрию, чем это не показатель критического мышления и разрушения догм? Не каждый ученый смог бы отойти от общепринятых в математическом сообществе установок, чтобы обнаружить истину и совершить великое открытие!

Итак, можно отметить, что общее у современного учителя и великого ученого действительно есть. И это крайне важно, что как будущие, так уже и действующие учителя могут передавать знания великих деятелей науки и культуры дальше своим ученикам, вдохновляться примером жизни и научного пути таких людей, как Николай Иванович Лобачевский. Именно они дают возможность педагогам привлекать обучающихся к различным областям деятельности: науке, творчеству, спорту и ряду других важнейших сфер, влияющих на полноценное развитие общества.

Николай Иванович Лобачевский был ученым, ректором, библиотекарем [2], автором книг и пособий, в том числе «Наставления учителям математики в гимназиях» [1], и это не все его социальные роли. Сейчас сложно найти по-настоящему профессионального человека, если он развивается только в одном направлении будь, то горизонтальное или вертикальное. Согласитесь, учителя – очень многозадачные сотрудники. Помимо того, что сейчас ни один педагог не ведет только одну дисциплину, он еще и совмещает далекие когда-то от обучения направления, учителя разбираются в искусстве, медиа или спорте, имеют достаточно разнообразные навыки, находятся постоянно в развитии и идут в ногу со временем. Педагог – яркий пример того, как в одном человеке может совмещаться множество интересов и умений.

Все эти аргументы делают учителей, понимающих, что понятия «индивидуальный подход», «творчество в работе» и «критическое мышление» - важны и необходимы для работы с подрастающим поколением, настоящими братьями по оружию великого ученого, создателя новой геометрии – Николая Ивановича Лобачевского.

Список литературы

1. Лобачевский Н.И. Наставления учителям математики в гимназиях // АН СССР. Труды института истории естествознания. 1948, Том 2, – с. 554-560. URL: https://proza.ru/2017/09/02/393 (дата обращения 19.11.2025)
2. Шакирова Л.Р. Лекция «Н.И. Лобачевский – педагог и наставник». URL: https://proza.ru/2017/09/02/393 (дата2 обращения 19.11.2025)

## ПРОБЛЕМЫ ВНЕДРЕНИЯ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕХНОЛОГИИ УДЕ В РОССИЙСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

*Исмагилова С.А.*

*Россия, г. Казань*

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,*

*Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского*

*Научный руководитель: к.п.н., доцент Фалилеева М.В.*

*Аннотация.* В эссе приведён анализ причин низкой распространённости технологии укрупнения дидактических единиц, разработанной П. М. Эрдниевым, в российском школьном математическом образовании. Описаны барьеры внедрения технологии в повсеместную практику, а также подчёркивается необходимость системного подхода для улучшения школьного математического образования.

*Ключевые слова:* математическое образование, технология УДЕ, П. М. Эрдниев, укрупнение дидактических единиц, инновации в обучении, методика преподавания.

# PROBLEMS OF INTRODUCTION AND DISSEMINATION OF TECHNOLOGY OF ENLARGEMENT OF DIDACTIC UNITS IN RUSSIAN MATHEMATICAL EDUCATION

*Ismagilova S.A.*

*Russia, Kazan*

*Kazan (Volga Region) Federal University, Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics*

*Scientific supervisor: Ph.D., Associate Professor M.V. Falileeva.*

*Annotation.* The essay provides an analysis of the reasons for the low prevalence of didactic unit aggregation technology developed by P. M. Erdniev in Russian school mathematics education. The barriers to the introduction of technology into widespread practice are described, and the need for a systematic approach to improve school mathematics education is emphasized.

*Keywords:* mathematical education, the technology of enlarging didactic units, P. M. Erdniev, consolidation of didactic units, innovations in teaching, teaching methods.

В цифровую эпоху обилие разнообразных гаджетов, искусственный интеллект, бесконечный поток новых данных сформировали у современных детей так называемое фрагментарное или клиповое мышление [5]. Этот тип восприятия окружающего мира – не их вина, а феномен целого поколения, имеющий ряд как положительных, так и негативных особенностей. Они напрямую оказывают влияние на процесс обучения и способность к усвоению новых знаний: у детей всё чаще наблюдаются трудности с концентрацией, нарушаются причинно-следственные связи в рассуждениях, а способности к анализу и обобщению могут и вовсе отсутствовать [3]. Однако фрагментарное мышление в условиях образовательного процесса имеет свои плюсы, среди которых способность быстро адаптироваться к новым условиям и высокая скорость восприятия информации, особенно через визуальные образы и эмоциональную вовлеченность.

На сегодняшний день проблема снижения учебных способностей учащихся стоит наиболее остро. Задача современного учителя состоит в поиске эффективной технологии, которая не только устранит негативные последствия клипового мышления детей, но и поможет сильным сторонам учащихся проявиться в процессе обучения. К счастью, есть революционное решение, эффективность которого экспериментально доказана и по сей день подтверждается опытом ряда педагогов [7]. Это технология укрупнения дидактических единиц П. М. Эрдниева – методика, благодаря которой материал усваивается быстрее и прочнее, качество знаний значительно улучшается, а ребёнок эмоционально вовлечён в процесс обучения. Многолетние исследования, опыт апробаций технологии на уроках педагогами по всей стране и внушительные результаты экспериментальных классов доказали эффективность технологии при обучении математике в рамках школьного, среднего специального и высшего образования. Технология УДЕ была рекомендована к применению в массовой школе президиумом АПН СССР ещё в 1980 году, а в 1998 году была удостоена премии Президента РФ [7].

Возникает справедливый вопрос: почему, несмотря на свою высокую эффективность, технология УДЕ П. М. Эрдниева не получила широкого распространения в школьном математическом образовании? В своём эссе я проведу анализ барьеров, стоящих на пути интеграции УДЕ в школьное математическое образование.

Как повысить качество обучения? Как разрешить противоречие между увеличением объёма информации и ограниченным количеством учебного времени? Как сформировать у учеников умения сравнивать, обобщать, рассуждать? Перед каждым неравнодушным учителем стоят остро одни и те же вопросы. В первую очередь, для поиска ответов учителя обращаются к учебно-методической базе. Она играет ключевую роль в процессе обучения. Хорошая методическая база должна не только содержать весь необходимый дидактический материал, но и идти в ногу со временем, опираться на эффективные методики и технологии.

Учебники, напрямую использующие технологию УДЕ, – большая редкость. Как еще в 1967 году отмечал Ф. М. Шустеф в своей методике преподавания алгебры, в учебниках и задачниках мало задач обратного характера, и мало задач, которые в совокупности рассматривают прямые и обратные задачи [8]. Помимо этого, как писал Я. И. Груденов, в большинстве сборников отсутствуют задачи, не имеющие решения, хотя их анализ необходим для развития критического мышления учащихся [2]. Проанализировав несколько уже современных учебников, я заметила, что отдельные элементы технологии УДЕ всё-таки живут: процесс сравнения, нахождения аналогий, составление и решение обратных задач, проверка результата, анализ нескольких способов решения. Однако их появление в методической базе встречается фрагментарно, отчего и совокупная польза применения технологии стремится к нулю. Укрупнение дидактических единиц – это система, которую необходимо реализовать глобально через учебные и методические материалы.

Один из принципов технологии Пюрви Мучкаевича – это представление информации в образно-наглядной форме. Особенно это важно в периоды обобщения и систематизации изученного материала, повторения и укрупнения знаний по теме. Анализ учебников показал, что представление большого блока информации в таблицах и схемах – это редкое явление, который выступает, скорее, в роли исключения, чем правила.

Технология Эрдниева зачастую воспринимается как сложная и нестандартная. Большинство методических материалов и сборников лишь описывают технологию укрупнения дидактических единиц как общую методику преподавания математики без конкретной привязки к определённым учебникам, темам или заданиям. Авторы методических пособий, ссылаясь на Эрдниева, не переносят его подходы в методические рекомендации. Российский математик-педагог Ю. М. Колягин еще в 1977 году отмечал: «Система задач в учебниках не отвечает задачам образования» [4]. И сегодня, на мой взгляд, смело можно повторить эти слова. Смена образовательных стандартов, появление новых методик и цифровых технологий в обучении не решило проблему – ученик всё так же решает задачи из учебника, не замечает закономерностей в своих действиях и проходит мимо целостной картины знаний.

Не вызывает сомнений и тот факт, что для реализации технологии УДЕ в школьном математическом образовании необходима масштабная работа учителя по реконструкции всех видов уроков, их содержания и последовательности в календарно-тематическом планировании. У каждого учителя есть своя методическая система, своё видение образовательного процесса. Современные дети воспринимают и обрабатывают информацию не так, как раньше: мышление учащихся перестроилось на сетевую модель, основанную на ярких образах и восприятии разрозненных фрагментов информации [6]. Однако нынешняя система учебников, расписание занятий и методика учителей оказались не адаптированы под изменения, и до сих пор основываются на линейном изучении материала. Российский философ Ф. И. Гиренок в своих научных работах середины 1990-х годов предсказывал устаревание линейного мышления и скорый переход к мышлению нелинейного типа [1]. Внедрение принципа УДЕ подразумевает одновременное изучение сходных и обратных понятий, гибкость системы и блочное построение курса математики, что идёт вразрез с сегодняшней моделью подачи материала. Большое внимание при таком подходе необходимо уделять логическим связям и взаимоотношениям между единицами знания в рамках одной темы, одного блока и между различными модулями курса.

В этой работе недостаточно от случая к случаю применять отдельные компоненты УДЕ. Зафиксировать положительную динамику качественных результатов учащихся можно лишь при системном подходе к внедрению в уроки идей П. М. Эрдниева. Чтобы в полном объёме реализовать принципы УДЕ, необходимо провести переформатирование календарно-тематического планирования уроков в школе. Но насколько это осуществимо? Теоретически это возможно. Однако на практике неравнодушные учителя сталкиваются с множеством препятствий на пути к инновациям. Одним из таких барьеров является администрация школы, в которой преподаёт учитель. Зачастую любые изменения в КТП, особенно те, что не прописаны в официальных документах, воспринимаются в штыки и даже не берутся на рассмотрение. Причина этому – возможные претензии со стороны инспекций и методических служб во время проверок в образовательном учреждении. С другой стороны, учитель несёт ответственность за содержание и качество календарно-тематического планирования, и возникают риски, связанные с наложением дисциплинарного высказывания на педагога, а также с нарушением прав и свобод обучающихся. Несомненно, это значительная преграда, оказывающая сопротивление любым изменениям в КТП уроков.

Еще одним барьером на пути распространения технологии выступает профессиональная подготовка учителей математики. Чтобы в полной мере реализовать данный подход, необходимо рассматривать курс математики через призму УДЕ. Важно организовать работу учащихся так, чтобы каждый из них ориентировался в системе математических объектов, их взаимоотношений, умел самостоятельно обнаруживать эти связи, – что требует высокого уровня математической подготовки, методического видения образовательного процесса, большого стажа преподавательской деятельности. Такого учителя смело можно назвать архитектором учебного процесса: он методично совершенствует свое мастерство, а в своей непрерывной школьной практике такой педагог неудержимо стремится к инновациям. Однако несмотря на то, что в программы педагогических профилей ВУЗов включено изучение концепции УДЕ, но без связи с практикой реализации, поэтому отражения в массовой школьной практике они, к сожалению, не нашли. Таким образом, профессиональная подготовка учителей оказалась недостаточной для преподавания школьного курса математики по технологии укрупнения дидактических единиц.

УДЕ – это системная технология обучения, комплекс мер по реконструкции привычной подачи материала, целостный подход к образованию, который пока не интегрирован в содержание школьных курсов. В этом и заключается главное противоречие: технология П. М. Эрдниева получила официальное государственное и международное признание, в научно-педагогическом сообществе считается одним из самых эффективных методов обучения, но не нашла широкого применения в структуре школьного математического образования.

По моему мнению, возвращение к идеям Пюрви Мункаевича – это не шаг назад, а прочный фундамент эффективной системы образования в будущем, который позволит устранить последствия клиповой культуры и сделать обучение осмысленным. Технология УДЕ существует для того, чтобы учителя реализовали свою подлинную миссию – учили детей понимать математику, видеть логику в своих действиях, мыслить самостоятельно, думать и анализировать, а не просто вычислять и действовать по алгоритму. Эрдниев П. М. создал технологию, опередившую своё время. Она, в сущности, требует колоссальной перестройки системы образования на всех её уровнях. Остаётся надеяться, что наше поколение учителей сможет реализовать потенциал методики УДЕ в школе не как модный тренд в обучении, а как инструмент формирования целостного мировоззрения учащихся.

Список литературы

1. Гиренок Ф. И. Клиповое сознание / Ф.И. Гиренок. – Москва: Проспект, 2018. – 256 с.
2. Груденов Я. И. О психологических основах построения системы упражнений по математике и методике преподавания геометрии в VI—VII классах : автореф. дис. канд. пед. наук / Я. И. Груденов ; АПН РСФСР. Науч.-исслед. ин-т общего и политехн. образования ; науч. рук. В. М. Брадис. — Калинин, 1965. — 24 с. — URL: https://www.mathedu.ru/text/grudenov_ya_i_1965/p0/
3. Ефремова О. И. «Клиповое мышление» как характеристика информационной компетентности личности // Вестник Таганрогского института имени А. П. Чехова. 2020. № 1. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/klipovoe-myshlenie-kak-harakteristika-informatsionnoy-kompetentnosti-lichnosti
4. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математике / Ю. М. Колягин ; Научно-исслед. ин-т школ М-ва просвещения РСФСР. — Ч. 1 : Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. — М. : Просвещение, 1977. — 111 с. — Библиогр. в прим. — URL: https://www.mathedu.ru/text/kolyagin_zadachi_v_obuchenii_matematike_ch1_1977/p1/
5. Купчинская М. А., Юдалевич Н. В. Клиповое мышление как феномен современного общества // Бизнес-образование в экономике знаний. 2019. № 3 (14). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/klipovoe-myshlenie-kak-fenomen-sovremennogo-obschestva
6. Ломбина Т. Н., Юрченко О. В. Особенности обучения детей с клиповым мышлением // Общество: социология, психология, педагогика. 2018. № 1. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/osobennosti-obucheniya-detey-s-klipovym-myshleniem
7. Саввин А. С. Роль трехпараметрического механизма переработки информации в активизации познавательного интереса студентов (на примере изучения курса высшей математики в ВУЗе) : дис. канд. пед. наук : 13.00.01 / А. С. Саввин. — Якутск, 2000. — 122 с. — РГБ ОД, 61:01-13/419-2. — URL: http://www.dslib.net/obw-pedagogika/rol-trehparametricheskogo-mehanizma-pererabotki-informacii-v-aktivizacii.html
8. Шустеф Ф. М. Методика преподавания алгебры : курс лекций / Ф. М. Шустеф. — Минск : Вышэйшая школа, 1967. — 224 с. — Библиогр.: с. 206—220 (282 назв.). — URL: https://www.mathedu.ru/text/shustef_metodika_prepodavaniya_algebry_1967/p0/

*Электронное издание*

# ЛОБАЧЕВСКИЙ И XXI ВЕК

**Материалы XII научно-образовательной студенческой конференции, посвященной Дню рождения Н.И. Лобачевского**

***Компьютерная верстка***
***А.А. Нурмухаметовой***

Гарнитура «Times New Roman, Calibri».