

УТОЧНЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СВЯЗАННЫХ ЗАДАЧ О СВОБОДНЫХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ КОМПОЗИТНОЙ ПЛАСТИНЫ, ОКРУЖЕННОЙ АКУСТИЧЕСКИМИ СРЕДАМИ

В.Н. Паймушин^{1,2}, Р.К. Газизуллин¹

¹*Казанский национальный исследовательский технический университет
имени А.Н. Туполева, г. Казань, 420111, Россия*

²*Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия*

Аннотация

На основе использования дискретно структурной модели деформирования многослойных пластин при малых перемещениях, деформациях и учете внутреннего трения материалов слоев по модели Кельвина–Фойгта рассмотрены две задачи о прохождении моногармонической звуковой волны сквозь тонкую композитную прямоугольную пластину, шарнирно закрепленную в проеме абсолютно жесткой перегородки. При постановке первой задачи предполагается, что пластина находится между двумя полубесконечными пространствами и на нее падает плоская звуковая волна с заданным амплитудным значением давления звуковой волны. При постановке второй задачи считается, что пластина находится между двумя абсолютно жесткими преградами, одна из них за счет гармонических колебаний с заданной амплитудой перемещений формирует падающую на пластину звуковую волну, а другая неподвижна и имеет деформируемое энергопоглощающее покрытие из материала с высокими демпфирующими свойствами. Поведение акустических сред описывается классическими волновыми уравнениями, основанными на модели идеальной сжимаемой жидкости. Построены точные аналитические решения сформулированных задач, на их основе проведено исследование звукоизоляционных свойств и параметров напряженно-деформированного состояния композитной пластины, армированной углеродной тканью, в зависимости от частоты падающей на пластину звуковой волны. Показано, что при высокочастотном акустическом воздействии механику деформирования элементов конструкции из волокнистых композитов необходимо описывать уточненными уравнениями движения, имеющими большую степень точности и содержательности ввиду формирования в них практически трехмерного напряженно-деформированного состояния с компонентами одного порядка.

Ключевые слова: многослойная пластина, модель типа С.П. Тимошенко, дискретно-структурная модель, двумерные уравнения равновесия и движения, аналитическое решение, модель Кельвина–Фойгта, звуковая волна, параметр звукоизоляции, частота колебаний, напряженно-деформированное состояние

Введение

Исследованию процесса прохождения звуковых волн сквозь тонкие пластины (в том числе и композитные) посвящено достаточно большое количество работ [1–5]. В них для описания механики деформирования пластины, как правило, используются простейшие соотношения теории пластин, основанные на введении

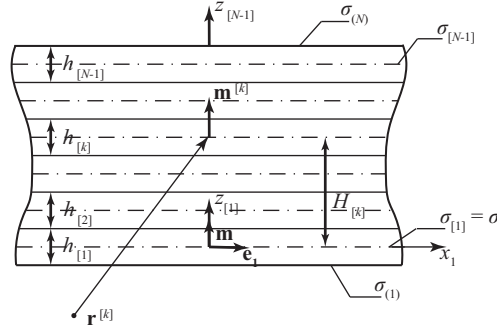


Рис. 1. Дискретизация композитной пластины по толщине

ряда известных упрощающих гипотез и предположения о том, что при прохождении звуковой волны в пластине формируются главным образом лишь тангенциальные компоненты тензора напряжений. С целью дальнейшего развития полученных ранее результатов [6] и исследования влияния частоты падающей на пластину звуковой волны на параметры формирующегося в пластине динамического напряженно-деформированного состояния для постановки задачи об акустическом воздействии на пластину ниже будет использоваться разработанная ранее дискретно структурная модель деформирования многослойных пластин [7], позволяющая получить решения, практически приближающиеся к решению на основе уравнений трёхмерной теории упругости.

1. Уравнения теории многослойных пластин при малых перемещениях и деформациях

Предположим, что пластина состоит из $M = N - 1$ слоев, пространства которых $V^{[k]}$ отнесены к параметризациям $\mathbf{R}^{[k]} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + z_{[k]} \mathbf{m}$, $-h_{[k]} \leq z_{[k]} \leq h_{[k]}$. Будем считать, что слои в направлении вектора единичной нормали \mathbf{m} к срединным плоскостям $\sigma_{[k]}$ слоев имеют толщину $h_{[k]}$, а через x_1, x_2 обозначены ортогональные декартовы координаты на некоторой плоскости σ , принятой в качестве базы параметризации (рис. 1).

Для описания механики деформирования каждого $[k]$ -го слоя будем использовать кинематическую модель типа С.П. Тимошенко [8–10], принимая для векторов перемещений $\mathbf{U}^{[k]}$ представления

$$\mathbf{U}^{[k]} = \mathbf{u}^{[k]} + z_{[k]} \boldsymbol{\gamma}^{[k]} = u_i^{[k]} \mathbf{e}_i + w^{[k]} \mathbf{m} + z_{[k]} \left(\gamma_i^{[k]} \mathbf{e}_i + \gamma^{[k]} \mathbf{m} \right); \quad k = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (1)$$

При малых деформациях, перемещениях и поворотах представлениям (1) соответствуют тангенциальные деформации $\varepsilon_i^{[k]}$, $\gamma_{12}^{[k]}$, деформации поперечного обжатия $\varepsilon_3^{[k]}$ и поперечных сдвигов $\gamma_{i3}^{[k]}$, вычисляемые по формулам

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^{[k]} &= e_{ii}^{[k]} + z_{[k]} \Omega_{ii}^{[k]}, & \gamma_{12}^{[k]} &= e_{12}^{[k]} + e_{21}^{[k]} + z_{[k]} \left(\Omega_{12}^{[k]} + \Omega_{21}^{[k]} \right), \\ \varepsilon_3^{[k]} &= \varepsilon_{33}^{[k]} = \gamma^{[k]}, & \gamma_{i3}^{[k]} &= 2 \left(e_{i3}^{[k]} + z_{[k]} \Omega_{i3}^{[k]} \right); \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$e_{ij}^{[k]} = u_{j,i}^{[k]}, \quad 2e_{i3}^{[k]} = w_{,i}^{[k]} + \gamma_i^{[k]}, \quad \Omega_{ij}^{[k]} = \gamma_{j,i}^{[k]}, \quad 2\Omega_{i3}^{[k]} = \gamma_{,i}^{[k]}. \quad (3)$$

Введем в рассмотрение N векторов перемещений

$$\mathbf{v}^{(k)} = u_i^{(k)} \mathbf{e}_i + w^{(k)} \mathbf{m}; \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

точек граничных плоскостей $z_{[1]} = -h_{[1]}/2$, $z_{[N-1]} = h_{[N-1]}/2$, внутренних плоскостей сопряжения слоев и составим $N - 2$ условий сопряжения слоев пластины по перемещениям в виде

$$\mathbf{U}^{[k]}(z_{[k]} = -h_{[k]}/2) = \mathbf{v}^{(k)}, \quad \mathbf{U}^{[k]}(z_{[k]} = h_{[k]}/2) = \mathbf{v}^{(k+1)}; \quad k = 1, 2, \dots, N - 2. \quad (5)$$

При подстановке представлений (1) и (4) из условий (5) следуют зависимости

$$\begin{aligned} u_i^{[k]} &= \frac{u_i^{(k+1)} + u_i^{(k)}}{2}, & w^{[k]} &= \frac{w^{(k+1)} + w^{(k)}}{2}, \\ \gamma_i^{[k]} &= \frac{u_i^{(k+1)} - u_i^{(k)}}{h_{[k]}}, & \gamma^{[k]} &= \frac{w^{(k+1)} - w^{(k)}}{h_{[k]}}, \end{aligned} \quad (6)$$

а при их подстановке в соотношения (3) приходим к зависимостям

$$\begin{aligned} e_{ij}^{[k]} &= \frac{e_{ij}^{(k+1)} + e_{ij}^{(k)}}{2}, & \omega_i^{[k]} &= \frac{\omega_i^{(k+1)} + \omega_i^{(k)}}{2}, \\ \Omega_{ij}^{[k]} &= \frac{e_{ij}^{(k+1)} - e_{ij}^{(k)}}{h_{[k]}}, & \Omega_{i3}^{[k]} &= \frac{\omega_i^{(k+1)} - \omega_i^{(k)}}{h_{[k]}}; \quad k = 1, 2, \dots, N - 1, \end{aligned} \quad (7)$$

в которых введены обозначения

$$e_{ij}^{(k)} = u_{j,i}^{(k)}, \quad \omega_i^{(k)} = w_{,i}^{(k)}. \quad (8)$$

Будем считать материалы слоев оболочки линейно упругими и ортотропными, причем оси ортотропии совпадают с осями выбранной системы координат. Для такого материала при учете его вязкоупругих свойств возникающие в пластине компоненты напряжений с компонентами деформаций можно связать зависимостями

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha}^{[k]} &= \tilde{g}_{\alpha 1}^{[k]} \varepsilon_1^{[k]} + \tilde{g}_{\alpha 2}^{[k]} \varepsilon_2^{[k]} + \tilde{g}_{\alpha 3}^{[k]} \varepsilon_3^{[k]}, & \sigma_{\alpha\beta}^{[k]} &= \tilde{G}_{\alpha\beta}^{[k]} \gamma_{\alpha\beta}^{[k]}, \\ \alpha &\neq \beta; \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad \beta = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\tilde{g}_{\alpha\beta}^{[k]}$, $\tilde{G}_{\alpha\beta}^{[k]}$ – дифференциальные операторы, которые при использовании модели Кельвина – Фойгта [11–14] имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{12}^{[k]} &= \tilde{G}_{21}^{[k]} = G_{21}^{[k]} \left(1 + \frac{\delta_{12}^{[k]}}{\pi\omega} \frac{\partial}{\partial\tau} \right), & \tilde{G}_{13}^{[k]} &= G_{13}^{[k]} \left(1 + \frac{\delta_{13}^{[k]}}{\pi\omega} \frac{\partial}{\partial\tau} \right), \\ \tilde{G}_{23}^{[k]} &= G_{23}^{[k]} \left(1 + \frac{\delta_{23}^{[k]}}{\pi\omega} \frac{\partial}{\partial\tau} \right), & \tilde{g}_{11}^{[k]} &= \frac{E_1^{[k]} (1 - \nu_{23}^{[k]} \nu_{32}^{[k]})}{\Delta^{[k]}} \left(1 + \frac{\delta_1^{[k]}}{\pi\omega} \frac{\partial}{\partial\tau} \right), \\ \tilde{g}_{12}^{[k]} &= \tilde{g}_{21}^{[k]} = \frac{E_1^{[k]} (\nu_{21}^{[k]} + \nu_{23}^{[k]} \nu_{31}^{[k]})}{\Delta^{[k]}} \left(1 + \frac{\delta_1^{[k]}}{\pi\omega} \frac{\partial}{\partial\tau} \right) = \\ &= \frac{E_2^{[k]} (\nu_{12}^{[k]} + \nu_{13}^{[k]} \nu_{32}^{[k]})}{\Delta^{[k]}} \left(1 + \frac{\delta_2^{[k]}}{\pi\omega} \frac{\partial}{\partial\tau} \right); & \overleftarrow{1, 2, 3}, \\ \Delta^{[k]} &= 1 - \nu_{12}^{[k]} \nu_{21}^{[k]} - \nu_{23}^{[k]} \nu_{32}^{[k]} - \nu_{31}^{[k]} \nu_{13}^{[k]} - 2\nu_{12}^{[k]} \nu_{23}^{[k]} \nu_{31}^{[k]}; \end{aligned} \quad (10)$$

$\delta_\alpha^{[k]}$, $\delta_{\alpha\beta}^{[k]}$ – логарифмические декременты колебаний при осевых и сдвиговых деформациях, соответственно.

Предположим, что на пластину в направлении оси Oz действуют поверхностные усилия $p^{(1)}$, $p^{(N)}$, приложенные к граничным плоскостям $z_{[1]} = -h_{[1]}/2$, $z_{[N-1]} = h_{[N-1]}/2$ соответственно. При таком виде нагружения при использовании составленных соотношений (1)–(3), (6)–(9), исходя из вариационного принципа Гамильтона – Остроградского, может быть получена система дифференциальных уравнений движения следующего вида:

$$\begin{aligned}
 f_1^{(k)} = & \frac{h_{[k]}\tilde{g}_{11}^{[k]}}{6}u_{1,11}^{(k+1)} + \frac{h_{[k]}\tilde{g}_{11}^{[k]} + h_{[k-1]}\tilde{g}_{11}^{[k-1]}}{3}u_{1,11}^{(k)} + \frac{h_{[k-1]}\tilde{g}_{11}^{[k-1]}}{6}u_{1,11}^{(k-1)} + \\
 & + \frac{h_{[k]}\tilde{G}_{12}^{[k]}}{6}u_{1,22}^{(k+1)} + \frac{h_{[k]}\tilde{G}_{12}^{[k]} + h_{[k-1]}\tilde{G}_{12}^{[k-1]}}{3}u_{1,22}^{(k)} + \frac{h_{[k-1]}\tilde{G}_{12}^{[k-1]}}{6}u_{1,22}^{(k-1)} + \\
 & \frac{h_{[k]}\left(\tilde{g}_{12}^{[k]} + \tilde{G}_{12}^{[k]}\right)}{6}u_{2,12}^{(k+1)} + \frac{h_{[k]}\left(\tilde{g}_{12}^{[k]} + \tilde{G}_{12}^{[k]}\right) + h_{[k-1]}\left(\tilde{g}_{12}^{[k-1]} + \tilde{G}_{12}^{[k-1]}\right)}{3}u_{2,12}^{(k)} + \\
 & + \frac{h_{[k-1]}\left(\tilde{g}_{12}^{[k-1]} + \tilde{G}_{12}^{[k-1]}\right)}{6}u_{2,12}^{(k-1)} + \frac{\tilde{g}_{13}^{[k]} + \tilde{G}_{13}^{[k]}}{2}w_{,1}^{(k+1)} + \\
 & + \frac{\tilde{G}_{13}^{[k]} - \tilde{g}_{13}^{[k]} - \tilde{G}_{13}^{[k-1]} + \tilde{g}_{13}^{[k-1]}}{2}w_{,1}^{(k)} - \frac{\tilde{g}_{13}^{[k-1]} + \tilde{G}_{13}^{[k-1]}}{2}w_{,1}^{(k-1)} + \\
 & + \frac{\tilde{G}_{13}^{[k]}}{h_{[k]}}u_1^{(k+1)} - \left(\frac{\tilde{G}_{13}^{[k]}}{h_{[k]}} + \frac{\tilde{G}_{13}^{[k-1]}}{h_{[k-1]}}\right)u_1^{(k)} + \frac{\tilde{G}_{13}^{[k-1]}}{h_{[k-1]}}u_1^{(k-1)} - \\
 & - \frac{h_{[k]}\rho_p^{[k]}}{6}\ddot{u}_1^{(k+1)} - \frac{h_{[k]}\rho_p^{[k]} + h_{[k-1]}\rho_p^{[k-1]}}{3}\ddot{u}_1^{(k)} - \frac{h_{[k-1]}\rho_p^{[k-1]}}{6}\ddot{u}_1^{(k-1)} = 0; \quad \overrightarrow{1}, \overleftarrow{2}, \\
 f_3^{(k)} = & \frac{h_{[k]}\tilde{G}_{13}^{[k]}}{12}w_{,11}^{(k+1)} + \frac{5\left(h_{[k]}\tilde{G}_{13}^{[k]} + h_{[k-1]}\tilde{G}_{13}^{[k-1]}\right)}{12}w_{,11}^{(k)} + \frac{h_{[k-1]}\tilde{G}_{13}^{[k-1]}}{12}w_{,11}^{(k-1)} + \\
 & + \frac{h_{[k]}\tilde{G}_{23}^{[k]}}{12}w_{,22}^{(k+1)} + \frac{5\left(h_{[k]}\tilde{G}_{23}^{[k]} + h_{[k-1]}\tilde{G}_{23}^{[k-1]}\right)}{12}w_{,22}^{(k)} + \frac{h_{[k-1]}\tilde{G}_{23}^{[k-1]}}{12}w_{,22}^{(k-1)} + \\
 & + \frac{\tilde{g}_{13}^{[k]} + \tilde{G}_{13}^{[k]}}{2}u_{1,1}^{(k+1)} + \frac{\tilde{g}_{13}^{[k]} - \tilde{G}_{13}^{[k]} - \tilde{g}_{13}^{[k-1]} + \tilde{G}_{13}^{[k-1]}}{2}u_{1,1}^{(k)} - \frac{\tilde{g}_{13}^{[k-1]} + \tilde{G}_{13}^{[k-1]}}{2}u_{1,1}^{(k-1)} + \\
 & + \frac{\tilde{g}_{23}^{[k]} + \tilde{G}_{23}^{[k]}}{2}u_{2,2}^{(k+1)} + \frac{\tilde{g}_{23}^{[k]} - \tilde{G}_{23}^{[k]} - \tilde{g}_{23}^{[k-1]} + \tilde{G}_{23}^{[k-1]}}{2}u_{2,2}^{(k)} - \frac{\tilde{g}_{23}^{[k-1]} + \tilde{G}_{23}^{[k-1]}}{2}u_{2,2}^{(k-1)} + \\
 & + \frac{\tilde{g}_{33}^{[k]}}{h_{[k]}}w^{(k+1)} - \left(\frac{\tilde{g}_{33}^{[k]}}{h_{[k]}} + \frac{\tilde{g}_{33}^{[k-1]}}{h_{[k-1]}}\right)w^{(k)} + \frac{\tilde{g}_{33}^{[k-1]}}{h_{[k-1]}}w^{(k-1)} - \\
 & - \frac{h_{[k]}\rho_p^{[k]}}{6}\ddot{w}^{(k+1)} - \frac{h_{[k]}\rho_p^{[k]} + h_{[k-1]}\rho_p^{[k-1]}}{3}\ddot{w}^{(k)} - \frac{h_{[k-1]}\rho_p^{[k-1]}}{6}\ddot{w}^{(k-1)} + p^{(k)} = 0,
 \end{aligned} \tag{11}$$

составленная относительно неизвестных $U^{(k)} = \left\{u_i^{(k)}, w^{(k)}\right\}^T$. Заметим, что для первого и $[N-1]$ -го слоев соответствующие уравнения движения получаются из (11) при $U^{(0)} = 0$, $U^{(N+1)} = 0$, а для остальных слоев необходимо положить $p^{(k)} = 0$.

В дальнейшем будем считать, что пластина имеет прямоугольную форму в плане с размерами a , b , а действующие на нее моногармонические давления изменяются во времени по законам (ω – круговая частота, $i = \sqrt{-1}$) $p^{(1)} = \tilde{p}^{(1)}e^{i\omega\tau}$, $p^{(N)} = \tilde{p}^{(N)}e^{i\omega\tau}$. Тогда в случае шарнирного опирания торцевых сечений пластины решения уравнений (11), удовлетворяющие граничным условиям $u_{1,1}^{(k)} = 0$, $u_2^{(k)} = 0$, $w^{(k)} = 0$ при $x_1 = 0$, $x_1 = a$; $u_{2,2}^{(k)} = 0$, $u_1^{(k)} = 0$, $w^{(k)} = 0$ при $x_2 = 0$, $x_2 = b$,

будут иметь вид (здесь и далее $x = x_1$, $y = x_2$)

$$\begin{aligned} u_1^{(k)} &= e^{i\omega\tau} \sum \tilde{u}_{1mn}^{(k)} \cos \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y, & u_2^{(k)} &= e^{i\omega\tau} \sum \tilde{u}_{2mn}^{(k)} \sin \lambda_m x \cdot \cos \lambda_n y, \\ w^{(k)} &= e^{i\omega\tau} \sum \tilde{w}_{mn}^{(k)} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\lambda_m = m\pi/a$, $\lambda_n = n\pi/b$. Здесь и всюду далее, если не оговаривается иное, суммирование ведется по $m = 1, 3, \dots, M$ и $n = 1, 3, \dots, N$. Представив далее амплитудные значения давлений $\tilde{p}^{(k)}$ в виде разложений в ряд Фурье

$$\tilde{p}^{(k)} = \sum \tilde{p}_{mn}^{(k)} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y, \quad (13)$$

вместо уравнений движения (11), приходим к системе $3N$ алгебраических уравнений относительно амплитудных значений $\tilde{u}_{i mn}^{(k)}$ и $\tilde{w}_{mn}^{(k)}$ следующего вида:

$$\begin{aligned} f_i^{(k)} &= k_{i1}^{[k]} \tilde{u}_{1mn}^{(k+1)} + \left(\tilde{k}_{i1}^{[k]} + \tilde{k}_{i1}^{[k-1]} \right) \tilde{u}_{1mn}^{(k)} + k_{i1}^{[k-1]} \tilde{u}_{1mn}^{(k-1)} + \\ &+ k_{i2}^{[k]} \tilde{u}_{2mn}^{(k+1)} + \left(\tilde{k}_{i2}^{[k]} + \tilde{k}_{i2}^{[k-1]} \right) \tilde{u}_{2mn}^{(k)} + k_{i2}^{[k-1]} \tilde{u}_{2mn}^{(k-1)} + \\ &+ k_{i3}^{[k]} \tilde{w}_{mn}^{(k+1)} + \left(\tilde{k}_{i3}^{[k]} - \tilde{k}_{i3}^{[k-1]} \right) \tilde{w}_{mn}^{(k)} - k_{i3}^{[k-1]} \tilde{w}_{mn}^{(k-1)} = 0; \quad i = 1, 2, \\ f_3^{(k)} &= k_{31}^{[k]} \tilde{u}_{1mn}^{(k+1)} + \left(\tilde{k}_{31}^{[k]} - \tilde{k}_{31}^{[k-1]} \right) \tilde{u}_{1mn}^{(k)} - k_{31}^{[k-1]} \tilde{u}_{1mn}^{(k-1)} + \\ &+ k_{32}^{[k]} \tilde{u}_{2mn}^{(k+1)} + \left(\tilde{k}_{32}^{[k]} - \tilde{k}_{32}^{[k-1]} \right) \tilde{u}_{2mn}^{(k)} - k_{32}^{[k-1]} \tilde{u}_{2mn}^{(k-1)} + \\ &+ k_{33}^{[k]} \tilde{w}_{mn}^{(k+1)} + \left(\tilde{k}_{33}^{[k]} + \tilde{k}_{33}^{[k-1]} \right) \tilde{w}_{mn}^{(k)} + k_{33}^{[k-1]} \tilde{w}_{mn}^{(k-1)} = -\tilde{p}_{mn}^{(k)}. \end{aligned} \quad (14)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} k_{11}^{[k]} &= \frac{h_{[k]} \rho_p^{[k]} \omega^2}{6} - \frac{h_{[k]} \tilde{g}_{11}^{[k]} \lambda_m^2}{6} - \frac{h_{[k]} \tilde{G}_{12}^{[k]} \lambda_n^2}{6} + \frac{\tilde{G}_{13}^{[k]}}{h_{[k]}}, \\ \tilde{k}_{11}^{[k]} &= \frac{h_{[k]} \rho_p^{[k]} \omega^2}{3} - \frac{h_{[k]} \tilde{g}_{11}^{[k]} \lambda_m^2}{3} - \frac{h_{[k]} \tilde{G}_{12}^{[k]} \lambda_n^2}{3} - \frac{\tilde{G}_{13}^{[k]}}{h_{[k]}}, \\ \tilde{k}_{12}^{[k]} &= 2k_{12}^{[k]} = \tilde{k}_{21}^{[k]} = 2k_{21}^{[k]} = -\frac{h_{[k]} \left(\tilde{g}_{12}^{[k]} + \tilde{G}_{12}^{[k]} \right) \lambda_m \lambda_n}{3}, \\ k_{13}^{[k]} &= -k_{31}^{[k]} = \frac{\left(\tilde{g}_{13}^{[k]} + \tilde{G}_{13}^{[k]} \right) \lambda_m}{2}, \quad \tilde{k}_{13}^{[k]} = \tilde{k}_{31}^{[k]} = \frac{\left(\tilde{G}_{13}^{[k]} - \tilde{g}_{13}^{[k]} \right) \lambda_m}{2}, \\ k_{22}^{[k]} &= \frac{h_{[k]} \rho_p^{[k]} \omega^2}{6} - \frac{h_{[k]} \tilde{G}_{12}^{[k]} \lambda_m^2}{6} - \frac{h_{[k]} \tilde{g}_{22}^{[k]} \lambda_n^2}{6} + \frac{\tilde{G}_{23}^{[k]}}{h_{[k]}}, \\ \tilde{k}_{22}^{[k]} &= \frac{h_{[k]} \rho_p^{[k]} \omega^2}{3} - \frac{h_{[k]} \tilde{G}_{12}^{[k]} \lambda_m^2}{3} - \frac{h_{[k]} \tilde{g}_{22}^{[k]} \lambda_n^2}{3} - \frac{\tilde{G}_{23}^{[k]}}{h_{[k]}}, \\ k_{23}^{[k]} &= -k_{32}^{[k]} = \frac{\left(\tilde{g}_{23}^{[k]} + \tilde{G}_{23}^{[k]} \right) \lambda_n}{2}, \quad \tilde{k}_{23}^{[k]} = \tilde{k}_{32}^{[k]} = \frac{\left(\tilde{G}_{23}^{[k]} - \tilde{g}_{23}^{[k]} \right) \lambda_n}{2}, \\ k_{33}^{[k]} &= \frac{h_{[k]} \rho_p^{[k]} \omega^2}{6} - \frac{h_{[k]} \tilde{G}_{13}^{[k]} \lambda_m^2}{12} - \frac{h_{[k]} \tilde{G}_{23}^{[k]} \lambda_n^2}{12} + \frac{\tilde{g}_{33}^{[k]}}{h_{[k]}}, \\ \tilde{k}_{33}^{[k]} &= \frac{h_{[k]} \rho_p^{[k]} \omega^2}{3} - \frac{5h_{[k]} \tilde{G}_{13}^{[k]} \lambda_m^2}{12} - \frac{5h_{[k]} \tilde{G}_{23}^{[k]} \lambda_n^2}{12} - \frac{\tilde{g}_{33}^{[k]}}{h_{[k]}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Заметим, что в формулах (15) операторы (10) при сохранении обозначений заменены на коэффициенты вида $\tilde{g}_{11}^{[k]} = g_{11}^{[k]} \left(1 + i\delta_1^{[k]}/\pi \right), \dots$, в уравнениях (14) величины $\tilde{p}_{mn}^{(1)}, \tilde{p}_{mn}^{(N)}$ при постановке задач акустоупругости являются неизвестными и подлежат определению, тогда как $\tilde{p}_{mn}^{(k)} = 0$ при $k = 2, 3, \dots, N - 1$.

2. Акустическое воздействие на пластину, разделяющую два полубесконечных пространства

В рамках первой постановки задачи считается, что пластина бесконечных размеров лежит на системе абсолютно жестких ребер, расположенных вдоль осей x и y с шагами a и b , соответственно (см. рис. 2 позиция 1) и окружена с двух сторон акустическими средами "1" и "2", занимающими ограниченные плоскостью $z = 0$ полупространства V_1 и V_2 . Координатную плоскость $z = 0$ совместим со срединной плоскостью пластины и считаем, что на пластину набегают плоская гармоническая волна, характеризующаяся давлением p_* и частотой ω . В результате ее взаимодействия с деформирующейся пластиной в окружающих ее полупространствах V_1 и V_2 формируются акустические волны с давлениями p_1 и p_2 , которые являются отраженными в первой среде и излученными во второй среде.

Для определения давлений p_* , p_1 , приложенных к граничной плоскости первого слоя пластины, и давления p_2 , приложенного к граничной плоскости N -го слоя пластины, необходимо найти решения волновых уравнений [15] (c_1, c_2 – скорости звука в полупространствах V_1 и V_2)

$$\Phi_{*,zz} - c_1^{-2} \ddot{\Phi}_* = 0, \quad \Phi_{s,xx} + \Phi_{s,yy} + \Phi_{s,zz} - c_s^{-2} \ddot{\Phi}_s = 0, \quad (16)$$

записанных относительно потенциалов скоростей Φ_*, Φ_1, Φ_2 звуковых волн, установившихся в полупространствах V_1 и V_2 . Здесь и всюду далее $s = 1, 2$, точками над функциями обозначаются производные по времени τ , а нижними индексами после запятой – частные производные по координатам x, y и z .

Через функции Φ_*, Φ_s давления p_*, p_s и компоненты скоростей $v_z^*, v_x^s, v_y^s, v_z^s$ в полупространствах V_1, V_2 выражаются зависимостями (ρ_s – плотности сред в полупространствах V_1 и V_2)

$$\begin{aligned} p_* &= -\rho_1 \dot{\Phi}_*, & p_s &= -\rho_s \dot{\Phi}_s, & v_z^* &= \dot{\Phi}_{*,z}, \\ v_x^s &= \dot{\Phi}_{s,x}, & v_y^s &= \dot{\Phi}_{s,y}, & v_z^s &= \dot{\Phi}_{s,z}, \end{aligned} \quad (17)$$

а решения уравнений движения пластины (14) и уравнений (16) должны удовлетворять условиям кинематического сопряжения

$$\dot{w}^{(1)} = (v_z^* + v_z^1)|_{z=0}, \quad \dot{w}^{(N)} = v_z^2|_{z=0}. \quad (18)$$

При действии на пластину гармонических звуковых волн имеют место представления (i – мнимая единица)

$$\Phi_* = \tilde{\Phi}_* e^{i\omega\tau}, \quad \Phi_s = \tilde{\Phi}_s e^{i\omega\tau}, \quad (19)$$

при учете которых в силу условий (18) и представлений (12) решения двух последних уравнений (16) должны иметь вид

$$\Phi_s = e^{i\omega\tau} \sum \tilde{\Phi}_s^{mn}(z) \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y. \quad (20)$$

При подстановке представлений (20) в уравнения (16) относительно одномерных функций $\tilde{\Phi}_s^{mn}(z)$ приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{*,zz}^{mn} + (k_1)^2 \tilde{\Phi}_*^{mn} &= 0; & \tilde{\Phi}_{s,zz}^{mn} - (\varkappa_s^{mn})^2 \tilde{\Phi}_s^{mn} &= 0; \\ (\varkappa_s^{mn})^2 &= \lambda_m^2 + \lambda_n^2 - k_s^2, & k_s &= \omega/c_s; & m, n &= 1, 3, \dots \end{aligned} \quad (21)$$

Решения первого уравнения (21) для рассматриваемой задачи необходимо принять в виде

$$\tilde{\Phi}_*^{mn} = A_* e^{-ik_1 z}, \quad (22)$$

а решения остальных уравнений зависят от знака выражений $(\varkappa_k^{mn})^2$. В первом случае, когда $(\varkappa_k^{mn})^2 > 0$, решения двух последних уравнений (21) примем в виде

$$\tilde{\Phi}_1^{mn} = B_1^{mn} e^{\varkappa_1^{mn} z}, \quad \tilde{\Phi}_2^{mn} = A_2^{mn} e^{-\varkappa_2^{mn} z}. \quad (23)$$

Здесь A_* – постоянная интегрирования решения первого уравнения (21), заданием которой определяются амплитудные значения давления и скорости падающей на пластину звуковой волны; A_2^{mn} , B_1^{mn} – постоянные интегрирования решений двух последних уравнений (21).

Представим A_* в виде разложения в ряд Фурье

$$A_* = \sum_{m,n} A_*^{mn} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y, \quad A_*^{mn} = \frac{16}{\pi^2 mn} A_* = f_{mn} A_*, \quad (24)$$

где $f_{mn} = 16/(\pi^2 mn)$. При использовании (22), (23) и в соответствии с соотношениями (17) и (20) при $(\varkappa_k^{mn})^2 > 0$ можно получить выражения

$$\begin{aligned} (\tilde{v}_z^* + \tilde{v}_z^1)|_{z=0} &= \sum (\varkappa_1^{mn} B_1^{mn} - ik_1 f_{mn} A_*) \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y, \\ \tilde{v}_z^2|_{z=0} &= - \sum \varkappa_2^{mn} A_2^{mn} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} (\tilde{p}_* + \tilde{p}_1)|_{z=0} &= -i\rho_1 \omega \sum (f_{mn} A_* + B_1^{mn}) \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y, \\ \tilde{p}_2|_{z=0} &= -i\rho_2 \omega \sum A_2^{mn} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y. \end{aligned} \quad (26)$$

Отметим, что при $(\varkappa_s^{mn})^2 < 0$ в выражениях (23), (25)–(26) следует заменить \varkappa_s^{mn} на $i\tilde{\varkappa}_s^{mn}$, где $(\tilde{\varkappa}_s^{mn})^2 = |(\varkappa_s^{mn})^2|$. Ввиду того, что современные системы научных исследований (например, Matlab) предоставляют возможность выполнять операции с комплексными числами, ниже все преобразования приводятся лишь для случая $(\varkappa_s^{mn})^2 > 0$. При программной реализации решений в таких системах случай $(\varkappa_s^{mn})^2 < 0$ учитывается автоматически (\varkappa_s^{mn} может быть как действительной, так и комплексной величиной).

Подчинив далее функции (12) и (20) условиям (18), используя для этого составленные выражения (25), получим

$$\begin{aligned} i\omega \sum \tilde{w}_{mn}^{(1)} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y &= \sum \left(\varkappa_1^{mn} B_1^{mn} - i\frac{\omega}{c_1} f_{mn} A_* \right) \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y, \\ i\omega \sum \tilde{w}_{mn}^{(N)} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y &= - \sum \varkappa_2^{mn} A_2^{mn} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y. \end{aligned} \quad (27)$$

Эти условия будут выполнены, если будут выполнены равенства

$$B_1^{mn} = i\frac{\omega}{\varkappa_1^{mn}} \left(\frac{f_{mn}}{c_1} A_* + \tilde{w}_{mn}^{(1)} \right), \quad A_2^{mn} = -i\frac{\omega}{\varkappa_2^{mn}} \tilde{w}_{mn}^{(N)}. \quad (28)$$

При их подстановке в соотношения (26) получим зависимости

$$\begin{aligned} (\tilde{p}_* + \tilde{p}_1)|_{z=0} &= \rho_1 \omega^2 \sum \left[\frac{\tilde{w}_{mn}^{(1)}}{\varkappa_1^{mn}} + \left(\frac{1}{\varkappa_1^{mn} c_1} - \frac{i}{\omega} \right) f_{mn} A_* \right] \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y, \\ \tilde{p}_2|_{z=0} &= -\rho_2 \omega^2 \sum \frac{\tilde{w}_{mn}^{(N)}}{\varkappa_2^{mn}} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y, \end{aligned} \quad (29)$$

из которых следуют два уравнения

$$\begin{aligned} \tilde{p}_*^{0mn} + \tilde{p}_1^{0mn} - R_1^{mn} \tilde{w}_{mn}^{(1)} &= Q_1^{mn}, \\ \tilde{p}_2^{0mn} - R_2^{mn} \tilde{w}_{mn}^{(N)} &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$R_s^{mn} = (-1)^{s+1} \frac{\rho_s \omega^2}{\chi_s^{mn}}, \quad Q_1^{mn} = \left(\frac{\omega}{\chi_1^{mn} c_1} - i \right) \rho_1 \omega f_{mn} A_* \quad (31)$$

Замыкая уравнения движения пластины (14) уравнениями (30), в которых в соответствии с принятой постановкой задачи $\tilde{p}_{mn}^{(1)} = \tilde{p}_*^{0mn} + \tilde{p}_1^{0mn}$, $\tilde{p}_{mn}^{(N)} = \tilde{p}_2^{0mn}$, получим разрешающую систему $3N + 2$ линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $U^{(k)} = \left\{ \tilde{u}_{1mn}^{(k)}, \tilde{u}_{2mn}^{(k)}, \tilde{w}_{mn}^{(k)}, \tilde{p}_{mn}^{(1)}, \tilde{p}_{mn}^{(N)} \right\}^T$.

При найденных значениях $\tilde{p}_{mn}^{(1)}$, $\tilde{p}_{mn}^{(N)}$ становится возможным определить амплитудные значения давлений $\tilde{p}_*^0 + \tilde{p}_1^0$ и \tilde{p}_2^0 , действующих на граничные плоскости пластины

$$\begin{aligned} \tilde{p}_*^0 + \tilde{p}_1^0 &= \sum (\tilde{p}_*^{0mn} + \tilde{p}_1^{0mn}) \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y, \\ \tilde{p}_2^0 &= \sum \tilde{p}_2^{0mn} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y. \end{aligned} \quad (32)$$

При этом в точке $x = a/2$, $y = b/2$ пластины параметр звукоизоляции, измеряемый в децибелах, будет равен

$$R_p^0 = -20 \lg \left| \frac{\tilde{p}_2^0}{\tilde{p}_*^0 + \tilde{p}_1^0} \right|. \quad (33)$$

Заметим, что при $\tilde{p}_* = 0$ сформулированная задача становится однородной, решением которой определяются собственные частоты и соответствующие им собственные формы колебаний шарнирно опертой композитной пластины с учетом внутреннего рассеивания энергии в материале пластины и ее аэродинамического взаимодействия с окружающими акустическими средами.

3. Акустическое воздействие на пластину, находящуюся между двумя преградами

В рамках второй постановки предполагается, что на расстояниях $z = -l_1$ и $z = l_2$ от пластины, разделяющей два смежных пространства V_1 и V_2 , расположены преграды, имеющие бесконечную протяженность в направлениях осей x и y (рис. 2). Первая из них является абсолютно жесткой и совершает в направлении оси oz гармонические колебания по закону $U_* = \tilde{U}_* e^{i\omega\tau}$ (\tilde{U}_* – амплитуда перемещений), а вторая преграда, также являющаяся абсолютно жесткой и неподвижной, имеет маложесткую деформируемую прослойку толщиной h_c . Будем считать, что у такой прослойки граничная плоскость $z = l_2 + h_c$ неподвижна, а точки граничной плоскости $z = l_2$ за счет деформаций прослойки получают подлежащие определению перемещения $U = U(x, y, \tau)$, $V = V(x, y, \tau)$, $W = W(x, y, \tau)$. В рассматриваемом случае формирующиеся за счет гармонических колебаний преграды $z = -l_1$ отраженные и излученные акустические волны с давлениями p_1 и p_2 соответственно будут описываться лишь двумя последними волновыми уравнениями (16).

При формировании в пространстве V_2 излучаемых пластиной акустических волн под действием давления $p_2^+ = p_2|_{z=l_2}$ маложесткое покрытие неподвижной преграды будет деформироваться. Будем считать, что главные в ней – нормальное напряжение σ_z^c и касательные напряжения τ_{xz}^c , τ_{yz}^c , связанные с соответствующими компонентами деформаций ε_z^c и γ_{xz}^c , γ_{yz}^c при учете вязкоупругих свойств

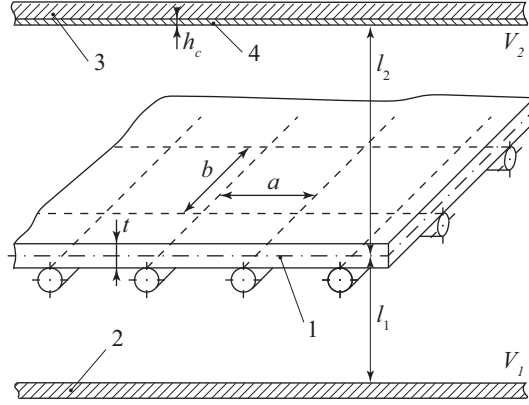


Рис. 2. Расчетная схема: 1 – пластина, 2 – жесткая преграда (генератор звуковых волн), 3 – жесткая преграда, 4 – маложесткое покрытие

материала по модели Кельвина–Фойгта соотношениями упругости следующего вида:

$$\sigma_z^c = E_z^c D_z^c \varepsilon_z^c, \quad \tau_{xz}^c = G_c D_\gamma^c \gamma_{xz}^c, \quad \tau_{yz}^c = G_c D_\gamma^c \gamma_{yz}^c. \quad (34)$$

Здесь

$$D_z^c = 1 + \frac{\delta_z^c}{\pi\omega} \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad D_\gamma^c = 1 + \frac{\delta_\gamma^c}{\pi\omega} \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (35)$$

в которых E_z^c , G_c , δ_z^c , δ_γ^c – соответствующие упругие и демпфирующие характеристики материала покрытия. В предположении о том, что $h_c \ll a, b$, в работе [16] для компонент перемещений в покрытии приняты аппроксимации

$$(u_c, v_c, w_c) = \left(1 - \frac{z - l_2}{h_c}\right) (U, V, W), \quad (36)$$

исходя из которых при использовании соотношений (34) в случае действия на покрытие поперечной нагрузки p_2^+ получена система трех дифференциальных уравнений движения покрытия следующего вида [16]:

$$\begin{aligned} G_c D_\gamma^c \left(\frac{U}{h_c} - \frac{W_{,x}}{2} \right) + \frac{\rho_c h_c}{3} \ddot{U} &= 0, & G_c D_\gamma^c \left(\frac{V}{h_c} - \frac{W_{,y}}{2} \right) + \frac{\rho_c h_c}{3} \ddot{V} &= 0, \\ \frac{E_z^c}{h_c} D_z^c W + \frac{\rho_c h_c}{3} \ddot{W} - G_c D_\gamma^c \left[\frac{h_c}{3} (W_{,xx} + W_{,yy}) - \frac{1}{2} (U_{,x} + V_{,y}) \right] - p_2^+ &= 0, \end{aligned} \quad (37)$$

где ρ_c – плотность материала покрытия.

Решения уравнений движения пластины (14), а также волновых уравнений и уравнений (37) в рассматриваемом случае должны удовлетворять условиям кинематического сопряжения

$$\dot{w}^{(1)} = v_z^1|_{z=0}, \quad \dot{w}^{(N)} = v_z^2|_{z=0}, \quad \dot{W} = v_z^2|_{z=l_2}, \quad \dot{U}_* = v_z^1|_{z=-l_1} \quad (38)$$

во всех точках граничных плоскостей пластины (первая пара условий (38)), покрытия и первой преграды.

В свою очередь, в силу последних двух условий (38) и представлений (12), (20) для отыскания решений уравнений (37) примем представления

$$\begin{aligned} U &= e^{i\omega\tau} \sum \tilde{U}_{mn} \cos \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y, & V &= e^{i\omega\tau} \sum \tilde{V}_{mn} \sin \lambda_m x \cdot \cos \lambda_n y, \\ W &= e^{i\omega\tau} \sum \tilde{W}_{mn} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y. \end{aligned} \quad (39)$$

При подстановке представлений (20) в два последние волновые уравнения (16) приходим к уравнениям, аналогичным вторым двум уравнениям (21). Эти уравнения при $(\varkappa_s^{mn})^2 > 0$ будут иметь решения (A_s^{mn} и B_s^{mn} – постоянные интегрирования)

$$\tilde{\Phi}_s^{mn} = A_s^{mn} e^{\varkappa_s^{mn} z} + B_s^{mn} e^{-\varkappa_s^{mn} z}, \quad (40)$$

которые в соответствии с соотношениями (17) и (20) приводят к зависимостям

$$v_z^s = e^{i\omega\tau} \sum \varkappa_s^{mn} \left(A_s^{mn} e^{\varkappa_s^{mn} z} - B_s^{mn} e^{-\varkappa_s^{mn} z} \right) \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y, \quad (41)$$

$$p_s = -i\rho_s \omega e^{i\omega\tau} \sum \left(A_s^{mn} e^{\varkappa_s^{mn} z} + B_s^{mn} e^{-\varkappa_s^{mn} z} \right) \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y. \quad (42)$$

Путем представления амплитудного значения \tilde{U}_* в виде разложения в ряд Фурье

$$\tilde{U}_* = \tilde{U}_* \sum f_{mn} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y, \quad f_{mn} = \frac{16}{\pi^2 mn} \quad (43)$$

и подчинения выражений (41), представлений (39), (43) условиям (38) определяются постоянные интегрирования в решениях (40). При их использовании, а также алгебраических зависимостей, полученных подстановкой функций (39) в уравнения движения покрытия (37), устанавливаются зависимости вида [6]

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1^{0mn} - \tilde{R}_1^{mn} \tilde{w}_{mn}^{(1)} &= R_1^{mn} \tilde{U}_*, \\ \tilde{p}_2^{0mn} - \left(\tilde{R}_2^{mn} - (R_2^{mn})^2 / C_{mn} \right) \tilde{w}_{mn}^{(N)} &= 0, \end{aligned} \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} R_1^{mn} &= \frac{2\omega^2 \rho_1 f_{mn} e^{\varkappa_1^{mn} l_1}}{\varkappa_1^{mn} (1 - e^{2\varkappa_1^{mn} l_1})}, \quad R_2^{mn} = \frac{2\omega^2 \rho_2 e^{-\varkappa_2^{mn} l_2}}{\varkappa_2^{mn} (1 - e^{-2\varkappa_2^{mn} l_2})}, \\ \tilde{R}_s^{mn} &= -\frac{\omega^2 \rho_s \left(1 + e^{(-1)^{s+1} 2\varkappa_s^{mn} l_s} \right)}{\varkappa_s^{mn} \left(1 - e^{(-1)^{s+1} 2\varkappa_s^{mn} l_s} \right)}, \\ C_{mn} &= \frac{E_z^c}{h_c} \left(1 + i \frac{\delta_z^c}{\pi} \right) - \frac{\rho_c h_c}{3} \omega^2 + \\ &\quad + G_c \left(1 + i \frac{\delta_\gamma^c}{\pi} \right) (\lambda_m^2 + \lambda_n^2) \left(\frac{h_c}{3} - \frac{A_{mn}}{2} \right) + \tilde{R}_2^{mn}, \\ A_{mn} &= G_c \left(1 + i \frac{\delta_\gamma^c}{\pi} \right) / \left[\frac{2G_c}{h_c} \left(1 + i \frac{\delta_\gamma^c}{\pi} \right) - \frac{\rho_c h_c}{3} \omega^2 \right]. \end{aligned} \quad (45)$$

Замыкая уравнения движения пластины (14) уравнениями (44) при учете равенств $\tilde{p}_{mn}^{(1)} = \tilde{p}_1^{0mn}$, $\tilde{p}_{mn}^{(N)} = \tilde{p}_2^{0mn}$, как и в первом рассмотренном случае, приходим к разрешающей системе $3N + 2$ линейных алгебраических уравнений.

Отметим, что для определения амплитудных значений давлений звуковых волн \tilde{p}_k в пространствах V_1 и V_2 , а также параметра звукоизоляции пластины используются формулы (32), (33) при $\tilde{p}_*^{0mn} = 0$, $\tilde{p}_*^0 = 0$.

Как и в случае пластины, окруженной полубесконечными пространствами, при $\tilde{p}_* = 0$ сформулированная задача становится однородной, решением которой определяются собственные частоты и соответствующие им собственные формы колебаний шарнирно опертой композитной пластины с учетом внутреннего рассеивания энергии в материале пластины и ее аэродинамического взаимодействия с окружающими акустическими средами ограниченными преградами.

4. Результаты расчетов и их анализ

На основе найденных решений проведены две серии расчетов для пластины, имеющей геометрические размеры $a = 480$ мм, $b = 560$ мм, $t = 3$ мм и выполненной из композиционного материала на основе углеродной ткани Rogcher 3692 и связующего ЭДТ-69НМ. Данный материал при динамических процессах деформирования, как установлено в [17], имеет следующие механические характеристики и логарифмические декременты колебаний:

$$E_{1,d} = E_{2,d} = 40 \text{ ГПа}, \quad E_{3,d} = 5.9 \text{ ГПа}, \quad G_{12,d} = G_{13,d} = G_{23,d} = 4 \text{ ГПа},$$

$$\nu_{12} = 0.163, \quad \nu_{13} = \nu_{23} = 0.3, \quad \rho = 1500 \text{ кг/м}^3,$$

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0.012, \quad \delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = 0.03.$$

Считается, что пластина окружена с двух сторон воздухом, имеющим параметры $\rho_1 = \rho_2 = \rho = 1.225 \text{ кг/м}^3$, $c_1 = c_2 = c = 340 \text{ м/с}$.

Отметим, что в соответствии с полученными ранее результатами [7] при проведении расчетов рассматриваемую композитную пластину достаточно разделить на тридцать слоев с одинаковыми механическими, демпфирующими и массовыми характеристиками. Как показали проведенные вычислительные эксперименты, принятый размер сетки в направлении толщины пластины позволяет получить численные решения, практически приближающиеся к решению на основе уравнений трёхмерной теории упругости.

В табл. 1 представлены результаты определения действительных частей частот колебаний $f_{mn} = \omega_{mn}^r / (2\pi)$ (где ω_{mn}^r – действительная часть круговой частоты ω_{mn}) шарнирно опертых композитных пластин с учетом внутреннего рассеивания энергии, а также параметров ξ_{mn} , характеризующих мнимые части комплексных частот колебаний и определяемых по формуле $\xi_{mn} = \omega_{mn}^i / \omega_{mn}^r$ (ω_{mn}^i – мнимая часть круговой частоты ω_{mn}). Заметим, что результаты приведены для пластины, находящейся в вакууме, то есть без учета взаимодействия со средой. Однако такие результаты, как было показано в работе [18], практически не отличаются от результатов, полученных при учете влияния акустических сред, если их поведение описывается на основе трехмерных волновых уравнений.

Получены также численные результаты решений построенных выше задач об акустическом воздействии на пластину. В первой серии расчетов рассмотрена пластина, окруженная полубесконечными акустическими пространствами, что соответствует первой постановке задачи. Проведено исследование звукоизоляционных свойств и параметров напряженно-деформированного состояния в зависимости от частоты падающей на пластину звуковой волны при $A_* = 0.01$. На рис. 3 представлен график зависимости параметра звукоизоляции R_p^0 от частоты $f = \omega / (2\pi)$. Видно наличие ярко выраженных резонансных частот f^R , при которых наблюдается значительное падение значений параметра R_p . Сравнение значений таких частот f^R с данными, приведенными в табл. 1, показало, что в случае воздействия на пластину плоской звуковой волны в ней реализуются вынужденные колебания лишь с такими резонансными частотами, которым соответствуют собственные формы с нечетными номерами гармоник m и n в каждом из направлений. При этом гармоники, имеющие четный номер хотя бы в одном из направлений, не реализуются.

На рис. 4 в логарифмическом масштабе по оси $\tilde{\sigma}$ приведены графики зависимостей максимальных амплитудных значений формирующихся в пластине нормальных напряжений $\tilde{\sigma}_x = \tilde{\sigma}_{11}$, $\tilde{\sigma}_z = \tilde{\sigma}_{33}$ и касательного напряжения $\tilde{\tau}_{xz} = \tilde{\sigma}_{13}$ от частоты f . Видно, что при частотах $f = f^R$ наблюдаются также и значительные всплески значений напряжений $\tilde{\sigma}_x$ и $\tilde{\tau}_{xz}$.

Табл. 1

№ тона	f_{mn} , Гц	ξ_{mn}	m	n
1	44.4	0.0023	1	1
2	105.81	0.00219	1	2
3	133.314	0.00209	2	1
4	177.465	0.00231	2	2
5	217.008	0.00207	1	3
6	273.609	0.00229	2	3
7	286.483	0.002	3	1
8	321.336	0.00219	3	2
9	374.493	0.00201	1	4
10	398.778	0.00232	3	3
11	422.404	0.00220	2	4
12	501.314	0.00198	4	1
13	529.024	0.00232	3	4
14	531.867	0.0021	4	2
15	577.127	0.00199	1	5
16	596.573	0.00224	4	3
17	620.128	0.00213	2	5
18	707.657	0.00233	4	4
19	712.795	0.00227	3	5
20	776.875	0.00197	5	1
138	4556.736	0.00198	1	1
161	5607.879	0.00281	2	1
165	5919.515	0.0024	1	2
166	5984.916	0.00227	1	1
172	6790.395	0.00343	3	1

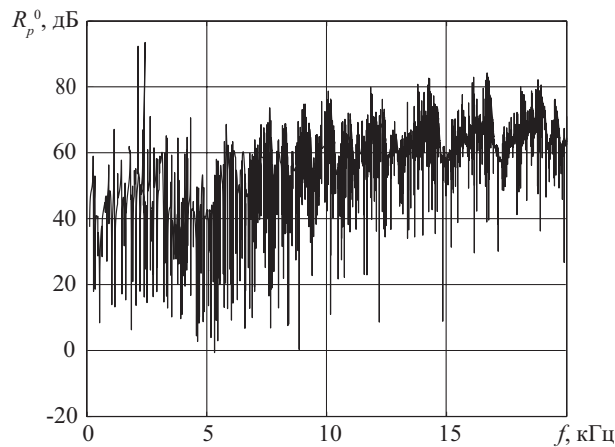


Рис. 3. Зависимость параметра звукоизоляции от частоты

Проводились также вычислительные эксперименты с целью установления законов изменения параметров напряженно-деформированного состояния пластины в направлении ее толщины. С целью иллюстрации на рис. 5 приведены графики изменения амплитудных значений прогиба \tilde{w} в центральной точке пластины, а также формирующихся в ней напряжений $\sigma_x = \sigma_{11}$, $\sigma_z = \sigma_{33}$, $\tau_{xz} = \sigma_{13}$ по толщине при $f = 50$ Гц и $f = 20$ кГц.

Как и следовало ожидать, при низких частотах звуковой волны прогиб пластины практически не изменяется по толщине, в ней основными являются тангенци-

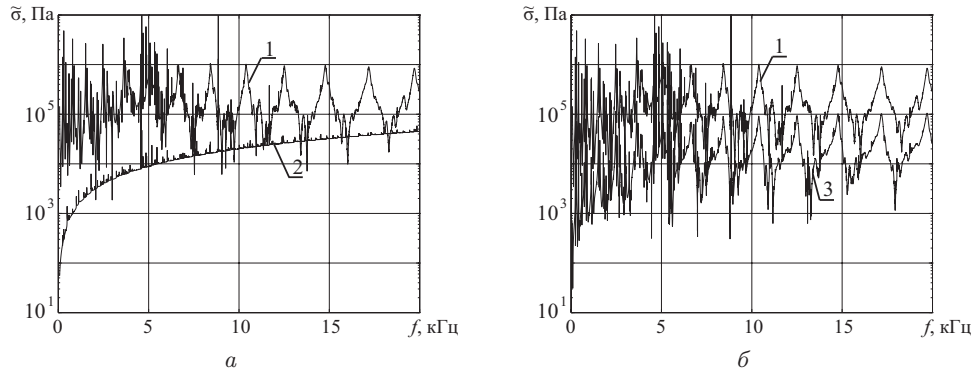


Рис. 4. Зависимости напряжений от частоты: (а) 1 – $\tilde{\sigma}_x^{\max}$, 2 – $\tilde{\sigma}_z^{\max}$; (б) 1 – $\tilde{\sigma}_x^{\max}$, 3 – $\tilde{\tau}_{xz}^{\max}$ (логарифмическая координатная сетка)

альные компоненты тензора напряжений (значения σ_z на четыре порядка меньше значений σ_x) и описание динамического напряженно-деформированного состояния пластины классическими двумерными уравнениями теории пластин вполне допустимо. В то же время при высоких частотах в пластине формируются напряжения σ_z того же порядка, что и напряжения σ_x . Следовательно, при высоких частотах корректное описание механики деформирования пластин при постановке задач рассматриваемого класса возможно лишь на основе уточненных уравнений при обязательном учете поперечного обжатия. Это особенно важно при исследовании акустического воздействия на тонкостенные элементы конструкций из волокнистых композиционных материалов, как правило, имеющих в поперечном направлении упругие и прочностные характеристики, которые как минимум на порядок меньше аналогичных характеристик в продольных направлениях.

Вторая серия расчетов соответствует второй постановке задачи и проведена для пластины с указанными выше параметрами. Ее целью является изучение влияния дополнительных преград на параметр звукоизоляции R_p^0 и формирующиеся в пластине параметры напряженно-деформированного состояния.

С целью иллюстрации на рис. 6 представлен график зависимости $R_p^0(f)$ для пластины, находящейся на расстояниях $l_1 = l_2 = 2.3$ м от преград. Расчеты проведены при значении параметра $\tilde{U}_* = 0.01$ мм и толщине покрытия жесткой преграды $h_c = 0.3$ м, имеющего упругие характеристики, плотность и параметр внутреннего демпфирования $E_c = 16$ ГПа, $\nu_c = 0.17$, $\rho_c = 500$ кг/м³, $\delta_c = 0.02$ (например, соответствующие бетону), практически не влияющие на изучаемые процессы деформирования пластины.

Сопоставляя приведенные результаты с результатами первой серии расчетов (рис. 3), можно видеть, что наличие дополнительных преград приводит к значительному снижению параметра R_p^0 во всем рассмотренном спектре частот f . Следует указать на появление целого ряда новых собственных частот f^R рассматриваемой механической системы, по-видимому, являющихся собственными резонансными частотами акустических сред, которые находятся в ограниченных преградами пространствах.

На рис. 7 в логарифмическом масштабе по оси $\tilde{\sigma}$ приведены графики зависимостей $\tilde{\sigma}_x = \tilde{\sigma}_x(f)$, $\tilde{\sigma}_z = \tilde{\sigma}_z(f)$, $\tilde{\tau}_{xz} = \tilde{\tau}_{xz}(f)$, соответствующие описываемой второй постановке задачи, а на рис. 8 они для большей наглядности представлены в виде кривых, сглаженных при помощи скользящих средних. Сравнивая полученные результаты с результатами, соответствующими первой постановке задачи (рис. 4),

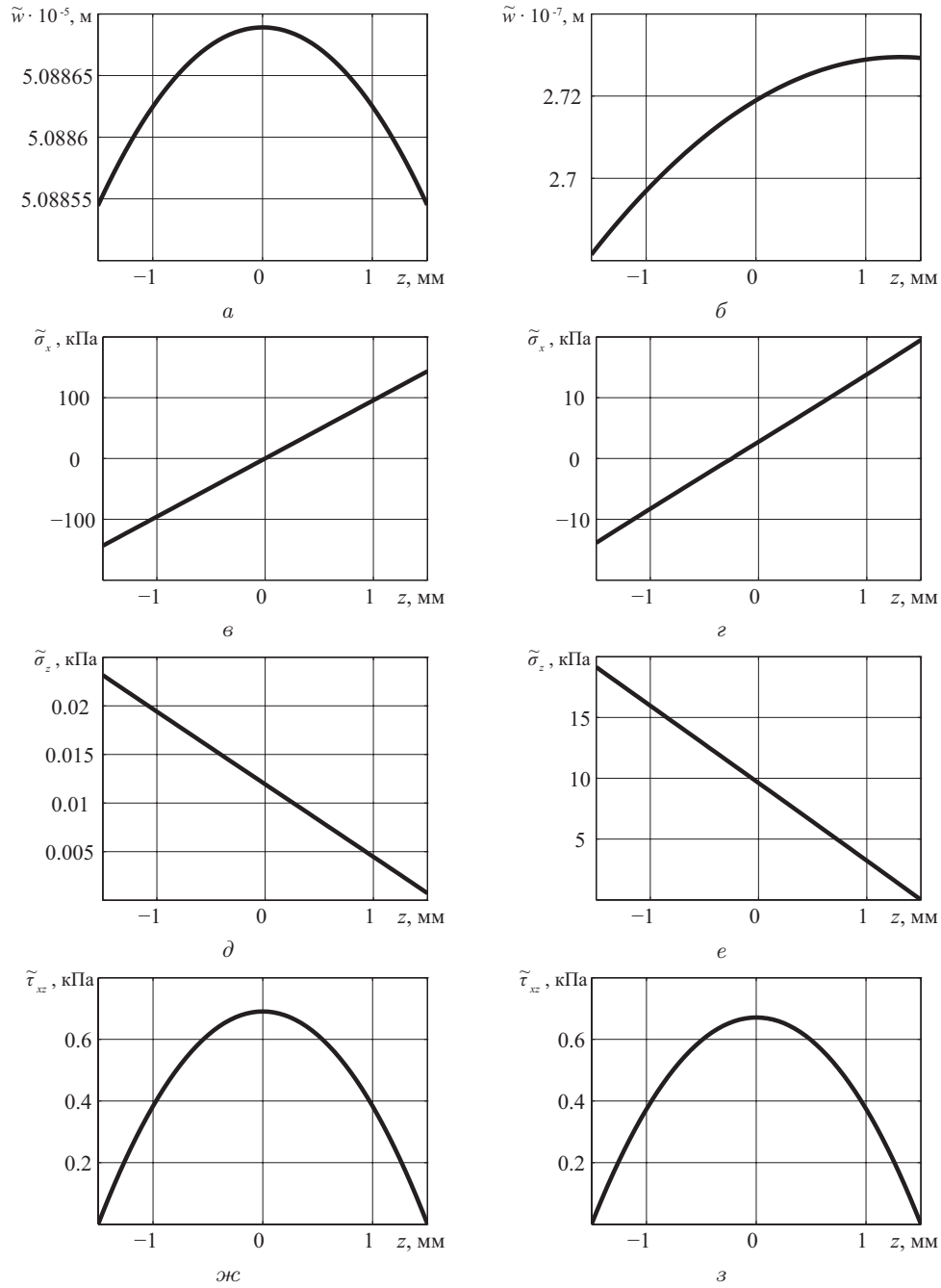


Рис. 5. Графики изменения прогиба \tilde{w} (*a*, *б*) и напряжения $\tilde{\sigma}_x$ (*в*, *г*), $\tilde{\sigma}_z$ (*д*, *е*), $\tilde{\tau}_{xz}$ (*жс*, *з*) по толщине пластины при двух фиксированных частотах $f = 50 \text{ Гц}$ (*a*, *в*, *д*, *жс*) и $f = 20 \text{ кГц}$ (*б*, *г*, *е*, *з*)

можно видеть, что различие между напряжениями σ_x и σ_z в рассматриваемом случае является менее существенным. Так, уже при частотах $f > 12 \text{ кГц}$ напряжения σ_z становятся величинами того же порядка, что и напряжения σ_x , и даже превышают их. Это, по-видимому, связано с тем, что отраженные от преград звуковые

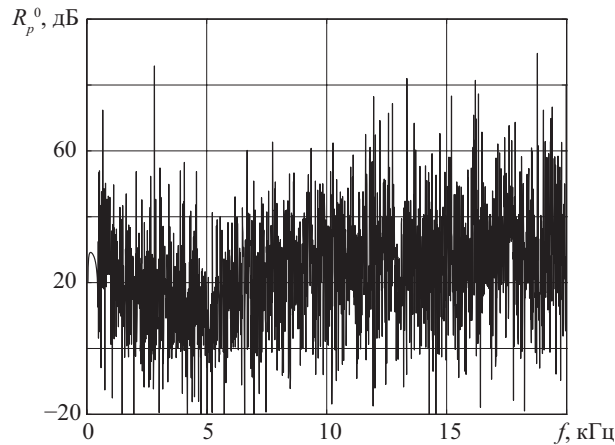
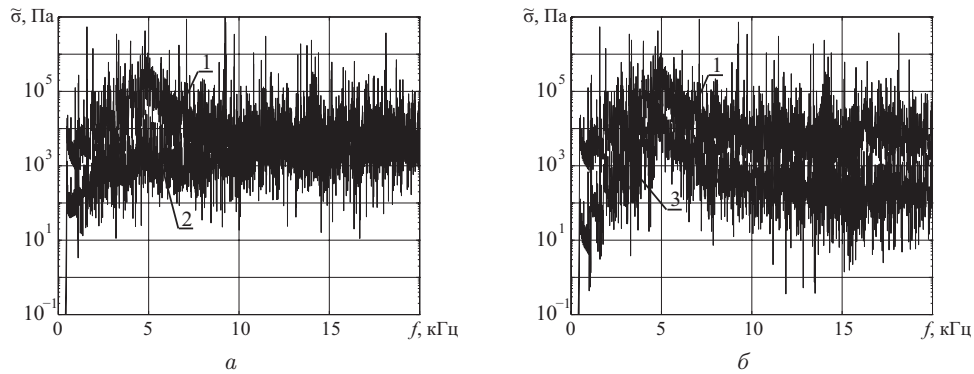


Рис. 6. Зависимость параметра звукоизоляции от частоты

Рис. 7. Зависимости напряжений от частоты: (а) 1 – $\tilde{\sigma}_x^{\max}$, 2 – $\tilde{\sigma}_z^{\max}$; (б) 1 – $\tilde{\sigma}_x^{\max}$, 3 – $\tilde{\tau}_{xz}^{\max}$ (логарифмическая координатная сетка)

волны дополнительно обжимают пластину, увеличивая соответствующие данному виду деформации напряжения σ_z . Более детальное исследование в окрестностях отдельных резонансных частот (например, на рис. 9 приведены графики зависимостей напряжений $\tilde{\sigma}_x$, $\tilde{\sigma}_z$, $\tilde{\tau}_{xz}$ от частоты f в окрестности $f = 1$ кГц) показало, что значения напряжения σ_z могут превышать значения σ_x в узких частотных зонах уже в спектре средних частот (в рассматриваемом случае, начиная с частоты $f \approx 1$ кГц).

И, наконец, отметим, что зависимости $\tilde{\tau}_{xz} = \tilde{\tau}_{xz}(f)$ и $\tilde{\sigma}_x = \tilde{\sigma}_x(f)$ имеют одинаковый характер изменения как в первой, так и во второй постановках задач. Как показал проведенный анализ результатов расчетов, максимальные значения касательных напряжений $\tilde{\tau}_{xz}$ на несколько порядков меньше максимальных значений напряжений $\tilde{\sigma}_x$ (рис. 4, 7, 8).

Заключение

Проведенный анализ полученных результатов показал, что при высокочастотном акустическом воздействии механику деформирования элементов конструкции из волокнистых композитов необходимо описывать уточненными уравнениями дви-

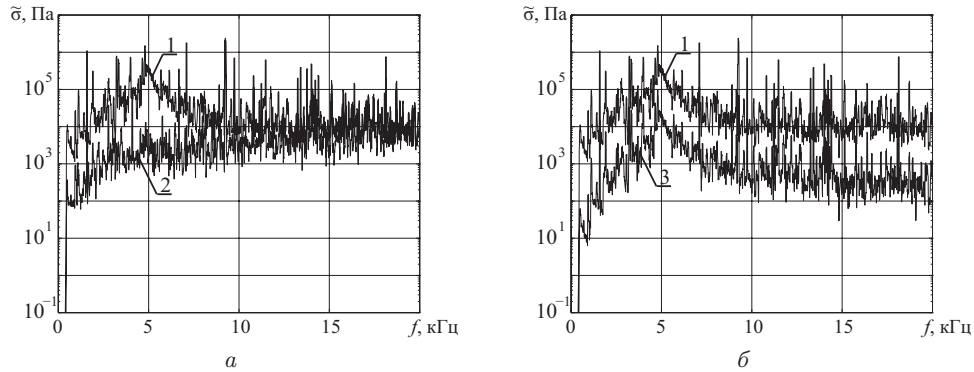


Рис. 8. Зависимости напряжений от частоты: (а) 1 – $\tilde{\sigma}_x^{\max}$, 2 – $\tilde{\sigma}_z^{\max}$; (б) 1 – $\tilde{\sigma}_x^{\max}$, 3 – $\tilde{\tau}_{xz}^{\max}$ (логарифмическая координатная сетка)

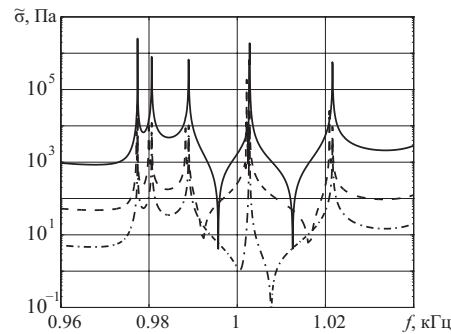


Рис. 9. Зависимости компонент напряжений от частоты: сплошная линия – $\tilde{\sigma}_x^{\max}$, штриховая линия – $\tilde{\sigma}_z^{\max}$, штрих-пунктирная линия – $\tilde{\tau}_{xz}^{\max}$

жения, имеющими большую степень точности и содержательности ввиду формирования в них практически трехмерного напряженно-деформированного состояния с компонентами одного порядка.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-19-00058).

Литература

1. Pretlove A.J. Free vibrations of a rectangular panel backed by a closed rectangular cavity // J. Sound Vib. – 1965. – V. 2, No 3. – P. 197–209. – doi: 10.1016/0022-460X(65)90108-2.
2. Pretlove A.J. Forced vibrations of a rectangular panel backed by a closed rectangular cavity // J. Sound Vib. – 1966. – V. 3, No 3. – P. 252–261. – doi: 10.1016/0022-460X(66)90094-0.
3. Jeyaraj P., Ganesan N., Padmanabhan C. Vibration and acoustic response of a composite plate with inherent material damping in a thermal environment // J. Sound Vib. – 2009. – V. 320, No 1–2. – P. 322–338. – doi: 10.1016/j.jsv.2008.08.013.
4. Li X., Yu K., Han J., Song H., Zhao R. Buckling and vibro-acoustic response of the clamped composite laminated plate in thermal environment // Int. J. Mech. Sci. – 2016. – V. 119. – P. 370–382. – doi: 10.1016/j.ijmecsci.2016.10.021.

5. *D'Alessandro V., Petrone G., Franco F., De Rosa S.* A review of the vibroacoustics of sandwich panels: Models and experiments // *J. Sandwich Struct. Mater.* – 2013. – V. 15, No 5. – P. 541–582. – doi: 10.1177/1099636213490588.
6. *Paimushin V.N., Gazizullin R.K.* Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate // *Mech. Compos. Mater.* – 2017. – V. 53, No 3. – P. 283–304. – doi: 10.1007/s11029-017-9662-z.
7. *Paimushin V.N., Gazizullin R.K.* Discrete-layered damping model of multilayer plate with account of internal damping // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* – 2016. – V. 158, No 1. – Art. 012074, P. 1–11. – doi: 10.1088/1757-899X/158/1/012074.
8. *Абросимов Н.А., Баженов В.Г.* Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.
9. *Рикардс Р.Б., Тетерс Г.А.* Устойчивость оболочек из композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1974. – 310 с.
10. *Галлимов К.З.* Основы нелинейной теории тонких оболочек. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975. – 326 с.
11. *Давиденков Н.Н.* О рассеянии энергии при вибрациях // *Журн. техн. физики.* – 1938. – Т. 8, Вып. 6. – С. 483–499.
12. *Пановко Я.Г.* Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. – М.: Физматгиз, 1960. – 193 с.
13. *Сорокин Е.С.* К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. – М.: Госстройиздат, 1960. – 129 с.
14. *Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В.* Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов: Справочни. – Киев: Наукова думка, 1971. – 375 с.
15. *Skudrzyk E.* The Foundation of acoustics. – N. Y.: Springer, 1971. – 790 p.
16. *Gazizullin R.K., Paimushin V.N.* The transmission of an acoustic wave through a rectangular plate between barriers // *J. Appl. Math. Mech.* – 2016. – V. 80, No 5. – P. 421–432. – doi: 10.1016/j.jappmathmech.2017.02.009.
17. *Paimushin V.N., Firsov V.A., Gyunal I., Shishkin V.M.* Identification of the elastic and damping characteristics of carbon fiber-reinforced plastic based on a study of damping flexural vibrations of test specimens // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* – 2016. – V. 57, No 4. – P. 720–730. – doi: 10.1134/S0021894416040179.
18. *Paimushin V.N., Tarlakovskii D.V., Firsov V.A., Gazizullin R.K.* Free and forced bending vibrations of a thin plate in a perfect compressible fluid with energy dissipation taken into account // *Z. Angew. Math. Mech.* – 2020. – V. 100, No 3. – Art. e201900102, P. 1–22. – doi: 10.1002/zamm.201900102.

Поступила в редакцию
27.04.2020

Паймушин Виталий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор,
главный научный сотрудник; главный научный сотрудник

Казанский национальный исследовательский технический университет имени

А.Н. Туполева

ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: vpaimushin@mail.ru

Газизуллин Руслан Камилевич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник

Казанский национальный исследовательский технический университет имени

А.Н. Туполева

ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия

E-mail: *gazizullin.rk@yandex.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2020, vol. 162, no. 2, pp. 160–179

doi: 10.26907/2541-7746.2020.2.160-179

**Refined Analytical Solutions of the Coupled Problems
on Free and Forced Vibrations of a Rectangular Composite Plate
Surrounded by Acoustic Media**

V.N. Paimushin^{a,b}, R.K. Gazizullin^{a**}*

^a*Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev,
Kazan, 420111 Russia*

^b*Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*

E-mail: **vpajmushin@mail.ru, **gazizullin.rk@yandex.ru*

Received April 27, 2020

Abstract

Two problems of the monoharmonic sound wave transmission through a thin rectangular composite plate hinged in the opening of an absolutely stiff dividing wall were considered using the discrete layered damping model of a multilayer plate at small displacements and deformations, with account of the internal damping of layers according to the Kelvin–Voight model. In setting the first problem, it was assumed that the plate located between two semi-infinite spaces and a plane sound wave with a given amplitude value of the pressure is incident on it. In setting the second problem, it was considered that the plate is situated between two absolutely stiff barriers; one of them, owing to the harmonic vibration with a given displacement amplitude of the plate, forms an incident sound wave, while the other is stationary and coated by an energy-absorbing material with high damping properties. Behavior of the acoustic media was described by the classical wave equations based on the model of an ideal compressible fluid. Exact analytical solutions of the formulated problems were constructed. With their help, the sound insulation parameter of composite plate reinforced with carbon fiber textile was studied and the characteristics of its stress-strain state were investigated depending on the frequency of the incident sound wave. It was shown that the mechanics of the deformation of structural elements made of fiber-reinforced composites under high-frequency acoustic impact must be described by refined equations of motion, which have a high degree of accuracy and pitiness, because the stress-strain state formed in them are almost three-dimensional.

Keywords: multilayer plate, Timoshenko model, discrete structural model, two-dimensional equations of equilibrium and motion, analytical solution, Kelvin–Voight model, sound wave, sound insulation parameter, vibration frequency, stress-strain state

Acknowledgments. The study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 19-19-00058).

Abstract

- Fig. 1. Composite plate discretization by thickness.
- Fig. 2. Computational scheme: 1 – plate, 2 – stiff barrier (sound wave generator), 3 – stiff barrier, 4 – soft cover.
- Fig. 3. Dependence of the sound insulation parameter on frequency.
- Fig. 4. Dependencies of stresses on frequency: (a) 1 – $\tilde{\sigma}_x^{\max}$, 2 – $\tilde{\sigma}_z^{\max}$; (b) 1 – $\tilde{\sigma}_x^{\max}$, 3 – $\tilde{\tau}_{xz}^{\max}$ (logarithmic coordinate net).
- Fig. 5. Graphs of variation of deflection \tilde{w} (a, b) and stress $\tilde{\sigma}_x$ (c, d), $\tilde{\sigma}_z$ (e, f), $\tilde{\tau}_{xz}$ (h, i) by the plate thickness at two fixed frequencies $f = 50$ Hz (a, c, e, h) and $f = 20$ kHz (b, d, f, i).
- Fig. 6. Dependence of the sound insulation parameter on frequency.
- Fig. 7. Dependencies of stresses on frequency: (a) 1 – $\tilde{\sigma}_x^{\max}$, 2 – $\tilde{\sigma}_z^{\max}$; (b) 1 – $\tilde{\sigma}_x^{\max}$, 3 – $\tilde{\tau}_{xz}^{\max}$ (logarithmic coordinate net).
- Fig. 8. Dependencies of stresses on frequency: (a) 1 – $\tilde{\sigma}_x^{\max}$, 2 – $\tilde{\sigma}_z^{\max}$; (b) 1 – $\tilde{\sigma}_x^{\max}$, 3 – $\tilde{\tau}_{xz}^{\max}$ (logarithmic coordinate net).
- Fig. 9. Dependencies of stress constituents on frequency: solid line – $\tilde{\sigma}_x^{\max}$, dashed line – $\tilde{\sigma}_z^{\max}$, dash-dotted line – $\tilde{\tau}_{xz}^{\max}$.

References

1. Pretlove A.J. Free vibrations of a rectangular panel backed by a closed rectangular cavity. *J. Sound Vib.*, 1965, vol. 2, no. 3, pp. 197–209. doi: 10.1016/0022-460X(65)90108-2.
2. Pretlove A.J. Forced vibrations of a rectangular panel backed by a closed rectangular cavity. *J. Sound Vib.*, 1966, vol. 3, no. 3, pp. 252–261. doi: 10.1016/0022-460X(66)90094-0.
3. Jeyaraj P., Ganesan N., Padmanabhan C. Vibration and acoustic response of a composite plate with inherent material damping in a thermal environment. *J. Sound Vib.*, 2009, vol. 320, nos. 1–2, pp. 322–338. doi: 10.1016/j.jsv.2008.08.013.
4. Li X., Yu K., Han J., Song H., Zhao R. Buckling and vibro-acoustic response of the clamped composite laminated plate in thermal environment. *Int. J. Mech. Sci.*, 2016, vol. 119, pp. 370–382. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2016.10.021.
5. D'Alessandro V., Petrone G., Franco F., De Rosa S. A review of the vibroacoustics of sandwich panels: Models and experiments. *J. Sandwich Struct. Mater.*, 2013, vol. 15, no. 5, pp. 541–582. doi: 10.1177/1099636213490588.
6. Paimushin V.N., Gazizullin R.K. Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate. *Mech. Compos. Mater.*, 2017, vol. 53, no. 3, pp. 283–304. doi: 10.1007/s11029-017-9662-z.
7. Paimushin V.N., Gazizullin R.K. Discrete-layered damping model of multilayer plate with account of internal damping. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2016, vol. 158, no. 1, art. 012074, pp. 1–11. doi: 10.1088/1757-899X/158/1/012074.
8. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. *Nelineinye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruktsii* [Nonlinear Problems of the Dynamics of Composite Structures]. Nizhny Novgorod, Izd. NNGU, 2002. 400 p. (In Russian)
9. Rikards R.B., Teters G.A. *Ustoichivost' obolochek iz kompozitnykh materialov* [Stability of Shells from Composite Materials]. Riga, Zinatne, 1974. 310 p. (In Russian)
10. Galimov K.Z. *Osnovy nelineinoi teorii tonkikh obolochek* [Principles of Nonlinear Theory of Thin Shells]. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 1975. 326 p. (In Russian)
11. Davidenkov N.N. On energy dissipation upon vibrations. *Zh. Tekh. Fiz.*, 1938, vol. 8, no. 6, pp. 483–499. (In Russian)

12. Panovko Ya.G. *Vnutrennee trenie pri kolebaniyakh uprugikh sistem* [Internal Friction in the Vibration of Elastic Systems]. Moscow, Fizmatgiz, 1960. 193 p. (In Russian)
13. Sorokin E.S. *K teorii vnutrennego treniya pri kolebaniyakh uprugikh sistem* [Theory of Internal Friction during Oscillations of Elastic Systems]. Moscow, Gosstroizdat, 1960. 129 p. (In Russian)
14. Pisarenko G.S., Yakovlev A.P., Matveev V.V. *Vibropogloshchayushchie svoystva konstruktsionnykh materialov* [Vibration-Damping Properties of Structural Materials: A Handbook]. Kiev, Naukova Dumka, 1971. 375 p. (In Russian)
15. Skudrzyk E. *The Foundation of Acoustics*. New York, Springer, 1971. 790 p.
16. Gazizullin R.K., Paimushin V.N. The transmission of an acoustic wave through a rectangular plate between barriers. *J. Appl. Math. Mech.*, 2016, vol. 80, no. 5, pp. 421–432. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2017.02.009.
17. Paimushin V.N., Firsov V.A., Gyunal I., Shishkin V.M. Identification of the elastic and damping characteristics of carbon fiber-reinforced plastic based on a study of damping flexural vibrations of test specimens. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2016, vol. 57, no. 4, pp. 720–730. doi: 10.1134/S0021894416040179.
18. Paimushin, V.N., Tarlakovskii D.V., Firsov V.A., Gazizullin R.K. Free and forced bending vibrations of a thin plate in a perfect compressible fluid with energy dissipation taken into account. *Z. Angew. Math. Mech.*, 2020, vol. 100, no. 3, art. e201900102, pp. 1–22. doi: 10.1002/zamm.201900102.

Для цитирования: Паймушин В.Н., Газизуллин Р.К. Уточненные аналитические решения связанных задач о свободных и вынужденных колебаниях прямоугольной композитной пластины, окруженной акустическими средами // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2020. – Т. 162, кн. 2. – С. 160–179. – doi: 10.26907/2541-7746.2020.2.160-179.

For citation: Paimushin V.N., Gazizullin R.K. Refined analytical solutions of the coupled problems on free and forced vibrations of a rectangular composite plate surrounded by acoustic media. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 162, no. 2, pp. 160–179. doi: 10.26907/2541-7746.2020.2.160-179. (In Russian)