УДК 517.54

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ТИПА РИССА

Ф.Д. Каюмов

Аннотация

В работе доказана гипотеза Бреннана для конформных отображений f, для которых отношение $1/f'(z)$ представимо в виде некоторых бесконечных произведений типа Рисса.

Ключевые слова: гипотеза Бреннана, спектр интегральных средних.

В статье доказывается гипотеза Бреннана из теории конформных отображений для одного частного случая. Прежде чем приступить к доказательству, опишем известные результаты, имеющие отношения к этой гипотезе.

Пусть Ω – односвязная область на плоскости, граница которой состоит более чем из одной точки. Предположим, что f – конформное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на область Ω. Гипотеза Бреннана утверждает, что

$$\int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^{-2} d\theta = O((1-r)^{-1-\varepsilon}) \quad \forall\, \varepsilon > 0, \quad r \to 1. \tag{1}$$

Соотношение (1) эквивалентно неравенству $\beta_f(-2) \leqslant 1$, где величина

$$\beta_f(t) = \limsup_{r\to 1} \frac{\ln \int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^t \, d\theta}{|\ln(1-r)|} \tag{2}$$

есть спектр интегральных средних конформного отображения f.

Карлесоном и Макаровым [1] было установлено, что

$$\beta_f(t) \leqslant |t| - 1,$$

для достаточно больших отрицательных t, причем равенство достигается для функции Кебе $f(z) = z/(1-z)^2$. Показано, что для интервала $(-2, 1/3]$ спектр интегральных средних $\beta_f(t)$ максимален для функции, отображающей единичный круг $\mathbb{D}$ на область с фрактальной границей. Поэтому при решении данной проблемы особый интерес представляют случаи областей с фрактальным типом границы. К настоящему моменту гипотеза Бреннана в общем случае не доказана, но существуют доказательства для частных случаев. В диссертации [3] Бертильсон исследовал гипотезу для функций, близких к функции Кебе. Бараньски, Вольберг и Здуник [2] рассматривали класс квадратичных полиномов $f_c(z) = z^2 + c$.

Они доказали гипотезу Бреннана для конформных отображений внешности круга на области вида

$$\Omega_c = \{z : f_c^n(z) \to \infty \quad n \to \infty\},$$

где $f^n = f \circ \cdots \circ f$.

В работе [4] было доказано, что гипотеза Бреннана верна для конформных отображений f единичного круга $\mathbb{D}$ в предположении, что у функции $\log(zf'/f)$ тейлоровские коэффициенты в нуле неотрицательны. В [5] доказана также справедливость гипотезы для конформных отображении f, для которых справедливо представление

$$\log f' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n^k}, \quad \frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant q \geqslant 15, \quad |z| < 1.$$

В [6] было установлено, что для конформных отображений f, удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{f'(z)} = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \gamma_1 z^{3^k} + \gamma_2 z^{23^k}\right), \quad |z| < 1,$$

выполнено неравенство

$$\beta_f(-2) \leqslant 1.0650\cdots$$

В настоящей работе мы рассматриваем конформные отображения единичного круга f, для которых справедливо представление

$$\frac{1}{f'(z)} = \prod_{k=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{q-1} \left(1 + w_j z^{q^k}\right), \tag{3}$$

где $|w_j| < 1$.

Пусть $q \geqslant 2$. Основным результатом работы является

Теорема 1. *Если для некоторого натурального s числа w_j удовлетворяют условию*

$$\arg w_j = \pi - \frac{2\pi s}{q-1}, \tag{4}$$

то для f справедлива гипотеза Бреннана.

Для доказательства теоремы нам понадобится

Лемма 1. *Для функции f, удовлетворяющей условию* (3), *выполняется неравенство*

$$\beta_f(2) \leqslant 1. \tag{5}$$

Доказательство. Представим функцию f в виде

$$f'(z) = \prod_{k=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{q-1} \frac{1}{1 + w_j z^{q^k}}. \tag{6}$$

И.Р. Каюмовым в работе [7, с. 44] было доказано, что если для однолистной функции f верно представление

$$f'(z) = \prod_{k=0}^{\infty} \Phi(z^{q^k}), \quad |z| < 1, \quad \Phi(0) = 1,$$

где $\Phi(z)$ – аналитическая в единичном круге и не равная нулю функция такая, что

$$\frac{1}{M} \leqslant |\Phi(z)| \leqslant M,$$

где $M < +\infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует константа $C_\varepsilon < +\infty$ такая, что

$$|f'(z)| \leqslant C_\varepsilon \left(\frac{1}{1-r}\right)^{1+\varepsilon}. \tag{7}$$

Действительно,

$$\Phi(z) = \prod_{j=1}^{q-1} \frac{1}{1+w_j z}.$$

Легко видеть, что

$$\prod_{j=1}^{q-1}(1-|w_j|) \leqslant |\Phi(z)| \leqslant \prod_{j=1}^{q-1} \frac{1}{1-|w_j|}.$$

Отсюда следует справедливость неравенства (7) для функции f, удовлетворяющей условию (3).

В силу однолистности f справедливо неравенство

$$\iint\limits_{|z|<r} |f'(z)|^2\,dx\,dy \leqslant \pi M^2,$$

где $M = \max\limits_{|z|<r} |f(z)|$.

Применяя оценку (7), получаем

$$|f(z)| \leqslant C'_\varepsilon \int\limits_0^r \frac{dr}{(1-r)^{1+\varepsilon}} = \frac{C'_\varepsilon}{\varepsilon} \frac{1}{(1-r)^\varepsilon},$$

откуда вытекает неравенство

$$\iint\limits_{|z|<r} |f'(z)|^2\,dx\,dy \leqslant \frac{\pi}{\varepsilon^2} \frac{C'^2_\varepsilon}{(1-r)^{2\varepsilon}}. \tag{8}$$

Из равенства Парсеваля

$$\int\limits_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^2\,d\theta = 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^2 r^{2k} \tag{9}$$

следует, что

$$\iint\limits_{|z|<r} |f'(re^{i\theta})|^2\,dx\,dy = 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha_k|^2 r^{2k+2}}{2k+2}, \tag{10}$$

где α_k – тейлоровские коэффициенты функции f'.

В силу неравенства

$$(2k+2) r^{2k-2} \leqslant \frac{e^{-1}}{1-r}$$

имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^2 r^{4k} \leqslant \frac{e^{-1}}{1-r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha_k|^2 r^{2k+2}}{2k+2}. \tag{11}$$

Согласно (9) и (10) неравенство (11) эквивалентно неравенству

$$\int\limits_0^{2\pi} |f'(r^2e^{i\theta})|^2\,d\theta \leqslant \frac{e^{-1}}{1-r}\iint\limits_{|z|<r}|f'(z)|^2\,dz,$$

откуда с учетом (8) получаем неравенство

$$\int\limits_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^2\,d\theta \leqslant \frac{C}{(1-r)^{1+2\varepsilon}}, \tag{12}$$

где $C = \pi C_\varepsilon'^2/e\varepsilon^2$ □

Доказательство теоремы 1. Для удобства введем обозначение $m = q-1$.
Докажем, что

$$\beta_f(-2) \leqslant 1, \tag{13}$$

откуда и будет следовать справедливость теоремы.

Из леммы 1 вытекает, что при выполнении условий теоремы имеем $\beta_f(2) \leqslant 1$. Покажем, что

$$\beta_f(-2) \leqslant \beta_f(2). \tag{14}$$

Для доказательства (14) достаточно установить справедливость неравенства

$$\int\limits_0^{2\pi}\left|\prod_{k=0}^{\infty}\prod_{j=0}^{m}(1+w_jz^{q^k})\right|^2 d\theta \leqslant \int\limits_0^{2\pi}\left|\prod_{k=0}^{\infty}\prod_{j=0}^{m}\frac{1}{1+w_jz^{q^k}}\right|^2 d\theta, \quad z = re^{i\theta}. \tag{15}$$

Преобразуем левую часть неравенства (15). Для подынтегральной функции справедливо представление

$$\frac{1}{f'(z)} = \prod_{k=0}^{\infty}\prod_{j=0}^{m}\left(1+w_jz^{q^k}\right) = \prod_{k=0}^{\infty}\left(1+\gamma_1z^{q^k}+\gamma_2z^{2q^k}+\cdots+\gamma_mz^{mq^k}\right), \tag{16}$$

где коэффициенты γ_j можно выразить по формулам Виета

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 = w_1+w_2+\cdots+w_m,\\
&\gamma_2 = w_1w_2+w_1w_3+\cdots+w_{m-1}w_m,\\
&\dots\\
&\gamma_{m-1} = w_1w_2\dots w_{m-1}+w_1w_2\dots w_{m-2}w_m+\cdots+w_2w_3\dots w_m,\\
&\gamma_m = w_1w_2\dots w_n.
\end{aligned}$$

Далее преобразуем правую часть неравенства (15). Заменив z на $ze^{i2\pi s/q-1}$, получим

$$\begin{aligned}
f'(ze^{i2\pi s/q-1}) &= \prod_{k=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{1+w_jz^{q^k}e^{i2\pi s/q-1}} =\\
&= \prod_{k=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}(1+t_jz^{q^k}+t_j^2z^{2q^k}+\cdots) = \prod_{k=0}^{\infty}(1+\alpha_1z^{q^k}+\alpha_2z^{2q^k}+\cdots),
\end{aligned} \tag{17}$$

где $t_j = -w_je^{i2\pi s/q-1}$.

Представим коэффициенты α_j в виде

$$\alpha_j = B(t_j) + C(t_j), \tag{18}$$

где $C(t_j), B(t_j)$ – некоторые многочлены от t_j, причем многочлены $B(t_j)$ имеют ту же структуру, что и коэффициенты γ_j в равенстве (16).

Докажем, что $\alpha_j > 0$. Из условия (4) следует неравенство $w_j e^{i2\pi s/(q-1)} < 0$ или то же самое, что $t_j > 0$. Так как многочлены $B(t_j)$ и $C(t_j)$ являются различными комбинациями произведений положительных чисел t_j, можно утверждать, что $B(t_j),\ C(t_j) > 0$.

Таким образом, выполнено следующее равенство для коэффициентов функции (16), (17):

$$|\gamma_j| \leqslant |\alpha_j|. \tag{19}$$

Далее для доказательства неравенства (15) нам потребуется равенство Парсеваля (9). Для удобства преобразуем функции из (16) и (17) следующим образом:

$$\frac{1}{f'(z)} = \prod_{k=0}^{\infty}(1+\gamma_1 z^{q^k} + \gamma_2 z^{2q^k} + \cdots + \gamma_m z^{mq^k}) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\gamma'_k z^k,$$

$$f'(z) = \prod_{k=0}^{\infty}(1+\alpha_1 z^{q^k} + \alpha_2 z^{2q^k} + \cdots) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\alpha'_k z^k.$$

Из неравенства (19) имеем

$$|\gamma'_k| \leqslant |\alpha'_k| \quad \forall\, k. \tag{20}$$

Применяя теперь равенство Парсеваля (9) к неравенству (15) и учитывая оценку (20), мы приходим к справедливости неравенства (14), которое влечет за собой неравенство

$$\beta_f(-2) \leqslant \beta_f(2) \leqslant 1. \tag{21}$$

Теорема доказана. □

Усиление оценки

$$\beta_f(-2) \leqslant 1$$

является более сложной задачей. Это показывает следующий пример.

Рассмотрим функцию f, удовлетворяющую условию (3), где $q = 2$ и $s = 1$, то есть

$$\frac{1}{f'(z)} = \prod_{k=0}^{\infty}(1 - z^{2^k}). \tag{22}$$

Докажем, что для данной функции неравенство (13) переходит в равенство, то есть

$$\beta_f(-2) = 1.$$

Для функции f имеет место разложение

$$\frac{1}{f'(z)} = \prod_{k=0}^{\infty}(1 - z^{2^k}) = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k z^k, \tag{23}$$

где $\alpha_k = \pm 1$.

Из равенств (9) и (23) вытекает

$$\beta_f(-2) = \limsup_{r\to 1} \frac{\ln \int\limits_0^{2\pi} \left| \prod\limits_{k=0}^{\infty} (1 - z^{2^k}) \right|^2 d\theta}{|\ln(1-r)|} = \limsup_{r\to 1} \frac{\ln \left(2\pi \sum\limits_{k=0}^{\infty} r^{2k} \right)}{|\ln(1-r)|} = 1,$$

что и требовалось получить.

Стоит отметить, что функция, удовлетворяющая условию (3), неоднолистна в единичном круге. Данный факт следует очевидным образом из теорем искажения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-97013-поволжье).

Summary

F.D. Kayumov. Integral Estimates for Infinite Products of Riesz Type.

In this paper we prove Brennan's conjecture for a conformal mapping f in the case when the ratio $1/f'(z)$ can be represented in the form of some infinite Riesz products.

Keywords: Brennan's conjecture, spectrum of integral averages.

Литература

1. *Carleson L., Makarov N.G.* Some results connected with Brennan's conjecture // Ark. Mat. – 1994. – V. 32, No 1. – P. 33–62.
2. *Baranski K., Volberg A., Zdunik A.* Brennan's conjecture and the Mandelbrot set // Int. Math. Res. Notices. – 1998. – No 12. – P. 589–600.
3. *Bertilsson D.* On Brennan's conjecture in conformal mapping: Doct. Thesis. – Stockholm, Sweden, 1999. – 110 p. – URL: http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:8593/FULLTEXT01.pdf, свободный.
4. *Каюмов И.Р.* О гипотезе Бреннана для специального класса функций // Матем. заметки. – 2005. – Т. 78, Вып. 4. – С. 537–541.
5. *Kayumov I.R.* Integral means and the law of iterated logarithm. Preprint No 8. – Djursholm, Sweden: Institut Mittag-Leffler, 2002. – 11 p.
6. *Каюмов И.Р.* Интегральные характеристики конформных отображений: Дис. ... д-ра физ.-матем. наук. – Казань, 2006. – 221 с.
7. *Каюмов И.Р.* Граничное поведение аналитических произведений Рисса в круге // Матем. труды. – 2006. – Т. 9, № 1. – С. 34–51.
8. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.

Поступила в редакцию
10.09.13

Каюмов Фаниль Дамирович – аспирант кафедры дифференциальных уравнений, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *fkauymov@gmail.com*