

УДК 514.16

## О ГЛАВНЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ ГИПЕРКВАДРИКИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

B.E. Фомин

### Аннотация

В конечномерном случае у гиперповерхности  $(n+1)$ -мерного евклидова пространства в каждой точке существуют  $n$  главных направлений – собственных векторов тензора Вейнгартена в данной точке гиперповерхности. У гиперповерхностей бесконечномерного гильбертова пространства оператор Вейнгартена может вообще не иметь собственных векторов. В данной работе доказывается, что у гиперквадрик гильбертова пространства, задаваемых положительно определенной квадратичной формой с некоторыми дополнительными ограничениями, главные направления существуют, приводится явное выражение точки гиперквадрики, для которой данное направление.

Пусть  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  – вещественное гильбертово пространство,  $F : H \rightarrow \mathbb{R}$  – функция класса  $C^r$ ,  $(r \geq 3)$ ,  $\Sigma = \{x \in H | F(x) = 0\}$  – подмножество в  $H$ , причем  $\forall x \in \Sigma, DF_x \neq 0 \in \mathcal{L}(H; \mathbb{R}) = H^*$ , то есть  $\forall x \in \Sigma$  – регулярная точка (или по-другому:  $0 \in \mathbb{R}$  – регулярное значение отображения  $F$ ). Тогда  $\Sigma$  – подмногообразие (регулярная гиперповерхность) в  $H$  (см. [1]). Всякая карта  $c = (x^{-1}(U), x^{-1}, E)$  на  $\Sigma$  определяет локальную параметризацию  $x = x(u)$ ,  $u \in U$  гиперповерхности, где  $U$  – открытое множество в некотором модельном гильбертовом пространстве  $E$ .

И квадратичная форма поверхности  $\Sigma$  (в параметризации, определяемой данной картой) – это билинейная форма (тензор валентности  $(0,2)$ )

$$g_u(v, w) = \langle Dx_u(v), Dx_u(w) \rangle. \quad (1)$$

Здесь и всюду ниже  $Df_u$  – производная Фреше в точке  $u$  отображения  $f$  банаховых пространств [1].

Найдем II квадратичную форму и оператор Вейнгартена поверхности  $\Sigma$ . Для  $\forall u \in U$  имеем  $F(x(u)) \equiv 0$ . Продифференцировав это тождество, получим:  $\forall u \in U, \forall v \in E$

$$DF_{x(u)}(Dx_u(v)) = 0. \quad (2)$$

Здесь  $Dx_u(v)$  – вектор, касательный к  $\Sigma$  в точке  $x(u)$ . Для любого  $x \in H$  обозначим  $N_x \in H$  – вектор, соответствующий функционалу  $DF_x$ , т. е.  $\forall Z \in H$   $DF_x(Z) \equiv \langle N_x, Z \rangle$ . Такой вектор по теореме Рисса [2] существует и единственен. Для  $x \in \Sigma$   $N_x \neq 0$ . Пусть  $n_x$  – орт вектора  $N_x$ , т. е.  $N_x = \|N_x\| \cdot n_x$ . Тогда тождество (2) примет вид:  $\forall u \in U, \forall v \in E$

$$\langle n_{x(u)}, Dx_u(v) \rangle \equiv 0, \quad (3)$$

т. е.  $n_{x(u)}$  – орт нормали поверхности  $\Sigma$  в точке  $x(u)$ . Продифференцировав тождество (3) еще раз, получим:  $\forall u \in U, \forall v, w \in E$

$$\langle Dn_{x(u)}(Dx_u(w)), Dx_u(v) \rangle + \langle n_{x(u)}, D^2x_u(w; v) \rangle \equiv 0. \quad (4)$$

II квадратичная форма гиперповерхности (в данной параметризации) – это билинейная форма (тензор валентности (0,2)):

$$h_u(v, w) = \langle n_{x(u)}, D^2 x_u(v; w) \rangle = -\langle Dn_{x(u)}(Dx_u(w)), Dx_u(v) \rangle. \quad (5)$$

Оператор Вейнгартена (тензор валентности (1,1)) в данной параметризации – это решение уравнения

$$g_u(v, A_u(w)) = h_u(v, w) \quad (6)$$

или, как следует из (1), (5):

$$Dx_u(A_u(w)) = -Dn_{x(u)}(Dx_u(w)). \quad (7)$$

Если учесть, что тензор типа (1,1) на  $\Sigma$  в точке  $x$  – это линейный непрерывный оператор  $\bar{A}_x : T_x \Sigma \rightarrow T_x \Sigma$ , а его локальное представление в данной параметризации – это  $A_u = (Dx_u)^{-1} \circ \bar{A}_{x(u)} \circ Dx_u$ , то из (7) следует, что  $\forall x \in \Sigma, \forall Z \in T_x \Sigma$

$$\bar{A}_{x(u)}(Z) = -Dn_{x(u)}(Z). \quad (8)$$

Вообще говоря, формула (8) определяет поле операторов  $\bar{A}_x \in \mathcal{L}(H, H)$ ,  $\forall x \in H$ , на всем пространстве  $H$ , а не только в точках  $x \in \Sigma$ , поскольку  $n_x$  – орт контравариантного градиента функции  $F : H \rightarrow \mathbb{R}$  определен для  $\forall x \in H$ . Но для  $x \in \Sigma$   $\bar{A}_x(T_x \Sigma) \subset T_x \Sigma$ , что следует из цепочки тождеств:

$$\begin{aligned} \forall x \in H \quad \langle n_x, n_x \rangle \equiv 1 &\implies \forall x, Z \in H \quad \langle Dn_x(Z), n_x \rangle \equiv 0 \implies \\ &\implies Dn_x(Z) \perp n_x \implies \bar{A}_x(H) = -Dn_x(H) \subset T_x \Sigma. \end{aligned}$$

Тензор (8) и является по определению *оператором Вейнгартена* гиперповерхности  $\Sigma$ . Напомним [3], что собственные векторы оператора  $\bar{A}_x$  называются *главными направлениями* поверхности в точке  $x$ , а кривая класса  $C^1$  на  $\Sigma$  называется *линией кривизны*, если ее касательные векторы в каждой ее точке имеют главное направление.

**Замечание 1.** Мы говорим, что линейный непрерывный оператор  $S$ , действующий на вещественном гильбертовом пространстве  $H$ , не имеет собственных векторов, если комплексификация этого оператора, действующая на комплексном расширении гильбертова пространства, не имеет собственных векторов. Если  $S$  – самосопряженный оператор, то его собственные значения, если они существуют, вещественны.

Пусть  $\Sigma$  – гиперквадрика с уравнением

$$\langle x, S(x) \rangle - 1 = 0, \quad (9)$$

где  $S \in \mathcal{L}(H; H)$  – самосопряженный линейный непрерывный оператор. Тогда

$$\begin{aligned} F(x) &= \langle x, S(x) \rangle - 1, \quad DF_x(Z) = 2\langle Z, S(x) \rangle \implies \\ &\implies N_x = 2S(x), \quad n_x = \frac{S(x)}{\|S(x)\|} \implies \\ &\implies Dn_x(Z) = \frac{S(Z)}{\|S(x)\|} - S(x) \cdot \frac{\langle S(Z), S(x) \rangle}{\|S(x)\|^3}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\bar{A}_x(Z) = \frac{1}{\|S(x)\|^3} \cdot [S(x) \cdot \langle S(x), S(Z) \rangle - S(Z) \cdot \|S(x)\|^2]. \quad (10)$$

Если  $x \in \Sigma$ , а  $Z \in T_x\Sigma$ , то  $Z \perp N_x = 2S(x)$  и

$$\langle S(x), Z \rangle = 0. \quad (11)$$

Поскольку  $\bar{A}_x$  самосопряжен относительно метрического тензора  $\bar{g}_x$  поверхности  $\Sigma$ , то собственные значения и собственные векторы оператора  $\bar{A}_x$ , если они существуют, вещественны [4].

В качестве гильбертова пространства  $H$  рассмотрим пространство  $H = l^2 \times l^2$ , где  $l^2$  – вещественное гильбертово пространство последовательностей, суммируемых с квадратом. Нам будет удобно векторы пространства  $H$  записывать в виде  $x = (x^i)_{i=-\infty}^{+\infty}$ . Скалярное произведение в  $H$  определяется так:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x^i y^i. \quad (12)$$

В пространстве  $H$  рассмотрим гиперквадрику  $\Sigma$  с уравнением

$$\langle x, S(x) \rangle = 2\langle x, T(x) \rangle = 1, \quad (13)$$

где

$$S = T + T^{-1}, \quad (14)$$

$$T : x = (x^i)_{i=-\infty}^{+\infty} \in H \rightarrow y = T(x) = (y^i = x^{i-1})_{i=-\infty}^{+\infty} \in H \quad (15)$$

есть оператор сдвига, который является линейным непрерывным ортогональным оператором.

**Предложение 1.** *Операторы  $T$  и  $S$  не имеют собственных векторов.*

**Доказательство.** Оператор  $T$  (точнее, его комплексификация, см. Замечание выше) не имеет собственных векторов, так как в противном случае, если  $x \neq 0$  и  $T(x) = \lambda \cdot x$ , то  $\|x\| = \|T(x)\| = |\lambda| \cdot \|x\|$  и  $|\lambda| = 1$ . Тогда

$$(T(x))^i = \lambda x^i \Rightarrow x^{i-1} = \lambda x^i \Rightarrow \forall i \in \mathbb{Z} \quad |x^{i-1}| = |x^i|,$$

что противоречит тому, что  $\sum_{i \in \mathbb{Z}} |x^i|^2 < \infty$ . У оператора  $T$  нет конечномерных инвариантных векторных подпространств, так как в противном случае ограничение  $T$  на такое подпространство (точнее, его комплексификацию) имело бы собственные (комплексные) векторы.

Пусть теперь  $x$  – собственный вектор оператора  $S$ , соответствующий собственному значению  $\lambda$ . В силу самосопряженности  $S$   $x$  и  $\lambda$  вещественны. Тогда

$$T(x) + T^{-1}(x) = \lambda \cdot x.$$

Но это равенство означает, что векторы  $\{T(x), T^{-1}(x), x\}$  линейно зависимы, а конечномерное подпространство, натянутое на них, инвариантно относительно действия оператора  $T$ , что невозможно.  $\square$

**Предложение 2.** *Множество значений  $\text{Im } S = S(H)$  оператора  $S$  плотно в  $H$ .*

**Доказательство.** Так как оператор  $S$  самосопряжен, то  $\forall h \in H$  равенство  $\langle y, S(h) \rangle = 0$  влечет  $\langle S(y), h \rangle = 0$  и  $S(y) = 0$ . Но по предложению 1 оператор  $S$  инъективен, поэтому  $y = 0$ , то есть  $S(H)^\perp = \{0\}$ . Тогда и  $\overline{S(H)}^\perp = \{0\}$ , и, следовательно,  $\overline{S(H)} = H$ .  $\square$

Если теперь оператор Вейнгартена (10) гиперквадрики  $\Sigma$  (13) в точке  $x \in \Sigma$  имеет собственный вектор  $Z_0 \in T_x\Sigma$ , то

$$\lambda_0 \cdot Z_0 = \frac{1}{\|S(x)\|^3} \cdot [S(x) \cdot \langle S(x), S(Z_0) \rangle - S(Z_0) \cdot \|S(x)\|^2]. \quad (16)$$

Найти из равенства (16) для каждой точки  $x \in \Sigma$  главное направление  $Z_0$  или, наоборот, доказать отсутствие главных направлений, представляется сложной задачей. Будем действовать иначе: не искать для заданной точки  $x$  поверхности  $\Sigma$  собственный вектор  $Z \in T_x\Sigma$  оператора Вейнгартена  $\bar{A}_x$ , а наоборот, для заданного вектора  $Y \in H$  искать такую точку  $x$  поверхности  $\Sigma$ , для которой этот вектор  $Y$  (или некоторый вектор, зависящий от  $Y$ ) является собственным вектором оператора Вейнгартена  $\bar{A}_x$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\Sigma$  – гиперповерхность вещественного гильбертова пространства  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , заданная неявным уравнением

$$\langle S(x), x \rangle = 1, \quad (17)$$

где  $S$  – самосопряженный ( $S^* = S$ ) линейный непрерывный оператор в  $H$ , не имеющий собственных векторов (дискретный спектр оператора пуст). Тогда если вектор  $Y \in T_x\Sigma$  является собственным вектором оператора Вейнгартена поверхности  $\Sigma$  в точке  $x$ , то  $Y = S(Z)$ , где вектор  $Z \in H$  удовлетворяет неравенству

$$\langle S^2(Z), S(Z) \rangle [\langle S^2(Z), S(Z) \rangle \langle S(Z), Z \rangle - \|S(Z)\|^4] > 0, \quad (18)$$

причем  $x$  и  $Z$  связаны между собой равенством

$$x = \pm [\|S(Z)\|^2 \cdot S(Z) - \langle S^2(Z), S(Z) \rangle \cdot Z] \cdot [\langle S^2(Z), S(Z) \rangle (\langle S^2(Z), S(Z) \rangle \langle Z, S(Z) \rangle - \|S(Z)\|^4)]^{-1/2}. \quad (19)$$

Верно и обратное: для любого вектора  $Z \in H$ , удовлетворяющего неравенству (18), существует точка  $x \in \Sigma$ , связанная с  $Z$  равенством (19), такая, что вектор  $S(Z)$  является собственным вектором оператора Вейнгартена поверхности  $\Sigma$  в точке  $x$ . Если оператор  $S$  к тому же еще и положителен ( $\forall X \neq 0 \langle S(X), X \rangle > 0$ ), то (18) выполняется для любого вектора  $Z \neq 0$ .

**Доказательство.** Оператор Вейнгартена гиперквадрики  $\Sigma$  в точке  $x \in \Sigma$  имеет вид (10):  $\forall Y \in T_x\Sigma \subset H$

$$\bar{A}_x(Y) = \frac{1}{\|S(x)\|^3} \cdot [S(x) \cdot \langle S(x), S(Y) \rangle - S(Y) \cdot \|S(x)\|^2], \quad (20)$$

при этом согласно (11)

$$\langle Y, S(x) \rangle = 0. \quad (21)$$

Предположим, что в точке  $x \in \Sigma$  у оператора  $\bar{A}_x$  существует главное направление, то есть существует вектор  $Y \in T_x\Sigma$ ,  $Y \neq 0$ :  $\bar{A}_x(Y) = \lambda_x \cdot Y$ . При этом собственное значение  $\lambda_x \neq 0$ , так как в противном случае из (20) в силу инъективности оператора  $S$  следовало бы

$$x \cdot \langle S(x), S(Y) \rangle - Y \cdot \|S(x)\|^2 = 0,$$

откуда

$$Y = \frac{\langle S(x), S(Y) \rangle}{\|S(x)\|^2} \cdot x = \nu \cdot x.$$

Подставив это выражение в (21), получим  $0 = \nu \langle x, Sx \rangle = \nu$ , то есть  $Y = 0$  – противоречие.

Из (20) видно, что  $\text{Im}\bar{A}_x = \text{Im}S$ , то есть собственный вектор  $Y \in \text{Im}S$  и поэтому имеет вид  $Y = S(Z)$ ,  $Z \in H$ . Из (20) следует, что векторы  $\{S(x), S(Y), Y\}$  образуют линейно зависимую систему, то есть  $S^2(Z) = \alpha S(Z) + \beta S(x)$ , откуда  $\alpha = \langle Y, S(Y) \rangle / \|Y\|^2$  и

$$\beta S(x) = S^2(Z) - \frac{\langle S^2(Z), S(Z) \rangle}{\|S(Z)\|^2} \cdot S(Z). \quad (22)$$

Так как оператор  $S$  инъективен, то (22) влечет

$$\beta x = S(Z) - \frac{\langle S^2(Z), S(Z) \rangle}{\|S(Z)\|^2} \cdot Z. \quad (23)$$

Подставив (22) и (23) в уравнение поверхности (17), получим

$$\beta^2 = \frac{\langle S^2(Z), S(Z) \rangle}{\|S(Z)\|^4} \cdot [\langle S^2(Z), S(Z) \rangle \langle Z, S(Z) \rangle - \|S(Z)\|^4]. \quad (24)$$

Таким образом,

$$\langle S^2(Z), S(Z) \rangle \cdot [\langle S^2(Z), S(Z) \rangle \langle Z, S(Z) \rangle - \|S(Z)\|^4] > 0 \quad (25)$$

– необходимое условие того, что вектор  $Y = S(Z)$  является главным направлением поверхности  $\Sigma$  в точке  $x$ , которая, как следует из (23), (25), выражается через этот вектор  $Z$ :

$$x = \pm \left[ \frac{\|S(Z)\|^2 \cdot S(Z) - \langle S^2(Z), S(Z) \rangle \cdot Z}{[\langle S^2(Z), S(Z) \rangle \cdot (\langle S^2(Z), S(Z) \rangle \langle Z, S(Z) \rangle - \|S(Z)\|^4)]^{-1/2}} \right]. \quad (26)$$

(таких точек, симметричных относительно 0, две).

Условия (25) и достаточно для того, чтобы произвольный вектор  $Y = S(Z) \neq 0$  был собственным вектором поверхности  $\Sigma$ , по крайней мере, в двух ее точках вида (26). Действительно, как легко проверить, при любом векторе  $Z \neq 0$  точка (26) лежит на поверхности  $\Sigma$  (17), а вектор  $Y = S(Z) \in T_x\Sigma$ , так как  $S(Z) \perp S(x)$ . Кроме того, вектор  $Y = S(Z)$  – собственный вектор оператора Вейнгардтена (20) в точке (26), то есть

$$S(x) \cdot \langle S(x), S(Y) \rangle - S(Y) \cdot \|S(x)\|^2 \parallel Y$$

или

$$x \cdot \langle S(x), S^2(Z) \rangle - S(Z) \cdot \|S(x)\|^2 \parallel Z. \quad (27)$$

Докажем (27). Обозначив для краткости

$$[\langle S^2(Z), S(Z) \rangle \cdot (\langle S^2(Z), S(Z) \rangle \langle Z, S(Z) \rangle - \|S(Z)\|^4)]^{-1/2} = B, \quad (28)$$

получим для выражений, входящих в левую часть равенства (27):

$$\langle S(x), S^2(Z) \rangle = \langle x, S^3(Z) \rangle = \pm B \cdot [\|S(Z)\|^2 \cdot \|S^2(Z)\|^2 - \langle S^2(Z), S(Z) \rangle^2],$$

$$\begin{aligned} \|S(x)\|^2 &= B^2 \cdot [\|S(Z)\|^2 \cdot S^2(Z) - \langle S^2(Z), S(Z) \rangle \cdot S(Z)]^2 = \\ &= B^2 \cdot [\|S(Z)\|^2 \cdot \|S^2(Z)\|^2 - \langle S^2(Z), S(Z) \rangle^2] \cdot \|S(Z)\|^2. \end{aligned}$$

Тогда левая часть (27) примет вид

$$-B^2 \cdot [\|S(Z)\|^2 \cdot \|S^2(Z)\|^2 - \langle S^2(Z), S(Z) \rangle^2] \cdot \langle S^2(Z), S(Z) \rangle \cdot Z \parallel Z.$$

Пусть теперь оператор  $S$  положителен, то есть  $\forall x \neq 0 \langle S(x), x \rangle > 0$ . Тогда существует самосопряженный линейный непрерывный оператор  $P : P^2 = S$  [4], который также не имеет собственных векторов и поэтому инъективен. Проверим условие (25) для оператора  $S$ :  $\forall Z \neq 0$  также и  $S(Z) \neq 0$ , поэтому

$$\langle S^2(Z), S(Z) \rangle > 0. \quad (29)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} & \langle S^2(Z), S(Z) \rangle \langle Z, S(Z) \rangle - \|S(Z)\|^4 = \\ & = \|P^3(Z)\|^2 \cdot \|P(Z)\|^2 - \langle P^2(Z), P^2(Z) \rangle^2 = \\ & = \|P^3(Z)\|^2 \cdot \|P(Z)\|^2 - \langle P^3(Z), P(Z) \rangle^2 > 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Неравенство в (30) строгое, так как его обращение в равенство возможно лишь при  $P^3(Z) \parallel P(Z)$ , то есть  $S(P(Z)) \parallel P(Z)$ , что невозможно ввиду отсутствия у оператора  $S$  собственных векторов; (29) и (30) влекут (25), что и завершает доказательство теоремы.  $\square$

**Замечание 2.** Остаются открытыми вопросы: какое подмножество точек поверхности описывает уравнение (19) при выполнении условия (18)? Будет ли это множество на  $\Sigma$  открытым или замкнутым, может ли оно совпадать со всей поверхностью или быть пустым?

В качестве примеров гиперквадрики (17) с положительным самосопряженным оператором  $S$ , не имеющим собственных векторов, рассмотрим следующие (правда, эти примеры не дают ответы на вопросы, поставленные выше в замечании).

1.  $H = L^2([0, 1])$  – гильбертово пространство суммируемых с квадратом по Лебегу вещественных функций, заданных на отрезке  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ ,  $\forall x \in H$

$$S(x) = f \cdot x, \quad (31)$$

где  $f \in H$  и  $f$  положительна, то есть  $f(t) > 0$  на  $[0, 1]$  почти всюду, и  $\forall c > 0 \mu\{t \in [0, 1] \mid f(t) = c\} = 0$  ( $\mu$  – лебегова мера на  $[0, 1]$ ).

2.  $H = l^2 \times l^2$ , где  $l^2$  – гильбертово пространство вещественных последовательностей, суммируемых с квадратом:  $\forall x = (x^i)_{i \in \mathbb{Z}}, y = (y^i)_{i \in \mathbb{Z}} \langle x, y \rangle = \sum_{i \in \mathbb{Z}} x^i y^i$ ,  $T : x = (x^i) \rightarrow y = T(x) = (y^i = x^{i-1})$ ,  $T$  – ортогональный оператор ( $T^* = T^{-1}$ ,  $\|T\| = 1$ ),

$$S = \frac{k}{2}(T + T^{-1}) + \text{id}_H, \quad |k| \leq 1. \quad (32)$$

Тогда  $\forall Z \neq 0 \langle S(Z), Z \rangle = k \langle T(Z), Z \rangle + \langle Z, Z \rangle \geq \|Z\|^2 - |k| \cdot |\langle T(Z), z \rangle| > \|Z\|^2 - |k| \cdot \|T(Z)\| \cdot \|Z\| = \|Z\|^2(1 - |k|) > 0$  (второе неравенство в этой цепочке строгое, так как если бы было  $|\langle T(Z), Z \rangle| = \|T(Z)\| \cdot \|Z\|$ , то  $T(Z) \parallel Z$ , но оператор сдвига  $T$  не имеет собственных векторов).

Оператор  $S$  не имеет собственных векторов, так как таким свойством обладает оператор  $T + T^{-1}$  (см. выше предложение 1).

3.  $H$  и  $T$ , как в примере 2,

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} T^i + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} T^{-i}. \quad (33)$$

Оператор  $S$  положителен, так как  $\forall x \neq 0$

$$\langle S(x), x \rangle = 2\|x\|^2 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \langle T^i(x), x \rangle > 2\|x\|^2 - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \|x\|^2 = 0$$

(неравенство в этой цепочке строгое, так как оператор сдвига  $T^i$ ,  $i = \overline{1, \infty}$ , не имеет собственных векторов).

Покажем теперь, что оператор  $S$  не имеет собственных векторов. Так как  $S$  самосопряжен, то его собственные значения вещественны. Если  $Z$  – собственный вектор оператора  $S$ , то

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} T^i(Z) + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} T^{-i}(Z) = \lambda \cdot Z, \quad (34)$$

и, как следствие,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} T^{i+1}(Z) + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} T^{1-i}(Z) = \frac{1}{2} \lambda \cdot TZ. \quad (35)$$

Вычитая (35) из (34), получим

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} T^i(Z) = \frac{4}{3}(\lambda - 1)(Z - \frac{1}{2}T(Z)). \quad (36)$$

Так как

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} T^i = (E - \frac{1}{2}T)^{-1}, \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} T^{-i} = (E - \frac{1}{2}T^{-1})^{-1} = 2T(2T - E)^{-1} \quad (37)$$

(здесь  $E = \text{id}_H$ ), то (34) и (36) можно записать так:

$$(E - \frac{1}{2}T)^{-1}(Z) + 2T(2T - E)^{-1}(Z) = \lambda \cdot Z, \quad (38)$$

$$2T(2T - E)^{-1}(Z) = \frac{4}{3}(\lambda - 1)(E - \frac{1}{2}T)(Z). \quad (39)$$

Подставив (39) в (38), получим

$$(E - \frac{1}{2}T)^{-1}(Z) + \frac{4}{3}(\lambda - 1)(E - \frac{1}{2}T)(Z) = \lambda \cdot Z,$$

а отсюда, как следствие,

$$\left( \frac{4}{3}(\lambda - 1)(E - \frac{1}{2}T)^2 - \lambda(E - \frac{1}{2}T) + E \right)(Z) = 0. \quad (40)$$

Обозначим

$$E - \frac{1}{2}T = Q. \quad (41)$$

Так как оператор  $T$  не имеет собственных векторов, то и  $Q$  их не имеет. Тогда (40) примет вид

$$\left( \frac{4}{3}(\lambda - 1)Q^2 - \lambda Q + E \right)(Z) = 0. \quad (42)$$

Но равенство (42) означает, что векторы  $\{Z, Q(Z), Q^2(Z)\}$  линейно зависимы, и подпространство (двумерное при  $\lambda \neq 1$  или одномерное при  $\lambda = 1$ ), натянутое на них (точнее, комплексификация этого пространства), инвариантно относительно действия оператора  $Q$ , что невозможно, так как  $Q$  не имеет собственных векторов.

**Summary**

*V.E. Fomin.* On principal directions of hyperquadric in Hilbert space.

A hypersurface in an  $(n + 1)$ -dimensional Euclidean space has  $n$  principal directions at each point: the eigenvectors of the Weingarten operator. And for a hypersurface in the infinite-dimensional Hilbert space, the Weingarten operator possibly has no eigenvectors. In the present paper we show that a hyperquadric in the Hilbert space determined by a positive definite quadratic form has principal directions under some additional assumptions. For a given direction we write an explicit expression for the point of the hyperquadric where this direction is principal. Also we give examples of these hyperquadrics.

**Литература**

1. *Бурбаки Н.* Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов. – М.: Наука, 1975.
2. *Дъёдонне Ж.* Основы современного анализа. – М.: Мир, 1964.
3. *Норден А.П.* Теория поверхностей. – М.: ГИТТЛ, 1956.
4. *Ленг С.* Введение в теорию дифференцируемых многообразий. – М.: Мир, 1967.

Поступила в редакцию  
23.12.04

---

**Фомин Виктор Егорович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии Казанского государственного университета.

E-mail: *Victor.Fomin@ksu.ru*