Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского
Казань, 6 декабря 2020 г.

5 класс

1. Буратино купил мороженое в пачках по 50 рублей и по 70 рублей. Стоимость всех 50-рублёвых пачек мороженого равна общей стоимости 70-рублёвых. Сколько всего пачек мороженого купил Буратино, если было куплено не более 30 пачек?

2. Найдите наименьшее натуральное n, для которого произведение чисел n, $n+1$ и $n+2$ делится на 150.

3. За круглым столом сидят 45 человек, каждый из которых или рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжёт. Среди сидящих за столом есть хотя бы один рыцарь. Каждый из них утверждает: «Мои соседи — рыцарь и лжец». Сколько рыцарей сидит за столом?

4. Разрежьте клетчатый прямоугольник размером 8×11 по клеточкам на максимальное количество «уголков» шириной в одну клетку так, чтобы все «уголки» состояли из *разного* числа клеток. (Длины «сторон» уголка могут быть как одинаковыми, так и различными.)

5. В наборе были гирьки с массами 14, 15 и 16 граммов, поровну каждого вида. После того как несколько гирек потерялось, все оставшиеся гирьки взвесили, их масса оказалась равной 500 граммов. Какое *наименьшее* количество гирек могло быть потеряно?

Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского
Казань, 6 декабря 2020 г.

5 класс

1. Буратино купил мороженое в пачках по 50 рублей и по 70 рублей. Стоимость всех 50-рублёвых пачек мороженого равна общей стоимости 70-рублёвых. Сколько всего пачек мороженого купил Буратино, если было куплено не более 30 пачек?

2. Найдите наименьшее натуральное n, для которого произведение чисел n, $n+1$ и $n+2$ делится на 150.

3. За круглым столом сидят 45 человек, каждый из которых или рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжёт. Среди сидящих за столом есть хотя бы один рыцарь. Каждый из них утверждает: «Мои соседи — рыцарь и лжец». Сколько рыцарей сидит за столом?

4. Разрежьте клетчатый прямоугольник размером 8×11 по клеточкам на максимальное количество «уголков» шириной в одну клетку так, чтобы все «уголки» состояли из *разного* числа клеток. (Длины «сторон» уголка могут быть как одинаковыми, так и различными.)

5. В наборе были гирьки с массами 14, 15 и 16 граммов, поровну каждого вида. После того как несколько гирек потерялось, все оставшиеся гирьки взвесили, их масса оказалась равной 500 граммов. Какое *наименьшее* количество гирек могло быть потеряно?

Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского
Казань, 6 декабря 2020 г.

6 класс

1. Найдите *наименьшее* натуральное число n, для которого произведение $(n+1)(n+2)(n+3)$ делится на 150.

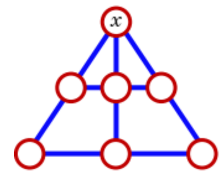

Рис. 1

2. Вокруг круглого стола сидят пятнадцать человек — каждый либо рыцарь, либо лжец. Рыцарь всегда говорит правду, а лжец всегда лжет. Каждого из них спросили: «Кто сидит *слева* от тебя?» *а*) Могли ли они все ответить «рыцарь»? *б*) Могли ли они все ответить «лжец»?

3. Числа 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 расставили в кружочках на рисунке 1 так, что суммы всех пяти троек чисел, расположенных «на отрезках», оказались равны между собой. Чему равно число x, стоящее в верхнем кружочке? Укажите все возможные варианты.

4. В игре «Морской бой» на клетчатой доске 11×11 расположен один клетчатый корабль размера 1×3. Одним выстрелом можно прострелить целиком *все* клетки одной строки или одного столбца. Какого *минимального* количества выстрелов хватит, чтобы гарантированно ранить корабль?

5. В наборе были гирьки с массами 13, 14 и 15 граммов, поровну каждого вида. После того как несколько гирек потерялось, все оставшиеся гирьки взвесили, их масса оказалась равной 500 граммов. Какое *наименьшее* количество гирек могло быть потеряно?

Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского
Казань, 6 декабря 2020 г.

6 класс

1. Найдите *наименьшее* натуральное число n, для которого произведение $(n+1)(n+2)(n+3)$ делится на 150.

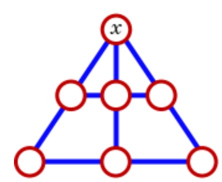

Рис. 1

2. Вокруг круглого стола сидят пятнадцать человек — каждый либо рыцарь, либо лжец. Рыцарь всегда говорит правду, а лжец всегда лжет. Каждого из них спросили: «Кто сидит *слева* от тебя?» *а*) Могли ли они все ответить «рыцарь»? *б*) Могли ли они все ответить «лжец»?

3. Числа 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 расставили в кружочках на рисунке 1 так, что суммы всех пяти троек чисел, расположенных «на отрезках», оказались равны между собой. Чему равно число x, стоящее в верхнем кружочке? Укажите все возможные варианты.

4. В игре «Морской бой» на клетчатой доске 11×11 расположен один клетчатый корабль размера 1×3. Одним выстрелом можно прострелить целиком *все* клетки одной строки или одного столбца. Какого *минимального* количества выстрелов хватит, чтобы гарантированно ранить корабль?

5. В наборе были гирьки с массами 13, 14 и 15 граммов, поровну каждого вида. После того как несколько гирек потерялось, все оставшиеся гирьки взвесили, их масса оказалась равной 500 граммов. Какое *наименьшее* количество гирек могло быть потеряно?

Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского
Казань, 6 декабря 2020 г.

7 класс

1. За столом сидят несколько детей. Из пакета с конфетами первый взял 1 конфету, второй — 2, третий — 3 и так далее: каждый следующий брал на одну конфету больше. Известно, что на втором круге было взято в сумме на 100 конфет больше, чем на первом. Сколько детей сидело за столом?

2. Вокруг круглого стола сидят шестнадцать человек — каждый либо рыцарь, либо лжец. Рыцарь всегда говорит правду, а лжец всегда лжет. Каждого из них спросили: «Кто сидит *слева* от тебя?» Могла ли половина из них ответить «рыцарь», а половина — «лжец»?

3. Числа $0, 1, 2, \ldots, 8$ расставили в кружочках на рисунке 1 так, что суммы чисел на каждой стороне треугольника одинаковы и равны s. Какое *наименьшее* значение может принимать s?

4. На доске были написаны тринадцать последовательных натуральных чисел. Когда из них стёрли восемь подряд идущих чисел, то сумма пяти оставшихся оказалась равна 100. Какие числа стёрли? Найдите все возможные варианты.

5. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что $BC = CD = 8$, $AO = DO$ и $\angle AOD = 120°$. Чему равно AB?

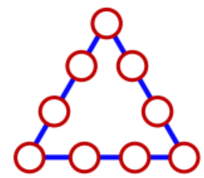

Рис. 1

Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского
Казань, 6 декабря 2020 г.

7 класс

1. За столом сидят несколько детей. Из пакета с конфетами первый взял 1 конфету, второй — 2, третий — 3 и так далее: каждый следующий брал на одну конфету больше. Известно, что на втором круге было взято в сумме на 100 конфет больше, чем на первом. Сколько детей сидело за столом?

2. Вокруг круглого стола сидят шестнадцать человек — каждый либо рыцарь, либо лжец. Рыцарь всегда говорит правду, а лжец всегда лжет. Каждого из них спросили: «Кто сидит *слева* от тебя?» Могла ли половина из них ответить «рыцарь», а половина — «лжец»?

3. Числа $0, 1, 2, \ldots, 8$ расставили в кружочках на рисунке 1 так, что суммы чисел на каждой стороне треугольника одинаковы и равны s. Какое *наименьшее* значение может принимать s?

4. На доске были написаны тринадцать последовательных натуральных чисел. Когда из них стёрли восемь подряд идущих чисел, то сумма пяти оставшихся оказалась равна 100. Какие числа стёрли? Найдите все возможные варианты.

5. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что $BC = CD = 8$, $AO = DO$ и $\angle AOD = 120°$. Чему равно AB?

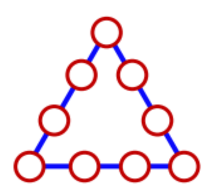

Рис. 1

Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского
Казань, 6 декабря 2020 г.
Вариант 4

5 класс

1. Буратино купил мороженое в пачках по 50 рублей и по 70 рублей. Стоимость всех 50-рублёвых пачек мороженого равна общей стоимости 70-рублёвых. Сколько всего пачек мороженого купил Буратино, если было куплено не более 30 пачек?

Ответ: 12 *пачек или* 24 *пачки.*

Решение. Пусть x, y — количество 50- и 70-рублёвых пачек мороженого соответственно. По условию $50x = 70y$ и $x + y \leqslant 30$. Из равенства $5x = 7y$ видно, что x делится на 7. Поскольку $x \leqslant 30$, значение x равно 7, 14, 21 или 28, при этом $y = 5$, 10, 15 или 20. В первых двух случаях значения $x+y$ равны 12 или 24; в двух последних $x + y$ равно 36 или 48, что больше 30.

Критерии. За каждый пример — 2 балла. Доказано, что других решений нет — 3 балла.

2. Найдите наименьшее натуральное n, для которого произведение чисел n, $n + 1$ и $n + 2$ делится на 150.

Ответ: $n = 23$.

Решение. Из трёх последовательных натуральных чисел на 5 может делиться только одно. Поэтому в произведении $n(n + 1)(n + 2)$ один из трёх сомножителей должен делиться на 25. Значит, наибольший сомножитель $n + 2$ не меньше 25, то есть $n \geqslant 23$. Легко проверить, что если $n = 23$, то произведение делится и на 25, и на 6, то есть кратно 150.

Критерии. Правильный ответ — 2 балла. Отмечается, что один из сомножителей делится на 25 — 2 балла.

3. За круглым столом сидят 45 человек, каждый из которых или рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжёт. Среди сидящих за столом есть хотя бы один рыцарь. Каждый из них утверждает: «Мои соседи — рыцарь и лжец». Сколько рыцарей сидит за столом?

Ответ: 30 *рыцарей.*

Решение. Рассмотрим сидящего за столом рыцаря. Поскольку его утверждение правдиво, рядом с ним один сосед — рыцарь, а второй — лжец. Предположим, что сидящий справа от него — рыцарь, тогда следующим будет лжец, то есть имеем последовательность РРЛ. С другой стороны от лжеца сидит рыцарь, и следующий за ним — тоже рыцарь, то есть получим РРЛРР. Но тогда следующим за рыцарем должен быть снова лжец, и так далее. В итоге получим расстановку всех рыцарей и лжецов РРЛ РРЛ РРЛ ... РРЛ, в которой всего 30 рыцарей.

Критерии. Только ответ без объяснений — 1 балл. Правильная расстановка рыцарей и лжецов с ошибкой в вычислениях — 4 балла.

4. Разрежьте клетчатый прямоугольник размером 8×11 по клеточкам на максимальное количество «уголков» шириной в одну клетку так, чтобы все «уголки» состояли из *разного* числа клеток. (Длины «сторон» уголка могут быть как одинаковыми, так и различными.)

Ответ: 11 *уголков. Например, как на рисунке* 1.

Решение. Площадь прямоугольника — 88 клетки, а самого маленького «уголка» — 3 клетки. Представим число 88 в виде суммы *наибольшего* числа различных слагаемых, начиная с трёх: $88 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13$. Значит, при разрезании исходного прямоугольника может получиться не более одиннадцати уголков (*оценка*). На рисунке 1 приведён один из возможных способов разрезания прямоугольника 8×11 на одиннадцать «уголков» с указанными количествами клеток (*пример*).

Критерии. Правильный пример разрезания — 3 балла. Доказано, что число уголков не более одиннадцати — ещё 4 балла.

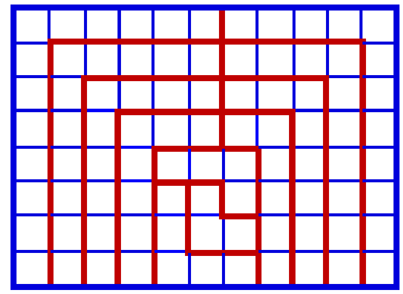

Рис. 1

5. В наборе были гирьки с массами 14, 15 и 16 граммов, поровну каждого вида. После того как несколько гирек потерялось, все оставшиеся гирьки взвесили, их масса оказалась равной 500 граммов. Какое *наименьшее* количество гирек могло быть потеряно?

Ответ: 6 *гирек.*

Решение. Исходный суммарный вес всех гирь больше 500 граммов и должен делиться на $14 + 15 + 16 = 45$. Вот несколько первых чисел, больших 500 и кратных 45: $540 = 45 \cdot 12$, $585 = 45 \cdot 13, \ldots$.

Если вначале набор весил 540 граммов, то вес потерянных гирь составлял бы 40 граммов. Две самые тяжёлые 16-граммовые гири весят всего 32 грамма, поэтому было потеряно не менее трёх гирь. Однако вес любых трёх гирь не меньше $3 \cdot 14 = 42 > 40$, и значит, этот случай невозможен.

Если бы исходный набор весил 585 граммов, то вес потерянных гирь составлял бы 85 граммов. Пять самых тяжёлых 16-граммовых гирь весят меньше 85 граммов, поэтому было потеряно *не менее* шести гирь. Вес в 85 граммов можно набрать с помощью пяти 14-граммовых гирь и одной 15-граммовой. Значит, наименьшее количество потерянных гирь — 6, при этом вначале было по 13 гирек каждого вида.

Критерии. Ответ без объяснений и примера — 0 баллов. Правильный пример — 2 балла. Доказано, что потеряно не менее 6 гирек — 5 баллов.

Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского
Казань, 6 декабря 2020 г.
Вариант 4

6 класс

1. Найдите *наименьшее* натуральное число n, для которого произведение $(n+1)(n+2)(n+3)$ делится на 150.

Ответ: $n = 22$.

Решение. Из трёх последовательных натуральных чисел на 5 может делиться только одно. Поэтому в произведении $(n+1)(n+2)(n+3)$ один из трёх сомножителей должен делиться на 25. Значит, наибольший сомножитель $n+3$ не меньше 25, то есть $n \geqslant 22$. Легко проверить, что если $n = 22$, то произведение делится и на 25, и на 6, то есть кратно 150.

Критерии. Правильный ответ — 2 балла. Отмечается, что один из сомножителей делится на 25 — 2 балла.

2. Вокруг круглого стола сидят пятнадцать человек — каждый либо рыцарь, либо лжец. Рыцарь всегда говорит правду, а лжец всегда лжет. Каждого из них спросили: «Кто сидит *слева* от тебя?» *а*) Могли ли они все ответить «рыцарь»? *б*) Могли ли они все ответить «лжец»?

Ответ: *а*) *да, могли;* *б*) *нет, не могли.*

Решение. *а*) За столом могли сидеть пятнадцать рыцарей (или пятнадцать лжецов), и тогда каждый из них на вопрос в задаче ответил «рыцарь».

б) Предположим, что все пятнадцать ответили «лжец». Лжец мог так ответить только в том случае, если слева от него сидит рыцарь. А рыцарь мог так ответить только в том случае, если слева от него сидит лжец. Значит, сидящие за столом лжецы и рыцари *чередуются*. Но пятнадцать — нечетное число, поэтому лжецы и рыцари не могут чередоваться.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Правильный пример в пункте *а*) — 1 балл. В пункте *б*) отмечено без доказательства, что лжецы и рыцари обязательно чередуются — 2 балла. Доказано, что лжецы и рыцари чередуются — 4 балла. Обосновано, что из-за нечётности числа сидящих, чередование невозможно — ещё 2 балла. Полное решение пункта *б*) — 7 баллов.

3. Числа 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 расставили в кружочках на рисунке 1 так, что суммы всех пяти троек чисел, расположенных «на отрезках», оказались равны между собой. Чему равно число x, стоящее в верхнем кружочке? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 8.

Решение. Обозначим сумму троек чисел на каждом «отрезке» через s. Сумма этих сумм по трём «отрезкам», выходящим из верхнего кружочка, равна $3s$, при этом каждое из чисел в кружочках входит в эту сумму по одному разу, кроме числа x, которое входит в три раза. Поэтому

$$3s = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 2x,$$

то есть $3s = 56 + 2x$. Если мы сложим числа лишь по двум горизонтальным «отрезкам», то получим сумму шести чисел из семи, то есть $5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 - x$. Следовательно,

$$2s = 56 - x,$$

откуда $x = 56 - 2s$. Подставив это значение в первое уравнение, получим $3s = 56 + 2(56 - 2s)$, откуда $s = 24$, $x = 56 - 2s = 8$.

Приведём пример расстановки чисел, когда $x = 8$: $\begin{array}{ccccc} & & \mathbf{8} & & \\ & 7 & 6 & 11 & \\ 9 & & 10 & & 5 \end{array}$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Правильный ответ и пример расстановки чисел — 3 балла. Доказано, что других вариантов нет — ещё 4 балла.

4. В игре «Морской бой» на клетчатой доске 11×11 расположен один клетчатый корабль размера 1×3. Одним выстрелом можно прострелить целиком *все* клетки одной строки или одного столбца. Какого *минимального* количества выстрелов хватит, чтобы гарантированно ранить корабль?

Ответ: *хватит* 6 *выстрелов.*

Решение. Пример. Сделаем 6 выстрелов так, как показано на рисунке 2. Тогда видно, что корабль гарантированно будет ранен.

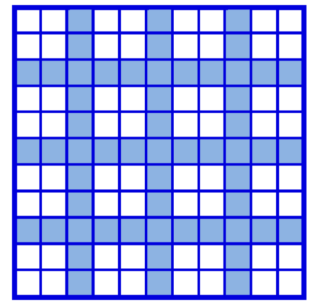

Рис. 2

Оценка. Покажем, что если сделано только 5 выстрелов, то можно не ранить корабль. Сначала докажем, что число «горизонтальных» выстрелов не меньше трёх. Действительно, если сделано два «горизонтальных» выстрела, то промежуток между ними должен быть не более двух рядов, иначе в столбец, в который не сделан выстрел, можно поставить корабль, который не будет ранен. Тогда один из промежутков от края доски до горизонтального ряда, по которому произведён выстрел, будет содержать не менее 5 рядов, и значит, в один из столбцов снова можно поставить неуязвимый корабль.

Это же рассуждение верно и в случае, если число «горизонтальных» выстрелов менее двух.

Аналогично доказывается, что число «вертикальных» выстрелов не меньше трёх, и значит, общее число выстрелов не меньше шести.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Указан правильный ответ и расположение выстрелов (пример) — 3 балла. Доказано, что количество выстрелов не меньше 6 (оценка), — ещё 4 балла.

5. В наборе были гирьки с массами 13, 14 и 15 граммов, поровну каждого вида. После того как несколько гирек потерялось, все оставшиеся гирьки взвесили, их масса оказалась равной 500 граммов. Какое *наименьшее* количество гирек могло быть потеряно?

Ответ: 6 *гирек.*

Решение. Исходный суммарный вес всех гирь больше 500 граммов и должен делиться на $13 + 14 + 15 = 42$. Вот несколько первых чисел, больших 500 и кратных 42: $504 = 42 \cdot 12$, $546 = 42 \cdot 13$, $588 = 42 \cdot 14, \ldots$.

Ясно, что исходный набор не мог весить 504 грамма, поскольку вес потерянных гирь тогда составлял бы 4 грамма, что невозможно.

Если вначале набор весил 546 граммов, то вес потерянных гирь составлял бы 46 граммов. Три самые тяжёлые 15-граммовые гири весят меньше 46 граммов, поэтому было потеряно не менее четырёх гирь. Однако вес любых четырёх гирь не меньше $4 \cdot 13 = 52 > 46$, и значит, этот случай невозможен.

Если вес всех гирь был 588 граммов, то потерянные гири весили 88 граммов. Поскольку пяти самых тяжёлых гирь недостаточно для этого веса ($5 \cdot 15 < 88$), значит, было потеряно *не менее* шести гирь. Вес в 88 граммов можно набрать с помощью одной 13-граммовой и пяти 15-граммовых гирь. Значит, наименьшее количество потерянных гирь — 6, при этом вначале было по 14 гирек каждого вида.

Критерии. Ответ без объяснений и примера — 0 баллов. Правильный пример — 2 балла. Доказано, что потеряно не менее 6 гирек — 5 баллов.

Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского
Казань, 6 декабря 2020 г.
Вариант 4

7 класс

1. За столом сидят несколько детей. Из пакета с конфетами первый взял 1 конфету, второй — 2, третий — 3 и так далее: каждый следующий брал на одну конфету больше. Известно, что на втором круге было взято в сумме на 100 конфет больше, чем на первом. Сколько детей сидело за столом?

Ответ: 10 *детей.*

Решение. Если за столом сидят n детей, то на втором круге каждый возьмет на n конфет больше, чем на первом. Значит, всего на втором круге будет взято на $n \cdot n = n^2$ конфет больше, чем на первом. Отсюда $n^2 = 100$, то есть $n = 10$.

Критерии. Только ответ — 2 балла. Число детей найдено подбором — 7 баллов.

2. Вокруг круглого стола сидят шестнадцать человек — каждый либо рыцарь, либо лжец. Рыцарь всегда говорит правду, а лжец всегда лжет. Каждого из них спросили: «Кто сидит *слева* от тебя?» Могла ли половина из них ответить «рыцарь», а половина — «лжец»?

Ответ: *да, это возможно.*

Решение. Рассадим рыцарей и лжецов за круглым столом, например, так:

РРЛЛ РРЛЛ РРЛЛ РРЛЛ,

где буквы Р и Л обозначают рыцаря и лжеца соответственно. Их ответы на вопрос из условия задачи образуют последовательность ЛРЛР ЛРЛР ЛРЛР ЛРЛР, в которой слова «рыцарь» и «лжец» встречаются поровну (по восемь раз).

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Правильный пример — 7 баллов.

3. Числа $0, 1, 2, \ldots, 8$ расставили в кружочках на рисунке 1 так, что суммы чисел на каждой стороне треугольника одинаковы и равны s. Какое *наименьшее* значение может принимать s?

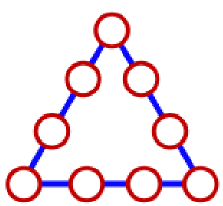

Рис. 3

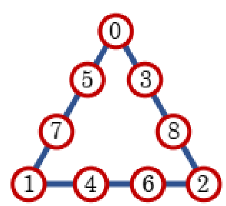

Рис. 4

Ответ: 13.

Решение. Оценка. Пусть s — сумма чисел вдоль одной стороны треугольника (рис. 3). Сумма этих трёх сумм чисел вдоль каждой стороны треугольника равна $3s$, при этом каждое из чисел в кружочках входит в эту сумму по одному разу, кроме чисел A, B и C в «вершинах» треугольника, которые входят два раза. Поэтому

$$3s = 0 + 1 + \ldots + 8 + (A + B + C),$$

то есть $3s = 36 + (A + B + C)$. Наименьшее значение $A + B + C$ не меньше суммы трёх наименьших чисел набора, то есть $A + B + C \geqslant 0 + 1 + 2$, и поэтому $3s \geqslant 36 + 3$, то есть $s \geqslant 13$.

Пример. На рисунке 4 сумма чисел вдоль каждой стороны треугольника равна $s = 13$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Приведён пример — 3 балла. Доказана оценка — 4 балла.

4. На доске были написаны тринадцать последовательных натуральных чисел. Когда из них стёрли восемь подряд идущих чисел, то сумма пяти оставшихся оказалась равна 100. Какие числа стёрли? Найдите все возможные варианты.

Ответ: $10, 12, \ldots, 17$ *или* $23, 24, \ldots, 30$.

Решение. Пусть x — наименьшее из написанных чисел, тогда сумма всех чисел равна

$$x + (x+1) + \ldots + (x+12) = 13x + 78.$$

Обозначим через $x+y$ — наименьшее вычеркнутое число ($0 \leqslant y \leqslant 5$), тогда сумма восьми стёртых чисел составляет

$$(x+y) + (x+y+1) + \ldots + (x+y+7) = 8x + 8y + 28.$$

Сумма оставшихся чисел равна $(13x+78)-(8x+8y+28)$, поэтому $5x-8y+50 = 100$, или $5(x-10) = 8y$. Из этого равенства следует, что y делится на 5. Это возможно только при $y = 0$ и $y = 5$; соответствующие значения $x = 10$ и $x = 18$. В первом случае исходный набор состоит из чисел $10, 11, \ldots, 22$, стёрли — $10, 11, \ldots, 17$. Во втором случае исходный набор — это $18, 19, \ldots, 30$, стёртые числа — $23, 24, \ldots, 30$.

Критерии. За каждый правильный пример — по 1 баллу. Доказано, что других вариантов нет — 5 баллов. Полное решение — 7 баллов.

5. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что $BC = CD = 8$, $AO = DO$ и $\angle AOD = 120°$. Чему равно AB?

Ответ: $AB = 8$.

Решение. Отметим на прямой BD такую точку F, что треугольник COF — равносторонний (рис. 5). Докажем равенство треугольников CDF и CBO. Действительно, поскольку $BC = CD$, треугольник BCD — равнобедренный, и значит, $\angle CBD = \angle CDB$. Кроме того, отметим ещё одну пару равных углов $\angle CFD = \angle COB = 120°$. Таким образом, треугольники CDF и CBO равны по стороне и двум углам, отсюда $DF = BO$ и $DO = DF + FO = BO + CO$.

Аналогичным образом отметим на прямой AC такую точку E, что треугольник BOE — равносторонний. Докажем равенство треугольников AEB и CFD. Действительно, $BE = BO = DF$ и $AE = AO - EO = DO - BO = CO = CF$, а также $\angle AEB = \angle DFC = 120°$. Таким образом, треугольники AEB и CFD равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда следует, что $AB = CD = 8$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Правильное дополнительное построение, связанное с равносторонним треугольником — 2 балла. Установлено равенство $DO = BO + CO$ или аналогичное ему $AO = CO + BO$ — 5 баллов.

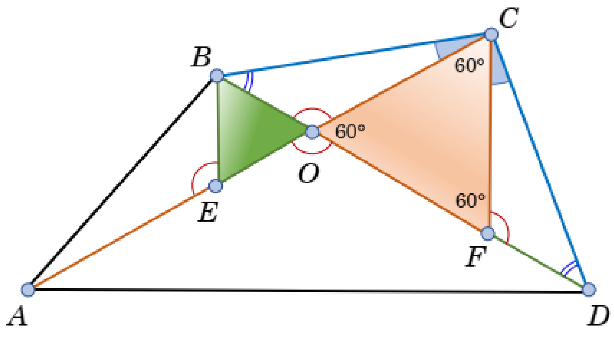

Рис. 5