

УДК 523.34

**ЛУННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ  
В КАЗАНСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ:  
ТЕНДЕНЦИИ, РЕЗУЛЬТАТЫ, ПЕРСПЕКТИВЫ.  
I. ФИЗИЧЕСКАЯ ЛИБРАЦИЯ**

*Н.К. Петрова, Ю.А. Нефедьев, С.А. Дёмин, А.В. Гусев*

**Аннотация**

В статье приведены результаты изучения физической либрации Луны в Казанском университете за последние 10 лет. Раскрыты современные проблемы лунной динамики вращения, в которых основное внимание уделено наиболее тонким эффектам, связанным с ее сложным внутренним строением. Рассмотрены параметры свободной либрации Луны, дана геометрическая интерпретация чандлерово-подобной моды и свободной нутации лунного ядра. Коротко изложены назначение и возможности японского проекта ILOM (In situ Lunar Orientation Measurement), в рамках которого на одном из полюсов Луны планируется установить зенит-телескоп с ПЗС-матрицей в объективе для наблюдения звезд с целью определения физической либрации Луны с миллисекундной точностью.

Компьютерное моделирование будущих наблюдений проводится с целью их оптимизации: эффективное расположение наблюдательной аппаратуры на лунной поверхности, проверка чувствительности будущих наблюдений к различным особенностям внутреннего строения Луны. Представлены результаты первого этапа моделирования. На этом этапе было разработано программное обеспечение для выбора звезд, попадающих в поле зрения лунного телескопа и редукции их координат на период наблюдения. Построены и проанализированы треки этих звезд. Проверена чувствительность треков к параметрам гравитационного поля Луны. Затем сформулирована обратная задача физической либрации. Показано, что из полярных наблюдений звезд невозможно определить либрацию по долготе  $\tau(t)$ . На этапе, связанном с решением обратной задачи, исследовано проявление в селенографических координатах вязкоупругих свойств Луны. В спектре моделируемых остаточных разностей выявлены гармоники, которые могут служить индикаторами для уточнения параметра, характеризующего вязкие свойства лунного тела – числа Лява  $k_2$  и времени задержки.

**Ключевые слова:** физическая либрация Луны, свободная и произвольная либрация, лунное ядро, ILOM, лунный полярный телескоп, наблюдения, компьютерное моделирование.

---

**Введение**

Исследования в области селенодезии и динамики Луны являются традиционными для казанской школы астрономии [1]. Широко известны казанские ряды наблюдений физической либрации Луны (ФЛЛ), фотографии Луны со звёздами и построенные на их основе каталоги координат лунных кратеров. Не менее известны работы по построению теории физической либрации.

Основоположителем теоретических разработок в области вращения Луны стал профессор Ш.Т. Хабибуллин. Его фундаментальные работы по теории ФЛЛ в конце 50-х – начале 60-х годов прошлого столетия стали материалом, который впоследствии изучался специалистами как СССР, так и зарубежных стран. Ссылки на его работы можно встретить в статьях таких знаменитых ученых, как

Д. Экхард (США), К. Козиел (Польша) и др. Ш.Т. Хабибуллин первым начал работать над рассмотрением эффекта резонансности во вращении Луны и учета наибольших нелинейных членов в либрационных уравнениях [2]. Этот подход получил развитие в работах выпускника кафедры астрономии КГУ, профессора Б.П. Кондратьева.

К началу 80-х годов, когда потребность в пересмотре теории физической либрации встала особенно остро в связи с высокоточными данными лазерной локации Луны, Ш.Т. Хабибуллин начинает разработку и построение новой, полностью нелинейной, удовлетворяющей новым требованиям теории ФЛЛ. В Советском Союзе он был единственным специалистом, способным выполнить работу в рамках так называемого аналитического подхода. Под его руководством эта работа была завершена к началу 90-х годов [3, 4].

Свой опыт и знания Ш.Т. Хабибуллин использовал и для изучения вращения других планет Солнечной системы – Меркурия [5], Венеры [6], Марса. Его работы оставили след в истории астрономических исследований Венеры. На Европейском конгрессе по планетам, проходившем в апреле 2009 г. в Вене, известный французский ученый Ж. Шапрон, делая обзор по теории вращения Венеры, одной из ключевых работ в этой области назвал статью Ш.Т. Хабибуллина [6].

Эстафету по развитию теории ФЛЛ подхватили ученики Ш.Т. Хабибуллина – Н.К. Петрова и А.В. Гусев. Их исследования посвящены влиянию особенностей внутреннего строения Луны на физическую либрацию. Основываясь на гамильтоновом подходе, разработанном испанскими исследователями под руководством Х. Хетино для двухслойной Земли, А.В. Гусев и Н.К. Петрова построили модель свободного вращения двухслойной Луны (жидкое ядро, твердая мантия), вычислили период чандлерово-подобных колебаний и одними из первых оценили период свободной нутации ядра Луны. В их работах [7–10] рассмотрены понятия свободной и произвольной либрации, дана аналитическая и геометрическая интерпретация движения полюса вследствие свободных либраций, что является необходимым практическим результатом при планировании будущих наблюдений с лунной поверхности. На основе аналитической теории ФЛЛ удалось объяснить смещение селенографической динамической системы координат относительно средней селенографической системы в зависимости от динамической модели лунного тела, дать практические рекомендации для выбора системы координат на Луне при решении навигационных задач на поверхности Луны и в окололунном пространстве.

Сотрудничество казанских астрономов с японскими учеными в рамках проекта SELENE обозначило новый этап в теоретических исследованиях лунного вращения. Компьютерное моделирование наблюдений ФЛЛ на основе разработанной в Казани аналитической теории позволило оценить возможности планируемых наблюдений ФЛЛ с помощью телескопа, установленного на полюсе Луны, выявить некоторые сильные и слабые стороны предлагаемого проекта. Совместная работа продолжается, ставятся новые задачи и ожидаются интересные результаты.

Здесь необходимо отметить, что проблемы наблюдений звезд с поверхности нашего естественного спутника волновали российских ученых еще задолго до практической востребованности этих исследований. Работы А.А. Яковкина [11], Ш.Т. Хабибуллина с соавторами [12] затрагивали вопросы оптимального размещения измерительной аппаратуры на Луне, авторы рассчитали эклиптические и селеноэкваториальные координаты наиболее ярких звезд, построили таблицы перехода от лунного времени к мировому и обратно. Их исследования легли в основу первой и единственной на данный момент книги по лунной астрометрии К.А. Куликова и В.Б. Гуревича [13].

Содержание настоящей статьи посвящено результатам современного этапа исследования ФЛЛ, проводимого в Казанском университете совместно с российскими и зарубежными учеными.

## 1. Физическая либрация и проблемы исследования внутреннего строения Луны

**1.1. Разновидности либрации Луны.** В первом приближении вращение Луны описывается эмпирическими законами Кассини, согласно которым а) Луна вращается равномерно со скоростью, равной средней скорости её движения по орбите, б) угол наклона полюса Луны к эклиптике – величина постоянная, а нисходящий узел экватора Луны совпадает с восходящим узлом её орбиты, то есть полюс лунной орбиты, полюс эклиптики и полюс лунного вращения лежат в одной плоскости (плоскость Кассини).

Реальное вращение Луны отличается от вращения по законам Кассини: она испытывает небольшие покачивания по долготе и широте относительно состояния Кассини. Эти покачивания называются либрациями. Различают оптическую и физическую либрацию.

Оптическая либрация Луны обусловлена наклоном лунной оси к плоскости её орбиты и неравномерностью её орбитального движения по некруговой орбите. Благодаря оптической либрации с Земли можно видеть 59% лунной поверхности.

Физическая либрация Луны описывает неравномерность собственного вращения тела Луны, вызванную её несферичностью, неоднородностью и деформируемостью. Это явление – аналог нутации Земли и представляет собой периодические колебания оси вращения Луны в пространстве с амплитудой до 2 мин. дуги. Существуют вынужденная и свободная физическая либрация.

Наблюдения вынужденной физической либрации, а также ее теоретическое моделирование позволяют получить большой объем информации о Луне. Начало нового тысячелетия отмечено рядом работ, в которых дается обзор результатов и проблем в этой области [7, 14]. Периоды и амплитуды вынужденной либрации по долготе, в наклоне и узле определяются гравитационным взаимодействием Луны с Землей, Солнцем и планетами.

Для изучения вращения лунного тела в пространстве вводится система координат  $(x, y, z)$ , основанная на триэдре главных осей инерции Луны, с центром в центре масс Луны (рис. 1). Такая система называется динамической системой координат (ДСК). Если предположить, что Луна является абсолютно твердым телом, то ДСК будет жестко связана с телом Луны. Тогда задача построения теории сводится к определению положения ДСК в пространстве относительно инерциальной системы координат. В качестве инерциальной системы может быть взята, например, эклиптическая система координат  $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ . В классических работах по теории ФЛЛ положение осей инерции относительно триэдра Кассини задается через углы  $\tau, \rho, \sigma$ , определяющие возмущения в углах Эйлера. Тогда положение ДСК будет определяться углами

$$\psi = \Omega + \sigma(t), \quad \Theta = I + \rho(t), \quad \varphi = 180^\circ + L - \Omega + \tau(t) - \sigma(t). \quad (1)$$

Здесь  $\Omega$  – долгота восходящего узла орбиты,  $I$  – средний наклон полюса Луны к полюсу эклиптики,  $L$  – средняя долгота Луны.

Углы  $\tau(t), \rho(t), \sigma(t)$  выполняют роль редукционных функций, приводящих наблюдаемые координаты Кассини к неподвижной в теле Луны ДСК. Они вычисляются из уравнений, описывающих ФЛЛ, как функции времени в виде тригонометрических рядов, коэффициенты и тригонометрические аргументы которых

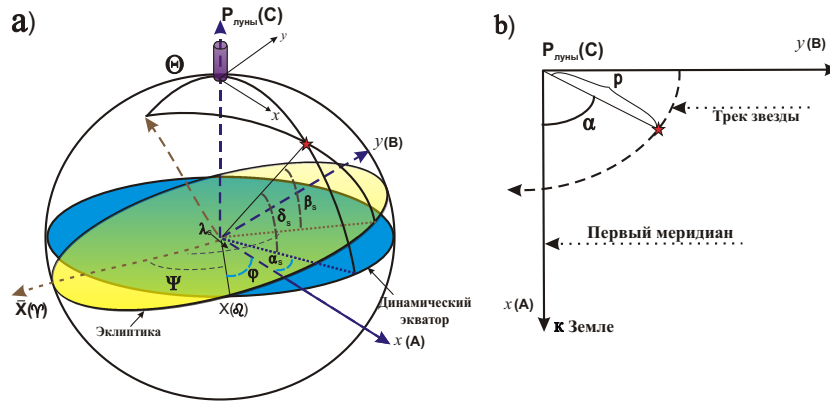


Рис. 1. а) Углы Эйлера, описывающие положение динамической системы координат  $(x, y, z)$  относительно эклиптической системы координат  $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ . Оптический телескоп установлен на полюсе Луны; б) положение звезды в поле зрения «идеального» полярного телескопа

представляются таблицами физической либрации. Такие таблицы были составлены рядом авторов [4, 15–17]. Их точность достигает  $0.01'' - 0.03''$  при сравнении с результатами численного интегрирования тех же уравнений. Достоинства и недостатки аналитических и численных решений описаны во многих работах, отметим, что точность численных решений выше аналитических, но интерпретацию тонких эффектов вращения Луны удобнее делать на основе аналитического решения.

Аналитическое решение представляется в виде рядов Пуассона

$$\sum_{r=1}^{\infty} \text{COEF}_r \cdot \text{FACTOR}_r \sin(k_{r1}l + k_{r2}l' + k_{r3}F + k_{r4}D),$$

где  $\text{COEF}_r$  – числовые коэффициенты,  $\text{FACTOR}_r = \prod_{i=1}^9 E_i^{m_{ri}}$  – степенные полиномы, являющиеся функциями параметров динамической модели Луны,  $k_{rj}$ ,  $m_{ri}$  – тригонометрические и степенные индексы,  $l$ ,  $l'$ ,  $F$ ,  $D$  – фундаментальные аргументы Делонэ. Их зависимость от времени задается в виде степенных рядов по времени, коэффициенты которых можно найти в астрономических ежегодниках. Задавая параметры динамической модели, например, из наблюдений лазерной локации Луны (ЛЛЛ), рассчитывают численное значение  $\text{FACTOR}_r$ , а затем и амплитуду либрационного члена.

Два существенных открытия, сделанных в результате долговременной лазерной локации, – обнаружение свободной либрации [18] и выявление заметной вращательной диссипации [19] – потребовали включения в теорию ФЛЛ эффектов сложной внутренней стратиграфии Луны.

Эффекты диссипации во вращении Луны возникают вследствие приливного воздействия Земли и Солнца, а также в результате турбулентного трения на границе мантии и жидкого ядра Луны. При сравнении теории ФЛЛ с данными лазерной локации было обнаружено [19, 20] периодическое смещение оси вращения Луны из плоскости Кассини с амплитудой  $0.26''$  и периодом, равным 27.3 дня.

Долгое время этот наблюдательный факт был единственным свидетельством диссипации вращательной энергии Луны. Проявляется он как малая (порядка 1 м) месячная вариация оси вращения Луны. Основываясь на 35-летних рядах лазерных наблюдений Луны и улучшенной модели гравитационного поля (по данным Lunar

Prospector), Дж. Уильямс и др. выявили четыре диссипативных члена в рядах либрации [14]. Численное моделирование ФЛЛ позволило оценить вклад в диссипацию как приливов, так и ядра:  $2/3$  амплитуды определяются месячными приливами в мантии, а  $1/3$  амплитуды – диссипацией на границе ядра и мантии Луны.

**1.2. Проблема существования лунного ядра.** Вопрос о наличии у Луны ядра возник после проведенных в 70-х годах XX в. сейсмических экспериментов на лунной поверхности. В рамках космической программы «Аполлон» на Луну были доставлены четыре сейсмометра, которые фиксировали сейсмическую активность небесного тела вплоть до 1977 г. Оказалось, что сейсмические толчки на Луне происходят гораздо реже, чем на Земле. Тот факт, что поверхность земного спутника испещрена кратерами, оставшимися от столкновений с мелкими космическими телами, искажает сигналы приборов и делает колебания лунной коры не такими заметными. Поэтому информация о глубинной внутренней структуре лунного тела оставалась недоступной для аполлоновской сейсмической сети. В результате не только состав и агрегатное состояние были неизвестны, но даже само существование лунного ядра оставалось под вопросом. Поэтому информацию о внутренней структуре Луны в основном получали через изучение моментов инерции Луны, физической либрации и электромагнитной индукции.

Одним из важнейших методов исследования внутренней структуры астрономических объектов, для которых недоступен богатый арсенал геофизических методов, успешно применяемых для Земли, является изучение вращения небесного тела. В этом отношении весьма перспективным оказалось изучение внутреннего строения Луны через наблюдение её физической либрации, особенно, с помощью лазерной локации.

ЛЛЛ является прекрасной наблюдательной основой для выявления многих слабовыраженных особенностей лунного вращения. По ним удается реконструировать сложное строение лунных глубин. На сегодняшний день ЛЛЛ, реализуемая более 40 лет, является одним из самых эффективных источников информации о Луне. Точность лазерных измерений достигла уровня, достаточного для определения даже релятивистских эффектов в системе Земля–Луна. Анализ лазерных данных при установлении параметров лунного вращения позволил не только уточнить числовые характеристики динамической фигуры Луны (безразмерные моменты инерции  $\gamma$ ,  $\beta$  и др.) и коэффициенты упругости  $k_2$  и  $l_2$ , но и однозначно определить амплитуды и фазы чандлеро-подобных мод в свободной либрации и в то же время открыть наличие сильной диссипации вращения [14]. Именно моделирование либрационных наблюдений позволило американским ученым, возглавляемым доктором Дж. Уильямсом, получить числовые параметры размера и химического состава лунного ядра. Дж. Уильямс и др. впервые сделали оценку проявления жидкого ядра в гравиметрических измерениях [21].

Согласно данным, полученным в результате моделирования наблюдений ФЛЛ, радиус лунного ядра в среднем составляет  $300 (+90/-100)$  км, если рассматривать чисто железное ядро, и  $400 (+80/-180)$  км, если лунное ядро описывается эвтектической композицией Fe–FeS. Эти исследования очень важны с точки зрения решения одной из фундаментальных проблем астрономии – выбора гипотезы происхождения Луны. Космогонические модели показывают, что если Луна образовалась за счёт аккреции из первичного вещества, то размер ядра должен быть более 360 км. Если же Луна сделана из того же материала, что и мантия Земли, то радиус ядра может быть меньшим, чем 285 км. Последнее согласуется с теорией гигантского столкновения прото-Земли с небесным телом размером с Марс и выброса на околоземную орбиту большого количества вещества, из которого в дальнейшем и сформировалась Луна.

Представленные оценки параметров лунного ядра являются лишь косвенным свидетельством его существования. Прямые доказательства наличия у Луны ядра можно получить из определения параметров свободной либрации Луны и из сейсмологических исследований.

Уже упоминалось, что долгое время информация, полученная с Луны посредством сейсмических датчиков, считалась практически бесполезной для ученых. Однако за последние сорок лет методы анализа сейсмоданных существенно изменились. Так, используя новые методы обработки отраженной и преобразованной сейсмической энергии, Р. Вебер и др. [22], Р. Гарсия и др. [23] заново проанализировали аполлоновские сейсмограммы, сумев учесть погрешность, возникающую из-за кратеров. В итоге они пришли к выводу, что, как и Земля, Луна имеет раскаленное металлическое ядро. Диаметр его составляет примерно 330–360 км, оно окружено частично расплавленной оболочкой диаметром примерно 480 км. Внутри ядра, в свою очередь, находится твердая железная сердцевина диаметром примерно 240 км. Таким образом, были впервые получены прямые свидетельства о наличии *лунного ядра* и его *двухслойной структуре*.

Исследователи также проанализировали сейсмограммы путем обработки данных по группам, что позволило установить источник возникновения сейсмической активности. Определив траектории прохождения сейсмических волн и особенности их отражения от внутренних слоев Луны, они смогли идентифицировать состав и структуру слоев лунного ядра на различных глубинах.

В завершение данного пункта следует отметить, что результаты исследований лунного ядра, по-видимому, вписываются в гипотезу о формировании Луны примерно 4,5 млрд лет назад в результате столкновения Земли с крупным космическим объектом размером с планету Марс. Гипотетически этот толчок «выбил» из Земли кусок, состоящий из коры расплавленной мантии, который позднее и превратился в Луну. Интересно и то, что исследования, проведенные на Кольской сверхглубокой скважине, установили, что состав пород полуострова практически на 90% совпадает с таковым для лунных пород.

**1.3. Моды свободных либраций многослойной Луны.** При исследовании внутренней структуры Луны особое значение приобретает изучение ее свободной либрации. Этот тип либраций имел бы место даже в случае, если на Луну не воздействовали никакие внешние возмущения. Свободные либрации возникают, например, при возбуждении «свободной» Луны падениями крупных метеоритов.

С одной стороны, из наблюдений ФЛЛ обнаружена заметная диссипация лунного вращения, и, как результат, свободные колебания должны бы к настоящему времени затухнуть. С другой стороны, эти же наблюдения показывают присутствие свободных либраций в современном вращении Луны. Это противоречие привело к выводу о том, что традиционная твердотельная однородная модель лунного тела является неточной. Луна не только «дышит» под действием солнечных и земных приливов, но и, похоже, содержит внутри жидкое горячее ядро. Поэтому необходимо принимать во внимание тонкие спин-орбитальные эффекты при взаимодействии Луны с Землей, Солнцем, резонансное взаимодействие вращения Луны с Венерой, двух- и (или) трехслойные модели нетвердой Луны с приливной и турбулентной диссипацией в мантии и ядре. Это может быть сделано в рамках разрабатываемого авторами гамильтонова подхода, применяемого для описания вращения Земли [24].

Аналитический метод Гамильтона, примененный для расчета вращения планеты, имеющей слоистую внутреннюю структуру [25–27], выявляет несколько частот нормальных мод вращения. Для Луны, которая моделируется как трехслойное тело с тремя эллипсоидальными слоями – твердая мантия, жидкое внешнее ядро

и твердое внутреннее ядро – в ее полярном вращении должно наблюдаться 4 типа колебаний. Значения их частот получаются из соответствующих уравнений и зависят от толщин слоев ядра, их химического состава и динамического сжатия [8]. Что касается амплитуд свободных мод, то они не могут быть вычислены теоретически, их значения могут быть определены только из сравнения с наблюдениями или приблизительно оценены из геофизических моделей возбуждения свободных колебаний.

Свободные моды есть результат несовпадения осей вращения мантии, внутреннего и внешнего ядер. Обнаружение этих мод из наблюдений позволит с высокой степенью достоверности утверждать, что тело имеет внутри себя однородное эвтектическое жидкое или расслоенное жидко-твердое ядро. Более того, параметры свободных мод позволят определить такие важные характеристики внутреннего строения, как радиус ядра и его сжатие, скачок плотности на границе ядра и мантии.

Из уравнений свободного вращения Луны нами были получены и проинтерпретированы моды двухслойной Луны: жидкое ядро, твердая мантия [9, 10]. В первую очередь, речь идет о так называемой чандлеро-подобной моде (Chandler Wobble, CW), частота которой задается уравнением

$$\sigma_1 = n \frac{A}{A_m} \sqrt{k \frac{(C-A)(C-B)}{AB}} = n \frac{A}{A_m} \sqrt{k\alpha\beta}. \quad (2)$$

Здесь  $n$  – средняя скорость вращения Луны,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  – главные моменты инерции всей Луны,  $A_m$  – момент инерции лунной мантии,  $\alpha$ ,  $\beta$  – безразмерные моменты инерции. Значение коэффициента  $k$  для Луны близко к 4. Данный коэффициент появляется в формуле (2) из-за того, что при составлении уравнений Гамильтона мы обязаны учесть захват Луны в резонансное вращение по типу 1:1. Поэтому, вообще говоря, термин «чандлерова мода» не совсем подходит к данному типу либрации Луны. Луна не находится в свободном эйлеровом вращении, как это происходит с Землей и другими планетами, имеющими ротационный тип вращения. Следовательно, такой тип либрации нельзя назвать «свободным», когда либрация происходит при полном отсутствии внешних возмущений. Современная Луна с проэволюционировавшим вращением движется в поле тяготения Земли, и мы обязаны учитывать этот факт при построении либрационных уравнений для «свободно» вращающейся Луны. Ф. Гайн назвал такой тип произвольной либрацией. Ш.Т. Хабибуллин и Ю.А. Чиканов [28] также указывали на эту особенность решения однородной системы либрационных уравнений. Проблема произвольных либраций получила развитие в работах Б.П. Кондратьева [29].

Мода  $\sigma_1$  соответствует периоду 74.6 г., который определяется в ДСК и описывает прямое движение оси вращения по эллипсу с параметрами  $3'' \times 8''$ . Значения осей эллипса были получены из сравнения теории ФЛЛ с лазерными наблюдениями [18]. Характерное время затухания этой моды оценивается величиной  $2 \cdot 10^6$  лет.

При наличии жидкого ядра в движении оси вращения свободной Луны, находящейся вне всяких внешних возмущений, возникает еще одна мода с частотой

$$\sigma_2 = -n \left[ 1 + \frac{A}{2A_m} \left( \frac{C_c - A_c}{A_c} + \frac{C_c - B_c}{B_c} \right) \right] = -n \left[ 1 + \frac{A}{A_m} (e_{ca} - e_{cb}) \right]. \quad (3)$$

Здесь индекс  $c$  описывает соответствующие параметры ядра Луны, имеющего экваториальные эллиптичности  $e_{ca}$  и  $e_{cb}$ . Этот тип свободной либрации называется свободной нутацией ядра (Free Core Nutation, FCN). Эта мода возникает из-за дифференциального вращения ядра и мантии и существует, только если ядро жидкое. Она описывает обратное движение оси вращения.

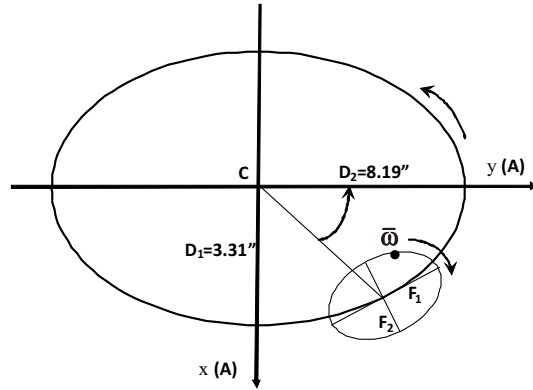


Рис. 2. Движение оси вращения Луны  $\bar{\omega}$  относительно динамического полюса Луны  $C$  вследствие свободной либрации Луны двух типов

Период, соответствующий свободной нутации ядра, близок по значению к лунному месяцу:  $\sigma_2 = - \left[ \frac{1}{1 \text{ месяц}} + \frac{1}{P_{\text{FCN}}} \right]$ . Величина  $P_{\text{FCN}} = - \frac{P_{\text{rot}}}{2(e_{ca} + e_{cb})} \frac{A_m}{A}$  – период свободных нутаций в инерциальной системе координат – варьируется, по нашим оценкам, в пределах от 144 до 186 лет, в зависимости от принятой модели эллиптичности лунного ядра. По сравнению с FCN Земли, Марса Луна имеет очень большой период свободных нутаций ядра. Обусловлено это и медленным вращением Луны, и малыми размерами лунного ядра.

Включение свободных мод в аналитическое решение теории физической либрации выполнено в работах [16, 30, 31].

**1.4. Геометрическая интерпретация свободных либраций.** Х. Хетино и др. [25] разработали каноническую теорию свободного вращения двухслойной Земли. Н.К. Петрова и А.В. Гусев [9, 10] использовали метод Х. Хетино для описания вращения двухслойной Луны. В результате для случая полярного вращения Луны получено решение для проекций скорости вращения на оси ДСК –  $\omega_C = n$ ,  $\omega_A$ ,  $\omega_B$ .

Рассмотрим плоскость, перпендикулярную небесной сфере в полюсе инерции  $C$  (рис. 2). В этой плоскости оси  $(x, y)$  параллельны главным осям инерции  $A$  и  $B$ . Тогда положение истинного полюса вращения относительно момента инерции  $C$  будет определяться следующими координатами:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\omega_A}{\omega_C} = D_1 \cos(\sigma_1 t + d) + F_1 \cos(\sigma_2 t + f), \\ y &= \frac{\omega_B}{\omega_C} = D_2 \cos(\sigma_1 t + d) + F_2 \cos(\sigma_2 t + f). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь амплитуды  $D_1$ ,  $F_1$ ,  $D_2$ ,  $F_2$  и фазы  $d$  и  $f$  содержат неопределенные константы интегрирования, значения которых находятся из наблюдений. Эти уравнения показывают, что движение полюса по лунной поверхности будет состоять из движения по двум эллипсам (рис. 2). Полюс движется в обратном направлении по малому эллипсу с  $F_1$  и  $F_2$  и периодом, примерно равным лунному месяцу. Центр же этого эллипса движется по другому эллипсу с полуосями  $D_1$  и  $D_2$  в прямом направлении с периодом 74.6 лет. Хотя, на самом деле, это тело Луны, фиксируемое осями инерции, как бы «болтается» на оси вращения.



В инерциальной системе координат эти движения накладываются на обратное прецессионное движение вектора средней угловой скорости  $\bar{\omega}$ , отстоящего от полюса эклиптики на величину  $I = 1.53^\circ$ .

Калам [32] первая выявила наибольшие моды свободной либрации из данных ЛЛЛ. Наиболее точные значения амплитуд произвольной либрации были получены на основе длительного ряда наблюдений ЛЛЛ в работе [18]. Амплитуды  $D_1 = 3.31''$ ,  $D_2 = 8.19''$ , а период составляет 74.63 лет. Это значение близко к теоретически предсказанному, что лишний раз подтверждает то, что тело Луны неплохо описывается моделью твердого тела с очень малой упругостью. Для сравнения, Земля имеет чандлеров период 433 дня, больший, чем эйлеров период (355 дней). Для Земли это объясняется жидкой природой земного ядра и океанов.

В целом FCN-мода образует блэнд с гармониками либрации периода 1 месяц, и в силу малой амплитуды эту моду будет трудно выявить из наблюдений. Тем не менее включение в теорию ФЛЛ этих гармоник будет приводить к общему уменьшению величины остаточных разностей при обработке будущих высокоточных наблюдений ФЛЛ.

**1.5. Моделирование наблюдений физической либрации с помощью телескопа, установленного на лунной поверхности.** Большие ожидания в плане получения высокоточных данных о физической либрации Луны возлагаются на японский проект ILOM (In-situ Lunar Orientation Measurement). Запуск ILOM планируется на 20-е годы этого столетия в рамках второго этапа миссии SELENE II. Проект предусматривает установку оптического телескопа на одном из полюсов Луны [33–35]. Основная задача проекта – наблюдение физической либрации Луны непосредственно с ее поверхности с целью выявления тонких эффектов, связанных с характеристиками внутреннего строения нашего спутника: уточнение числовых значений коэффициентов упругости Лява, параметров приливной диссипации и диссипации на границе ядро-мантия, размеров и эллиптичности ядра, его химического состава. Для приема и регистрации изображения звезд разрабатывается ПЗС-матрица высокого разрешения.

Наблюдения с лунной поверхности освобождены от атмосферных флуктуаций, а также нет необходимости учитывать орбитально-вращательное движение Земли – в этом преимущество проекта ILOM по сравнению с наземными наблюдениями. Планируемая точность измерения звездных координат – 1 мсек. дуги. Предполагается, что наблюдения будут продолжаться в течение 450 дней.

Работы в рамках проекта ILOM начались в Казанском университете в 2003 г. в рамках российско-японского сотрудничества. Российская сторона в этой совместной работе взяла на себя часть теоретического обеспечения будущих наблюдений: разработку аналитической теории ФЛЛ и моделирование наблюдений с поверхности Луны для того, чтобы выявить возможности и ограничения качественно новых будущих наблюдений.

Первые этапы моделирования включают в себя следующие моменты:

- подборка списка звезд, попадающих в поле зрения телескопа на пути прецессионного движения лунного полюса;
- анализ поведения звездных треков в период их наблюдения;
- проверка чувствительности измеряемых селенографических координат звезд к изменению параметров динамической модели Луны и параметров упругости лунного тела.

Для реализации этих задач нами была использована аналитическая теория физической либрации твердой Луны Н.К. Петровой [4], улучшенная в [36] за счет включения в нее гармоник 4-го порядка селенопотенциала и дополнения членами

свободной либрации, заимствованными из работы [30]. Поскольку цель настоящего исследования – качественная оценка возможностей наблюдений с Луны, точность теории ФЛЛ не имеет большого значения, а вот ее аналитическая природа для проводимого моделирования востребована более, чем высокая точность численных теорий ФЛЛ.

При моделировании процесса наблюдений мы рассматривали идеальную систему: предполагается, что в ней телескоп будет установлен точно на динамическом полюсе Луны, его вертикальная ось направлена строго вдоль главного момента инерции  $C$  (рис. 1), а оси объектива направлены вдоль двух других главных моментов инерции  $A$  и  $B$  (рис. 2).

В соответствии с параметрами телескопа, в окрестности прецессионного движения полюсов были выбраны звезды ярче 12-звездной величины [37]. Программное обеспечение было разработано как для отбора звезд из ряда звездных каталогов, так и для перевода ICRF-координат звезд к эклиптическим координатам  $\lambda_s, \beta_s$  на дату наблюдения с учетом редуцированных поправок на прецессию полюса мира, абберацию и собственное движение звезд. Из полного списка отбирались звезды на конкретную дату и период наблюдений. Так, на 13 сидерических месяцев с 1 января 2013 г. для северного полюса ( $P_N$ ) было отобрано 48 звезд. К ним была добавлена фиктивная звезда с координатами северного лунного полюсов:  $\lambda_{PN} = \bar{\Omega} + 90^\circ$ ,  $\beta_{PN} = 90^\circ - I$ . Здесь  $\bar{\Omega}$  – средняя долгота восходящего узла орбиты Луны на дату наблюдения.

Процесс моделирования включает в себя две задачи физической либрации Луны – прямую и обратную. Система уравнений, связывающих прямоугольные селенографические  $(x_s, y_s, z_s)$  или экваториальные  $(\alpha_s, \delta_s)$  координаты звезды с её эклиптическими координатами  $(\lambda_s, \beta_s)$ , строится на основе матриц поворота  $(\prod q)$  относительно эйлеровых углов (1) и имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta_s \cos \alpha_s \\ \cos \delta_s \sin \alpha_s \\ \sin \delta_s \end{pmatrix} = \prod_z(\varphi + 180^\circ) \cdot \prod_{\bar{X}}(-\Theta) \cdot \prod_{\bar{Z}}(\Psi) \cdot \begin{pmatrix} \bar{X}_s = \cos \beta_s \cos \lambda_s \\ \bar{Y}_s = \cos \beta_s \sin \lambda_s \\ \bar{Z}_s = \sin \beta_s \end{pmatrix}. \quad (5)$$

На этапе прямой задачи с помощью теории ФЛЛ на основе определенной модели гравитационного поля (числовые значения коэффициентов Стокса  $\gamma, \beta$  подставляются в ряды Пуассона) производится вычисление левой части уравнения – наблюдаемых прямоугольных селенографических координат звезд на заданный период наблюдения.

На этапе обратной задачи прямоугольные координаты звезды, рассчитанные на этапе прямой задачи, рассматриваются в качестве наблюдаемых координат звезд с целью определения по ним неизвестных углов ФЛЛ. В уравнении (5) эти неизвестные входят в выражения для матриц поворота и могут быть найдены приближенным методом. Для решения обратной задачи нами был применен градиентный метод. Было показано, что погрешность при определении либрации в угле наклона  $\rho(t)$  и узле  $\sigma(t)$  не превосходит погрешности в наблюдаемых селенографических координатах звезды, в то время как либрация по долготе  $\tau(t)$  не может быть определена из полярных наблюдений [38].

**Особенности поведения траекторий звезд, видимых с лунной поверхности.** Построение траекторий 48 звезд было реализовано на этапе решения прямой задачи [37, 39]. Поскольку период прецессии лунного полюса (18.6 г.) намного короче земного (26 000 лет), а лунные сутки продолжительностью в 23.7 земных дней, наоборот, длиннее земных, то лунные суточные параллели представляют собой не замкнутые круги, как на Земле, а спирали. В работе [40] авторы впервые

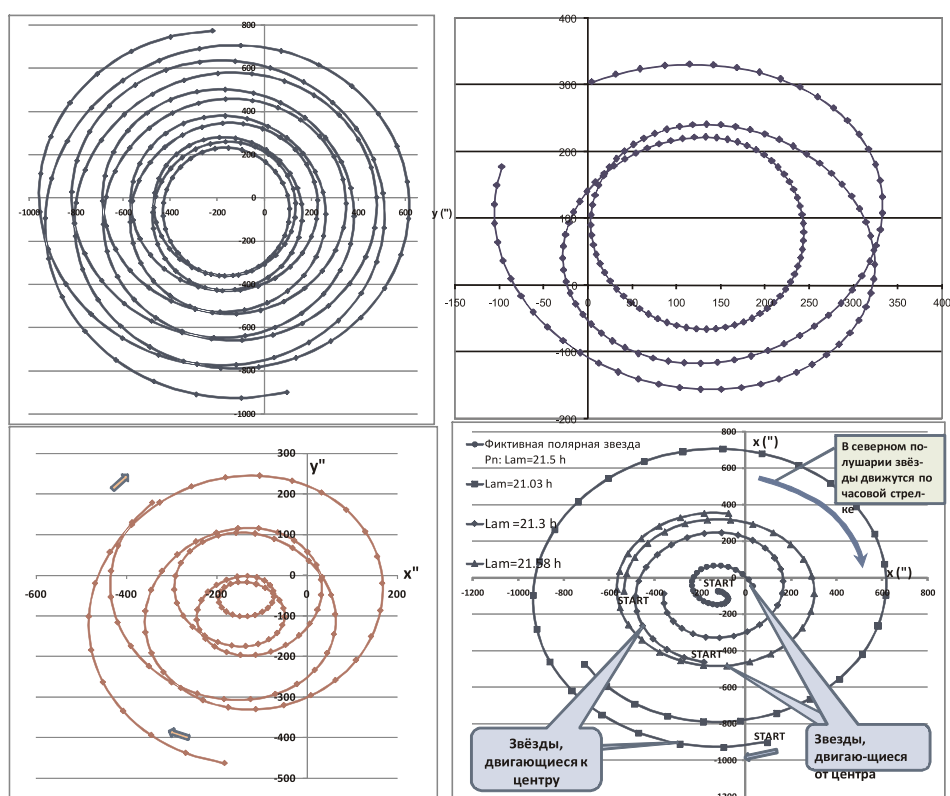


Рис. 3. Разновидности звездных треков для звезд, долгота которых к моменту наблюдения меньше долготы лунного полюса, в поле зрения лунного телескопа. Нижняя правая диаграмма демонстрирует треки разных типов в зависимости от эклиптической долготы звезды ( $Lam$ ), стрелками показаны начальное положение звезд на момент наблюдения

выявили этот эффект при моделировании ПЛОМ-наблюдений, однако они не акцентировали внимание на астрометрических особенностях звездных траекторий и не раскрыли факторы, определяющие эти особенности. Нами же было обнаружен еще один замечательный момент в поведении звездных треков. Так, звезды, долгота которых на момент наблюдения оказывается меньше долготы лунного полюса, будут «выписывать» на небе петли. Происходит это вследствие обратного движения полюса: звезда вначале движется навстречу ему, уменьшается полярное расстояние, а потом, когда их долготы сравниваются, звезда уходит по спирали от центра телескопа.

Если вращение Луны описывать только законами Кассини, то спирали будут иметь симметричную форму. Включение в расчеты физической либрации приводит к искажению круговой формы спиралей, а также к их общему смещению от центра телескопа, установленного в точке среднего полюса Луны. Галерея траекторий некоторых звезд представлена на рис. 3.

**Чувствительность звездных треков к выбору модели гравитационного поля.** В ходе моделирования мы исследовали чувствительность селенографических координат звезд к малым изменениям во внутренних характеристиках Луны. Аналитическая теория дает зависимость в виде рядов Пуассона как от времени, так и от параметров гравитационного поля Луны. Это позволяет провести несложные вычисления для разных наборов динамических параметров, характеризующих

Табл. 1

Численные значения параметров динамической модели, подставляемые в теорию ФЛЛ;  $x$ ,  $y$ ,  $p$ ,  $\alpha_s$  – моделируемые параметры,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta p$ ,  $\Delta \alpha_s$  – разность по отношению к модели SGM

Модель гравитационного поля	$x$ , сек. дуги	$y$ , сек. дуги	Полярное расстояние $p$ , сек. дуги	$\alpha_s$ , град	$\Delta x$ , сек. дуги	$\Delta y$ , сек. дуги	$\Delta p$ , сек. дуги	$\Delta \alpha_s$ , град
ЛЛЛ	-127.56	-75.86	148.41	239.26	6.18	-0.07	-5.31	-1.24
GLGM-2	-141.14	-75.97	160.29	241.71	19.76	0.19	-17.19	-3.68
LP150Q	-120.72	-75.77	142.53	237.89	-0.67	0.01	0.57	0.138
SGM100h	-121.38	-75.78	143.1	238.02	–	–	–	–

распределение масс в теле Луны. В нашем исследовании мы рассмотрели расхождения в моделируемых селенографических координатах, вызванные применением четырех разных моделей гравитационного поля (динамических моделей):

- ЛЛЛ-модель, построенная по данным лазерной локации Луны [20];
- GLGM-2, построенная на основе доплеровского слежения за спутником Clementine [41];
- LP150Q – результат миссии Lunar Prospector [42];
- SGM100h – улучшенная модель гравитационного поля, построенная на основе доплеровского слежения в системе спутников миссии SELENE [43].

Числовые значения параметров, характеризующих выбранные динамические модели, приведены в табл. 1. В столбцах таблицы указаны нормализованный момент инерции, число Лява  $k_2$  и значения коэффициентов Стокса, приведенных нами к ненормализованному виду абсолютно твердого тела для того, чтобы сравнение разнотипных моделей было правомочным.

Анализ звездных треков [37], построенных на этапе прямой задачи для перечисленных динамических моделей, показал следующее.

1. Вследствие физической либрации звездные треки смещаются от центра телескопа, установленного в среднем полюсе вращения Луны: на январь 2013 г. – это смещение происходит в противоположном от Земли направлении (рис. 4), круговая форма спиралей искажается.

2. Звездные треки, рассчитанные для разных динамических моделей, заметно расщепляются. Важно то, что даже для самых современных моделей SGM100 и LP150 разность в координатах звезд превышает сотни миллисекунд. Это даёт надежду, что будущие ИОМ-наблюдения, точность которых составляет миллисекунду дуги, позволят также провести уточнение и параметров гравитационного поля.

**Проявление деформируемости лунного тела в наблюдаемых координатах звезд.** Теория ФЛЛ Н.К. Петровой построена для модели абсолютно твердой Луны. Для деформируемой Луны в работе [17] получили полуаналитическое расширение аналитической модели [16] на основе динамической модели DE245. В результате были определены тригонометрические ряды (частный случай рядов Пуассона), описывающие модель вязкоупругой, с постоянным временем задержки, Луны [38].

Анализ этой модели осуществлялся в рамках обратной задачи ФЛЛ. Стратегия решения заключалась в следующем.

1. На этапе решения прямой задачи на основе модифицированной теории ФЛЛ вязкоупругой Луны были вычислены селенографические координаты  $x_s^{\text{obs}}$ ,  $y_s^{\text{obs}}$ ,  $z_s^{\text{obs}}$ , которые рассматриваются как наблюдаемые. Эти координаты искусственно зашумляются с помощью генератора случайных чисел, величина шума  $\varepsilon = 1$  мс.

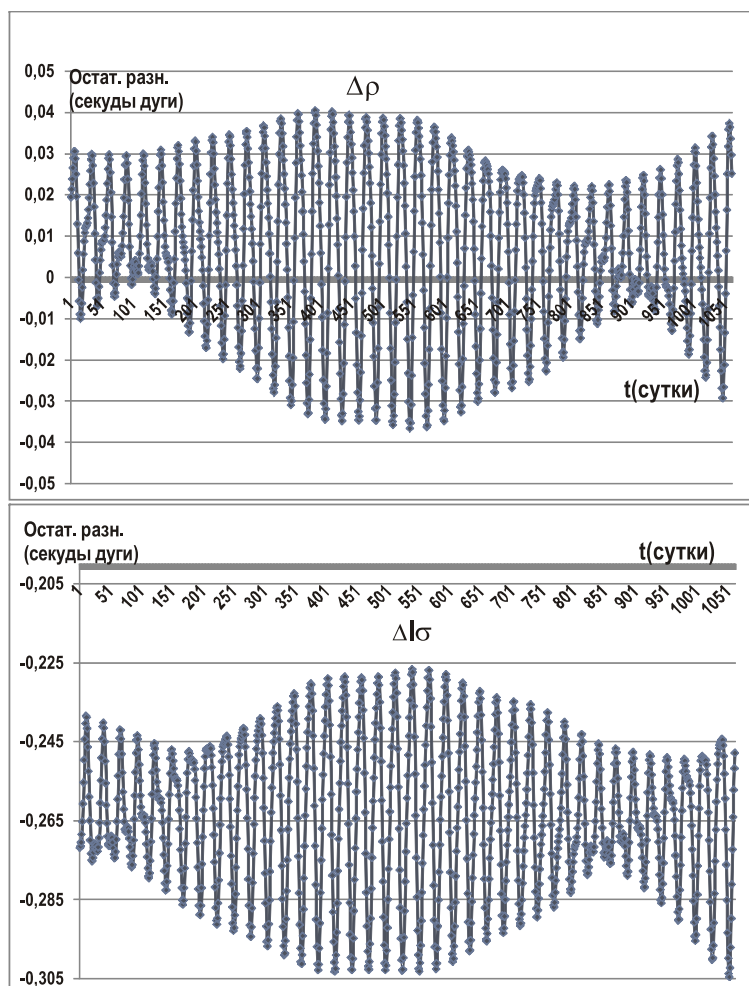


Рис. 4. Остаточные разности в углах либрации  $\Delta\rho = \rho^{\text{obs}} - \rho^c$ ,  $\Delta I\sigma = I(\sigma^{\text{obs}} - \sigma^c)$ , полученные за 39 сидерических месяцев

2. На этапе решения обратной задачи наблюдаемые координаты подставляются в левую часть уравнений (1) и затем градиентным методом вычисляются наблюдаемые значения углов ФЛЛ –  $\tau^{\text{obs}}(t)$ ,  $\rho^{\text{obs}}(t)$ ,  $I\sigma^{\text{obs}}(t)$ . Здесь важно, что в качестве начального приближения для обратной задачи подставляются значения углов  $\tau^c(t)$ ,  $\rho^c(t)$ ,  $I\sigma^c(t)$ , рассчитанные по твердотельной модели ФЛЛ.

3. Анализируются остаточные разности

$$\Delta\tau(t) = \tau^{\text{obs}}(t) - \tau^c(t), \quad \Delta\rho(t) = \rho^{\text{obs}}(t) - \rho^c(t), \quad \Delta I\sigma(t) = I(\sigma^{\text{obs}}(t) - \sigma^c(t)).$$

В рамках твердой модели тела Луны значения этих разностей были бы в пределах ошибок наблюдения. Но наблюдаемые селенографические координаты несут в себе информацию о другой, вязкоупругой структуре Луны, и в результате мы видим (см. рис. 4), что в остаточных разностях  $\Delta\rho(t)$  и  $\Delta I\sigma(t)$  имеются как периодические вариации заметной амплитуды, так и постоянные смещения на величины, существенно превосходящие заданную погрешность измерений  $\varepsilon = 1$  мс.

Остаточные разности для либрации по долготе  $\Delta\tau(t)$ , как и ожидалось, остаются на уровне нуля и не чувствуют изменения структуры лунного тела.

К полученному спектру остаточных разностей  $\Delta\rho$  и  $\Delta I\sigma$  была применена процедура быстрого преобразования Фурье. Анализ результирующего частотного спектра [38] позволил выделить несколько гармоник, чувствительных как к эффекту упругости, так и к эффекту вязкости. Учет упругости вызывает смещение в положении звезды и, следовательно, в вычисленных по её координатам углах либрации. Эти смещения зависят от числа Лява  $k_2$ . Вязкие члены проявляются в виде фазового сдвига в соответствующих гармониках для твердой Луны. Вследствие вязкости возникает постоянное смещение в  $I\sigma$  ( $-0.2619''$ ) и дополнительный наклон ( $0.0051''$ ) в  $\rho$ , в то же время постоянное смещение  $0.0066''$  в  $\rho$  объясняется упругостью Луны.

Таким образом, выявленные гармоники оказались наиболее чувствительными к вязкоупругим свойствам лунного тела и могут быть использованы в качестве индикаторов при уточнении значений параметров упругости и вязкости Луны.

### Заключение

Исследование физической либрации – это один из немногих доступных источников информации о внутреннем строении Луны. Поэтому на современном этапе развития представлений о ФЛЛ именно к этой стороне ее применения привлечено особое внимание. Новые геофизические данные, высокоточные модели гравитационного поля Луны открывают существенные возможности по улучшению как численной, так и аналитической теории ФЛЛ в плане включения в них параметров, характеризующих сложную структуру лунного тела. Представленное в настоящей работе исследование отражает традиции казанской лунной школы по теоретическому описанию вращения Луны. Разрабатываемая теория ФЛЛ найдет свое применение в обработке будущих измерений, которые будут получены с помощью японского лунного полярного телескопа.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-02-00792\_a).

### Summary

*N.K. Petrova, Yu.A. Nefedev, S.A. Demin, A.V. Gusev.* Lunar Studies at Kazan University: Trends, Results and Prospects. I. Physical Libration.

The main results of the lunar physical libration investigations at Kazan University are presented in the article. The modern problems in the lunar spin-dynamics are considered. Much attention is paid to the finest effects of lunar libration, caused by its complicated interior structure. The parameters of the free libration of the Moon are discussed; a geometrical interpretation of the Chandler-like wobble and the free core nutation is given.

The targets and problems of the future Japanese project ILOM (In situ Lunar Orientation Measurement) are briefly described in the article. As part of the project it is planned to place a small optical telescope on the lunar surface with the purpose of detecting the lunar physical libration with millisecond accuracy. The computer simulation of the future observations is carried out for their optimization (efficient placement of the observation equipment on the lunar surface; testing of the sensitivity of the new observations to various features of the lunar interior structure). The results of the first stage of the simulation are presented in the paper. At this stage the software for the selection of stars and the reduction of their coordinates for the observation period is developed. The tracks for the selected stars are constructed and analyzed, and their sensitivity to the internal characteristics of the lunar body (in the first place, to the selenopotential coefficients) is tested.

The inverse problem of the physical libration is formulated. It is shown that observations of polar stars do not allow of determining libration in longitude  $\tau(t)$ . At the stage of solving

the inverse problem, the manifestation of the viscoelastic properties of the Moon in the selenographic coordinates is investigated. In the spectrum of simulated residuals, those harmonics are identified which can serve as indicators to refine the viscoelastic parameters such as the Love number  $k_2$  and the anelastic time delay.

**Keywords:** lunar physical libration, free and arbitrary libration, lunar core, ILOM, lunar polar telescope, observations, computer simulation.

#### Литература

1. *Нефедьев Ю.А., Ризванов Н.Г., Кибардина М.И.* Исследования селенодезии и динамики луны в Казани // Астрон. вестн. – 2007. – Т. 42, № 2. – С. 154–164.
2. *Хабибуллин Ш.Т.* Нелинейная теория физической либрации Луны // Труды Казан. гор. астрон. обсерватории. – 1966. – № 34. – С. 3–70.
3. *Петрова Н.* Таблицы физической либрации Луны, основанные на теории движения Луны Шмидта (главная проблема) // Труды Казан. гор. астрон. обсерватории. – 1993. – № 53. – С. 48–80.
4. *Petrova N.* Analytical extension of Lunar libration tables // Earth, Moon Planets. – 1996. – V. 73, No 1. – P. 71–99.
5. *Habibullin Sh.T.* The limits of possible values of inclination of Mercury's equator // Earth, Moon Planets. – 1992. – V. 58, No 1. – P. 79–95.
6. *Habibullin Sh.T.* On the rotation of rigid Venus // Earth, Moon Planets. – 1995. – V. 71, No 1–2. – P. 43–58.
7. *Petrova N., Gusev A.* New trends in the development of the lunar physical libration theory // Celest. Mech. Dyn. Astron. – 2001. – V. 80, No 3–4. – P. 215–225.
8. *Petrova N., Gusev A.* Modelling of the free lunar libration // Lunar and Planetary Sci. Conf. XXXVI. – 2005. – Abstr. No 1448.
9. *Petrova N., Gusev A.* Free core nutation of the Moon // Proc. Int. Conf. "Geom. of Phys. IV". – Kazan: Kazan Univ. Press, 1999. – P. 276–282.
10. *Petrova N., Gusev A., Hanada H., Kawano N.* Free librations of the two-layer Moon and the possibilities of their detection // Adv. Space Res. – 2008. – V. 42, No 8. – P. 1398–1404.
11. *Яковкин А.А.* Формулы и эфемериды для полевых наблюдений на Луне. – Киев: Наукова думка, 1964. – 168 с.
12. *Habibullin Sh.T., Gurshtein A.A., Sanovichvich A.N.* On the problem of lunar time // The Moon. – 1974. – V. 11, No 1–2. – P. 29–34.
13. *Куликов К.А., Гуревич В.Б.* Основы лунной астрометрии. – М.: Наука, 1972. – 391 с.
14. *Williams J.G., Boggs D., Yoder Ch., Ratcliff J., Dickey J.* Lunar rotational dissipation in solid body and molten core // J. Geoph. Res. – 2001. – V. 106, No E11. – P. 27933–27968.
15. *Eckhardt D.H.* Theory of the libration of the Moon // Moon and Planets. – 1981. – V. 25, No 1. – P. 3–49.
16. *Moons M.* Physical libration of the Moon // Celest. Mech. Dyn. Astron. – 1982. – V. 26, No 2. – P. 131–142.
17. *Chapront J., Chapront-Touzé M., Francou G.* Complements to Moons' Lunar libration theory // Celest. Mech. Dyn. Astron. – 1999. – V. 73, No 1–4. – P. 317–328.
18. *Newhall X.X., Williams J.G.* Estimation of the lunar physical librations // Celest. Mech. Dyn. Astron. – 1996. – V. 66, No 1. – P. 21–30.
19. *Yoder C.F.* The free librations of a dissipative Moon // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. – 1981. – V. 303, No 1477. – P. 327–338.

20. *Dickey J.O., Bender P.L., Faller J.E., Newhall X.X., Ricklefs R.L., Ries J.G., Shelus P.J., Veillet C., Whipple A.L., Wiant J.R., Williams J.G., Yoder C.F.* Lunar laser ranging: a continuing legacy of the Apollo program // *Science*. – 1994. – V. 265. – P. 482–490.
21. *Williams J.G., Boggs D.H., Ratcliff J.T.* Lunar fluid core moment // *Abstr. 41st Lunar and Planetary Sci. Conf.* – 2010. – Abstr. No 2336.
22. *Weber R., Lin P., Garnero E.J., Williams Q., Lognonné P.* Seismic Detection of the Lunar Core // *Science*. – 2011. – V. 331. – P. 309–312.
23. *Garcia R.F., Gagnepain-Beyneix J., Chevrot S., Lognonné P.* Very preliminary reference Moon model // *Phys. Earth Planet. Inter.* – 2011. – V. 188, No 1–2. – P. 96–113.
24. *Barkin Yu., Gusev A., Petrova N.* The study of the spin-orbit and inner dynamics of the Moon: Lunar mission applications // *Adv. Space Res.* – 2006. – V. 37, No 1. – P. 72–79.
25. *Getino J., Farto J.M., Ferrandiz J.M.* Obtaining the free frequencies of the non-rigid Earth // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* – 1999. – V. 71, No 2. – P. 95–108.
26. *Sidorenko V.V.* Evolution of the rotational motion of a planet with a liquid core // *Proc. IAU Coll. 165 “Dynamics and Astrometry of Natural and Artificial Celestial Bodies”*. – Kluwer Acad. Publ., 1997. – P. 313–318.
27. *Dehant V., Van Hoolst T., de Viron O., Greff-Lefftz M., Legros H., Defraigne P.* Can a solid inner core of Mars be detected from observations of polar motion and nutation of Mars // *J. Geophys. Res.* – 2003. – V. 108, No E12. – P. 5127-1–5127-12.
28. *Хабибуллин Ш.Т., Чуканов Ю.А.* О произвольной либрации Луны и эйлеровском движении ее полюсов // *Труды Казан. гор. астрон. обсерватории*. – 1969. – № 36. – С. 49–60.
29. *Кондратьев Б.П.* Векторный подход к проблеме физической либрации Луны. II. Нелинейная проблема // *Астрон. вестн.* – 2011. – Т. 45, № 5. – С. 458–469.
30. *Chapront J., Chapront-Touzé M.* Lunar motion: theory and observations // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* – 1997. – V. 66, No 1. – P. 31–38.
31. *Rambaux N., Williams J.G.* The Moon’s physical librations and determination of their free modes // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* – 2011. – V. 109, No 1. – P. 85–100.
32. *Calame O.* Free librations of the Moon from lunar laser ranging // *Scientific Applications of Lunar Laser Ranging* / Ed. by J.D. Mulholland. – Dordrecht/Boston: D. Reidel Publ. Comp., 1977. – P. 53–63.
33. *Hanada H., Noda H., Kikuchi F., Tazawa S., Kunimori H., Matsumoto K., Araki H., Iwata T., Funazaki K., Sasaki S.* Different kind of observations of lunar rotation and gravity for SELENE-2 // *Proc. Conf. “Astrokazan-2009”*. – Kazan, Russia, 2009. – P. 172–175.
34. *Hanada H., Ping J., Funazaki K., Kawano N., Petrova N.* Development of a photographic zenith tube for observation of the lunar rotation and the deflection of the vertical // *Proc. IAG Symp. on Terrestrial Gravimetry*. – Saint Petersburg, Russia, 2010. – P. 125–129.
35. *Hanada H., Araki H., Tazawa S.* Development of a digital zenith telescope for advanced astrometry // *Sci. China-Phys., Mech. Astron.* – 2012. – V. 55, No 4. – P. 723–732.
36. *Гусев А.В., Петрова Н.К.* Вращение, физическая либрация и внутреннее строение Луны. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2008. – 208 с.
37. *Petrova N., Hanada H.* Computer simulating of stellar tracks for observations with the lunar polar telescope // *Planet. Space Sci.* – 2012. – V. 68, No 1. – P. 86–93.



38. *Petrova N., Abdulmyanov T., Hanada H.* Some qualitative manifestations of the physical libration of the Moon by observing stars from the lunar surface // *Adv. Space Res.* – 2012. – V. 50, No 12. – P. 1702–1711.
39. *Петрова Н.К., Гусев А.В., Кикучи Ф., Кавано Н., Ханада Х.* Моделирование измерений физической либрации луны в японском космическом проекте, основанном на методе обратной РСДБ // *Изв. ГАО.* – 2009. – Т. 219, Вып. 4. – С. 262–266.
40. *Noda H., Heki K., Hanada H.* In situ Lunar Orientation Measurement (LOM): Simulation of observation // *Adv. Space Res.* – 2008. – V. 42, No 2. – P. 358–362.
41. *Lemoine F.G., Smith D.S., Zuber V.T., Neumann G.A., Rowlands D.D.* A 70th degree lunar gravity model (GLGM-2) from Clementine and other tracking data // *J. Geophys. Res.* – 1997. – V. 102, No E7. – P. 16339–16359.
42. *Konopliv A.S.* LP L RSS line of sight acceleration profiles V1.0, LP-L-RSS-5-LOS-V1.0 // NASA Planetary Data System. – 2000. (LP150Q -model)
43. *Matsumoto K., Goossens S., Ishihara Y., Liu Q., Kikuchi F., Iwata T., Namiki N., Noda H., Hanada H., Kawano N., Lemoine F.G., Rowlands D.D.* An improved lunar gravity field model from SELENE and historical tracking data: Revealing the farside gravity features // *J. Geophys. Res.* – 2010. – V. 115, No E6. – P. E06007-1–E06007-20.

Поступила в редакцию  
18.07.13

---

**Петрова Наталья Константиновна** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Астрономической обсерватории им. В.П. Энгельгардта, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: [nk\\_petrova@mail.ru](mailto:nk_petrova@mail.ru)

**Нефедьев Юрий Анатольевич** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной физики и МФП, директор Астрономической обсерватории им. В.П. Энгельгардта, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: [star1955@mail.ru](mailto:star1955@mail.ru)

**Дёмин Сергей Анатольевич** – старший преподаватель кафедры вычислительной физики и МФП, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: [serge\\_demin@mail.ru](mailto:serge_demin@mail.ru)

**Гусев Александр Васильевич** – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института геологии и нефтегазовых технологий, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: [Alexander.Gusev@mail.ru](mailto:Alexander.Gusev@mail.ru)