

УДК 539.3

ПРОЦЕСС ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПОРИСТОЙ
МАТРИЦЫ СЛОЖНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ПРИРОДЫ
С УЧЕТОМ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ
И ТЕМПЕРАТУРНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Д.В. Бережной, А.И. Голованов, А.В. Костерин, С.А. Малкин

Аннотация

Построена система вариационных разрешающих уравнений консолидации упруго-вязко-пластических грунтовых сред при фильтрации в них нефте-водяной смеси при температурных воздействиях. Система получена на основе эйлерова подхода к описанию движения, рассмотрен случай квазистатического движения грунтовой среды.

Целью настоящей работы является моделирование процесса деформирования пористой матрицы сложной физической природы на различных этапах освоения месторождений нефтепродуктов, в частности: на этапе земляных работ, при учете фильтрационной консолидации, а также на этапе извлечения битумов при термическом воздействии.

Перед началом математического моделирования указанного выше процесса [1–6] необходимо принять некоторые макромасштабные предположения. В первую очередь будем считать, что битум является жидкостью фракцией, но с очень большой вязкостью. Это позволит избежать описания в математической модели фазовых переходов. Далее рассмотрим случай квазистатического деформирования, когда инерционными слагаемыми можно пренебречь. Процесс добычи вязких углеродов практически всегда связан с наличием в коллекторе воды, поэтому жидккая фракция будет представлять собою нефте-водяную смесь. При макромасштабном описании фильтрации такой смеси можно считать, что поровые давления нефти и воды совпадают. Наличие газа учитывать не будем.

Первоначально получим основную систему разрешающих уравнений. В первую очередь к такой системе относятся уравнения равновесия, записанные для всего грунта в целом [7]

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{\text{tot}}}{\partial x_j} + \rho g \delta_{i3} = 0, \quad (1)$$

причем согласно принципу напряжений Терцаги [8] тотальные напряжения в грунте σ_{ij}^{tot} принимаются равными

$$\sigma_{ij}^{\text{tot}} = \sigma_{ij}^{\text{ef}} - \delta_{ij} P,$$

где P – давление в жидкой фазе, σ_{ij}^{ef} – эффективные напряжения в грунте, а ρ – осредненная плотность породы коллектора, определяемая как

$$\rho = m(s\rho_w + (1-s)\rho_h) + (1-m)\rho_s$$

и являющаяся функцией структуры и строения коллектора. Индексы s , w , o соответствуют параметрам скелета грунта, воды и нефти, через m и s обозначаются, соответственно, пористость и содержание воды в жидкой фазе, x_i – глобальные декартовы координаты текущего (актуального) состояния, \mathbf{i}_i – орты глобальной декартовой системы координат, \mathbf{g} – ускорение свободного падения

$$\mathbf{g} = g \mathbf{i}_3.$$

Уравнения баланса масс [9] запишем отдельно для каждой фазы грунта. Для скелета грунта уравнение баланса масс примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} [(1-m) \rho_s] + \operatorname{div} [(1-m) \rho_s \mathbf{v}^s] = 0, \quad (2)$$

где \mathbf{v}^s – скорость частиц скелета грунта.

Уравнения баланса масс для жидких фаз примут аналогичный вид

$$\frac{\partial}{\partial t} [m s \rho_w] + \operatorname{div} [m s \rho_w \mathbf{v}^w] = 0 \quad \text{для воды} \quad (3)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t} [m (1-s) \rho_o] + \operatorname{div} [m (1-s) \rho_o \mathbf{v}^o] = 0 \quad \text{для нефти}, \quad (4)$$

где \mathbf{v}^w и \mathbf{v}^o – скорости частиц воды и нефти соответственно.

Разделив уравнение баланса массы твердой фазы на ρ_s , преобразуем уравнение (2) к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} (1-m) + (1-m) \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \operatorname{div} [(1-m) \mathbf{v}^s] = 0. \quad (5)$$

Аналогичные преобразования уравнений (3) и (4) приведут к уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial t} (m s) + m s \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \operatorname{div} [m s \mathbf{v}^w] = 0 \quad (6)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t} [m (1-s)] + m (1-s) \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial t} + \operatorname{div} [m (1-s) \mathbf{v}^o] = 0. \quad (7)$$

Складывая соотношения (5)–(7) и пренебрегая градиентом плотности по сравнению с градиентом скорости и пористости, после некоторых преобразований получаем

$$(1-m) \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + m s \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial t} + m (1-s) \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial t} + \\ + \operatorname{div} [\mathbf{v}^s] + \operatorname{div} [m s (\mathbf{v}^w - \mathbf{v}^s)] + \operatorname{div} [m (1-s) (\mathbf{v}^o - \mathbf{v}^s)] = 0. \quad (8)$$

Считая, что объемные деформации минеральных частиц скелета грунта определяются давлением жидкой фазы, и учитывая слабую их сжимаемость, закон сжимаемости для минеральных частиц скелета грунта [10] можно записать в виде

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial t} = \frac{1}{K_s} \frac{\partial P}{\partial t},$$

где K_s – модуль объемного сжатия минеральных частиц скелета грунта.

С учетом слабой сжимаемости воды и нефти будут справедливы следующие соотношения

$$\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial t} = \frac{1}{K_w} \frac{\partial P}{\partial t},$$

$$\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \rho_s}{\partial t} = \frac{1}{K_o} \frac{\partial P}{\partial t},$$

где K_w и K_o – модули объемного сжатия воды и нефти соответственно.

Тогда уравнение (8) примет вид

$$\beta \frac{\partial P}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v}^s + \operatorname{div}[m s (\mathbf{v}^w - \mathbf{v}^s)] + \operatorname{div}[m (1-s) (\mathbf{v}^o - \mathbf{v}^s)] = 0,$$

причем осредненную упругоемкость всего грунта в целом β можно записать в виде

$$\beta = \frac{1-m}{K_s} + \frac{ms}{K_w} + \frac{m(1-s)}{K_o}.$$

Закон фильтрации записывается по отношению к разности приведенных скоростей жидкости и скелета грунта в форме Дарси–Герсеванова

$$m s (\mathbf{v}^w - \mathbf{v}^s) = -\frac{k}{\mu_w} f_w (\operatorname{grad} P - \rho_w \mathbf{g}),$$

аналогичное уравнение для нефти примет вид

$$m (1-s) (\mathbf{v}^o - \mathbf{v}^s) = -\frac{k}{\mu_o} f_o (\operatorname{grad} P - \rho_o \mathbf{g}),$$

где k – абсолютная проницаемость скелета грунта, μ_w и μ_o – вязкости воды и нефти соответственно, f_w – фазовая проницаемость системы каналов, занятых водой, f_o – фазовая проницаемость системы каналов, занятых нефтью.

Подставляя уравнения фильтрации в итоговое уравнение баланса массы, получим уравнение пьезопроводности

$$\beta \frac{\partial P}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v}^s - \operatorname{div} \left[k \left(\frac{f_w}{\mu_w} + \frac{f_o}{\mu_o} \right) \operatorname{grad} P \right] + \operatorname{div} \left[k \mathbf{g} \left(\frac{f_w}{\mu_w} \rho_w + \frac{f_o}{\mu_o} \rho_o \right) \right] = 0 \quad (9)$$

или

$$\beta \frac{\partial P}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v}^s - \operatorname{div}[k \psi \operatorname{grad} P] + \operatorname{div}[k \mathbf{g} \varphi] = 0,$$

где приняты обозначения

$$\psi = \frac{f_w}{\mu_w} + \frac{f_o}{\mu_o},$$

$$\varphi = \frac{f_w}{\mu_w} \rho_w + \frac{f_o}{\mu_o} \rho_o.$$

Считая отклонение температуры при термическом воздействии от начальной не слишком большим, будем считать справедливым закон теплопроводности Фурье. В предположении малости энергии диссиpации при вязкопластическом деформировании уравнение теплопроводности для всего грунта в целом примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \{ [(1-m)\rho_s c_s + m s \rho_w c_w + m(1-s)\rho_o c_o] T \} + \\ + \operatorname{div} \{ [(1-m)\rho_s c_s \mathbf{v}^s + m s \rho_w c_w \mathbf{v}^w + m(1-s)\rho_o c_o \mathbf{v}^o] T \} = \\ = \operatorname{div} \{ [(1-m) \lambda_s + m s \lambda_w + m(1-s) \lambda_o] \operatorname{grad} T \}, \end{aligned}$$

где c_s , c_w , c_o и λ_s , λ_w , λ_o – коэффициенты теплоемкости и теплопроводности скелета грунта, воды и нефти соответственно.

После некоторых преобразований получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (cT) + \operatorname{div} \{ [c \mathbf{v}^s + m s \rho_w c_w (\mathbf{v}^w - \mathbf{v}^s) + \\ + m(1-s)\rho_o c_o (\mathbf{v}^o - \mathbf{v}^s)] T \} = \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T) \end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} (cT) + \operatorname{div} (\mathbf{Q}T) = \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T), \quad (10)$$

где средняя теплоемкость грунта записывается в виде

$$c = (1-m)\rho_s c_s + m s \rho_w c_w + m(1-s)\rho_o c_o,$$

средняя теплопроводность грунта – в виде

$$\lambda = (1-m)\lambda_s + m s \lambda_w + m(1-s)\lambda_o,$$

а вектор \mathbf{Q} представляется как

$$\mathbf{Q} = c \mathbf{v}^s + m s \rho_w c_w (\mathbf{v}^w - \mathbf{v}^s) + m(1-s)\rho_o c_o (\mathbf{v}^o - \mathbf{v}^s)$$

или

$$\mathbf{Q} = c \mathbf{v}^s - \Phi k \operatorname{grad} P + \chi k \mathbf{g},$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{f_w}{\mu_w} \rho_w c_w + \frac{f_o}{\mu_o} \rho_o c_o, \\ \chi &= \frac{f_w}{\mu_w} \rho_w^2 c_w + \frac{f_o}{\mu_o} \rho_o^2 c_o. \end{aligned}$$

Через d_{ij} обозначим скорость деформаций частиц скелета грунта

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i^s}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^s}{\partial x_i} \right),$$

через H_n – градиент напора, через S_σ , S_{H_n} , S_q – части внешней поверхности расчетной области, где заданы напряжения, градиент напора и поток тепла соответственно.

Тогда вариационная форма уравнений (1), (9), (10) будет следующей

$$\int_V \sigma_{ij}^{\text{tot}} \delta d_{ij} dV = \int_{S_\sigma} \sigma_i^* \delta v_i^s dS + \int_V \delta_{ij} g \rho \delta v_i^s dV, \quad (11)$$

где

$$\sigma_{ij}^{\text{tot}} n_j = \sigma_i^* \quad \text{на } S_\sigma,$$

$$\begin{aligned} \int_V \beta \frac{\partial P}{\partial t} \delta \dot{P} dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} (v_i^s) \delta \dot{P} dV - \int_{S_o} k H_n^* \delta \dot{P} dS + \\ + \int_V k \psi \frac{\partial P}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta \dot{P}) dV - \int_V k \varphi \delta_{i3} g \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta \dot{P}) dV = 0, \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k \frac{f_w(s)}{\mu_w} \left(\frac{\partial P}{\partial x_i} - \rho_w g \delta_{i3} \right) n_i + k \frac{f_o(s)}{\mu_o} \left(\frac{\partial P}{\partial x_i} - \rho_o g \delta_{i3} \right) n_i = \\ = k \frac{f_w(s)}{\mu_w} H_n^w + k \frac{f_o(s)}{\mu_o} H_n^o = k H_n^* \quad \text{на } S_{H_n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial}{\partial t} (cT) \delta \dot{T} dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(c v_i^s - \Phi k \frac{\partial P}{\partial x_i} + \chi k g \delta_{i3} \right) T \right] \delta \dot{T} dV = \\ = \int_{S_q} q^* \delta \dot{T} dS - \int_V \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta \dot{T}) dV, \quad (13) \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} n_i = q^* \quad \text{на } S_q. \end{aligned}$$

После линеаризации уравнения (11)–(13) примут вид

$$\begin{aligned} \int_V \left(\dot{\sigma}_{ij}^{\text{ef}} \delta d_{ij} + \sigma_{ij}^{\text{ef}} \delta \dot{d}_{ij} + \frac{dP}{dt} \delta \dot{\theta} + \left(\sigma_{ij}^{\text{ef}} \delta d_{ij} + P \delta \dot{\theta} \right) \dot{\theta} \right) dV - \\ - \int_V \rho g \delta \mathbf{v}^s \dot{\theta} dV - \int_{S_\sigma} \left(\dot{\sigma}_n^* \delta \mathbf{v}^s + \sigma_n^* \delta \mathbf{v}^s \dot{\theta} \right) dS + \int_V \left(\sigma_{ij}^{\text{ef}} \delta d_{ij} + P \delta \dot{\theta} \right) dV - \\ - \int_V \rho g \delta \mathbf{v}^s dV - \int_{S_\sigma} \sigma_n^* \delta \mathbf{v}^s dS = 0, \\ \int_V k \left[\frac{\partial \dot{P}}{\partial x_m} \frac{\partial \delta \dot{P}}{\partial x_m} + \left(\frac{\partial P}{\partial x_m} \frac{\partial v_n^s}{\partial x_m} - \frac{\partial P}{\partial x_m} d_{mn} \right) \frac{\partial \delta \dot{P}}{\partial x_m} + \right. \\ \left. + \varphi \left(- \frac{\partial v_m^s}{\partial x_n} g_n + \frac{\partial v_n^s}{\partial x_n} g_m \right) \frac{\partial \delta \dot{P}}{\partial x_m} \right] dV - \int_{S_o} \left(\dot{H}_n^* \delta \dot{P} + H_n^* \frac{\partial v_n^s}{\partial x_n} \delta \dot{P} \right) dS + \\ + \int_V \left[\beta \frac{\partial P}{\partial t} \delta \dot{P} + \frac{\partial v_m^s}{\partial x_m} \delta \dot{P} + k \left(\psi \frac{\partial P}{\partial x_m} - \varphi g_m \frac{\partial \delta \dot{P}}{\partial x_m} \right) \right] dV - \int_{S_o} q_* \delta \dot{P} dS = 0, \\ \int_V \left\{ c \dot{T} \delta \dot{T} + \left[T \left(c v_m^s - k \Phi \frac{\partial P}{\partial x_m} + k \chi g_m \right) + \lambda \frac{\partial T}{\partial x_m} \right] \frac{\partial \delta \dot{T}}{\partial x_m} \right\} dV + \int_{S_q} q^* \delta \dot{T} dS = 0. \end{aligned}$$

Запишем уравнения состояния пористой упруго-вязко-пластической среды. Деформатор скорости деформаций записывается в виде

$$d'_{ij} = d_{ij} - \delta_{ij} d_0 = d_{ij} - \delta_{ij} \frac{\dot{\theta}}{3}.$$

Согласно принципу аддитивности деформаций имеем

$$d_{ij} = d_{ij}^e + d_{ij}^T + d_{ij}^p + d_{ij}^c,$$

где индексы e , T , p и c соответствуют параметрам упругого, температурного, пластического и вязкого состояний. Тогда подобные соотношения можно записать для девиаторной и шаровой частей тензора скоростей деформаций в виде

$$d'_{ij} = d'_{ij}^e + d'_{ij}^T + d'_{ij}^p + d'_{ij}^c$$

и

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}^e + \dot{\theta}^T + \dot{\theta}^p + \dot{\theta}^c.$$

Будем считать, что соотношения для шаровых тензоров и девиаторов эффективных напряжений и скоростей деформаций независимы.

В этом случае для упругих деформаций в случае изотропного грунта определяющие соотношения примут вид

$$\dot{\theta}^e = \beta \dot{\sigma}_0^{\text{ef}} - \beta_s \left(\dot{P} + v_i^s \frac{\partial P}{\partial x_i} \right),$$

$$d'_{ij}^e = \frac{1}{2G} \dot{\sigma}'_{ij}^{\text{ef}},$$

где G – модуль сдвига грунта.

Считая, что при изменении температуры будут изменяться только линейные деформации, для температурных деформаций справедливо будет запись

$$\dot{\theta}^T = \alpha_s \dot{T},$$

$$d'_{ij}^T = 0,$$

где α_s – коэффициент теплового расширения.

Для описания вязкого поведения пористой матрицы примем модель Кельвина – Фойгта, тогда для скоростей вязких деформаций справедливы соотношения

$$\dot{\theta}^c = \eta_0 \sigma_0^{\text{ef}},$$

$$d'_{ij}^c = \eta \sigma'_{ij}^{\text{ef}},$$

где η_0 и η – соответствующие коэффициенты вязкости.

В процессе моделирования грунтов [11–14] вводят специальные характеристики прочности, которые определяют их несущую способность. К ним относятся: сцепление c^* , которое характеризует прочность грунтовой среды на срез при отсутствии сжимающих напряжений; угол внутреннего трения φ^* , который характеризует повышение прочности на сдвиг при всестороннем сжатии; коэффициент дилатансии Λ , который характеризует разрыхление или уплотнение грунта при девиаторном нагружении. В этом случае соотношения для скоростей пластических деформаций будут следующими

$$\dot{\theta}^p = 2\Lambda (c^* - \sigma_0^{\text{ef}} \operatorname{tg} \varphi^*) \dot{\lambda},$$

$$d'_{ij}^p = \dot{\lambda} \sigma'_{ij}^{\text{ef}}.$$

Условием возникновения предельного состояния будет являться выполнение соотношения

$$\sigma_\tau^{\text{ef}} = c^* - \sigma_0^{\text{ef}} \operatorname{tg} \varphi^*,$$

где

$$2 (\sigma_\tau^{\text{ef}})^2 = \sigma'_{mn} \sigma'^{\text{ef}}_{mn},$$

а σ'_{mn}^{ef} – девиатор тензора эффективных напряжений.

Для принятой модели параметр $\dot{\lambda}$ определяется в виде

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{R} \left\{ \frac{\sigma'_{mn}^{\text{ef}}}{\sigma_\tau^{\text{ef}}} d'_{mn} + \left[\dot{\theta}_0 + \beta_s \left(\dot{P} + v_m^s \frac{\partial P}{\partial x_m} \right) - \alpha_s \dot{T} - \eta_0 \sigma_0^{\text{ef}} \right] \frac{K}{G} \operatorname{tg} \varphi^* - 2\eta \sigma_\tau^{\text{ef}} \right\},$$

где

$$R = 2\sigma_{\tau}^{\text{ef}} + 2(c^* - \sigma_0^{\text{ef}}\varphi^*)\Lambda \frac{K}{G} \operatorname{tg} \varphi^*.$$

Уравнения для определения зависимых параметров m , ρ_s , ρ_w , ρ_o и s записываются, соответственно, следующим образом:

для пористости

$$\dot{m} = (1 - m) \left(\frac{\partial v_i^s}{\partial x_i} - \beta_s \dot{P} - \alpha_s \dot{T} \right);$$

для плотностей

$$\dot{\rho}_s = \rho_s (\beta_s \dot{P} + \alpha_s \dot{T}),$$

$$\dot{\rho}_w = \rho_w (\beta_w \dot{P} + \alpha_w \dot{T}),$$

$$\dot{\rho}_o = \rho_o (\beta_o \dot{P} + \alpha_o \dot{T});$$

для водонасыщенности

$$-\dot{s} = s \frac{1}{m\rho_w} \frac{d(m\rho_w)}{dt} + \frac{1}{m\rho_w} \frac{\partial(msv_i^w)}{\partial x_i},$$

$$msv^w = ms\mathbf{v}^s - k \frac{f_w}{\mu_w} (\nabla P - \rho_w \mathbf{g}).$$

Таким образом, в работе построена система вариационных разрешающих уравнений консолидации грунтовых сред при фильтрации в них нефте-водяной смеси, полученная на основе эйлерова подхода к описанию движения. Связь между напряжениями в разных фазах определяется принципом напряжений Терцаги. Закон фильтрации записывается по отношению к разности приведенных скоростей жидкости и скелета грунта в форме Дарси–Герсеванова. Рассмотрен случай квазистатического движения грунтовой среды, когда ускорениями частиц фильтрующей жидкости и скелета грунта можно пренебречь.

Summary

D.V. Berezhnoi, A.I. Golovanov, A.V. Kosterin, S.A. Malkin. Straining process of complex physical nature porous matrix taking into account two-phase filtration and thermal influence.

System of variation resolving equations of elastic-viscous-plastic soil media consolidation with oil-water mixture filtration under thermal influence is formulated. System is formed in terms of Euler point of view on motion description, case of quasi-static motion of soil media is considered.

Литература

1. Бережной Д.В., Голованов А.И., Костерин А.В., Малкин С.А. Разработка теоретических основ и реализация системы анализа и прогнозирования процесса извлечения твердых нефтепродуктов. // Нетрадиционные коллекторы нефти, газа и природных битумов. Проблемы их освоения. Материалы научн. конф. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2005. – С. 346–347.
2. Cheng H., Dusseault M.B. Development and application of a fully-coupled twodimensional finite element approach to deformation and pressure diffusion around a bore-hole // J. Can. Petr. Tech. – 1993. – V. 32(10). – P. 28–38.
3. Liu J., Liu X. Study on nonlinear seepage in low permeable rock // Ch. J. Rock Mech. and Eng. – 2003. – V. 22. – P. 556–561.

4. *Tortike W.S., Farouq Ali S.M.* Reservoir simulation integrated with geomechanics // J. Can. Petr. Tech. – 1993. – V 32(5). – P. 28–37.
5. *Дроботенко М.И., Костерин А.В.* Обобщенное решение задачи фильтрационной консолидации // Докл. РАН. – 1996. – Т. 350, № 5. – С. 619–621.
6. *Дияшев Р.Н., Костерин А.В., Скворцов Э.В.* Фильтрация жидкости в деформируемых нефтяных пластах. – Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва, 1999. – 238 с.
7. *Зарецкий Ю.К.* Лекции по современной механике грунтов. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1989. – 607 с.
8. *Терцаги К.* Теоретическая механика грунтов. – М.: Стройиздат. – 507 с.
9. *Николаевский В.Н.* Геомеханика и флюидодинамика. – М.: Недра, 1996. – 448 с.
10. *Цытovich Н.А.* Механика грунтов. – М.: Госстройиздат, 1963. – 636 с.
11. *Секаева Л.Р., Бережной Д.В., Коноплев Ю.Г.* Исследование взаимодействия деформируемых конструкций с сухими и водонасыщенными грунтами. // Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов. Тр. докл. XX межд. конф. – СПб., 2003. – Т. III. – С. 156–159.
12. *Николаевский В.Н.* Механика пористых и трещиноватых сред. – М.: Недра, 1984. – 232 с.
13. *Фадеев А.Б.* Метод конечных элементов в геомеханике. – М.: Недра, 1987. – 221 с.
14. *Бережной Д.В., Голованов А.И., Паймушин В.Н., Сидоров И.Н., Клементьев Г.А.* Исследование напряженно-деформированного и предельного состояния сухих и водонасыщенных грунтов // Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов. Тр. докл. XIX межд. конф. – СПб., 2001. – Т. II. – С. 82–86.

Поступила в редакцию
03.11.05

Бережной Дмитрий Валерьевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики Казанского государственного университета.

Голованов Александр Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, проректор по научной работе и информатизации Казанского государственного университета.

E-mail: *Alexandr.Golovanov@ksu.ru*

Костерин Александр Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

E-mail: *Alexander.Kosterin@ksu.ru*

Малкин Сергей Александрович – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

E-mail: *smalkin@ksu.ru*