

УДК 514.16

## О СТРУКТУРЕ КОЛЬЦА КВАНТОВЫХ КОГОМОЛОГИЙ ДЕ РАМА ПУАССОНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

B.B. Шурыгин (м.л.)

### Аннотация

В работе [4] автором было показано, что квантовые когомологии де Рама пуассоновых многообразий, введенные в [1], получаются деформационным квантованием когомологий де Рама. В настоящей работе мы показываем, что структура кольца квантовых когомологий де Рама также получается деформационным квантованием структуры кольца когомологий де Рама.

Пусть  $M$  – гладкое многообразие.

Скобкой Пуассона на  $M$  называется билинейное кососимметричное отображение  $\{ \cdot, \cdot \} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ , где  $C^\infty(M)$  – алгебра гладких функций на  $M$ , удовлетворяющее правила Лейбница

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$$

и тождеству Якоби

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0.$$

Многообразие, наделенное скобкой Пуассона, называется *пуассоновым многообразием*.

Обозначим пространство кососимметрических контравариантных тензорных полей на  $M$  через  $\mathcal{V}^*(M)$ , а кольцо дифференциальных форм на  $M$  через  $\Omega^*(M)$ . Степень внешней формы  $\alpha$  будем обозначать символом  $|\alpha|$ , т. е.  $|\alpha| = m$ , если  $\alpha \in \Omega^m(M)$ .

Скобка Пуассона на гладком многообразии  $M$  однозначно определяет тензор  $w \in \mathcal{V}^2(M)$ , такой, что

$$\{f, g\} = w^{pq} \frac{\partial f}{\partial x^p} \frac{\partial g}{\partial x^q} \quad (1)$$

для всех  $f, g \in C^\infty(M)$ . Известно, что скобка (1) на  $C^\infty(M)$ , построенная по такому тензору, удовлетворяет тождеству Якоби тогда и только тогда, когда  $[w, w] = 0$ , где  $[\cdot, \cdot]$  – скобка Схоутена–Нейенхайса на  $\mathcal{V}^*(M)$  (см., например, [3]). В локальных координатах это условие записывается как

$$w^{ps} \frac{\partial w^{qr}}{\partial x^s} + w^{qs} \frac{\partial w^{rp}}{\partial x^s} + w^{rs} \frac{\partial w^{pq}}{\partial x^s} = 0.$$

В дальнейшем будем обозначать пуассоново многообразие  $(M, w)$ .

Обозначим через  $i(w) : \Omega^m(M) \rightarrow \Omega^{m-2}(M)$  операцию внутреннего умножения на  $w$ ; в локальных координатах  $(i(w)\alpha)_{i_1 \dots i_{m-2}} = w^{jk} \alpha_{j k i_1 \dots i_{m-2}}$ . Koszul в [2] ввел кодифференциал  $\delta : \Omega^m(M) \rightarrow \Omega^{m-1}(M)$ , определенный формулой

$$\delta = [i(w), d] = i(w) \circ d - d \circ i(w),$$

где  $d : \Omega^m(M) \rightarrow \Omega^{m+1}(M)$  – внешний дифференциал. Он также показал, что

$$\delta \circ \delta = 0 \quad \text{и} \quad d \circ \delta + \delta \circ d = 0. \quad (2)$$

H.-D. Cao и J. Zhou использовали оператор  $\delta$  для построения кольца квантовых когомологий де Рама пуассонова многообразия  $(M, w)$  [1].

Рассмотрим конечномерное векторное пространство  $V$  над  $\mathbf{R}$  с базисом  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . Обозначим символом  $T^*(V)$  алгебру ковариантных тензоров на  $V$ . Для  $\alpha \in T^k(V)$  обозначим

$$(\alpha \dashv v)(v_1, \dots, v_{k-1}) := \alpha(v_1, \dots, v_{k-1}, v),$$

$$(v \vdash \alpha)(v_1, \dots, v_{k-1}) := \alpha(v, v_1, \dots, v_{k-1}),$$

где  $v, v_1, \dots, v_{k-1} \in V$ . Обозначим внешнюю алгебру пространства  $V$  через  $\Lambda^*(V)$ , а алгебру полиномов от  $h$  с коэффициентами в  $\Lambda^*(V)$  через  $\Lambda^*(V)[h]$ . Выберем произвольный кососимметрический тензор  $w = w^{pq} e_p \wedge e_q \in \Lambda^2(V)$ . Определим *квантовое внешнее умножение*  $\wedge_h : \Lambda^*(V) \otimes \Lambda^*(V) \rightarrow \Lambda^*(V)[h]$  следующим образом:

$$\alpha \wedge_h \beta = \sum_{k \geq 0} \frac{h^k}{k!} w^{p_1 q_1} \dots w^{p_k q_k} (\alpha \dashv e_{p_1} \dashv \dots \dashv e_{p_k}) \wedge (e_{q_k} \vdash \dots \vdash e_{q_1} \vdash \beta),$$

где  $\alpha, \beta \in \Lambda^*(V)$ . В [1] показано, что это определение не зависит от выбора базиса  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , а также (теорема 1.1), что квантовое внешнее умножение суперкоммутативно и ассоциативно.

Пусть  $(M, w)$  – пуассоново многообразие. Операция квантового внешнего умножения естественным образом (линейно по  $h$ ) распространяется на алгебру  $\Omega^*(M)[h]$  полиномов от  $h$  с коэффициентами в  $\Omega^*(M)$ .

В [1] был введен оператор

$$d_h := d - h\delta : \Omega^*(M)[h] \rightarrow \Omega^*(M)[h].$$

Там же (теорема 2.2) было показано, что квадрат этого оператора равен нулю  $d_h \circ d_h = 0$  и что он удовлетворяет правилу Лейбница относительно квантового внешнего умножения:

$$d_h(\alpha \wedge_h \beta) = (d_h \alpha) \wedge_h \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge_h (d_h \beta),$$

где  $\alpha, \beta \in \Omega^*(M)[h]$ .

В [1] были определены квантовые когомологии де Рама  $Q_h H_{dR}^*(M)$  пуассонова многообразия  $(M, w)$  как когомологии дифференциальной группы  $(\Omega^*(M)[h], d_h)$ :

$$Q_h H_{dR}^*(M) := \ker d_h / \operatorname{im} d_h.$$

Введем также в рассмотрение «сопряженный» оператор

$$d'_h := d + h\delta : \Omega^*(M)[h] \rightarrow \Omega^*(M)[h].$$

Проверка того, что  $d'_h \circ d'_h = 0$  и  $d'_h(\alpha \wedge_h \beta) = (d'_h \alpha) \wedge_h \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge_h (d'_h \beta)$ , осуществляется так же, как и в [1].

Операторы  $d_h$  и  $d'_h$  можно распространить также на алгебру  $\Omega^*(M)[h, h^{-1}]$  многочленов от  $h$  и  $h^{-1}$  и на алгебры  $\Omega^*(M)[[h]]$  и  $\Omega^*(M)[[h, h^{-1}]]$  рядов Тейлора и Лорана от  $h$  соответственно. Соответствующие когомологии оператора  $d'_h$  будем обозначать следующим образом:

$$\begin{aligned} Q'_h H_{dR}^*(M) &:= H(\Omega^*(M)[h], d'_h), & Q'_{h,h^{-1}} H_{dR}^*(M) &:= H(\Omega^*(M)[h, h^{-1}], d'_h), \\ TQ'_h H_{dR}^*(M) &:= H(\Omega^*(M)[[h]], d'_h), & LQ'_{h,h^{-1}} H_{dR}^*(M) &:= H(\Omega^*(M)[[h, h^{-1}]], d'_h). \end{aligned}$$

В дальнейшем будем обозначать  $i(w)$  через  $i$ . Рассмотрим гомоморфизм  $\varphi_h : (\Omega^*(M)[h], d) \rightarrow (\Omega^*(M)[h], d_h)$ , определенный формулой

$$\varphi_h(\alpha) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} h^k i^k \alpha = \alpha - h i \alpha + \frac{1}{2} h^2 i^2 \alpha - \frac{1}{6} h^3 i^3 \alpha + \dots$$

В [4], теорема 4.2) было доказано, что для любого пуассонова многообразия  $(M, w)$  гомоморфизм  $\varphi_h$  является изоморфизмом дифференциальных групп, т. е. что  $\varphi_h$  – эпиморфизм и мономорфизм и  $\varphi_h \circ d = d_h \circ \varphi_h$ . Следовательно, квантовые когомологии де Рама  $H_{dR}^*(M, w)$  получаются деформационным квантованием «обычных» когомологий де Рама  $H_{dR}^*(M)$ :

$$Q_h H_{dR}^*(M) \cong H(\Omega^*(M), d) = H_{dR}^*(M)[h].$$

Аналогично можно ввести «сопряженный» гомоморфизм

$$\varphi'_h : (\Omega^*(M)[h], d) \rightarrow (\Omega^*(M)[h], d'_h)$$

формулой

$$\varphi'_h(\alpha) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} h^k i^k \alpha = \alpha + h i \alpha + \frac{1}{2} h^2 i^2 \alpha + \frac{1}{6} h^3 i^3 \alpha + \dots$$

Проверка того, что  $\varphi'_h$  – изоморфизм дифференциальных групп, осуществляется так же, как в [4].

**Теорема.** Для любого пуассонова многообразия  $(M, w)$  изоморфизм  $\varphi'_h$  является изоморфизмом колец:

$$\varphi'_h(\alpha \wedge \beta) = (\varphi'_h \alpha) \wedge_h (\varphi'_h \beta). \quad (3)$$

**Доказательство.** Пусть  $\dim M = n$ . В локальных координатах  $(x^1, \dots, x^n)$  на  $M$  будем обозначать стандартный базис в  $T_x^* M$  через  $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ , а сопряженный ему базис в касательном пространстве  $T_x M$  через  $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ . Пусть  $w$  в этих локальных координатах имеет вид  $w = w^{pq} \frac{\partial}{\partial x^p} \wedge \frac{\partial}{\partial x^q}$ .

Доказательство теоремы проведем индукцией по  $|\alpha|$ .

Пусть  $|\alpha| = 1$ , тогда локально имеет место разложение  $\alpha = \alpha_p dx^p$ . Легко проверить, что в этом случае  $i(\alpha \wedge \beta) = \alpha \wedge i\beta + w^{pq} \alpha_p (\frac{\partial}{\partial x^q} \vdash \beta)$ . Отсюда индукцией по  $k$  следует, что

$$i^k(\alpha \wedge \beta) = \alpha \wedge i^k \beta + k w^{pq} \alpha_p \left( \frac{\partial}{\partial x^q} \vdash i^{k-1} \beta \right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 \varphi'_h(\alpha \wedge \beta) &= \sum_{k \geq 0} \frac{h^k}{k!} i^k (\alpha \wedge \beta) = \\
 &= \sum_{k \geq 0} \left( \alpha \wedge i^k \beta + k w^{pq} \alpha_p \left( \frac{\partial}{\partial x^q} \vdash i^{k-1} \beta \right) \right) = \\
 &= \sum_{k \geq 0} \frac{h^k}{k!} \left( \alpha \wedge i^k \beta + h w^{pq} \alpha_p \left( \frac{\partial}{\partial x^q} \vdash i^k \beta \right) \right) = \\
 &= \sum_{k \geq 0} \frac{h^k}{k!} \alpha \wedge_h i^k \beta = \alpha \wedge_h \sum_{k \geq 0} \frac{h^k}{k!} i^k \beta = (\varphi'_h \alpha) \wedge_h (\varphi'_h \beta).
 \end{aligned}$$

Предположим теперь, что формула (3) доказана для всех  $\alpha$ , таких, что  $|\alpha| \leq m$ . Пусть  $|\alpha| = m+1$ , тогда локально  $\alpha$  представляется в виде линейной комбинации форм вида  $\xi \wedge \eta$ , где  $|\xi| = 1$ ,  $|\eta| = m$ , поэтому переход индукции достаточно доказать для форм такого вида. Имеем

$$\begin{aligned}
 \varphi'_h((\xi \wedge \eta) \wedge \beta) &= \varphi'_h(\xi \wedge (\eta \wedge \beta)) = (\varphi'_h \xi) \wedge_h \varphi'_h(\eta \wedge \beta) = \\
 &= (\varphi'_h \xi) \wedge_h (\varphi'_h \eta) \wedge_h (\varphi'_h \beta) = \varphi'_h(\xi \wedge \eta) \wedge_h (\varphi'_h \beta).
 \end{aligned}$$

Таким образом,  $\varphi'_h$  – изоморфизм колец.  $\square$

**Следствие.** Имеют место изоморфизмы колец когомологий:

$$\begin{aligned}
 (Q'_h H_{dR}^*(M), \wedge_h) &\cong (H_{dR}^*(M)[h], \wedge), & (Q'_{h,h-1} H_{dR}^*(M), \wedge_h) &\cong (H_{dR}^*(M)[h, h^{-1}], \wedge), \\
 (TQ'_h H_{dR}^*(M), \wedge_h) &\cong (H_{dR}^*(M)[[h]], \wedge), & (LQ'_{h,h-1} H_{dR}^*(M), \wedge_h) &\cong (H_{dR}^*(M)[[h, h^{-1}]], \wedge).
 \end{aligned}$$

**Замечание 1.** Изоморфизм  $\varphi_h$  не является изоморфизмом колец (за исключением тривиального случая  $w = 0$ ), так как, например, при  $|\alpha| = |\beta| = 1$  имеем  $\varphi_h(\alpha \wedge \beta) = \alpha \wedge \beta - h w^{pq} \alpha_p \beta_q$ , а  $(\varphi_h \alpha) \wedge_h (\varphi_h \beta) = \alpha \wedge \beta + h w^{pq} \alpha_p \beta_q$ .

**Замечание 2.** Формула для квантового внешнего умножения подсказывает ввести другое умножение на  $\Omega^*(M)$ :

$$\alpha \wedge_w \beta := \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} w^{p_1 q_1} \dots w^{p_k q_k} \left( \alpha \dashv \frac{\partial}{\partial x^{p_1}} \dashv \dots \dashv \frac{\partial}{\partial x^{p_k}} \right) \wedge \left( \frac{\partial}{\partial x^{q_1}} \vdash \dots \vdash \frac{\partial}{\partial x^{q_k}} \vdash \beta \right).$$

Назовем его *w-внешним умножением*. Это умножение оказывается суперкоммутативным и ассоциативным. Действительно, для доказательства этого достаточно подставить в формулу для квантового внешнего умножения  $h = 1$ .

Рассмотрим оператор  $D := d + \delta : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$ . Из формул (2) легко следует, что  $D \circ D = 0$ . Рассмотрим гомоморфизм  $\varphi : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$ , определенный следующим образом:

$$\varphi(\alpha) := \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} i^k \alpha = \alpha + i\alpha + \frac{1}{2} i^2 \alpha + \frac{1}{6} i^3 \alpha + \dots$$

В работе [4] показано (предложение 2.2), что  $\varphi : (\Omega^*(M), d) \rightarrow (\Omega^*(M), D)$  является изоморфизмом дифференциальных групп. Из теоремы 1 следует, что если дифференциальную группу  $(\Omega^*(M), d)$  снабдить обычным внешним умножением, а дифференциальную группу  $(\Omega^*(M), D)$  – *w-внешним умножением*, то изоморфизм  $\varphi$  окажется также изоморфизмом колец.

---

### Summary

*V.V. Shurygin, junior.* Quantum de Rham cohomology ring for Poisson manifolds.

In [4] we have proved that the quantum de Rham cohomology of a Poisson manifold  $(M, \omega)$  (see [1]) can be obtained via deformational quantization of the de Rham cohomology of  $M$ . In this paper we prove that the ring structure on the quantum cohomology of  $(M, \omega)$  is obtained via deformational quantization of the ring structure of de Rham cohomology of  $M$ .

### Литература

1. *Cao H.-D., Zhou J.* On quantum de Rham cohomology // Preprint math.DG/9806157. – 1998.
2. *Koszul J.-L.* Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie // “Elie Cartan et les Math. d’Aujour d’Hui”, Astérisque, hors-série. – 1985. – P. 257–271.
3. *A. Lichnerowicz* Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées // J. Diff. Geom. – 1977. – V. 12. – P. 253–300.
4. *Шурыгин В.В. (м.л.)* Когомологии двойного комплекса Брылинского пуассоновых многообразий и квантовые когомологии де Рама // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 10. – С. 75–81.

Поступила в редакцию  
12.01.05

---

**Шурыгин Вадим Вадимович** – аспирант кафедры геометрии Казанского государственного университета.

E-mail: 1Vadim.Shurygin@ksu.ru