Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего профессионального образования

«Набережночелнинский институт
Казанского (Приволжского) федерального университета»

кафедра математики

# МАТЕМАТИКА (в трёх частях):
# Часть 2.

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

*для студентов заочной и дистанционной форм обучения*
*по инженерно-техническим направлениям подготовки бакалавров*

**г. Набережные Челны**
**2019**

**Математика (в трёх частях): Часть 2.** *Учебно-методический комплекс для студентов заочной и дистанционной форм обучения по инженерно-техническим направлениям подготовки бакалавров.* /Составитель: ***Углов А.Н.*** -Набережные Челны: Изд-во: НЧИ К(П)ФУ, 2019, 75 с.

## 1.Цель и задачи дисциплины, её место в учебном процессе.

**Цель** преподавания дисциплины «Математика» - формирование системы базовых знаний по данной дисциплине, которая позволит будущим специалистам решать в своей повседневной деятельности актуальные задачи науки и практики, понимать написанные на современном научном уровне результаты других исследований и тем самым совершенствовать свои профессиональные навыки.

Основными **задачами дисциплины** являются:
- ознакомление обучающихся с фундаментальными понятиями и фактами математики, необходимыми для применения современных математических методов при решении задач науки, техники, экономики и управления;
-привлечение внимания студентов к возможностям использования математических методов при исследовании различных задач;
-развитие навыков к математическому моделированию прикладных задач;
-воспитание абстрактного мышления и умения строго обосновать соответствующие факты;
-развитие логического и алгоритмического мышления;
-овладение классическим математическим аппаратом для дальнейшего использования в приложениях.

Данная дисциплина является основой при изучении дисциплин, использующих современные математические методы. В свою очередь, для изучения данной дисциплины необходимо знание элементарной математики.

В результате изучения данной дисциплины студент должен:
**- знать** теоретические основы линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчислений, дифференциальных уравнений, числовых и функциональных рядов, теории вероятностей и математической статистики;
- **уметь** использовать полученные знания для решения практических задач.

Изучение дисциплины предусматривает проведение лекционных, практических занятий и самостоятельную работу студентов. В лекциях излагается содержание тем программы с учетом требований, установленных для специалиста в квалификационной характеристике. Практические занятия проводятся с целью закрепления теоретических основ курса, получения практических навыков решения математических задач. Контроль знаний осуществляется с помощью контрольных работ, зачётов и экзаменов.

# 2. Содержание и структура дисциплины (часть 2).

## 2.1 Содержание дисциплины (наименование тем).

**Раздел. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.**

**Тема. Множества. Числовые множества. Функция.**

Множества и операции над ними. Счётные и несчётные множества. Множества чисел. Действительные числа, модуль числа и его свойства. Числовые промежутки. Окрестность точки. Понятие функции. Способы задания функции. График функции. Основные элементы поведения функции. Основные элементарные функции, их свойства и графики. Обратная и сложная функции. Элементарные функции, их классификация.

**Тема. Числовые последовательности. Предел последовательности.**

Понятие числовой последовательности. Предел последовательности, его геометрический смысл. Бесконечно малые и большие последовательности. Монотонная последовательность, признак её сходимости. Число $e$.

**Тема. Предел функции.**

Определения предела функции при $x \to x_0$, при $x \to \infty$. Геометрический смысл предела. Односторонние пределы. Бесконечно большие и малые функции, их свойства. Неопределённые выражения. Основные теоремы о пределах функций. Предельный переход в неравенствах. Первый и второй замечательные пределы. Эквивалентные бесконечно малые функции, их свойства и применение при вычислении пределов.

**Тема. Непрерывность функции. Точки разрыва.**

Определения непрерывности функции в точке. Понятие непрерывности справа и слева. Арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность сложной функции. Непрерывность элементарных функций. Точки разрыва функции, их классификация. Непрерывность функции на множестве. Основные свойства функций, непрерывных на отрезке.

**Раздел. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.**

**Тема. Производные и дифференциалы функции одной переменной.**

Приращение функции. Определение производной, её геометрический смысл. Понятие дифференцируемости функции в точке. Связь между дифференцируемостью, существованием конечной производной и непрерывностью функции. Дифференциал функции. Простейшие правила дифференцирования (постоянной; суммы, разности, произведения и частного функций). Дифференцирование обратной и сложной функции. Логарифмическая производная. Производная степенно-показательной функции. Производные и дифференциалы высших порядков. Дифференцирование функции, заданной неявно и параметрически. Применение дифференциала в приближённых вычислениях. Уравнения касательной и нормали.

**Тема. Основные теоремы о дифференцируемых функциях и их приложения.**

Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши, их следствия. Правило Лопиталя, его применение для раскрытия неопределённостей. Формулы Тейлора и Маклорена, их применение в приближённых вычислениях. Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций.

**Тема. Исследование функций с помощью производных, построение их графиков.**

Схема проведения полного исследования функции. Возрастание и убывание функции, нахождение участков монотонности функции. Стационарные и критические точки функции. Локальные экстремумы функции, условия их существования и нахождение. Глобальные экстремумы функции на отрезке, их нахождение. Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба, условия их существования и нахождение. Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции, условия их существования и нахождение. Построение графика функции.

**Раздел. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.**

**Тема. Основные понятия о функции нескольких переменных.**

Понятия $n$-мерной точки, $n$-мерного арифметического пространства $R^n$. Множества точек в $R^n$. Окрестность точки. Классификация точек. Открытые и замкнутые, связные, выпуклые множества точек. Понятие функции $n$ переменных. Область определения и график функции. Линии и поверхности уровня. Понятия предела и непрерывности функции нескольких переменных (ФНП). Свойства ФНП, непрерывных в ограниченной замкнутой области.

**Тема. Производные и дифференциалы функции нескольких переменных, их приложения.**

Полное и частные приращения функции. Частные производные первого и высших порядков, их вычисление. Понятие дифференцируемости ФНП в точке, условия дифференцируемости. Независимость смешанных производных от порядка дифференцирования. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Полные дифференциалы ФНП первого и высших порядков, их вычисление. Применение первого дифференциала в приближённых вычислениях. Дифференцирование сложной функции. Дифференцирование неявной функции.

**Тема. Экстремумы функций нескольких переменных.**

Стационарные и критические точки. Локальные экстремумы ФНП, условия их существования и нахождение. Условный экстремум. Метод неопределённых множителей Лагранжа. Глобальные экстремумы ФНП в ограниченной замкнутой области, их нахождение.

**Тема. Элементы теории поля.**

Понятия скалярного и векторного поля. Производная по направлению и градиент скалярного поля. Дивергенция и ротор векторного поля.

## 2.2. Практические занятия, их содержание.

**Тема. Функции. Предел функции. Непрерывность функции.**

Область определения, чётность и нечётность, график функции. Вычисление предела функции. Непрерывность и точки разрыва функции.

**Тема. Производные и дифференциалы функции одной переменной, их приложения.**

Производная функции и её нахождение. Уравнение касательной и нормали. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Правило Лопиталя. Проведение полного исследования функции, построение её графика.

**Тема. Функция нескольких переменных (ФНП). Производные и дифференциалы ФНП, их приложения.**

Область определения, частные производные и дифференциалы ФНП. Приближённые вычисления ФНП с помощью первого дифференциала. Нахождение локальных экстремумов, наименьших и наибольших значений ФНП. Производная по направлению и градиент.

## 2.3. Виды самостоятельной работы студентов.

Самостоятельная работа студентов предполагает изучение теоретического материала и выполнение контрольной работы.

## 3. Рекомендуемая литература.

### Основная литература:


1. Владимирский Б.М., Горстко А.Б., Ерусалимский Я.М. Математика. Общий курс: Учебник для бакалавров. –СПб.: Изд-во «Лань», 2008. -960с. ISBN: 978-5-8114-0445-2 (http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=634).
2. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике: учебное пособие. –СПб.: Лань, 2009. -640с.
3. Шипачев В.С. Высшая математика. Учебник для вузов. -М. Высшая школа, 2005. -479 с.
4. Шипачёв В.С. Задачи по высшей математике: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2005. -304с.
5. Сборник задач по математике для вузов. Учеб. пособие для студентов вузов. /Абрамова В.В., Бикчурина Л.Ж., Валеева М.И. и др.; под ред.

Котляра Л.М., Углова А.Н.; 5-е изд., перераб. и доп. -Наб. Челны: ИНЭКА, 2006. – 472с. (Гриф Министерства образования и науки РФ)

## Дополнительная литература:

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособие для вузов. - 22-е изд.- СПб.: Профессия, 2007.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х частях. Учеб. пособие для вузов. Часть I: -М: Высшая школа, 2008. -304с.
3. Зимина О.В., Кириллов А.И., Сальникова Т.А. Высшая математика: решебник. -М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. -368с.
4. Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты: Учеб. пособие. - 6-е изд. - СПб.: Лань, 2005.
5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: В 2-х ч. Ч.1: Тридцать пять лекций.- 9-е изд.- М.: Айрис-пресс, 2008.
6. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: В 2-х ч. Ч.2: Тридцать пять лекций. - 6-е изд. - М.: Айрис-пресс, 2008.
7. Шипачёв В.С. Задачи по высшей математике: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2005. -304с.
8. Сборник задач по математике для втузов. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа: Учеб. пособие для втузов /Болгов В.А., Демидович Б.П., Ефимов А.В. и др. Под общ. ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. -М: Наука, 1993. – 480с.
9. Сборник задач по математике для втузов. Ч.2. Специальные разделы математического анализа: Учеб. пособие для втузов /Болгов В.А., Ефимов А.В., Каракулин А.Ф. и др. Под общ. ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. -М: Наука, 1986. – 368с.
10. Соловьёв И.А., Шевелёв В.В., Червяков А.В., Репин А.Ю. Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия, введение в математический анализ, производная и её приложения: Учебное пособие. –СПб.: Изд-во «Лань», 2009. -320с. ISBN: 978-5-8114-0751-4. (http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=374).

## 4. Методические указания по изучению дисциплины.

В процессе изучения данной дисциплины студенты должны сначала изучить теоретический материал и выработать навыки решения типовых задач, используя рекомендованную литературу, а затем выполнить по одной контрольной работе в каждом из семестров обучения (задания для контрольной работы приведены в разделе **5.1**).

При выполнении контрольной работы необходимо придерживаться указанных ниже правил:

1. Контрольная работа должна быть выполнена студентом в отдельной ученической тетради с полями не менее 3 см для замечаний преподавателя.
2. На обложке тетради указываются: название дисциплины; номер варианта и номера решаемых задач; Ф.И.О. студента, выполнившего работу, его номер группы и номер зачетной книжки; Ф.И.О. преподавателя, проверяющего работу (образец оформления обложки приведён в *Приложении 6.4*).
3. Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы.
4. Номера решаемых задач выбираются из *ТАБЛИЦЫ НОМЕРОВ ВЫПОЛНЯЕМЫХ ЗАДАНИЙ (Приложение 6.5).*
5. Условия задач переписываются полностью, без сокращения слов, после чего приводится их подробное решение (чертежи можно выполнять аккуратно от руки). В конце решения приводится ответ.
6. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по порядку номеров. Контрольные работы, содержащие не все задания, а также задачи не своего варианта, не зачитываются.
7. Если в работе имеются ошибки, студент должен выполнить все требования преподавателя, изложенные в рецензии, и сдать работу с исправлениями на повторную проверку.
8. Никакие исправления в тексте уже проверенной работы не допускаются, все исправления записываются после рецензии преподавателя с указанием номера задачи, к которой относятся дополнения и исправления.
9. Работа может быть выполнена заново в случае выявления серьёзных замечаний и ошибок.
10. В конце тетради рекомендуется оставлять несколько чистых страниц для дополнений и исправлений.

После проверки контрольная работа предъявляется к защите. На защите студент должен показать свое умение решать задачи, подобные тем, что имеются в его контрольной работе.

Образец решения типового варианта контрольной работы приведён в *Приложении 6.1*.

## 5. Материалы для контроля знаний студентов.

Итоговой формой контроля знаний является экзамен (зачёт) в конце семестра обучения. На экзамене студент должен показать знание теоретических основ курса в объёме вопросов, приведённых в разделе **5.2** и умение решать задачи, подобные тем, что имеются в его контрольной работе.

## 5.1. Задания для контрольной работы.

**1 – 10.** Для указанной функции $y = f(x)$ требуется:

**а)** найти естественную область определения функции**;**

**б)** установить чётность (нечётность) функции.

**1. а)** $y=\sqrt{3-x}+arc\sin(3-2x)$ **б)** $y=2x\cdot\sin^2 x-3x^3$

**2. а)** $y=\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{\lg(1-x)}$ **б)** $y=\dfrac{\sin 2x}{x^2}$

**3. а)** $y=\sqrt{x^2-3x+2}$ **б)** $y=\dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$

**4. а)** $y=\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ **б)** $y=\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

**5. а)** $y=\arccos(x-3)+\lg(4-x)$ **б)** $y=x\cdot\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$

**6. а)** $y=\sqrt{\dfrac{x}{2x+1}}$ **б)** $y=\dfrac{\sin 3x}{2-\cos 4x}$

**7. а)** $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-5x}}$ **б)** $y=|x+1|-|x-1|$

**8. а)** $y=\lg(x^2+2x-8)$ **б)** $y=\sin^2 x+\cos^3 x$

**9. а)** $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x-2}-\lg(3-2x)$ **б)** $y=\dfrac{x}{1-x}$

**10. а)** $y=2^{1/x}+\arcsin\left(\dfrac{x+3}{2}\right)$ **б)** $y=\dfrac{arctgx}{x^2+1}$

**11-21.** Вычислить пределы (не пользуясь правилом Лопиталя):

**11. а)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+1}{x^2+4}$ **б)** $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+5x+3}{\sqrt{x+2}-1}$ **в)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x+\sin 4x}{3x}$

**г)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-5}\right)^{4x}$ **д)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!+n!}{(n+2)!}$

**12. а)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4}{x^4+3x+1}$ **б)** $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{4x-3}-3}$ **в)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{2x}$

**г)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+7}{x-9}\right)^{2x}$ **д)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!+(n+2)!}{n!-(n+3)!}$

**13. а)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(x+1)(x+2)}{x^3+5}$ **б)** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{6x+4}-4}$ **в)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x+\sin 3x}{tg 2x}$

**г)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{5x}$ **д)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+(n+1)!}{(n-1)!+2\cdot(n+1)!}$

**14. а)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+6x+5}{3x^2+7}$ **б)** $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{x^2-9x+14}{\sqrt{2x+11}-5}$ **в)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 2x}{tg 5x}$

**г)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+4}{5x-1}\right)^{2x}$ **д)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+2\cdot(n-1)!}{(n+1)!}$

**15. а)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+3x+1}{3x^4+5}$ **б)** $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{4x}-x}{x^2-16}$ **в)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x}{arctg^2 2x}$

**г)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+4}\right)^{3x}$ **д)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!+(n+2)!}{(n+3)!}$

**16. а)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+6}{3x^3+7x-1}$ **б)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{9-x}-3}{x^2+x}$ **в)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 4x}{tg^2 6x}$

**г)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x+7}\right)^{x-4}$ **д)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!+n!}{(n+1)!-n!}$

**17. а)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+6x^2+3x}{20x^2+70}$ **б)** $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x^2-11x+5}{\sqrt{2x-1}-3}$ **в)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x\cdot\arcsin x}$

**г)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+1}{5x+6}\right)^{4x-1}$ **д)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot n!+(n+1)!}{3\cdot(n+1)!}$

**18. а)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x+5}{3x^2+7x+2}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{2x-8}-2}{x^2-7x+6}$ **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{1-\cos 4x}$

**г)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{3x}$ **д)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)!+n!}{2\cdot n!}$

**19. а)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x^2}{3x^2+5x+1}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x-10}{\sqrt{5x}\quad-5}$ **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\cdot\sin 4x}$

**г)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x+8}\right)^{5x}$ **д)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot(n-1)!+n!}{(n+1)!}$

**20. а)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-5x^2}{2x^2+3x+3}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-3x+2}$ **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot arctg4x}{\cos 2x-\cos 4x}$

**г)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x+1}{6x-2}\right)^{2x}$ **д)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot(n+1)!}{n!+(n+1)!}$

**21-30.** Для указанной функции $y=f(x)$ требуется: **а)** выяснить при каких значениях параметра $a$ функция будет непрерывной**; б)** найти точки разрыва функции и исследовать их характер**.** Построить график функции**.**

**21. а)** $y=\begin{cases}x^2+2x-a, & x<0\\ \cos x, & x\ge 0\end{cases}$ **б)** $y=\begin{cases}1/x & x\le 1\\ x^2 & x>1\end{cases}$

**22. а)** $y=\begin{cases}a-x, & x<4\\ \sqrt{x}, & x\ge 4\end{cases}$ **б)** $y=\begin{cases}x^2+1 & x<0\\ 1-x & 0\le x\le 2\\ 2 & x>2\end{cases}$

**23. а)** $y=\begin{cases}ax-2, & x<1\\ \ln x, & x\ge 1\end{cases}$ **б)** $y=\begin{cases}1/x & x<0\\ x & 0\le x\le 2\\ 3 & x>2\end{cases}$

**24. а)** $y=\begin{cases}e^x & x\le 0\\ 3x+a & x>0\end{cases}$ **б)** $y=\begin{cases}x^2 & x<1\\ 1/x & x\ge 1\end{cases}$

**25. а)** $y=\begin{cases}x-2, & x<1\\ ax^2-2, & x\ge 1\end{cases}$ **б)** $y=\begin{cases}1/x & x<0\\ -\sqrt{x} & 0\le x\le 1\\ x^2 & x>1\end{cases}$

**26. а)** $y=\begin{cases} x^2, & x<1 \\ \sqrt{x+a}, & x\ge 1 \end{cases}$ **б)** $y=\begin{cases} 1/x & x<1 \\ \ln x & x\ge 1 \end{cases}$

**27. а)** $y=\begin{cases} 2/x, & x<-1 \\ x-a, & x\ge -1 \end{cases}$ **б)** $y=\begin{cases} e^x & x<0 \\ 2x-1 & x\ge 0 \end{cases}$

**28. а)** $y=\begin{cases} x^3+a, & x<0 \\ arctgx, & x\ge 0 \end{cases}$ **б)** $y=\begin{cases} x+2 & x\le -2 \\ 2-x & -2<x\le 0 \\ x^2+2 & x>0 \end{cases}$

**29. а)** $y=\begin{cases} (x-1)\cdot(x-a), & x<0 \\ 2x+1, & x\ge 0 \end{cases}$ **б)** $y=\begin{cases} 1/x & x<1 \\ \sqrt{x} & x\ge 1 \end{cases}$

**30. а)** $y=\begin{cases} \sin x, & x<0 \\ 3x-a, & x\ge 0 \end{cases}$ **б)** $y=\begin{cases} 2x & x\le 0 \\ x^2+1 & 0<x\le 1 \\ 2 & x>1 \end{cases}$

**31-40.** Найти производную $y'=f'(x)$ **:**

**31. а)** $y=\sqrt[3]{x^2+4x+5}$ **б)** $y=\dfrac{arctg^3 4x}{\ln(6x-1)}$ **в)** $\begin{cases} x=\sin 2t \\ y=\cos 2t \end{cases}$

**32. а)** $y=(2x-1)\cdot e^{-3x}$ **б)** $y=\dfrac{\sqrt{\arcsin 3x}}{\ln(5x-1)}$ **в)** $\begin{cases} x=tg3t \\ y=ctg3t \end{cases}$

**33. а)** $y=\dfrac{2-x^2}{\sqrt{3+4x^2}}$ **б)** $y=ctg3x\cdot\cos^4 7x$ **в)** $\begin{cases} x=\dfrac{2t-1}{t} \\ y=\sqrt{t^3} \end{cases}$

**34. а)** $y=x^2\cdot\sqrt{16-4x}$ **б)** $y=\dfrac{\cos^3 4x}{\sin 4x+1}$ **в)** $\begin{cases} x=\ln^2 4t \\ y=\sqrt{\ln t} \end{cases}$

**35. а)** $y=\dfrac{2x+3}{\sqrt[4]{3x+5}}$ **б)** $y=(\cos 4x+2)\cdot\sin 3x$ **в)** $\begin{cases} x=\sin 3t \\ y=ctg3t \end{cases}$

**36. а)** $y=x^2\cdot\ln(3x+1)$ **б)** $y=\dfrac{e^{-2x}+3}{x^3-4x+1}$ **в)** $\begin{cases} x=tg^2 t \\ y=\sin 2t \end{cases}$

**37. а)** $y=(2x+1)^3\cdot arctg4x$ **б)** $y=\dfrac{\cos^3 4x}{\ln(5x+1)}$ **в)** $\begin{cases} x=tg4t \\ y=ctg2t \end{cases}$

**38. а)** $y=\dfrac{\sqrt{4x-2}}{2x+3}$ **б)** $y=e^{-3x^2}\cdot(3x-2)$ **в)** $\begin{cases}x=3\sin 2t\\ y=\cos 4t\end{cases}$

**39. а)** $y=e^{-4x}\cdot\ln(2x-4)$ **б)** $y=\dfrac{\sin^3 4x}{\sqrt[4]{5x-1}}$ **в)** $\begin{cases}x=\arcsin 2t\\ y=arctg2t\end{cases}$

**40. а)** $y=3\sin^2 4x\cdot tg3x$ **б)** $y=\dfrac{\arcsin 4x}{\sqrt[3]{arctg2x}}$ **в)** $\begin{cases}x=\ln 5t\\ y=\lg 3t\end{cases}$

**41-50.** Вычислить пределы, используя правило Лопиталя.

**41. а)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+5x+3}{x^2-4x-5}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{x^2}$ **в)** $\lim\limits_{x\to 0}(x^2\cdot e^{1/x^2})$

**42. а)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-2x-3}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot ctgx-1}{x^2}$ **в)** $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot(e^{2/x}-e^{1/x})$

**43. а)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+6x-16}{3x^2-5x-2}$ **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2\ln x}{x}$ **в)** $\lim\limits_{x\to +0}(tgx\cdot\ln\sin x)$

**44. а)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2+4x-7}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x^2)}{x^4}$ **в)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$

**45. а)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-2^{\sin x}}{x^2}$ **в)** $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot ctg8x$

**46. а)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{2x^2+5x-7}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x-\sin^2 x}{x^2}$ **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctgx-\dfrac{1}{x}\right)$

**47. а)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2+4x-7}$ **б)** $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln(\sin x)}{\ln(\sin 2x)}$ **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\cdot\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

**48. а)** $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2x^2-13x-7}{x^2-9x+14}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{\ln(\cos 2x)}$ **в)** $\lim\limits_{x\to +0}\left(tgx\cdot\ln\dfrac{1}{x}\right)$

**49. а)** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{x^2-7x+10}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$ **в)** $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$

**50. а)** $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-9x-18}{x^2-7x+6}$ **б)** $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1-tgx}{\cos 2x}$ **в)** $\lim\limits_{x\to 1-0}(x-1)\cdot\ln(1-x)$

**51-60.** Для указанной функции $y=f(x)$ требуется:

**а)** провести полное исследование функции и построить её график;

**б)** найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[a, b]$.
**в)** составить уравнение касательной к графику функции в точке $x_0$.

**51. а)** $y = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 2}$ **б)** $y = x^3 - 3x^2 + 4$, $a = 0, b = 4$

**в)** $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$, $x_0 = 1$

**52. а)** $y = \dfrac{3x^4 + 1}{x^3}$ **б)** $y = x^2 + \dfrac{16}{x} - 16$, $a = 1, b = 4$

**в)** $y = x - x^3$, $x_0 = -1$

**53. а)** $y = \dfrac{4x - 12}{(x-2)^2}$ **б)** $y = 4 - x - \dfrac{4}{x^2}$, $a = 1, b = 4$

**в)** $y = 2x^2 + 3x - 1$, $x_0 = -2$

**54. а)** $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ **б)** $y = 2\sqrt{x} - x$, $a = 0, b = 4$

**в)** $y = x + \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 1$

**55. а)** $y = x \cdot \sqrt{x+3}$ **б)** $y = x^3 - 3x^2 + 6$, $a = 1, b = 4$

**в)** $y = \dfrac{1}{x^3 + 1}$, $x_0 = 0$

**56. а)** $y = \dfrac{x^3}{x^4 - 1}$ **б)** $y = 1 - \sqrt[3]{x^2 - 2x}$, $a = 0, b = 2$

**в)** $y = \dfrac{1 + 3x^2}{3 + x^2}$, $x_0 = 1$

**57. а)** $y = \dfrac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}$ **б)** $y = x^3 - 6x^2 + 6$, $a = 2, b = 4$

**в)** $y = \dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$, $x_0 = 4$

**58. а)** $y = \dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$ **б)** $y = x^3 - 3x^2 + 5$, $a = 1, b = 3$

**в)** $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x^2}$, $x_0=2$

**59. а)** $y=\dfrac{x}{(1-x^2)^2}$ **б)** $y=\dfrac{10x+10}{x^2+2x+2}$, $a=-1, b=2$

**в)** $y=\sqrt{4-2x^2}$, $x_0=1$

**60. а)** $y=\dfrac{8}{x\cdot\sqrt{x^2-4}}$ **б)** $y=2x-3\sqrt[3]{x^2}$ $a=-1, b=1$

**в)** $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$, $x_0=1$

**61 – 70.** Для указанной функции $z=f(x,y)$ требуется: **а)** найти дифференциал $dz$ и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$; **б)** вычислить приближённо (с помощью первого дифференциала) значение функции $z=f(x,y)$ в точке $M(x,y)$.

**61.** $z=x^2e^y$, $M(1.94, 0.12)$ **62.** $z=\sqrt{x^2+\ln y}$, $M(1.04, 1.02)$

**63.** $z=\sqrt{5e^x+y^2}$, $M(0.06, 2.03)$ **64.** $z=\ln(x^2+y^3)$, $M(0.99, 0.09)$

**65.** $z=\sqrt{\ln x+y^2}$, $M(1.07, 1.04)$ **66.** $z=\sqrt{x^3+y^2}$, $M(2.03, 0.98)$

**67.** $z=\ln(x^3+y^3)$, $M(0.08, 0.97)$ **68.** $z=\sqrt{5e^y+x^2}$, $M(2.03, 0.02)$

**69.** $z=x\sqrt{1+y^3}$, $M(2.01, 2.05)$ **70.** $z=\ln(x^2+y^2)$, $M(1.05, 0.08)$

**71 – 80.** Найти локальные экстремумы функции $z=f(x,y)$:

**71.** $z=x^2+xy+y^2-12x-3y$ **72.** $z=xy\cdot(1-x-y)$, $(x>0,\ y>0)$

**73.** $z=3+2x-y-x^2+xy-y^2$ **74.** $z=xy^2\cdot(12-x-y)$, $(x>0,\ y>0)$

**75.** $z=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$, $(x>0,\ y>0)$ **76.** $z=\dfrac{8}{x}+\dfrac{x}{y}+y$

**77.** $z=x^3-y^3-3xy$ **78.** $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$

**79.** $z=x^2+y^2-2\ln x-18\ln y$ **80.** $z=x^2-2xy+4y^2+4$

**81–90.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в ограниченной и замкнутой области.

**81.** $z = x + y$ в круге: $x^2 + y^2 \le 4$

**82.** $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в треугольнике: $x \le 0,\ y \ge 0,\ y - x \le 1$

**83.** $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$ в прямоугольнике: $1 \le x \le 4, -3 \le y \le 2$

**84** $z = x^2 + y^2 - 4x$ в прямоугольнике: $-2 \le x \le 1, -1 \le y \le 3$

**85.** $z = 1 + x + 2y$ в треугольнике: $x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 1$

**86.** $z = xy \cdot (6 - x - y)$ в треугольнике: $x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 12$

**87** $z = 3 + 2xy$ в круге: $x^2 + y^2 \le 1$

**88** $z = xy + x + y$ в прямоугольнике: $-2 \le x \le 2, -2 \le y \le 4$

**89.** $z = x - 2y + 5$ в треугольнике: $x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 1$

**90.** $z = x^2 - xy + y$ в прямоугольнике: $-2 \le x \le 2, -3 \le y \le 3$

**91 – 100.** Найти: **а)** производную $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ по направлению вектора $\vec{l}$; **б)** градиент функции $grad\, u$ и его величину $|grad\, u|$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

**91.** $u = x + \ln(z^2 + y^2)$, $\vec{l} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $M_0(2,1,1)$

**92.** $u = y\ln(1 + x^2) - arctgz$, $\vec{l} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $M_0(0,1,1)$

**93.** $u = \ln(3 - x^2) + xy^2 z$, $\vec{l} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $M_0(1,3,2)$

**94.** $u = xy - \dfrac{x}{z}$, $\vec{l} = 5\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $M_0(-4,3,-1)$

**95.** $u = z^2 + 2arctg(x - y)$, $\vec{l} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $M_0(1,2,-1)$

**96.** $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2}$, $\vec{l} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $M_0(1,1,0)$

**97.** $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$, $\vec{l} = -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $M_0(1,-3,4)$

**98.** $u = x^2 y^2 z - \ln(z - 1)$, $\vec{l} = 5\vec{i} - 6\vec{j} + 2\sqrt{5}\vec{k}$, $M_0(1,1,2)$

**99.** $u = \ln(x^2 + y^2) + xyz$, $\vec{l} = \vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$, $M_0(1,-1,2)$

**100.** $u=(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$, $\vec{l}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $M_0(1,1,1)$

## 5.2. Вопросы к экзамену (зачёту).

**Раздел. Введение в анализ.**

1. Понятие множества. Подмножество. Универсальное множество. Способы задания множеств. Равенство и эквивалентность множеств.
2. Пересечение, объединение и разность множеств. Дополнение множества. Диаграммы Эйлера-Венна.
3. Множества чисел. Счётные и несчётные множества. Множество действительных чисел, его геометрическая интерпретация и свойства. Модуль действительного числа и его свойства.
4. Числовые множества. Верхняя и нижняя грани, наибольший и наименьший элементы числовых множеств. Числовые промежутки. Окрестность конечной точки и бесконечности.
5. Понятие функции. Основные способы задания функции. Естественная область определения функции. Явная, неявная и параметрическая формы аналитического задания функции. График функции.
6. Основные элементы поведения функции (чётность, нечётность, периодичность, ограниченность, монотонность).
7. Основные элементарные функции (степенные: $x$, $x^2$, $x^3$, $x^{-1}$, $\sqrt{x}$; тригонометрические: $\sin x$, $\cos x$, $tgx$, $ctgx$; обратные тригонометрические: $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$; показательная $a^x$, логарифмическая $\log_a x$), их свойства и графики.
8. Понятие обратной и сложной функций. Элементарные функции, их классификация. Преобразование графиков элементарных функций.
9. Простейшие элементарные функции: $y=ax+b$, $y=ax^2+bx+c$, $y=(ax+b)/(cx+d)$, их свойства и графики.
10. Понятие числовой последовательности, арифметические операции над ними. Ограниченные и неограниченные, бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, их свойства.
11. Предел числовой последовательности и его геометрический смысл. Сходящиеся и расходящиеся числовые последовательности. Свойства сходящихся последовательностей.
12. Монотонная последовательность и признак её сходимости. Число $e$. Задача о непрерывном начислении процентов по банковским вкладам.

13. Понятие предела функции в конечной точке и на бесконечности, их геометрический смысл. Односторонние пределы. Условия существования предела функции в конечной точке.
14. Бесконечно малые и большие функции, их основные свойства и взаимосвязь. Примеры бесконечно малых и больших функций.
15. Функции, ограниченные при $x \to a$. Взаимосвязь между функциями, имеющими предел и ограниченными при $x \to a$.
16. Основные теоремы о пределах функций (о пределе постоянной, суммы, разности, произведения и частного функций; о пределе сложной и элементарной функций). Предельный переход в неравенствах.
17. Первый и второй замечательные пределы, их следствия и применение при вычислении пределов.
18. Эквивалентные бесконечно малые функции, их основные свойства и применение при вычислении пределов.
19. Определения непрерывности функции в точке. Понятие непрерывности справа и слева. Условия непрерывности функции в точке. Арифметические операции над непрерывными функциями.
20. Непрерывность сложной функции. Непрерывность элементарных функций. Условие существования непрерывной обратной функции.
21. Понятие непрерывности на отрезке. Свойства функций непрерывных на отрезке (об ограниченности функции, об обращении функции в нуль, о наибольшем и наименьшем значениях функции).
22. Точки разрыва функции, их классификация и нахождение.

**Раздел. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.**

23. Приращение функции. Определение производной. Правая и левая производные. Условия существования конечной производной в точке. Понятие дифференцируемости функции в точке.
24. Геометрический смысл производной. Касательная и нормаль к кривой в данной точке, их уравнения.
25. Непосредственное нахождение производной. Простейшие правила дифференцирования (постоянной, суммы, разности, произведения и частного функций).
26. Дифференцирование обратной функции. Дифференцирование сложной функции.
27. Дифференцирование функций, заданных параметрически.
28. Логарифмическая производная, её применение для нахождения производной степенно-показательной функции.
29. Дифференциал функции. Правила вычисления дифференциалов. Применение дифференциала в приближённых вычислениях.
30. Производные и дифференциалы высших порядков, их нахождение.

31. Теорема Ферма. Геометрический смысл теоремы.
32. Теорема Ролля. Геометрический смысл теоремы.
33. Теорема Лагранжа. Геометрический смысл теоремы. Формула конечных приращений Лагранжа.
34. Теорема Коши.
35. Формулы Тейлора и Маклорена, их применение в приближённых вычислениях.
36. Правило Лопиталя и его применение для раскрытия неопределённостей: $0/0$, $\infty/\infty$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, $0^0$, $\infty^0$, $1^\infty$.
37. Достаточный признак монотонности функции. Стационарные и критические точки. Нахождение интервалов монотонности функции.
38. Точки локального экстремума (максимума и минимума) и локальные экстремумы функции. Необходимое и достаточные условия существования локального экстремума функции.
39. Глобальные экстремумы (наибольшее и наименьшее значения) функции на отрезке, их нахождение.
40. Понятия выпуклости и вогнутости функции. Достаточный признак выпуклости (вогнутости) функции на интервале. Нахождение интервалов выпуклости и вогнутости функции.
41. Точка перегиба графика функции, условия её существования и нахождение.
42. Понятие асимптоты графика функции. Вертикальные и наклонные асимптоты, условия их существования и нахождение.

**Раздел. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных.**

43. N-мерная точка, n-мерное арифметическое пространство $R^n$. Расстояние в $R^n$. N-мерный шар. Окрестность точки в $R^n$. Классификация точек (предельные, внутренние, граничные). Множества точек в $R^n$ (открытые, замкнутые, ограниченные, связные, выпуклые).
44. Понятие функции 2-х переменных, n-переменных. Естественная область определения ФНП, график функции 2-х переменных, линии и поверхности уровня.
45. Частные и полное приращения ФНП. Понятия предела и непрерывности ФНП. Свойства функций непрерывных в ограниченной и замкнутой области.
46. Частные производные первого и высших порядков, их нахождение.
47. Понятие дифференцируемости ФНП в точке. Независимость смешанных производных от порядка дифференцирования.

48. Геометрический смысл дифференцируемости ФНП в точке. Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в данной точке.
49. Дифференциалы ФНП первого и высших порядков, их нахождение. Применение первого дифференциала в приближённых вычислениях.
50. Производная по направлению и градиент, связь между ними.
51. Неявная ФНП, правила вычисления её производных.
52. Точки локального экстремума (максимума и минимума) и локальные экстремумы ФНП. Стационарные и критические точки. Необходимое и достаточное условия локального экстремума ФНП.
53. Условный экстремум ФНП. Функция Лагранжа. Нахождение условного экстремума методом неопределённых множителей Лагранжа.
54. Глобальные экстремумы (наибольшее и наименьшее значения) ФНП в ограниченной и замкнутой области, их нахождение.
55. Понятия скалярного и векторного поля. Градиент скалярного поля. Дивергенция и ротор векторного поля.

## 6. Приложения.
## 6.1. Образец решения контрольных задач типового варианта.

**1-10.** Требуется:

**а)** найти естественную область определения функции $y = e^{\sqrt{x}} \ln(2-3x)$ **;**

**б)** установить чётность (нечётность) функции $y = \sqrt{x^4 - 13x^2 + 36}$.

**Решение. а)** Естественную область определения находим как множество $D(y)$ всех значений аргумента $x$ функции, для которых формула $y = e^{\sqrt{x}} \ln(2-3x)$ имеет смысл: $D(y) = \left\{ x \in R \middle| \begin{cases} x \geq 0 \\ 2-3x > 0 \end{cases} \right\}$. Решив (на числовой прямой) систему неравенств $\begin{cases} x \geq 0 \\ 2-3x > 0 \end{cases}$, устанавливаем, что геометрическим образом множества $D(y)$ является промежуток $[0, 2/3)$.

**б)** Находим сначала естественную область определения функции $y = \sqrt{x^4 - 13x^2 + 36}$**:** $D(y) = \{x \in R \mid x^4 - 13x^2 + 36 \geq 0\}$. Решив (на числовой прямой) неравенство $x^4 - 13x^2 + 36 = (x+3)(x+2)(x-2)(x-3) \geq 0$, устанавливаем, что геометрическим образом множества $D(y)$ является объединение промежутков $(-\infty, -3) \cup [-2, 2] \cup (3, +\infty)$.

Так как область $D(y)$ является симметричной относительно точки $x = 0$, то проверяем выполнение для всех $x \in D(y)$ условий: $f(-x) = f(x)$ или $f(-x) = -f(x)$, учитывая чётность и нечётность основных элементарных функций, входящих в аналитическое выражение $f(x)$.

| |
|---|
| *Если область $D(y)$ не симметрична относительно точки $x = 0$, то $f(x)$ на этом множестве является функцией общего вида.* |

Для этого находим $f(-x) = \sqrt{(-x)^4 - 13(-x)^2 + 36} = \sqrt{x^4 - 13x^2 + 36}$. Поскольку $f(-x) = f(x)$ для всех $x \in D(y) = (-\infty, -3) \cup [-2, 2] \cup (3, +\infty)$, то функция $y = \sqrt{x^4 - 13x^2 + 36}$ является чётной.

**Ответ**: **а)** $D(y) = [0, 2/3)$, $y = e^{\sqrt{x}} \ln(2-3x)$;

**б)** функция $y = \sqrt{x^4 - 13x^2 + 36}$ - чётная.

**11-21.** Вычислить пределы (не пользуясь правилом Лопиталя):

**а)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-12x+1}{x^2+2}$ **б)** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$ **в)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg3x-\sin3x}{6x^3}$ **г)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x}$ **д)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!-(n+2)!}{(n+3)!+(n+1)!}$

*Вычисление предела* $\lim\limits_{x\to a}f(x)$*, где* $a=x_0,\infty$*, начинают всегда с подстановки в* $f(x)$ *предельного значения её аргумента* $x$*. В результате могут получиться неопределённости* $0/0$, $\infty/\infty$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, $0^0$, $1^\infty$, $\infty^0$*, которые раскрывают тождественными преобразованиями* $f(x)$ *такими, чтобы преобразованное выражение получилось определённым. При вычислении пределов используют свойства конечных пределов и бесконечно больших функций, а также следующие известные пределы:* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n\right)=\infty$,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}=0,\qquad \lim_{n\to\infty}n!=\infty\qquad (n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n),$$

$$\lim_{\substack{x\to a\\ \alpha(x)\to0}}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1,\qquad \lim_{\substack{x\to a\\ \alpha(x)\to0}}\frac{tg\alpha(x)}{\alpha(x)}=1,\qquad \lim_{\substack{x\to a\\ \alpha(x)\to0}}\frac{\arcsin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1,$$

$$\lim_{\substack{x\to a\\ \alpha(x)\to0}}\frac{arctg\alpha(x)}{\alpha(x)}=1,\quad \lim_{\substack{x\to a\\ \alpha(x)\to0}}\left(1+\alpha(x)\right)^{1/\alpha(x)}=e.$$

**Решение. а)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-12x+1}{x^2+2}=?$ При подстановке вместо переменной $x$ её предельного значения $\infty$ получим неопределённость $[\infty/\infty]$. Для её раскрытия сначала разделим числитель и знаменатель дроби на $x^3$ (старшую степень переменной $x$ в числителе и знаменателе), после чего используем свойства конечных пределов и бесконечно больших функций. Получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-12x+1}{x^2+2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(3-\dfrac{12}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{12}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3-0+0}{0+0}=\infty.$$

**б)** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}=?$ При подстановке вместо переменной $x$ её предельного значения $x_0=-2$ получим неопределённость $[0/0]$. Для её раскрытия выделим в числителе и знаменателе дроби общий множитель вида $(x-x_0)^{\alpha}$, где $\alpha\in R$ - некоторое число, т.е. множитель $(x+2)^{\alpha}$. Затем сократим на него числитель и знаменатель дроби, после чего используем свойства пределов.

***1)** В квадратном трёхчлене $ax^2+bx+c$ множитель выделяют разложением квадратного трёхчлена по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где* $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. ***2)** В выражении $(\sqrt{ax+b}-\sqrt{cx+d}\,)$ множитель выделяют следующим способом:* $\sqrt{ax+b}-\sqrt{cx+d}=$

$$=\frac{(\sqrt{ax+b}-\sqrt{cx+d}\,)(\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}\,)}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}}=\left(x-\frac{d-b}{a-c}\right)\frac{(a-c)}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}}.$$

В результате получим $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$$\left[\begin{array}{c}\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}=\dfrac{(\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6})(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6})}{\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6}}=(x+2)\dfrac{(-2)}{\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6}}\\ \\ x^2-x-6=(x+2)(x-3)\end{array}\right]$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(-2)}{(x+2)(x-3)(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6})}=\lim_{x\to -2}\frac{-2}{(x-3)(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6})}=\frac{1}{10}.$$

**в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x-\sin 3x}{6x^3}=?$ При подстановке вместо переменной $x$ её предельного значения $0$ получим неопределённость $[0/0]$. Выделим в числителе множители вида $\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}$, где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to 0$ и используем свойства пределов. Получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg3x-\sin 3x}{6x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 3x}{\cos 3x}-\sin 3x}{6x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x(1-\cos 3x)}{6x^3\cos 3x}=$$

*Для раскрытия неопределённостей* $[0/0]$, *содержащих тригонометрические и обратные тригонометрические функции, в числителе и знаменателе дроби выделяют сначала множители вида:* $\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}$, $\dfrac{tg\alpha(x)}{\alpha(x)}$, $\dfrac{\arcsin\alpha(x)}{\alpha(x)}$, $\dfrac{arctg\alpha(x)}{\alpha(x)}$, *где* $\alpha(x)\to 0$ *при* $x\to a$, *используя формулы тригонометрии:* $\sin\alpha\pm\sin\beta = 2\sin\bigl((\alpha\pm\beta)/2\bigr)\cos\bigl((\alpha\mp\beta)/2\bigr)$, $1-\cos\alpha = 2\sin^2(\alpha/2)$, $cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\bigl((\alpha+\beta)/2\bigr)\cdot\sin\bigl((\alpha-\beta)/2\bigr)$. *После чего применяют свойства пределов, учитывая, что:* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ \alpha(x)\to 0}}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$,

$$\lim_{\substack{x\to a\\ \alpha(x)\to 0}}\frac{tg\alpha}{\alpha}=1,\quad \lim_{\substack{x\to a\\ \alpha(x)\to 0}}\frac{\arcsin\alpha}{\alpha}=1,\quad \lim_{\substack{x\to a\\ \alpha(x)\to 0}}\frac{arctg\alpha}{\alpha}=1.$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot 2\sin^2\left(\dfrac{3x}{2}\right)}{6x^3\cos 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\right)\cdot 3x\cdot 2\left(\dfrac{\sin(3x/2)}{(3x/2)}\right)^2\cdot\left(\dfrac{3x}{2}\right)^2}{6x^3\cos 3x}=$$

$$=\frac{9}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\right)\cdot\left(\dfrac{\sin(3x/2)}{(3x/2)}\right)^2}{\cos 3x}=\frac{9}{4}\cdot\frac{1\cdot 1}{1}=\frac{9}{4}.$$

**г)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x}=?$ При подстановке вместо переменной $x$ её предельного значения $\infty$ получим неопределённость $\left[1^\infty\right]$.

*Для раскрытия неопределённости* $\left[1^\infty\right]$, *возникающей при вычислении предела* $\lim\limits_{x\to a}f(x)$, *где* $f(x)=u(x)^{v(x)}$, $u(x)>0$, *сначала выражение* $f(x)$ *представляют в виде* $f(x)=\left[(1+\alpha(x))^{1/\alpha(x)}\right]^{\beta(x)}$, *где* $\alpha(x)\to 0$ *при* $x\to a$. *После чего используют свойства пределов, заменяя выражение* $(1+\alpha(x))^{1/\alpha(x)}$ *его пре-*

*дельным значением* $e$ *и учитывая, что*
$$\lim_{\substack{x\to a\\ \alpha\to 0}}\left[(1+\alpha(x))^{1/\alpha(x)}\right]^{\beta(x)}=\lim_{x\to a}e^{\beta(x)}=\begin{cases}0,\text{ если} & \beta(x)\to-\infty\\ +\infty,\text{ если} & \beta(x)\to+\infty\\ e^{b},\text{ если} & \beta(x)\to b\end{cases}.$$

Представим $\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x}$ в виде $\left[(1+\alpha(x))^{1/\alpha(x)}\right]^{\beta(x)}$, где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to\infty$ ,следующим способом: $\left[\begin{array}{l}\dfrac{3x+2}{3x-1}=1+\alpha(x)\Rightarrow\alpha(x)=\dfrac{3x+2}{3x-1}-1=\dfrac{3}{3x-1}\\ 2x=\dfrac{1}{\alpha(x)}\cdot\alpha(x)\cdot 2x\Rightarrow\beta(x)=2x\alpha(x)=\dfrac{6x}{3x-1}\end{array}\right]$

$\Rightarrow\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x}=\left[\left(1+\dfrac{3}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{3}}\right]^{\frac{6x}{3x-1}}$. Тогда учитывая, что

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{3}}=e$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x}{3x-1}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{\left(3-\dfrac{1}{x}\right)}=\dfrac{6}{3-0}=2$, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{3}}\right]^{\frac{6x}{3x-1}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{6x}{3x-1}}=e^{2}.$$

**д)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!-(n+2)!}{(n+3)!+(n+1)!}=?$

*Для вычисления предела* $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$, *где* $f(n)$ *представляет собой дробь, числитель и знаменатель которой содержат факториалы натурального числа* $n$, *поступают следующим образом. Выделяют в числителе и знаменателе в качестве общего множителя факториал меньшего натурального числа и сокращают на него. В результате получают выражение, предел которого находят рассмотренными выше способами.*

Для вычисления данного предела сначала выразим $(n+1)!$, $(n+2)!$, $(n+3)!$ через $n!$: $(n+1)!=n!\cdot(n+1)$, $(n+2)!=n!\cdot(n+1)(n+2)$,

$(n+3)! = n!\cdot(n+1)(n+2)(n+3)$, после чего сократим числитель и знаменатель на $n!$: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!-(n+2)!}{(n+3)!+(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!-n!(n+1)(n+2)}{n!(n+1)(n+2)(n+3)+n!(n+1)} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n!(1-(n+1)(n+2))}{n!(n+1)((n+2)(n+3)+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{-n^2-3n-1}{n^3+6n^2+12n+7} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

В результате получили неопределённость $[\infty/\infty]$. Для её раскрытия разделим числитель и знаменатель дроби $\dfrac{-n^2-3n-1}{n^3+6n^2+12n+7}$ на $n^3$ (старшую степень переменной $n$ числителя и знаменателя), после чего используем свойства пределов. Получим $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n^2-3n-1}{n^3+6n^2+12n+7} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(-\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(1+\frac{6}{n}+\frac{12}{n^2}+\frac{7}{n^3}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{6}{n}+\frac{12}{n^2}+\frac{7}{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{-0-0-0}{1+0+0+0} = 0.$$

**Ответ:** **а)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-12x+1}{x^2+2} = \infty$; **б)** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6} = \dfrac{1}{10}$;

**в)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg3x-\sin 3x}{6x^3} = \dfrac{9}{4}$; **г)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x} = e^2$; **д)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!-(n+2)!}{(n+3)!+(n+1)!} = 0$.

**21-30.** Для указанной функции $y = f(x)$ требуется: **а)** выяснить при каких значениях параметра $a$ функция будет непрерывной**; б)** найти точки разрыва функции и исследовать их характер**.** Построить график функции**.**

**а)** $y = \begin{cases} x+1, & x \le 1 \\ 3-ax^2, & x > 1 \end{cases}$; **б)** $y = \begin{cases} x^2, & x \le -1 \\ \dfrac{1}{x}, & -1 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$.

**Решение.**

*Точками разрыва функции* $y=f(x)=\begin{cases}\varphi_1(x), & x\le x_1\\ \varphi_2(x), & x_1<x\le x_2\\ \dots & \dots\\ \varphi_m(x), & x>x_{m-1}\end{cases}$ *являются точки разрыва функций* $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\dots,\varphi_m(x)$ *в промежутках* $(-\infty,x_1)$, $(x_1,x_2),\dots,(x_{m-1},+\infty)$, *кроме того, точками возможного разрыва функции* $y=f(x)$ *являются точки* $x_1,x_2,\dots,x_{m-1}$ *в окрестности которых и в самих точках функция задаётся разными аналитическими выражениями.*

*Точка* $x=x_0$ *является точкой непрерывности функции* $y=f(x)$ *тогда и только тогда, когда:* $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$.

**а)** Поскольку функции $\varphi_1(x)=x+1$ и $\varphi_2(x)=3-ax^2$ непрерывны в промежутках $(-\infty,1)$ и $(1,+\infty)$ как элементарные функции, определённые в каждой точке данных промежутков, то непрерывность функции $y=\begin{cases}x+1, & x\le 1\\ 3-ax^2, & x>1\end{cases}$ может нарушиться только в точке её возможного разрыва $x=1$.

Определяем значение параметра $a$ из условия непрерывности функции $y=f(x)$ в точке $x=1$: $\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=f(1)$. Вычисляя $\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)$, $f(1)$: $\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}(x+1)=2$, $\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}(3-ax^2)=3-a$, $f(1)=2$, из условия непрерывности $2=3-a=2$, находим $a=1$.

График непрерывной функции $y=\begin{cases}x+1, & x\le 1\\ 3-x^2, & x>1\end{cases}$ имеет вид изображённый на рис. 1.

**б)** Функции $\varphi_1(x)=x^2$ и $\varphi_3(x)=1$ непрерывны в промежутках $(-\infty,-1)$ и $(1,+\infty)$ как элементарные функции, определённые в каждой точке данных промежутков, а функция $\varphi_2(x)=1/x$ в промежутке $(-1,1)$ имеет точкой разрыва точку $x=0$, в которой она не определена. Тогда для функции

$$y=\begin{cases} x^2, & x\le -1\\ 1/x, & -1<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$ точка $x=0$ является точкой разрыва, а точки $x=-1$ и $x=1$, в окрестности которых и в самих точках функция задаётся разными аналитическими выражениями, являются точками возможного разрыва.

Исследуем на непрерывность точки $x=-1,0,1$:

**1)** $$\lim_{x\to -1-0} f(x)\overset{?}{=}\lim_{x\to -1+0} f(x)\overset{?}{=} f(-1)\ \Rightarrow$$

$$\left[\lim_{x\to -1-0} f(x)=\lim_{x\to -1-0} x^2=1,\ \lim_{x\to -1+0} f(x)=\lim_{x\to -1+0}(1/x)=-1,\ f(-1)=-1\right]$$

$$\Rightarrow\ 1\ne -1=-1.$$

Следовательно, точка $x=-1$ - точка разрыва 1-го рода функции $y=f(x)$.

**2)** $$\lim_{x\to 0-0} f(x)\overset{?}{=}\lim_{x\to 0+0} f(x)\overset{?}{=} f(0)$$

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\frac{1}{x}=-\infty,\ \lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=+\infty,\ f(0)-\text{неопределено}$$ Следовательно, точка $x=0$ - точка бесконечного разрыва (2-го рода) функции $y=f(x)$.

**3)** $$\lim_{x\to 1-0} f(x)\overset{?}{=}\lim_{x\to 1+0} f(x)\overset{?}{=} f(1)\ \Rightarrow$$

$$\left[\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}(1/x)=1,\ \lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0} 1=1,\ f(1)=1\right]\Rightarrow\ 1=1=1.$$

Следовательно, точка $x=1$ - точка непрерывности функции $y=f(x)$.

График функции $y=\begin{cases} x^2, & x\le -1\\ 1/x, & -1<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$ имеет вид, изображённый на рис.2.

**Ответ: а)** Функция $y=f(x)$ непрерывна при $a=1$ (рис.1); **б)** $x=-1$ - точка разрыва 1-го рода**,** $x=0$**-** точка бесконечного разрыва функции $y=f(x)$ (рис.2).

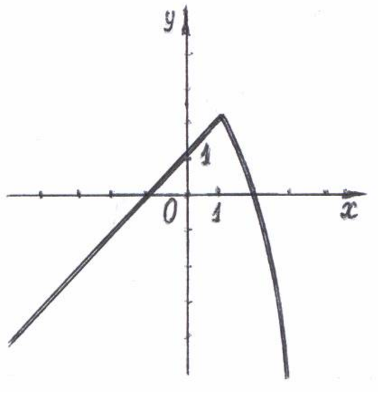



Рис.1

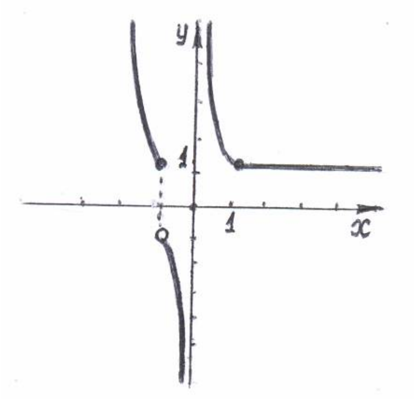



Рис.2

**31-40.** Найти производную $y' = f'(x)$ **:**

**а)** $y = e^{4x} \cdot \sqrt[3]{1-2x}$ **;** **б)** $y = \dfrac{x \sin^2 3x}{\ln(5x+2)}$ **;** **в)** $\begin{cases} x = 2^t + 1 \\ y = \sqrt{1-2^t} \end{cases}$ **.**

*Нахождение производной* $y' = y'(x)$ *функции* $y = y(x)$ *заданной явно, с помощью правил дифференцирования:*
$(C)' = 0$ *(* $C = const$ *),* $(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(f \cdot g)' = f'g + fg'$, $(Cf)' = C \cdot f'$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \qquad \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}, \qquad (f^g)' = f^g\left(f' \cdot \frac{g}{f} + (\ln f)g'\right),$$

$f'(x) = \left(F(u)\Big|_{u=\varphi(x)}\right)' = F'(u)\varphi'(x)$ *сводят к нахождению табличных производных.*

*Производную* $y' = y'(x)$ *функции* $y = y(x)$ *заданной параметрическими уравнениями* $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ *находят в параметрическом виде по формуле*

$$y'_x(t) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}.$$

**Решение.**

**а)** $y' = \left(e^{4x} \cdot \sqrt[3]{1-2x}\right)' = \left(e^{4x}\right)' \sqrt[3]{1-2x} + e^{4x}\left(\sqrt[3]{1-2x}\right)'$, где

$$\left(e^{4x}\right)' = \left(e^{u}\big|_{u=4x}\right)' = \left(e^{u}\right)_u' u_x' = e^{u}\,u_x' = e^{4x}(4x)' = \left[(4x)' = 4(x)' = 4\right] = 4e^{4x}\,\mathbf{;}$$

$$\left(\sqrt[3]{1-2x}\right)' = \left((1-2x)^{1/3}\right)' = (u^{1/3}\big|_{u=1-2x})' = (u^{1/3})_u' \cdot u_x' = \frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}-1}\,u_x' =$$

$$= \frac{1}{3}(1-2x)^{-2/3}(1-2x)' = \left[(1-2x)' = (1)' - (2x)' = 0 - 2(x)' = -2\right] = \frac{-2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$$

Тогда $y' = 4e^{4x}\sqrt[3]{1-2x} + e^{4x}\cdot\left(-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}\right) = \dfrac{2e^{4x}(5-12x)}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$**.**

**б)** $y' = \left(\dfrac{x\sin^2 3x}{\ln(5x+2)}\right)' = \dfrac{(x\sin^2 3x)'\cdot\ln(5x+2) - x\sin^2 3x\cdot(\ln(5x+2))'}{\ln^2(5x+2)}$**, где**

$$(x\sin^2 3x)' = (x)'\sin^2 3x + x(\sin^2 3x)' =$$

$$\left[\begin{array}{c} (x)' = 1 \\ (\sin^2 3x)' = \left((\sin 3x)^2\right)' = (u^2\big|_{u=\sin 3x})' = (u^2)_u' u_x' = 2uu_x' = 2\sin 3x\,(\sin 3x)' \\ (\sin 3x)' = \left(\sin u\big|_{u=3x}\right)' = (\sin u)_u'\,u_x' = \cos u\,u_x' = \cos 3x(3x)' \\ (3x)' = 3(x)' = 3\cdot 1 = 3 \end{array}\right]$$

$$= 1\cdot\sin^2 3x + x\cdot 2\sin 3x\cdot\cos 3x\cdot 3 = \sin^2 3x + 3x\sin 6x\,\mathbf{.}$$

$$(\ln(5x+2))' = \left(\ln u\big|_{u=5x+2}\right)' = (\ln u)_u'\,u_x' = \frac{1}{u}u'_x = \frac{1}{5x+2}(5x+2)' =$$

$$= \left[(5x+2)' = (5x)' + (2)' = 5(x)' + 0 = 5\cdot 1 = 5\right] = \frac{5}{5x+2}\,\mathbf{.}$$

Тогда $y' = \dfrac{(\sin^2 3x + 3x\sin 6x)\ln(5x+2) - x\sin^2 3x\cdot\left(\dfrac{5}{5x+2}\right)}{\ln^2(5x+2)} =$

$$= \frac{(5x+2)(\sin^2 3x + 3x\sin 6x)\ln(5x+2) - 5x\sin^2 3x}{(5x+2)\ln^2(5x+2)}\,\mathbf{.}$$

**в)** Производную функции $y = f(x)$, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = 2^t + 1 \\ y = \sqrt{1-2^t} \end{cases}$ находим по формуле $y'_x(t) = \dfrac{y'_t(t)}{x'_t(t)}$, где

$$y'_t(t) = \left(\sqrt{1-2^t}\right)' = \left((1-2^t)^{1/2}\right)' = \left(u^{1/2}\Big|_{u=1-2^t}\right)' = (u^{1/2})'_u \cdot u'_t = \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}-1}\, u'_t =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{u}} u'_t = \frac{1}{2\sqrt{1-2^t}} (1-2^t)' = \left[(1-2^t)' = (1)' - (2^t)' = -2^t \ln 2\right] = \frac{-2^t \ln 2}{2\sqrt{1-2^t}} \;;$$

$$x'_t(t) = (2^t + 1)' = (2^t)' + (1)' = 2^t \ln 2 + 0 = 2^t \ln 2 \,.$$

Тогда $y'_x(t) = \dfrac{\left(\dfrac{-2^t \ln 2}{2\sqrt{1-2^t}}\right)}{2^t \ln 2} = -\dfrac{2^t \ln 2}{2\sqrt{1-2^t} \cdot 2^t \ln 2} = -\dfrac{1}{2\sqrt{1-2^t}}$.

**41-50.** Вычислить пределы, используя правило Лопиталя.

**а)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2 - 2x - 8}{2x^2 + 3x - 14}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-5x} - 1 + 5x}{\sin(x^2)}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$.

*Вычисление предела $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$, где $a = x_0, \infty$, всегда начинают с подстановки в $\varphi(x)$ предельного значения её аргумента $x = a$. Если в результате получают неопределённость $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, то для её раскрытия применяют правило Лопиталя: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ - функции, дифференцируемые в окрестности $a = x_0, \infty$. В некоторых случаях может потребоваться неоднократное применение данного правила. На каждом этапе его применения следует использовать, упрощающие отношение, тождественные преобразования, а также комбинировать это правило с любыми другими известными приёмами вычисления пределов. Раскрытие неопределённостей вида: $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, $1^\infty$, $\infty^0$, $0^0$ путём преобразований:*

$f \cdot g = \dfrac{f}{1/g}$, $f - g = \dfrac{(1/g)-(1/f)}{(1/f)\cdot(1/g)}$, $f^g = e^{g\ln f} = e^{\frac{\ln f}{1/g}}$ *сводят к раскрытию неопределенностей вида* $0/0$ *или* $\infty/\infty$.

**Решение.**

**а)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-2x-8}{2x^2+3x-14} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(3x^2-2x-8)'}{(2x^2+3x-14)'}$, где

$(3x^2-2x-8)' = (3x^2)'-(2x)'-(8)' = 3(x^2)'-2(x)'-0 = 3\cdot 2x-2\cdot 1 = 6x-2$,

$(2x^2+3x-14)' = (2x^2)'+(3x)'-(14)' = 2(x^2)'+3(x)'-0 = 2\cdot 2x+3\cdot 1 = 4x+3$

Тогда $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-2x-8}{2x^2+3x-14} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{6x-2}{4x+3} = \dfrac{6\cdot 2-2}{4\cdot 2+3} = \dfrac{10}{11}$.

**б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-5x}-1+5x}{\sin(x^2)} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{-5x}-1+5x)'}{(\sin(x^2))'}$, где

$$(e^{-5x}-1+5x)' = (e^{-5x})'-(1)'+(5x)' = \left[\begin{array}{c} (e^{-5x})' = \left(e^u\big|_{u=-5x}\right)' = (e^u)'_u u'_x = e^u u'_x = e^{-5x}(-5x)' = -5e^{-5x} \\ (1)' = 0 \\ (5x)' = 5(x)' = 5\cdot 1 = 5 \end{array}\right] =$$

$$= -5e^{-5x}+5,$$

$$(\sin(x^2))' = \left(\sin u\big|_{u=x^2}\right)' = (\sin u)'_u\, u'_x = \cos u \cdot u'_x = \cos(x^2)(x^2)' =$$

$$= 2x\cos(x^2).$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-5x}-1+5x}{\sin(x^2)} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-5e^{-5x}+5}{2x\cos(x^2)} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$. Применяем правило Лопиталя ещё раз: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-5e^{-5x}+5}{2x\cos(x^2)} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(-5e^{-5x}+5)'}{(2x\cos(x^2))'}$, где

$(-5e^{-5x}+5)' = (-5e^{-5x})'+(5)' = -5(e^{-5x})'+0 = -5\cdot(-5e^{-5x}) = 25e^{-5x}$,

$(2x\cos(x^2))' = 2[(x)'\cos(x^2)+x(\cos(x^2))'] =$

$$\left[\begin{array}{c}(x)'=1\\ (\cos(x^2))'=\left(\cos u\Big|_{u=x^2}\right)'=(\cos u)'_u\,u'_x=-\sin u\,u'_x=-\sin(x^2)(x^2)'=-2x\sin(x^2)\end{array}\right]$$

$$=2[1\cdot\cos(x^2)+x(-2x\sin(x^2))]=2\cos(x^2)-4x^2\sin(x^2).$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-5e^{-5x}+5}{2x\cos(x^2)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{25e^{-5x}}{2\cos(x^2)-4x^2\sin(x^2)}=\dfrac{25}{2-0}=\dfrac{25}{2}$.

**в)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=[\infty-\infty]$. Преобразуем данную неопределённость (приведением разности дробей к общему знаменателю) к виду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, после чего применим правило Лопиталя. Получим $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=[\infty-\infty]=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\ln x-x+1)'}{((x-1)\ln x)'}$, где

$$(\ln x-x+1)'=(\ln x)'-(x)'+(1)'=\frac{1}{x}-1+0=\frac{1-x}{x},$$

$$((x-1)\ln x)'=(x-1)'\ln x+(x-1)(\ln x)'=1\cdot\ln x+(x-1)\cdot\frac{1}{x}=\frac{x\ln x+x-1}{x}.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\dfrac{1-x}{x}\right)}{\left(\dfrac{x\ln x+x-1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{x\ln x+x-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Применяем правило Лопиталя ещё раз:

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{x\ln x+x-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)'}{(x\ln x+x-1)'}$, где $(1-x)'=(1)'-(x)'=-1$,

$$(x\ln x+x+1)'=(x\ln x)'+(x)'+(1)'=(x)'\ln x+x(\ln x)'+1+0=$$

$$=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+1=\ln x+2.$$

В итоге получим $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{x\ln x+x-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{\ln x+2}=\dfrac{-1}{0+2}=-\dfrac{1}{2}$.

**Ответ:**

**а)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-2x-8}{2x^2+3x-14}=\dfrac{10}{11}$ **; б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-5x}-1+5x}{\sin(x^2)}=\dfrac{25}{2}$ **;в)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=-\dfrac{1}{2}$ **.**

**51-60.** Для указанной функции $y=f(x)$ требуется:
**а)** провести полное исследование функции и построить её график; **б)** найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[a,b]$;
**в)** составить уравнение касательной к графику функции в точке $x_0$.

**а)** $y=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x}$ **; б)** $y=x^3-6x^2+1$**,** $a=1, b=7$ **; в)** $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x}-1}$**,** $x_0=4$**.**

*Для построения графика функции $y=f(x)$ нужно:*
***1)** найти область определения функции;*
***2)** найти область непрерывности функции и точки разрыва;*
***3)** исследовать функцию на чётность, нечётность и периодичность;*
***4)** найти точки пересечения графика с осями координат;*
***5)** найти асимптоты графика функции;*
***6)** найти интервалы возрастания и убывания, экстремумы функции;*
***7)** найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.*

**Решение.**

**а1)** Находим область определения функции: $D(y)=\{x\in R\mid x^2+2x\neq 0\}$ $=(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,+\infty)$.

**а2)** Поскольку данная функция является элементарной, то областью её непрерывности является область определения $D(y)$, а точками разрыва являются точки $x=-2$ и $x=0$, не принадлежащие множеству $D(y)$, но являющиеся предельными точками этого множества (точками в любой окрестности которых содержатся точки данного множества). Исследуем характер разрыва в точках $x=-2$ и $x=0$, вычислив в них односторонние пределы функции:

$$\lim_{x\to -2-0}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=\frac{1}{(-2)\cdot(-0)}=+\infty,\quad \lim_{x\to -2+0}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=\frac{1}{(-2)\cdot(+0)}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=\frac{1}{(-0)\cdot 2}=-\infty,\qquad \lim_{x\to 0+0}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=\frac{1}{(+0)\cdot 2}=+\infty.$$

Так как односторонние пределы функции в точках $x=-2$ и $x=0$ - бесконечные, то данные точки являются точками бесконечного разрыва.

**а3)** Функция не является периодической.

*Функция $y = f(x)$, в аналитическое выражение которой входит хотя бы одна непериодическая функция периодической не является.*

Проверяем является ли функция чётной или нечётной. Так как область определения функции $D(y) = (-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,+\infty)$ не симметрична относительно точки $x = 0$, то данная функция – общего вида.

**а4)** Находим точки пересечения графика с осями координат.

Так как $x = 0 \notin D(y)$, то точек пересечения графика с осью $Oy$ нет.

Положим $y = 0$ и решим уравнение $y = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x} = 0$. Его решением является $x = -1$. Следовательно, точка $(-1, 0)$ - точка пересечения графика с осью $Ox$.

**а5)** Находим вертикальные и наклонные асимптоты графика функции.

*Прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой, тогда и только тогда, когда $x_0$ является точкой бесконечного разрыва функции $y = f(x)$.*

Так как точки $x = -2$ и $x = 0$ - точки бесконечного разрыва данной функции, то вертикальными асимптотами графика функции являются прямые $x = -2$ и $x = 0$.

*Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$ тогда и только тогда, когда одновременно существуют конечные пределы:* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ *и* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b$.

Вычисляем сначала пределы при $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x+1)^2}{(x^2+2x)x} = 0 = k_1,\ \lim_{x\to-\infty} (f(x) - k_1 x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+2x} = 1 = b_1.$$

*В дальнейшем будем иметь в виду следующий часто встречающийся предел:* $$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m} = \begin{cases} \infty & \text{если } n > m \\ a_0/b_0 & \text{если } n = m \\ 0 & \text{если } n < m \end{cases}$$

Следовательно $y = k_1x + b_1 = 0\cdot x + 1$, т.е. $y = 1$ - наклонная (горизонтальная) асимптота графика функции при $x \to -\infty$.

Аналогично вычисляем пределы при $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2}{(x^2+2x)x} = 0 = k_2,\ \lim_{x\to+\infty} (f(x) - k_1 x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+2x} = 1 = b_2$$

Следовательно $y = k_2 x + b_2 = 0 \cdot x + 1$, т.е. $y = 1$ - наклонная (горизонтальная) асимптота графика функции при $x \to +\infty$.

**а6)** Определяем интервалы возрастания, убывания, экстремумы функции. Для этого находим первую производную функции:

$$y' = \left( \frac{(x+1)^2}{x^2 + 2x} \right)' = = \frac{\left((x+1)^2\right)' \cdot (x^2 + 2x) - (x+1)^2 (x^2 + 2x)'}{(x^2 + 2x)^2} =$$

$$= \frac{2(x+1)(x^2 + 2x) - (x+1)^2 (2x+2)}{(x^2 + 2x)^2} = -\frac{2(x+1)}{(x^2 + 2x)^2}$$

и определяем критические точки функции $y = f(x)$, т.е. точки $x_i \in D(y)$ в которых $f'(x_i) = 0$ или $f'(x_i)$ не существует:

$$y' = -\frac{2(x+1)}{(x^2 + 2x)^2} = 0 \Rightarrow \ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \in D(y);$$

$y'$ не существует при $x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \notin D(y)$ и $x = -2 \notin D(y)$.

Таким образом, единственной критической (стационарной) точкой функции $y = f(x)$ является точка $x_1 = -1$.

Исследуем знак производной $y' = f'(x)$ в интервалах, на которые критические точки функции $y = f(x)$ разбивают её область определения $D(y)$, и найдём интервалы возрастания, убывания, экстремумы функции. Результаты исследования представим следующей таблицей:

| $x$ | $(-\infty, -2)$ | $(-2, -1)$ | $-1$ | $(-1, 0)$ | $(0, \infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ |
| $y$ | возрастает | возрастает | 0 | убывает | убывает |

Так как при переходе слева направо через точку $x = -1$ производная $f'(x)$ меняет знак с «+» на « $-$ », то точка $x = -1$ является точкой локального максимума и $y_{\max} = y(-1) = 0$.

**а7)** Определяем интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба графика функции. Для этого находим вторую производную функции:

$$y'' = (y')' = \left( -\frac{2(x+1)}{(x^2 + 2x)^2} \right)' = -2\left( \frac{(x+1)'(x^2 + 2x)^2 - (x+1)((x^2 + 2x)^2)'}{(x^2 + 2x)^4} \right) =$$

$$= -2\left( \frac{1 \cdot (x^2 + 2x)^2 - (x+1) \cdot 2 \cdot (x^2 + 2x)(2x+2)}{(x^2 + 2x)^4} \right) = \frac{2(3x^2 + 6x + 4)}{(x^2 + 2x)^3}$$

и определяем точки возможного перегиба $y = f(x)$, т.е. точки $x_i \in D(y)$ в которых $f''(x_i) = 0$ или $f''(x_i)$ не существует: $y'' = \dfrac{2(3x^2 + 6x + 4)}{(x^2 + 2x)^3} \neq 0$, так как $3x^2 + 6x + 4 \neq 0$ (квадратное уравнение не имеет действительных корней); $y''$ не существует при $x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \notin D(y)$ и $x = -2 \notin D(y)$.

Таким образом, функция $y = f(x)$ не имеет точек возможного перегиба.

Исследуем знак второй производной $y'' = f''(x)$ в интервалах, на которые точки возможного перегиба функции $y = f(x)$ разбивают её область определения $D(y)$, и найдём интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба графика функции. Результаты исследования представим следующей таблицей:

| $x$ | $(-\infty, -2)$ | $(-2, 0)$ | $(0, +\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $y''$ | + | – | + |
| $y$ | график вогнутый | график выпуклый | график вогнутый |

Точек перегиба нет.

**а8)** На основании полученных результатов строим график функции (рис.3)

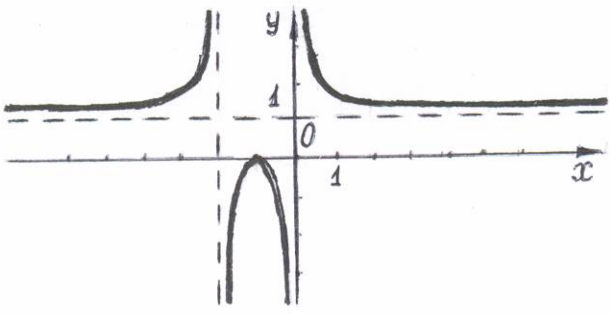



**Рис.3.**

*Наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ непрерывной и кусочно-дифференцируемой (дифференцируемой, за исключением, быть может, конечного числа точек) на отрезке $[a, b]$ достигается или в точках $x_i \in (a, b)$, в которых $f'(x_i) = 0$ или $f'(x_i)$ не существует, или на концах отрезка.*

**б1)** Находим первую производную функции:

$$y' = (x^3 - 9x^2 + 3)' = (x^3)' - (9x^2)' + (3)' = 3x^2 - 18x$$

и определяем внутренние критические точки функции $y = f(x)$, т.е. точки $x_i \in (1, 7)$ в которых $f'(x_i) = 0$ или $f'(x_i)$ не существует:

$y' = 3x^2 - 18x = 3x(x = 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \notin (1, 7) \\ x = 6 \in (1, 7) \end{cases}$, точек $x_i \in (1, 7)$ в которых $y'$ не существует нет. Таким образом, единственной внутренней критической (стационарной) точкой функции $y = f(x)$ на отрезке $[1, 7]$ является точка $x_1 = 6$.

**б2)** Вычисляем значения функции $y = f(x)$ во внутренних критических точках и на концах отрезка $[1, 7]$: $f(6) = 6^3 - 9 \cdot 6^2 + 3 = -105$, $f(1) = 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 3 = -5$, $f(7) = 7^3 - 9 \cdot 7^2 + 3 = -95$.

**б3)** Сравниваем значения $f(1)$, $f(6)$, $f(7)$ и находим наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[1, 7]$:

$m = y_{наим} = \min\limits_{[1, 7]} f(x) = f(6) = -105$, $M = y_{наиб} = \max\limits_{[1, 7]} f(x) = f(1) = -5$.

*Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$*

**в1)** Вычисляем значение функции $y = f(x)$ в точке $x_0 = 4$:

$$f(4) = \frac{4^2}{\sqrt{4} - 1} = 16.$$

**в2)** Находим первую производную функции: $y' = \left( \dfrac{x^2}{\sqrt{x} - 1} \right)' =$

$= \dfrac{(x^2)'(\sqrt{x} - 1) - x^2(\sqrt{x} - 1)'}{(\sqrt{x} - 1)^2} = \dfrac{2x(\sqrt{x} - 1) - x^2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} - 1)^2} = \dfrac{3x\sqrt{x} - 4x}{2(\sqrt{x} - 1)^2}$ и вычисляем её значение в точке $x_0 = 4$: $f'(4) = \dfrac{3 \cdot 4\sqrt{4} - 4 \cdot 4}{2(\sqrt{4} - 1)^2} = 4$.

**в3)** Составляем уравнение касательной: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow$ $y - 16 = 4(x - 4)$ и записываем его в виде $y = kx + b$: $y = 4x$.

**Ответ: а)** Рис.3; **б)** $m = f(6) = -105$, $M = f(1) = -5$; **в)** $y = 4x$.

**61 – 70.** Для указанной функции $z = f(x, y)$ требуется: **а)** найти дифференциал $dz$ и вторую частную производную $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; **б)** вычислить приближённо (с помощью первого дифференциала) значение функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$, если $z = arctg\left(\dfrac{x}{y}\right)$, $x = 0.03$, $y = 0.98$.

| |
|---|
| Первый дифференциал функции $z = f(x, y)$ имеет вид $dz = z'_x dx + z'_y dy$. |

| |
|---|
| Частные производные функции $z = f(x, y)$ вычисляются по обычным правилам дифференцирования функции одной переменной, в предположении, что если производная берётся по аргументу $x$ (аргументу $y$), то другой аргумент $y$ (аргумент $x$) считается постоянным. |

**Решение.**

**а1)** Находим частные производные первого порядка $z'_x$ и $z'_y$ функции

$$z = arctg\left(\frac{x}{y}\right)\textbf{:}\ z'_x = \left(arctg\left(\frac{x}{y}\right)\right)'_x = \left(arctgu\Big|_{u=\frac{x}{y}}\right)'_x = (arctgu)'_u \cdot u'_x =$$

$$= \frac{1}{1+u^2}u'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x = \left[\left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{y}\cdot(x)'_x = \frac{1}{y}\right] = \frac{y}{x^2+y^2};$$

$$z'_y = \left(arctg\left(\frac{x}{y}\right)\right)'_y = \left(arctgu\Big|_{u=\frac{x}{y}}\right)'_y = (arctgu)'_u \cdot u'_y = \frac{1}{1+u^2}u'_y =$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_y = \left[\left(\frac{x}{y}\right)'_y = x\left(\frac{1}{y}\right)'_y = x\left(-\frac{(y)'_y}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2}\right] = -\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Тогда первый дифференциал $dz$ функции имеет вид:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = \frac{y}{x^2+y^2}dx + \left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy = \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}.$$

**а2)** Вторую частную производную $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ (или кратко $z''_{xy}$) находим как первую частную производную по аргументу $y$ от функции $z'_x = f'_x(x, y)$ **:**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = (z'_x)'_y = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)'_y = \frac{(y)'_y \cdot (x^2 + y^2) - y \cdot (x^2 + y^2)'_y}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} (y)'_y = 1 \\ (x^2 + y^2)'_y = (x^2)'_y + (y^2)'_y = 0 + 2y = 2y \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Формула для приближённого вычисления значений функции $z = f(x, y)$ в малой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, в которой функция дифференцируема, имеет вид: $f(x,y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$, где $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$. Формула тем точнее, чем меньше значение $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

**б)** Вычисляем значения частных производных $z'_x = f'_x(x, y)$, $z'_y = f'_y(x, y)$ и значение функции $z = arctg\left(\dfrac{x}{y}\right)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, где $x_0 = x - \Delta x = 0.03 - 0.03 = 0$, $y_0 = y - \Delta y = 0.98 - (-0.02) = 1$:

$$f(0,1) = 0, \quad f'_x(0,1) = \frac{1}{0^2 + 1^2} = 1, \quad f'_y(0,1) = -\frac{0}{0^2 + 1^2} = 0.$$

Тогда, учитывая, что $\Delta x = 0.03$, $\Delta y = -0.02$, получим:

$$f(0.03, 0.98) \approx 0 + 1 \cdot 0.03 + 0 \cdot (-0.02) = 0.03.$$

**Ответ: а)** $dz = \dfrac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ **; б)** $f(0.03, 0.98) \approx 0.03$.

**71 – 80.** Найти локальные экстремумы функции $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ $(x > 0,\ y > 0)$.

Для нахождения локальных экстремумов дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ необходимо: **1)** Найти область определения $D(z)$ функции. **2)** Найти первые частные производные $z'_x$ и $z'_y$ функции. **3)** Решить систему уравнений (необходимое условие экстремума) $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$ и найти точки $M_i(x_i, y_i) \in D(z)$ (с учётом возможных дополнительных ограничений на значения аргументов $x$ и $y$) возможного локального экстремума функции. **4)** Найти вторые частные производные $A(x, y) = z''_{xx}$, $B(x, y) = z''_{xy}$, $C(x, y) = z''_{yy}$; составить выражение $D(x, y) = A \cdot C - B^2$ и вычислить значения $D\big|_{M_i}$ и $A\big|_{M_i}$ в каждой точке $M_i$ возможного экстремума. **5)** Сделать вывод о наличии экстремумов функции $z = f(x, y)$, используя достаточное условие экстремума: если $D\big|_{M_i} < 0$, то в точке $M_i$ экстремума нет; если $D\big|_{M_i} > 0$ и $A\big|_{M_i} > 0$, то в точке $M_i$ - локальный минимум; если $D\big|_{M_i} > 0$ и $A\big|_{M_i} < 0$, то в точке $M_i$ - локальный максимум; если $D\big|_{M_i} = 0$, то требуется дополнительное исследование точки $M_i$ (например, по определению). **6)** Найти локальные экстремумы (экстремальные значения) функции.

**Решение.**

**1)** Находим область определения функции $D(z) = \left\{ (x, y) \in R^2 \middle| \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \right\}$

**2)** Находим первые частные производные $z'_x$ и $z'_y$:

$$z'_x = (x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y)'_x = (x^3)'_x + (3xy^2)'_x - (15x)'_x - (12y)'_x =$$
$$= (x^3)'_x + 3y^2(x)'_x - 15(x)'_x - 0 = 3x^2 + 3y^2 \cdot 1 - 15 \cdot 1 = 3x^2 + 3y^2 - 15;$$
$$z'_y = (x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y)'_y = (x^3)'_y + (3xy^2)'_y - (15x)'_y - (12y)'_y =$$
$$= 0 + 3x(y^2)'_y - 0 - 12(y)'_y = 3x \cdot 2y - 12 \cdot 1 = 6xy - 12.$$

**3)** Составим систему уравнений $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 = 15 \\ xy = 2 \end{cases}$ и решим её. Получим четыре решения: $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(-1, -2)$, $(-2, -1)$. Из них точками возможного экстремума функции $z = f(x, y)$ в области $D(z)$ являются только две точки: $M_1(1, 2)$ и $M_2(2, 1)$.

**4)** Находим вторые частные производные:

$$A(x,y)=z''_{xx}=(z'_x)'_x=(3x^2+3y^2-15)'_x=(3x^2)'_x+(3y^2)'_x-(15)'_x=$$
$$=3(x^2)'_x+0-0=3\cdot 2x=6x\,;$$
$$B(x,y)=z''_{xy}=(z'_x)'_y=(3x^2+3y^2-15)'_y=(3x^2)'_y+(3y^2)'_y-(15)'_y=$$
$$=0+3(y^2)'_y-0=3\cdot 2y=6y\,;$$
$$C(x,y)=z''_{yy}=(z'_y)'_y=(6xy-12)'_y=(6xy)'_y-(12)'_y=6x(y)'_y-0=6x,$$
составляем выражение $D(x,y)=AC-B^2=6x\cdot 6x-(6y)^2=36x^2-36y^2$ и вычисляем:

$D\Big|_{M_1(1,2)}=36\cdot 1^2-36\cdot 2^2=-108<0$; $D\Big|_{M_2(2,1)}=36\cdot 2^2-36\cdot 1^2=108>0$,

$A\Big|_{M_2(2,1)}=6\cdot 2=12>0$.

**5)** Делаем вывод о наличии экстремумов. Так как:

$D\Big|_{M_1}=-108<0$, то в точке $M_1(1,2)$ экстремума нет;

$D\Big|_{M_2}=108>0$, $A\Big|_{M_2}=12>0$, то в точке $M_2(2,1)$ - локальный минимум.

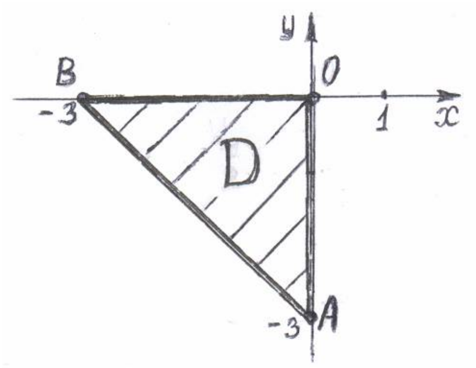
**6)** Находим локальный минимум
$$z_{\min}=f(2,1)=2^3+3\cdot 2\cdot 1^2-15\cdot 2-12\cdot 1=-28\,.$$
**Ответ:** $z_{\min}=f(2,1)=-28$ **.**

**81–90**. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:
$z=f(x,y)=x^2-y^2+2xy+4x$ в области: $x\le 0$**,** $y\le 0$**,** $x+y\ge -3$**.**

Функция $z=f(x,y)$, дифференцируемая в ограниченной замкнутой области $\overline{D}=D\cup\Gamma$, достигает своего наибольшего и наименьшего значений или в стационарных точках $M_i\in D$, или в точках границы $\Gamma$ области $\overline{D}$. Для их нахождения необходимо: **1)** Найти все стационарные точки $M_i\in D$ функции и вычислить в них значения функции $f(M_i)$. **2)** Найти наибольшее $M_\Gamma=\max\limits_{\Gamma} f(x,y)$ и наименьшее $m_\Gamma=\min\limits_{\Gamma} f(x,y)$ значения функции на границе $\Gamma$, задаваемой одним аналитическим выражением в явном виде $y=\varphi(x)$ или $x=\psi(y)$. Если $\Gamma=\cup\Gamma_k$, где $\Gamma_k$ задаются одним аналитическим выражением в явном виде, то находят наибольшие и наименьшие значения $M_{\Gamma_k}$ и $m_{\Gamma_k}$ функции на каждом из участков $\Gamma_k$ границы. **3)** Сравнить значения функции $f(M_i)$, $M_{\Gamma_k}$, $m_{\Gamma_k}$ и выбрать из них наибольшее

$M = \max\limits_{\overline{D}} f(x, y)$ и наименьшее $m = \min\limits_{\overline{D}} f(x, y)$ значения функции в области $\overline{D}$ .

**Решение.** Изображаем область $\overline{D}$ (она представляет собой треугольник, ограниченный прямыми $x = 0$ , $y = 0$ , $x + y = -3$ ), находим стационарные точки $M_i \in D$ функции $z = x^2 - y^2 + 2xy + 4x$ , решая систему уравнений $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$, и вычисляем в них значения функции $f(M_i)$ .




Учитывая, что: $z'_x = (x^2 - y^2 + 2xy + 4x)'_x = 2x + 2y + 4$ , $z'_y = (x^2 - y^2 + 2xy + 4x)'_y = -2y + 2x$ , получим $\begin{cases} 2x + 2y + 4 = 0 \\ 2x - 2y \quad\;\; = 0 \end{cases}$. Отсюда $x = -1$ , $y = -1$ и, следовательно, единственной стационарной точкой функции в области $D$ является точка $M_1(-1,-1)$ .

Вычислив значение функции в этой точке, получим $f(M_1) = f(-1,-1) = (-1)^2 - (-1)^2 + 2 \cdot (-1)(-1) + 4 \cdot (-1) = -2$ .

**2)** Границу $\Gamma$ области $\overline{D}$ представляем в виде $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ , где $\Gamma_1 = OA : x = 0 , -3 \le y \le 0$ ; $\Gamma_2 = AB : y = -x - 3 , -3 \le x \le 0$ ; $\Gamma_3 = BO : y = 0 , -3 \le x \le 0$ и находим наибольшие и наименьшие значения функции на каждом из участков границы: $M_{\Gamma_1} , m_{\Gamma_1}$ , $M_{\Gamma_2} , m_{\Gamma_2}$ , $M_{\Gamma_3}$ , $m_{\Gamma_3}$ .

<u>На участке</u> $\Gamma_1 = OA : x = 0 , -3 \le y \le 0$ : $z_{OA} = z_1(y) = -y^2$ . Таким образом, пришли к задаче нахождения наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной $z_1(y) = -y^2$ на отрезке $[-3, 0]$. Эти значения функция

принимает или в критических точках, принадлежащих интервалу $(-3, 0)$ или на концах отрезка. Для их отыскания находим первую производную функции: $(z_1(y))'_y = (-y^2)'_y = -2y$ и определяем её внутренние критические точки, т.е. точки $y_i \in (-3, 0)$ в которых $z'_1(y_i) = 0$ или $z'_1(y_i)$ не существует: $z'_1 = -2y = 0 \Rightarrow y = 0 \notin (-3, 0)$, точек $y_i \in (-3, 0)$ в которых $z'_1$ не существует нет. Вычисляем значения функции $z_1(y)$ во внутренних критических точках (таких точек нет) и на концах отрезка $[-3, 0]$: $z_1(-3) = -(-3)^2 = -9$, $z_1(0) = -(0)^2 = 0$. Сравнивая значения $z_1(-3)$, $z_1(0)$ находим наименьшее и наибольшее значения функции $z_1(y)$ на отрезке $[-3, 0]$:
$m_{\Gamma_1} = \min\limits_{[-3,\,0]} z_1(y) = z_1(-3) = z(0,-3) = -9$,
$M_{\Gamma_1} = \max\limits_{[-3,\,0]} z_1(y) = z_1(0) = z(0,0) = 0$.

<u>На участке</u> $\Gamma_2 = AB : y = -x - 3$, $-3 \le x \le 0$: $z_{AB} = z_2(x) = -2x^2 - 8x - 9$. Таким образом, пришли к задаче нахождения наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной $z_2(x)$ на отрезке $[-3, 0]$. Эти значения функция принимает или в критических точках, принадлежащих интервалу $(-3, 0)$ или на концах отрезка. Для их отыскания находим первую производную функции: $(z_2(x))'_x = (-2x^2 - 8x - 9)'_x = -4x - 8$ и определяем её внутренние критические точки, т.е. точки $x_i \in (-3, 0)$ в которых $z'_2(x_i) = 0$ или $z'_2(x_i)$ не существует: $z'_2 = -4x - 8 = 0 \Rightarrow x = -2 \in (-3, 0)$, точек $x_i \in (-3, 0)$ в которых $z'_2$ не существует нет. Вычисляем значения функции $z_2(x)$ во внутренних критических точках и на концах отрезка $[-3, 0]$: $z_2(-2) = -2(-2)^2 - 8(-2) - 9 = -1$, $z_2(-3) = -2(-3)^2 - 8(-3) - 9 = -3$, $z_2(0) = -2 \cdot (0)^2 - 8 \cdot 0 - 9 = -9$. Сравнивая значения $z_2(-3)$, $z_2(-2)$, $z_2(0)$ находим наименьшее и наибольшее значения функции $z_2(x)$ на отрезке $[-3, 0]$: $m_{\Gamma_2} = \min\limits_{[-3,\,0]} z_2(x) = z_2(0) = z(0,-3) = -9$,
$M_{\Gamma_2} = \max\limits_{[-3,\,0]} z_2(x) = z_2(-2) = z(-2,-1) = -1$.

<u>На участке</u> $\Gamma_3 = BO : y = 0$, $-3 \le x \le 0$: $z_{BO} = z_3(x) = x^2 + 4x$. Таким образом, пришли к задаче нахождения наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной $z_3(x) = x^2 + 4x$ на отрезке $[-3, 0]$. Эти значения

функция принимает или в критических точках, принадлежащих интервалу $(-3,0)$ или на концах отрезка. Для их отыскания находим первую производную функции: $(z_3(x))'_x = (x^2+4x)'_x = 2x+4$ и определяем её внутренние критические точки, т.е. точки $x_i \in (-3,0)$ в которых $z'_3(x_i)=0$ или $z'_3(x_i)$ не существует: $z'_3 = 2x+4=0 \Rightarrow x=-2 \in (-3,0)$, точек $x_i \in (-3,0)$ в которых $z'_3$ не существует нет. Вычисляем значения функции $z_3(x)$ во внутренних критических точках и на концах отрезка $[-3,0]$: $z_3(-2)=(-2)^2+4(-2)=-4$, $z_3(-3)=(-3)^2+4(-3)=-3$, $z_3(0)=(0)^2+4\cdot 0=0$. Сравнивая значения $z_3(-3), z_3(-2), z_3(0)$ находим наименьшее и наибольшее значения функции $z_3(x)$ на отрезке $[-3,0]$: $m_{\Gamma_3} = \min\limits_{[-3,\,0]} z_3(x) = z_3(-3) = z(-3{,}0) = -3$, $M_{\Gamma_3} = \max\limits_{[-3,\,0]} z_3(x) = z_3(0) = z(0{,}0) = 0$

**3)** Сравнивая значения функции $f(-1,-1)=-2$, $m_{\Gamma_1} = z(0,-3) = -9$, $M_{\Gamma_1} = z(0{,}0) = 0$, $m_{\Gamma_2} = z(0,-3) = -9$, $M_{\Gamma_2} = z(-2,-1) = -1$, $m_{\Gamma_3} = z(-3{,}0) = -3$, $M_{\Gamma_3} = z(0{,}0) = 0$, делаем вывод, что $m = z_{наим} = z(0,-3) = -9$, $M = z_{наиб} = z(0{,}0) = 0$.

**Ответ:** $m = z_{наим} = z(0,-3) = -9$, $M = z_{наиб} = z(0{,}0) = 0$.

**91 – 100.** Найти: **а)** производную $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}$ функции $u = f(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ по направлению вектора $\vec{\ell}$; **б)** градиент функции $grad\, u$ и его величину $|grad\, u|$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, если:

$u = \ln(x+y^2+z^3)$, $\quad \vec{\ell} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$, $\quad M_0(1{,}2{,}1)$.

Производная $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}$ функции $u = f(x,y,z)$ по направлению вектора $\vec{\ell} = \ell_x \vec{i} + \ell_y \vec{j} + \ell_z \vec{k}$ находится по формуле $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{\ell}} = u'_x \cos\alpha + u'_y \cos\beta + u'_z \cos\gamma$, где $\cos\alpha = \dfrac{\ell_x}{|\vec{\ell}|}$, $\cos\beta = \dfrac{\ell_y}{|\vec{\ell}|}$, $\cos\gamma = \dfrac{\ell_z}{|\vec{\ell}|}$, $|\vec{\ell}| = \sqrt{\ell_x^2 + \ell_y^2 + \ell_z^2}$ .

| |
|---|
| Градиент $grad\,u$ функции $u = f(x,y,z)$ находится по формуле $grad\,u = u'_x\,\vec{i} + u'_y\,\vec{j} + u'_z\,\vec{k} = \left(u'_x, u'_y, u'_z\right)$. |

**Решение.**

**а1)** Находим первые частные производные функции $u = \ln(x + y^2 + z^3)$**:**

$$u'_x = (\ln(x + y^2 + z^3))'_x = \left(\ln t\Big|_{t=x+y^2+z^3}\right)'_x = (\ln t)'_t \cdot t'_x = \frac{1}{t}\cdot t'_x =$$

$$= \frac{(x+y^2+z^3)'_x}{x+y^2+z^3} = \frac{(x)'_x + (y^2)'_x + (z^3)'_x}{x+y^2+z^3} = \frac{1+0+0}{x+y^2+z^3} = \frac{1}{x+y^2+z^3};$$

$$u'_y = (\ln(x + y^2 + z^3))'_y = \left(\ln t\Big|_{t=x+y^2+z^3}\right)'_y = (\ln t)'_t \cdot t'_y = \frac{1}{t}\cdot t'_y =$$

$$= \frac{(x+y^2+z^3)'_y}{x+y^2+z^3} = \frac{(x)'_y + (y^2)'_y + (z^3)'_y}{x+y^2+z^3} = \frac{0+2y+0}{x+y^2+z^3} = \frac{2y}{x+y^2+z^3};$$

$$u'_z = (\ln(x + y^2 + z^3))'_z = \left(\ln t\Big|_{t=x+y^2+z^3}\right)'_z = (\ln t)'_t \cdot t'_z = \frac{1}{t}\cdot t'_z =$$

$$= \frac{(x+y^2+z^3)'_z}{x+y^2+z^3} = \frac{(x)'_z + (y^2)'_z + (z^3)'_z}{x+y^2+z^3} = \frac{0+0+3z^2}{x+y^2+z^3} = \frac{3z^2}{x+y^2+z^3}.$$

**а2)** Вычисляем значения частных производных в точке $M_0(1,2,1)$:

$$u'_x(M_0) = \frac{1}{1+2^2+1^3} = \frac{1}{6},\ u'_y(M_0) = \frac{2\cdot 2}{1+2^2+1^3} = \frac{4}{6},\ u'_y(M_0) = \frac{3\cdot 1^2}{1+2^2+1^3} = \frac{3}{6}$$

**а3)** Вычисляем направляющие косинусы вектора $\vec{\ell} = (2,4,4)$:

$$|\,\vec{\ell}\,| = \sqrt{2^2+4^2+4^2} = 6,\ \cos\alpha = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},\ \cos\beta = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},\ \cos\gamma = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

**а4)** Вычисляем значение $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}$ в точке $M_0(1,2,1)$:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}(M_0) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} + \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{3} + \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1+8+6}{18} = \frac{15}{18}.$$

**б1)** Находим значение градиента функции $grad\,u$ в точке $M_0(1,2,1)$:

$$gradu(M_0) = \frac{1}{6}\cdot\vec{i} + \frac{4}{6}\cdot\vec{j} + \frac{4}{6}\cdot\vec{k} = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

**б2)** Вычисляем $|\,grad\,u\,|$ в точке $M_0(1,2,1)$:

$$|\,gradu(M_0)\,|=\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{4}{6}\right)^2+\left(\frac{4}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{1+16+16}{6^2}}=\frac{\sqrt{33}}{6}.$$

**Ответ: а)** $\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}(M_0)=\frac{15}{18}$; **б)** $gradu(M_0)=\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$, $|\,gradu(M_0)\,|=\frac{\sqrt{33}}{6}$.

## 6.2. Краткие теоретические сведения.

**Тема. <u>Множества. Числовые множества. Функция.</u>**

Под ***множеством*** понимают некоторую совокупность объектов любой природы, различимых между собой и мыслимую как единое целое. Объекты, составляющие множество называют его ***элементами***. Множество может быть бесконечным (состоит из бесконечного числа элементов), конечным (состоит из конечного числа элементов), пустым (не содержит ни одного элемента). Множества обозначают: $A, B, C, \ldots, X, Y, Z, \ldots$, а их элементы: $a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots$. Пустое множество обозначают $\varnothing$.

Множество $B$ называют ***подмножеством*** множества $A$, если все элементы множества $B$ принадлежат множеству $A$ и пишут $B \subset A$. Множества $A$ и $B$ называют ***равными***, если они состоят из одних и тех же элементов и пишут $A = B$. Два множества $A$ и $B$ будут равны тогда и только тогда, когда $A \subset B$ и $B \subset A$.

Множество $U$ называют ***универсальным*** (в рамках данной математической теории), если его элементами являются все объекты, рассматриваемые в данной теории.

Множество можно задать: **1)** перечислением всех его элементов, например: $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ (только для конечных множеств); **2)** заданием правила $P$ определения принадлежности элемента $u$ универсального множества $U$, данному множеству $A$: $A=\{u \in U \mid P(u)\}$.

***Объединением*** множеств $A$ и $B$ называется множество

$$A \cup B = \{u \in U \mid u \in A \text{ или } u \in B\}.$$

***Пересечением*** множеств $A$ и $B$ называется множество

$$A \cap B = \{u \in U \mid u \in A \text{ и } u \in B\}.$$

***Разностью*** множеств $A$ и $B$ называется множество

$$A \setminus B = \{u \in U \mid u \in A \text{ и } u \notin B\}.$$

***Дополнением*** множества $A$ (до универсального множества $U$) называется множество $\overline{A} = U \setminus A$.

Два множества $A$ и $B$ называются ***эквивалентными*** и пишут $A \sim B$, если между элементами этих множеств может быть установлено взаимно однозначное соответствие. Множество $A$ называется ***счётным***, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел $N$: $A \sim N$. Пустое множество по определению относится к счётным.

Понятие мощности множества возникает при сравнении множеств по числу содержащихся в них элементов. Мощность множества $A$ обозначают $|A|$. Мощностью конечного множества является число его элементов.
Эквивалентные множества обладают равной мощностью. Множество $A$ называется ***несчётным***, если его мощность больше мощности множества $N$.

***Действительным*** (вещественным) ***числом*** называется бесконечная десятичная дробь, взятая со знаком «+» или «$-$». Действительные числа отождествляют с точками числовой прямой. ***Модулем*** (абсолютной величиной) действительного числа $x$ называется неотрицательное число:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{если } x < 0 \\ x, & \text{если } x \ge 0 \end{cases}$$

Множество $X$ называется ***числовым***, если его элементами $x$ являются действительные числа.Числовыми ***промежутками*** называются множества чисел: $(a,b)$, $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$, $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$, $(-\infty.,+\infty)$.

Множество всех точек $x$ на числовой прямой, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ - сколь угодно малое число, называется $\varepsilon$***-окрестностью*** (или просто окрестностью) точки $x_0$ и обозначается $O_\varepsilon(x_0)$. Множество всех точек $x$ условием $|x| > \mathrm{E}$, где $\mathrm{E} > 0$ - сколь угодно большое число, называется $\mathrm{E}$***-окрестностью*** (или просто окрестностью) бесконечности и обозначается $O_\mathrm{E}(\infty)$.

Величина, сохраняющая одно и тоже числовое значение, называется ***постоянной.*** Величина, принимающая различные числовые значения, называется ***переменной. Функцией*** $f$ называется правило, по которому каждому числу $x \in X$ ставится в соответствие одно вполне определённое число $y \in Y$, и пишут $y = f(x)$. Множество $X$ называется ***областью определения*** функции, $Y$ - ***множеством*** (или областью) ***значений*** функции, $x \in X$ - ***аргументом***, $y \in Y$ - ***значением функции***. Наиболее распространённым способом задания функции является аналитический способ, при котором функция задаётся формулой. ***Естественной областью определения*** функции $y = f(x)$ называется множество $D$ значений аргумента $x$, для которого данная формула имеет смысл. ***Графиком функции*** $y = f(x)$, $x \in D$ в прямоугольной системе координат $Oxy$, называется множество всех точек плоскости с координатами $(x, f(x))$, $x \in D$.

Функция $f(x)$ называется ***чётной*** на множестве $X$, симметричном относительно точки $x = 0$, если для всех $x \in X$ выполняется условие: $f(-x) = f(x)$ и ***нечётной***, если выполняется условие $f(-x) = -f(x)$. В противном случае $f(x)$ - функция общего вида или ***ни чётная, ни нечётная***.

Функция $f(x)$ называется ***периодической*** на множестве $X$, если существует число $T \neq 0$ (***период функции***), такое, что для всех $x \in X$ выполняется условие: $f(x+T) = f(x)$. Наименьшее число $T > 0$ называется основным периодом.

Функция $f(x)$ называется ***монотонно возрастающей*** (***убывающей***) на множестве $X$, если большему значению аргумента $x \in X$ соответствует большее (меньшее) значение функции $f(x)$.

Функция $f(x)$ называется ***ограниченной*** на множестве $X$, если существует число $M > 0$, такое, что для всех $x \in X$ выполняется условие: $|f(x)| \leq M$. В противном случае функция - ***неограниченная***.

***Обратной*** к функции $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$ называется такая функция $x = f^{-1}(y)$, которая определена на множестве $Y$ и каждому $y \in Y$ ставит в соответствие такое $x \in X$, что $f(x) = y$. Для нахождения функции $x = f^{-1}(y)$, обратной к функции $y = f(x)$, нужно решить уравнение $f(x) = y$ относительно $x$. Если функция $y = f(x)$, $x \in X$ является строго монотонной на $X$, то она всегда имеет обратную, при этом, если функция возрастает (убывает), то обратная функция также возрастает (убывает).

Функция $y = f(x)$, представляемая в виде $y = f(x) = F(\varphi(x))$, где $y = F(u)$, $u = \varphi(x)$ - некоторые функции такие, что область определения функции $F(u)$ содержит всё множество значений функции $\varphi(x)$, называется ***сложной функцией*** независимого аргумента $x$. Переменную $u$ называют при этом промежуточным аргументом. Сложную функцию $f(x) = F(\varphi(x))$ называют также композицией функций $F$ и $\varphi$, и пишут: $f = F \circ \varphi$.

***Основными элементарными*** функциями считаются: ***степенная*** функция $y = x^{\alpha}$, ***показательная*** функция $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), ***логарифмическая*** функция $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), ***тригонометрические*** функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$, ***обратные тригонометрические*** функции

$y = \arcsin x$ , $y = \arccos x$ , $y = arctgx$ , $y = arcctgx$ . ***Элементарной*** называется функция, полученная из основных элементарных функций конечным числом их арифметических операций и композиций.

Если задан график $\Gamma$ функции $y = f(x)$, $x \in X$ , то построение графика функции $y = c\,f(ax+b)+d$ сводится к ряду преобразований (сдвиг, сжатие или растяжение, отображение) графика $\Gamma$ :

**1)** преобразование $-f(x)$ симметрично отображает график $\Gamma$ , относительно оси $Ox$ ; **2)** преобразование $f(-x)$ симметрично отображает график $\Gamma$ , относительно оси $Oy$ ; **3)** преобразование $f(x-a)$ сдвигает график $\Gamma$ по оси $Ox$ на $|a|$ единиц ( $a>0$ - вправо, $a<0$ - влево); **4)** преобразование $f(x)+b$ сдвигает график $\Gamma$ по оси $Oy$ на $|a|$ единиц ( $a>0$ - вверх, $a<0$ - вниз); **5)** преобразование $kf(x)$ график $\Gamma$ вдоль оси $Oy$ растягивает в $k$ раз, если $k>1$ или сжимает в $1/k$ раз, если $0<k<1$ ; **6)** преобразование $f(kx)$ график $\Gamma$ вдоль оси $Ox$ сжимает в $k$ раз, если $k>1$ или растягивает в $1/k$ раз, если $0<k<1$ .

Последовательность преобразований при построении графика функции $y = c\,f(ax+b)+d$ можно представить символически в виде:

$$f(x) \to f(ax) \to f\left(a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right) \to c\,f(ax+b) \to c\,f(ax+b)+d\,.$$

***Примечание.*** При выполнении преобразования $f(ax) \to f(ax+b)$ следует иметь в виду, что величина сдвига вдоль оси $Ox$ определяется той константой, которая прибавляется непосредственно к аргументу $x$ , а не к аргументу $ax$ .

Графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола с вершиной в точке $\left(-\frac{b}{a}, c-\frac{b^2}{4a}\right)$, ветви которой направлены вверх, если $a>0$ или вниз, если $a<0$ . Графиком дробно-линейной функции $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ является гипербола с центром в точке $\left(-d/c\,,\,a/c\right)$, асимптоты которой проходят через центр, параллельно осям координат.

В некоторых случаях при построении графика функции целесообразно разбить её область определения на несколько непересекающихся промежутков и последовательно строить график на каждом из них. Например, при построении графика функции, в аналитическое выражение которой входит функция

$|x|=\begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x\geq 0\end{cases}$, следует выделить и рассмотреть отдельно промежутки, на которых выражение под знаком модуля не меняет знак.

График функции $y=f_1(x)+f_2(x)$ можно построить, предварительно построив графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, а затем сложив их ординаты при одинаковых значениях $x$.

**Тема.** **Числовые последовательности. Предел последовательности.**

Если каждому натуральному числу $n$ по некоторому правилу $f$ поставлено в соответствие одно вполне определённое действительное число $x_n=f(n)$, то говорят, что задана ***числовая последовательность*** $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Кратко обозначают $(x_n)$. Число $x_n$ называется ***общим членом последовательности***. Последовательность называют также функцией натурального аргумента. Последовательность всегда содержит бесконечно много элементов, среди которых могут быть равные.

Число $a$ называется ***пределом последовательности*** $(x_n)$, и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, если для любого числа $\varepsilon>0$ найдётся номер $N(\varepsilon)$ такой, что при всех $n>N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$.

Последовательность $(x_n)$, имеющая конечный предел, называется ***сходящейся***, в противном случае – ***расходящейся***.

Последовательность $(x_n)$ называется: **1)** ***убывающей***, если $x_1>x_2>\ldots>x_n>\ldots$; **2)** ***возрастающей***, если $x_1<x_2<\ldots<x_n<\ldots$; **3)** ***неубывающей***, если $x_1\leq x_2\leq\ldots\leq x_n\leq\ldots$; **4)** ***невозрастающей***, если $x_1\geq x_2\geq\ldots\geq x_n\geq\ldots$ . Все вышеперечисленные последовательности называются ***монотонными***.

Последовательность $(x_n)$ называется ***ограниченной***, если существует число $M>0$ такое, что для всех $n\in N$ выполняется условие: $|x_n|\leq M$ . В противном случае последовательность - ***неограниченная***.

**Теорема Вейерштрасса**. Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Последовательность $(x_n)$ называется ***бесконечно малой***, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Последовательность $(x_n)$ называется ***бесконечно большой*** (сходящейся к бесконечности) и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, если для любого числа $\mathrm{E}>0$ найдётся номер $N(\mathrm{E})$ такой, что при всех $n > N(\mathrm{E})$ выполняется неравенство $|x_n| > \mathrm{E}$.

***Числом*** $e$ называется предел последовательности $(x_n)$, где $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

Постоянную $e = 2.718281....$ называют неперовым числом. Логарифм числа $x$ по основанию $e$ называется натуральным логарифмом числа $x$ и обозначается $\log_e x = \ln x$.

## Тема. <u>Предел функции.</u>

Число $b$ называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ ***при*** $x \to x_0$ (или в точке $x_0$), и пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $x$, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Число $b$ называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ ***при*** $x \to \infty$, и пишут $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся число $\Delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $x$, удовлетворяющих условию $|x| > \Delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Рассматривают также односторонние пределы функций: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, где $x$ стремится к $x_0$, $+\infty$, $-\infty$ или только с левой стороны или только с правой стороны.

Основные утверждения, используемые для вычисления пределов функций при $x \to a$ (в дальнейшем $a$ - или число $x_0$ или символ $\infty$):

**1)** Если $c$ - постоянная величина, то $\lim\limits_{x \to a} c = c$.

**2)** Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = d$, то:

**а)** $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = b \pm d$; **б)** $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = b \cdot d$;

**в)** $\lim\limits_{x \to a} (cf(x)) = c \cdot b \quad (c = const)$; **г)** $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{d}$, если $d \neq 0$.

При вычислении пределов постоянно пользуются и тем, что для любой основной элементарной функции $f(x)$ и точки $x_0$ из её области определения справедливо соотношение $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция $f(x)$ называется ***бесконечно большой*** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$. Функция $f(x)$ называется ***бесконечно малой*** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Основные утверждения для бесконечно больших функций, используемые для вычисления пределов при $x \to a$:

**1)** Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$ ,если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty$

**2)** Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = d$, то $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \infty$.

**3)** Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = +\infty$.

**4)** Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = d \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \infty$.

**5)** Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a}(f(x)/g(x)) = 0$.

**6)** Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \neq 0$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to a}(f(x)/g(x)) = \infty$.

Если непосредственное применение свойств конечных пределов и бесконечно больших функций приводит к неопределённым выражениям, символически обозначаемым: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \infty-\infty$, то для вычисления предела – «раскрытия неопределённости» - преобразовывают выражение так, чтобы получить возможность его вычислить.

***Первым замечательным пределом*** называется предел: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Следствиями из него являются пределы:

$$\lim_{x\to 0} \frac{tgx}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{arctgx}{x} = 1$$

***Вторым замечательным пределом*** называются пределы:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e,$$

где $e = 2.71828...$-основание натуральных логарифмов (число Непера). Он используется для вычисления предела степенно-показательной функции $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)}$, где $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 1$ и $\lim\limits_{x\to a} v(x) = \infty$.

При нахождении пределов $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)}$ следует иметь в виду:

**1)** Если $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b > 0$, $\lim\limits_{x\to a} v(x) = d$, то $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = b^d$.

**2)** Если $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b \neq 1$, $\lim\limits_{x\to a} v(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)}$ вычисляют, учитывая, что: $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ v(x)\to+\infty}} b^{v(x)} = \begin{cases} 0, & 0 < b < 1 \\ +\infty, & b > 1 \end{cases}$, $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ v(x)\to-\infty}} b^{v(x)} = \begin{cases} +\infty, & 0 < b < 1 \\ 0, & b > 1 \end{cases}$.

Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to a$ называются ***эквивалентными***, и пишут $\alpha \sim \beta$, если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Принцип замены эквивалентных бесконечно малых функций, состоит в том, что при вычислении предела частного $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ или произведения $\alpha(x)\,\beta(x)$ одну из функций (или обе) в этих выражениях можно заменить эквивалентной функцией. Так, если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \to a$, то:

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)};$$

$$\lim_{x\to a} (\alpha(x)\,\beta(x)) = \lim_{x\to a} (\alpha_1(x)\,\beta(x)) = \lim_{x\to a} (\alpha(x)\,\beta_1(x)) = \lim_{x\to a} (\alpha_1(x)\,\beta_1(x))$$

| *Основные эквивалентности при $\alpha(x) \to 0$* | | | |
|---|---|---|---|
| $\sin\alpha \sim \alpha$ | $tg\alpha \sim \alpha$ | $\arcsin\alpha \sim \alpha$ | $arctg\alpha \sim \alpha$ |
| $1 - \cos\alpha \sim \dfrac{\alpha^2}{2}$ | $e^{\alpha} - 1 \sim \alpha$ | $a^{\alpha} - 1 \sim \alpha \ln a$ | $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$ |
| $\log_a(1+\alpha) \sim \dfrac{\alpha}{\ln a}$ | $(1+x)^m - 1 \sim m\alpha$ | $\sqrt[n]{(1+x)^m} - 1 \sim \dfrac{m\alpha}{n}$ | |

## Тема. <u>Непрерывность функции. Точки разрыва.</u>

Если функция $f(x)$ определена всюду в некоторой окрестности точки $x_0$ (левой полуокрестности, правой полуокрестности) и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ ($\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$), то функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** $x_0$ (непрерывной слева, непрерывной справа).

Каждая основная элементарная функция непрерывна в каждой внутренней точке своей области определения и непрерывна слева (справа) в крайней правой (крайней левой) точке области определения.

Если в точке $x_0$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$, то $x_0$ называется ***точкой разрыва*** функции $f(x)$. При этом различают следующие случаи:

**1)** Если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)\neq f(x_0)$, то $x_0$ называется ***точкой устранимого разрыва*** функции $f(x)$.

**2)** Если в точке $x_0$ функция $f(x)$ имеет конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, но они не равны друг другу, то $x_0$ называется ***точкой разрыва 1-ого рода.***

**3)** В остальных случаях $x_0$ называется ***точкой разрыва 2-ого рода*** .

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной на отрезке*** $[a,b]$, если она непрерывна в каждой его точке (в точке $a$ - непрерывна справа, в точке $b$ - непрерывна слева). Функция $f(x)$ непрерывная на отрезке $[a,b]$ обладает свойствами: **1)** ограничена на $[a,b]$; **2)** достигает на отрезке $[a,b]$ своего наименьшего значения $m$ и наибольшего значения $M$; **3)** для любого числа $C$, заключённого между числами $f(a)$ и $f(b)$, всегда найдётся точка $c\in[a,b]$ такая, что $f(c)=C$; **4)** если $f(a)f(b)<0$, то всегда найдётся точка $c\in(a,b)$ такая, что $f(c)=0$.

## Тема. <u>Производные и дифференциалы функции одной переменной.</u>

***Приращением функции*** $y=f(x)$ в точке $x_0$, соответствующим приращению аргумента $\Delta x\neq 0$ называется выражение $\Delta y=\Delta f(x_0,\Delta x)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

***Производной 1-ого порядка*** функции $y=f(x)$ в точке $x_0$ называется конечный предел $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0,\Delta x)}{\Delta x}$. Геометрический смысл производной состоит в том, что число $f'(x_0)$ равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x_0$: $f'(x_0) = tg\alpha$, где $\alpha$ - угол наклона касательной к оси $Ox$ прямоугольной декартовой системы координат $Oxy$.

Функция, имеющая производную в данной точке, называется ***дифференцируемой*** в этой точке. Необходимым условием дифференцируемости в точке является непрерывность функции в данной точке.

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} = \infty$, то говорят, что в точке $x_0$ функция $f(x)$ имеет ***бесконечную производную.*** В этом случае касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ перпендикулярна к оси $Ox$.

Числа $f'_-(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}$ и $f'_+(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}$ называются, соответственно ***левой*** и ***правой производными*** функции $y = f(x)$ в точке $x_0$. Условие $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ равносильно дифференцируемости функции $f(x)$ в точке $x_0$, при этом $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Любая элементарная функция $y = f(x)$ дифференцируема во всякой внутренней точке $x$ естественной области определения $D$ функции $f(x)$, в которой аналитическое выражение её производной $y' = f'(x)$ имеет смысл. Производная $f'(x)$, рассматриваемая на множестве тех точек $x$, где она существует, сама является функцией. Операция нахождения производной $f'(x)$ называется также ***дифференцированием*** функции $f(x)$**.**

***Основные правила дифференцирования элементарных функций.***

**1.** Если $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемые функции, $C$ - постоянная, то:

| | |
|---|---|
| $(C)' = 0$ | $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ |
| $(f \pm g)' = f' \pm g'$ | $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$, $g \neq 0$ |
| $(Cf)' = Cf'$ | $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$, $g \neq 0$ |

**2.** Если функция $u=\varphi(x)$ дифференцируема в точке $x_0$, а функция $y=F(u)$ дифференцируема в точке $u_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция $y=f(x)=F(\varphi(x))$ дифференцируема в точке $x_0$ и имеет производную:

$$\boxed{f'(x_0)=F'(u_0)\varphi'(x_0)} \quad \text{или кратко} \quad \boxed{y'_x=y'_u\,u'_x}..$$

***Логарифмической производной*** функции $y=f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, т.е. $(\ln y)'=\dfrac{y'}{y}=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Применение предварительного логарифмирования функции приводит к следующему, часто более простому, способу вычисления её производной: $y'=y\cdot(\ln y)'$. Например, для степенно-показательной функции $y=f(x)=u^v$, где $u(x)>0$, $v(x)$ - дифференцируемые функции:

$$\left(u^v\right)'=u^v(v\cdot\ln u)'.$$

Если дифференцируемая функция $y=y(x)$ задана неявно уравнением $F(x,y(x))=0$, то производная $y'=y'(x)$ этой неявной функции может быть найдена из уравнения $F'_x(x,y)=0$, линейного относительно $y'(x)$, где $F(x,y(x))$ -рассматривается как сложная функция переменной $x$.

Если $y=f(x)$ и $x=f^{-1}(y)$ -взаимно обратные дифференцируемые функции и $y'_x\neq 0$, то справедлива формула: $x'_y=\dfrac{1}{y'_x}$ (***правило дифференцирования обратной функции***).

Если дифференцируемая функция $y=y(x)$ задана параметрически: $x=x(t)$, $y=y(t)$ $(\alpha<t<\beta)$, где $x(t)$, $y(t)$ -дифференцируемые функции и $x'_t\neq 0$, то справедлива формула: $y'_x=y'_t/x'_t$ (***правило дифференцирования функции заданной параметрически)***.

При дифференцировании сложных и обратных функций, а также функций заданных неявно и параметрически для производной используют обозначения типа $y'_x, x'_y, y'_t, x'_t$ там, где необходимо уточнить, по какой переменной ведётся дифференцирование.

***Производной 2-ого порядка*** от функции $y=f(x)$ называется производная от её первой производной и обозначается $y''=f''(x)$, т. е. $y''=(y')'$. В общем ***производной порядка*** $n$ **(**$n$ ***-ой производной*****)** называется производная от $(n-1)$-ой производной и обозначается $y^{(n)}=f^{(n)}(x)$, т.е.

$y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$ .Для производной $y^{(n)}$ используется также обозначение $\dfrac{d^n y}{dx^n}$.

Производная $y^{(n)}$ функции $y=f(x)$ вычисляется её последовательным дифференцированием: $y'$, $y''=(y')'$, $y'''=(y'')'$, …, $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$. Если функция $y=f(x)$ задана параметрически, то её производные высших порядков находятся по формулам:

$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t},\ y'''_{xxx}=\frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t},\ldots$$

Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке $x$, то её приращение $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x_0)$ может быть представлено в виде:

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x\text{, где }\alpha(\Delta x)\to 0\text{ при }\Delta x\to 0.$$

***Дифференциалом*** $dy$ функции $y=f(x)$ в точке $x$ называется главная, линейная относительно $\Delta x$ часть $f'(x)\Delta x$ приращения $\Delta y$ функции: $dy=f'(x)\Delta x$. В частности, для функции $y=x$ имеем $dy=\Delta x$, т.е. дифференциал независимого переменного $x$ совпадает с приращением $\Delta x$. Поэтому дифференциал функции $y=f(x)$ записывается в виде $dy=f'(x)dx$. Форма записи первого дифференциала не изменится и в том случае, если переменная $x$ является функцией от новой независимой переменной (***свойство инвариантности формы первого дифференциала***).

Для функции одной переменной $y=f(x)$ существование в точке $x$ её дифференциала $dy$ и производной $f'(x)$ равносильны.

***Дифференциалом 2-ого порядка*** функции $y=f(x)$ называется дифференциал от её первого дифференциала и обозначается $d^2y$, т. е. $d^2y=d(dy)$. В общем ***дифференциалом порядка*** $n$ называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-ого порядка и обозначается $d^n y$, т.е. $d^n y=d(d^{n-1}y)$.

Если $x$ - независимая переменная, то для нахождения дифференциала $d^n y$ функции $y=f(x)$ справедлива формула $d^n y=f^{(n)}(x)dx^n$.

Первый дифференциал применяют для приближённого вычисления значений функции $y=f(x)$ в малой окрестности точки $x_0$, в которой функция дифференцируема, по формуле:

$$f(x)\approx f(x_0)+df(x_0)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x\text{, где }x=x_0+\Delta x.$$

Чем меньше значение $|\Delta x|$, тем точнее приближённая формула.

***Уравнение касательной*** к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, а ***уравнение нормали*** - вид: $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$. ***Углом между*** двумя ***кривыми*** $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ в точке их пересечения $M_0(x_0, y_0)$ называется угол $\varphi$ между касательными к этим кривым в точке $M_0$, тангенс которого вычисляется по формуле: $tg\varphi = \left|\dfrac{f_1'(x_0) - f_2'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) f_2'(x_0)}\right|$.

## Тема. Основные теоремы о дифференцируемых функциях и их приложения.

**Теорема Роля.** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале $(a,b)$ и $f(a) = f(b)$, то на $(a,b)$ существует точка $c$ такая, что $f'(c) = 0$.

**Теорема Лагранжа**. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале $(a,b)$, то на $(a,b)$ существует точка $c$ такая, что $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$ (***формула Лагранжа***).

**Теорема Коши**. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, дифференцируемы на интервале $(a,b)$ и $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a,b)$, то на интервале $(a,b)$ существует точка $c$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$ (***формула Коши***).

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема $n$ раз в точке $x_0$, то при $x \to x_0$ имеет место ***формула Тейлора (порядка $n$) с остаточным членом в форме Пеано***

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Если предположить существование $(n+1)$-ой производной $f^{(n+1)}(x)$ в окрестности точки $x_0$ то для любой точки $x$ из этой окрестности имеет место ***формула Тейлора (порядка $n$) с остаточным членом в форме Лагранжа***

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$ где

$c=x_0+\theta(x-x_0)$, $0<\theta<1$.

Формула Тейлора (с остаточным членом в любой форме) в частном случае $x_0=0$ обычно называется ***формулой Маклорена***.

Формула Тейлора используется при вычислении значений функции с заданной степенью точности $\varepsilon$, при вычислении пределов функций.

Из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа следует, что

$f(x)\approx f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n^*)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n^*}$, где $n^*$-минимальный из номеров $n$ для которых $\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|<\varepsilon$.

При вычислении пределов функций используют формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

**Правило Лопиталя.** Предел отношения двух дифференцируемых или бесконечно малых или бесконечно больших функций при $x\to a$ ($a$ - число $x_0$ или символ $\infty$) равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует в указанном смысле: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Правило Лопиталя используют для раскрытия неопределённостей видов $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

На каждом этапе применения правила Лопиталя следует пользоваться упрощающими отношение тождественными преобразованиями, а также комбинировать это правило с любыми другими приёмами вычисления пределов. В некоторых случаях может потребоваться неоднократное применение данного правила.

Раскрытие неопределённостей видов $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, $1^\infty$, $\infty^0$, $0^0$ путём преобразований:

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f}{1/g},\ f(x)-g(x)=\frac{(1/g)-(1/f)}{(1/f)\cdot(1/g)},\ f(x)^{g(x)}=e^{g\ln f}=e^{\frac{\ln f}{1/g}}$$

приводится к раскрытию неопределенностей видов $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

**Тема. <u>Исследование функций с помощью производных, построение их графиков.</u>**

**1. <u>Возрастание, убывание функций. Экстремум.</u>**

Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей*** **(*убывающей*)** на интервале $(a, b)$, если для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a, b)$ и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) при всех $x \in (a, b)$, то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на $(a, b)$.

Точка $x_0$, принадлежащая области определения $D$ функции $y = f(x)$, называется ***критической точкой*** функции, если в этой точке $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует. Критические точки функции $y = f(x)$ разбивают её область определения $D$ на интервалы монотонности (интервалы возрастания и убывания).

Точка $x_0 \in D$ называется ***точкой минимума*** **(*максимума*)** функции $y = f(x)$, если существует окрестность точки $x_0$ такая, что для всех точек $x \neq x_0$ этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$), а число $f(x_0)$ - ***минимумом*** **(*максимумом*)** функции. Точки минимума и максимума функции называются ***точками экстремума*,** а значения функции в этих точках – экстремумами функции.

**Необходимое условие экстремума.** Если $x_0 \in D$ - точка экстремума функции $y = f(x)$, то $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует.

**Первое достаточное условие экстремума**. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в окрестности точки $x_0 \in D$, в которой $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует. Тогда, если производная $f'(x)$, при переходе слева направо через точку $x_0$: **1)** меняет знак с «+» на « $-$ », то $x_0$ - точка максимума; **2)** меняет знак с знак с « $-$ » на «+», то $x_0$ - точка минимума; **3)** сохраняет знак, то $x_0$ не является точкой экстремума.

**Второе достаточное условие экстремума**. Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в точке $x_0 \in D$, в которой $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$ . Тогда: **1)** если $f''(x_0) < 0$, то $x_0$ - точка максимума; **2)** если $f''(x_0) > 0$, то $x_0$ - точка минимума.

**2. <u>Наибольшее и наименьшее значения функции.</u>**

***Наибольшее и наименьшее значения*** функции $y = f(x)$ непрерывной и кусочно-дифференцируемой (дифференцируемой, за исключением, быть может, конечного числа точек) на отрезке $[a,b]$ достигается или во внутренних критических точках или на концах отрезка.

## 3. <u>Выпуклость, вогнутость, точки перегиба. Асимптоты.</u>

Функция $y = f(x)$ называется ***выпуклой*** **(*вогнутой*)** на интервале $(a,b)$, если её график лежит под касательной (над касательной), проведённой к графику данной функции, в любой точке интервала $(a,b)$.

Иногда выпуклость называют выпуклостью вверх, а вогнутость – выпуклостью вниз.

Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $(a,b)$ и $f''(x) > 0$ ( $f''(x) < 0$ ) при всех $x \in (a,b)$, то функция является вогнутой (выпуклой) на $(a,b)$.

Точка $x_0$, принадлежащая области определения $D$ функции $y = f(x)$, называется ***точкой перегиба*** функции, если при переходе через неё меняется направление выпуклости функции. Точка $(x_0, f(x_0))$ при этом называется ***точкой перегиба графика*** функции.

Точка $x_0 \in D$ называется ***точкой возможного перегиба*** функции $y = f(x)$, если в этой точке $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует. Эти точки разбивают область определения $D$ функции $y = f(x)$ на интервалы выпуклости и вогнутости.

**Необходимое условие перегиба.** Если $x_0 \in D$ - точка перегиба функции $y = f(x)$, то $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует.

**Достаточное условие перегиба.** Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в окрестности точки $x_0 \in D$, в которой $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует. Тогда, если производная $f''(x)$, при переходе через точку $x_0$ меняет знак, то $x_0$ - точка перегиба.

Прямая $L$ называется асимптотой графика $\Gamma$ функции $y = f(x)$, если расстояние от точки $M \in \Gamma$ до прямой $L$ стремится к нулю при бесконечном удалении точки $M$ от начала координат.

Прямая $x = x_0$ называется ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ равен бесконечности.

Прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой, тогда и только тогда, когда $x_0$ является точкой бесконечного разрыва функции $y = f(x)$. Непрерывные функции не имеют вертикальных асимптот.

Прямая $y = kx + b$ называется ***наклонной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$ (при $x \to +\infty$), если $\lim\limits_{x \to -\infty}(f(x) - kx - b) = 0$ (соответственно, $\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) - kx - b) = 0$). Частным случаем наклонной асимптоты (при $k = 0$) является ***горизонтальная асимптота***.

Прямая $y = kx + b$ является ***наклонной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$ (при $x \to +\infty$) тогда и только тогда, когда одновременно существуют пределы: $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x \to -\infty}(f(x) - kx) = b$ (соответственно, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) - kx) = b$).

**4. <u>Построение графиков функций.</u>**

Для построения графика функции $y = f(x)$ нужно: **1)** найти область определения функции; **2)** найти область непрерывности функции и точки разрыва; **3)** исследовать функцию на чётность, нечётность и периодичность; **4)** найти точки пересечения графика с осями координат; **5)** найти асимптоты графика функции; **6)** найти интервалы возрастания и убывания, экстремумы функции; **7)** найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

## Тема. <u>Основные понятия о функции нескольких переменных</u>.

Всякий упорядоченный набор из $n$ действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется ***точкой*** $n$***-мерного арифметического*** (координатного) ***пространства*** $R^n$ и обозначается $\bar{x}$ или $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при этом числа $x_i$ называются её ***координатами***.

Пространство $R^n$ называется ***евклидовым***, если расстояние между любыми двумя его точками $M(x_1, \ldots, x_n)$ и $M_0(x_{10}, \ldots, x_{n0})$ определяется формулой $\rho(M, M_0) = \sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + \ldots + (x_n - x_{n0})^2}$.

Пусть $X \subset R^n$ и $Y \subset R$ - некоторые множества точек $R^n$ и $R$. Если каждой точке $M \in X$ ставится в соответствие по некоторому правилу $f$ одно вполне определённое действительное число $y \in Y$, то говорят, что на множестве $X$ задана числовая функция от $n$ переменных и пишут $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ или кратко $y = f(M)$ и $y = f(\bar{x})$, при этом $X$ называется ***областью определения***, $Y$ - ***множеством значений***, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - ***аргументами*** (независимыми переменными) функции.

Функцию двух переменных часто обозначают $z = f(x, y)$, функцию трёх переменных - $u = f(x, y, z)$. Область определения функции $z = f(x, y)$ представляет собой некоторое множество точек плоскости, функции $u = f(x, y, z)$ - некоторое множество точек пространства.

Наиболее распространённым способом задания функции является аналитический способ, при котором функция задаётся формулой. ***Естественной областью определения*** функции $y = f(M)$ называется множество $D \subset R^n$ точек $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для координат которых формула имеет смысл.

***Графиком функции*** $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ в прямоугольной системе координат $Oxyz$, называется множество точек пространства с координатами $(x, y, f(x, y))$, $(x, y) \in D$, представляющее собой, вообще говоря, некоторую поверхность в $R^3$.

***Линией уровня функции*** $z = f(x, y)$ называется линия $f(x, y) = C$ на плоскости $Oxy$, в точках которой функция принимает одно и тоже значение $z = C$.

Число $b$ называется ***пределом функции*** $y = f(M)$ при $M \to M_0$ (или в точке $M_0$), и пишут $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = b$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $M$, удовлетворяющих условию $0 < \rho(M, M_0) < \delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|f(M) - b| < \varepsilon$. Для функции $z = f(x, y)$ пишут $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = b$. Вычисление предела функции нескольких переменных часто сводят к вычислению предела функции одной переменной с помощью замены переменных.

Функция $y = f(M)$ называется ***непрерывной в точке*** $M_0$, если $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$. Функция непрерывная в каждой точке некоторой области, называется ***непрерывной в*** этой ***области.*** Если в точке $M_0$ нарушено хотя бы одно из следующих условий: **1)** функция $f(M)$ определена в точке $M_0$; **2)** существует конечный предел $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$; **3)** $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$, то $M_0$ называется ***точкой разрыва*** функции

$y=f(M)$. Точки разрыва могут быть изолированными, образовывать линии разрыва, поверхности разрыва.

**Тема. <u>Производные и дифференциалы функции нескольких переменных, их приложения.</u>**

***Частной производной (1-ого порядка)*** функции $y=f(M)$ в точке $M(x_1,\ldots x_k,\ldots,x_n)$ по переменной $x_k$ называется предел $\lim\limits_{\Delta x_k\to 0}\dfrac{f(x_1,\ldots,x_k+\Delta x_k,\ldots,x_n)-f(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n)}{\Delta x_k}$, если этот предел существует. Частную производную обозначают $\dfrac{\partial y}{\partial x_k}$ или $y'_{x_k}$.

Частные производные вычисляются по обычным правилам дифференцирования функции одной переменной, в предположении, что все аргументы функции, кроме аргумента $x_k$, по которому берётся производная, постоянны.

***Частными производными второго порядка*** функции $y=f(M)$ называются частные производные от её частных производных первого порядка. При этом используются обозначения:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial y}{\partial x_k}\right)=\frac{\partial^2 y}{\partial x_k^2}=y''_{x_kx_k}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial y}{\partial x_k}\right)=\frac{\partial^2 y}{\partial x_k\partial x_m}=y''_{x_kx_m}\ \ (k\neq m).$$

Производные $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x_k\partial x_m}$ ($k\neq m$) называются ***смешанными.*** Аналогично определяются и обозначаются частные производные порядка выше второго. Для функции $z=f(x,y)$ частные производные обозначаются:

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ldots \text{ или } z'_x,\ z'_y,\ z''_{xx},\ z''_{xy},\ z''_{yx},\ z''_{yy},\ldots .$$

Если смешанные частные производные, подлежащие вычислению, непрерывны, то результат многократного дифференцирования функции по различным переменным не зависит от порядка дифференцирования.

***Полным приращением функции*** $y=f(M)$ в точке $M(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, соответствующим приращениям аргументов $\Delta x_1,\Delta x_2,\ldots,\Delta x_n$ называется разность $\Delta y=f(x_1+\Delta x_1,x_2+\Delta x_2,\ldots,x_n+\Delta x_n)-f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Функция $y=f(M)$ называется ***дифференцируемой*** в точке $M(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, если её полное приращение может быть представлено в виде $\Delta y=A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+\ldots+A_n\Delta x_n+o(\rho)$, где

$\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_n^2} \to 0$ при $\Delta x_1 \to 0, \Delta x_2 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0$, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - числа, не зависящие от $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$.

***Полным дифференциалом*** $dy$ функции $y = f(M)$ в точке $M$ называется главная, линейная относительно $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ часть $A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_n \Delta x_n$ полного приращения $\Delta y$ функции, равная $dy = \dfrac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \dfrac{\partial y}{\partial x_n} dx_n$, где $dx_1 = \Delta x_1, \ldots, dx_n = \Delta x_n$.

Функция $y = f(M)$, обладающая в точке $M$ непрерывными частными производными, всегда имеет в этой точке полный дифференциал $dy$. Для функции $y = f(M)$ дифференцируемость в точке равносильна существованию в этой точке её полного дифференциала.

Форма записи первого дифференциала не изменится и в том случае, если переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются функциями новых, независимых переменных (***свойство инвариантности формы первого дифференциала***).

***Дифференциалом 2-ого порядка*** функции $y = f(M)$ называется дифференциал от её первого дифференциала и обозначается $d^2 y$, т. е. $d^2 y = d(dy)$. В общем ***дифференциалом порядка*** $m$ называется дифференциал от дифференциала $(m-1)$-ого порядка и обозначается $d^m y$, т.е. $d^m y = d(d^{m-1} y)$.

Если $x$ - независимая переменная, то для нахождения дифференциала $d^m y$ функции $y = f(M)$ справедлива символическая формула $d^m y = \left( \dfrac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \dfrac{\partial}{\partial x_n} \right)^m y$, формально раскрываемая по биномиальному закону. Например, для функции $z = f(x, y)$ справедливы формулы:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \qquad d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2,$$

а для функции $u = f(x, y, z)$ - формулы: $du = \dfrac{\partial u}{\partial x} dx + \dfrac{\partial u}{\partial y} dy + \dfrac{\partial u}{\partial z} dz$,

$$d^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dx dz + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dy dz.$$

Для функции $y = f(M)$ $m$-кратная дифференцируемость в точке $M$ равносильна существованию в этой точке её полного дифференциала $m$-ого порядка $d^m y$.

Если функция $y = f(x_1, \dots, x_n)$ $m$ раз дифференцируема в точке $M(x_1, \dots, x_n)$, то в этой точке значение любой смешанной частной производной $m$-ого порядка не зависит от порядка дифференцирования.

Если функция $y = f(x_1, \dots, x_n) = f(M)$ дифференцируема $m$ раз в точке $M_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$, то при $M \to M_0$ имеет место ***формула Тейлора (порядка*** $m$***) с остаточным членом в форме Пеано***

$$f(M) = f(M_0) + \frac{df(M_0)}{1!} + \frac{d^2 f(M_0)}{2!} + \dots + \frac{d^m f(M_0)}{m!} + o(\rho^m),$$

где $\rho = \rho(M, M_0) \to 0$ при $M \to M_0$. Частный случай формулы Тейлора в точке $(0,0,\dots,0)$ называется ***формулой Маклорена***.

***Уравнение касательной плоскости*** к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

а ***уравнение нормали*** – вид $\dfrac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \dfrac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \dfrac{z - z_0}{-1}$.

Первый дифференциал применяют для приближённого вычисления значений функции $y = f(M)$ в малой окрестности точки $M_0$, в которой функция дифференцируема, по формуле: $f(M) \approx f(M_0) + df(M_0)$.

В частности, для функции $z = f(x, y)$ по формуле: $f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y$, где $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$. Чем меньше значение $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, тем точнее формула.

Если $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - дифференцируемая функция переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, являющихся дифференцируемыми функциями независимой переменной $t$: $x_1 = \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, x_n = \varphi_n(t)$, то производная сложной функции $y = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$ вычисляется по формуле $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial y}{\partial x_1}\dfrac{dx_1}{dt} + \dfrac{\partial y}{\partial x_2}\dfrac{dx_2}{dt} + \dots + \dfrac{\partial y}{\partial x_n}\dfrac{dx_n}{dt}$. Если $t$ совпадает с одним из аргументов, например $x_1$, то производная $\frac{dy}{dx_1}$, называемая «полной» производной функции $y$ по $x_1$, вычисляется по формуле

$$\frac{dy}{dx_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1} + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dx_1} .$$

Если $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - дифференцируемая функция переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, являющихся дифференцируемыми функциями независимых переменных $t_1, \ldots, t_m$: $x_1 = \varphi_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, x_n = \varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, то частные производные сложной функции $y = f(\varphi_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, \varphi_n(t_1, \ldots, t_m))$ вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial y}{dt_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial y}{dt_m} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_m} + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_m} .$$

В частности, для функции $y = f(x, y)$ справедливы формулы:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} , \qquad \text{где } x = x(t), y = y(t) ;$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}, \qquad \text{где } y = y(x) ;$$

$$\frac{\partial z}{du} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \; \frac{\partial z}{dv} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}, \text{ где } x = x(u, v), \; y = y(u, v) .$$

Если уравнение $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$, где $F$ - дифференцируемая функция по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$, определяет $y$ как функцию независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то частные производные этой неявной функции $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = -\frac{F'_{x_1}}{F'_y}, \frac{\partial y}{\partial x_2} = -\frac{F'_{x_2}}{F'_y}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x_n} = -\frac{F'_{x_n}}{F'_y} \text{ при условии, что } F'_y \neq 0 .$$

В частности, для функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением $F(x, y) = 0$ справедлива формула $y'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$ $y'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_z}$, при условии $F'_y \neq 0$, а для функции $y = f(x, y)$, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$

справедливы формулы: $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$, при условии $F'_z \neq 0$.

Частные производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием данных формул.

***Уравнение касательной плоскости*** к поверхности $z=f(x,y)$, заданной неявным уравнением $F(x,y,z)=0$, в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ имеет вид $F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$, а ***уравнение нормали*** –вид $\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}$.

## Тема. Экстремумы функций нескольких переменных.

Точка $M_0(x_{10},\ldots,x_{n0})$, принадлежащая области определения $D$ функции $y=f(x_1,\ldots,x_n)=f(M)$, называется ***стационарной точкой*** функции, если в этой точке каждая из её частных производных равна нулю, т.е. $f'_{x_1}(M_0)=0,\ldots,f'_{x_n}(M_0)=0$ или $df(M_0)=0$.

Точка $M_0$ называется ***точкой минимума*** (***максимума***) функции $y=f(M)$, если существует окрестность точки $M_0$ такая, что для всех точек $M \neq M_0$ этой окрестности выполняется неравенство $f(M)>f(M_0)$ ($f(M)<f(M_0)$).

Точки минимума и максимума функции называются ***точками экстремума***, а значения функции в этих точках – ***экстремумами функции***.

**Необходимое условие экстремума**. Если $M_0$ - точка локального экстремума функции $y=f(M)$, дифференцируемой в точке $M_0$, то $M_0$ - стационарная точка функции.

**Достаточное условие экстремума**. Пусть $M_0$ - стационарная точка дважды дифференцируемой в точке $M_0$ функции $y=f(M)$. Тогда, если при всевозможных наборах значений $dx_1,\ldots,dx_n$, не равных одновременно нулю:

**1)** $d^2f(M_0)<0$, то в точке $M_0$ функция $f(M)$ имеет максимум; **2)** $d^2f(M_0)>0$, то в точке $M_0$ функция имеет минимум; **3)** $d^2f(M_0)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, то в точке $M_0$ функция $f(M)$ не имеет экстремума.

Исследование знака $d^2 f(M_0)$ сводится к исследованию знакоопределённости второго дифференциала, как квадратичной формы относительно переменных $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ (например, с помощью критерия Сильвестра).

В частности, функция $z = f(x, y)$ в стационарной точке $M_0(x_0, y_0)$, при условии $D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 \neq 0$, где $A = f''_{xx}(M_0), B = f''_{xy}(M_0)$, $C = f''_{yy}(M_0)$: **1)** имеет максимум, если $D > 0$ и $A < 0$; **2)** имеет минимум, если $D > 0$ и $A > 0$; **3)** не имеет экстремума, если $D < 0$.

Если функция $y = f(M)$ дифференцируема в ограниченной и замкнутой области, то она достигает своих наибольшего и наименьшего значений в этой области или в стационарной точке, или в граничной точке области.

## Тема. <u>Элементы теории поля.</u>

Пусть $D$ - область в двумерном пространстве. ***Скалярным полем*** на $D$ называется числовая функция $u = f(M)$, заданная в точках $M(x, y) \in D$. Линии $f(x, y) = C$, где $C = const$ называются ***линиями уровня*** скалярного поля $u = f(x, y)$.

Пусть $V$ - область в трёхмерном пространстве.

***Скалярным полем*** на $V$ называется числовая функция $u = f(M)$, заданная в точках $M(x, y, z) \in V$. Поверхности $f(x, y, z) = C$, где $C = const$ называются ***поверхностями уровня*** скалярного поля $u = f(x, y, z)$.

***Градиентом*** скалярного поля $u = f(x, y, z)$ называется вектор

$$grad\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial x}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial x}\vec{k}.$$

***Производная*** скалярного поля $u = f(x, y, z)$ ***по направлению*** произвольного вектора $\vec{\ell} = \ell_x \vec{i} + \ell_y \vec{j} + \ell_z \vec{k}$ вычисляется по формуле $\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$, где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - направляющие косинусы вектора $\vec{\ell}$.

Градиент скалярного поля $u = f(M)$ в точке $M(x, y, z)$ направлен по нормали к поверхности уровня $f(x, y, z) = C$, проходящей через $M(x, y, z)$ в сторону возрастания поля, а его модуль $|grad\, u|$ равен наибольшей производной по направлению в этой точке.

Пусть $V$ - область в трёхмерном пространстве. ***Векторным полем*** на $V$ называется векторная функция $\vec{a} = \vec{a}(M) = \vec{a}(\vec{r})$, заданная в точках $M(x, y, z) \in V$, где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ - радиус-вектор точки $M(x, y, z)$. Аналогично определяется плоское векторное поле.

***Векторной линией*** (***силовой линией***, ***линией тока***) называется гладкая кривая, касательная к которой в каждой точке $M(x, y, z)$ имеет направление соответствующего ей вектора поля $\vec{a}(M)$. Векторные линии поля $\vec{a}(M)$ находятся из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{a_x(x, y, z)} = \frac{dy}{a_y(x, y, z)} = \frac{dz}{a_z(x, y, z)}.$$

Если $\Gamma$ - плоская кусочно-гладкая простая (без точек самопересечений) замкнутая кривая, нигде не касающаяся векторных линий поля $\vec{a}$, то поверхность, образованная векторными линиями, пересекающими $\Gamma$, называется ***векторной трубкой*** поля $\vec{a}$.

***Дивергенцией*** векторного поля $\vec{a}(M) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ называется скалярная величина $div\vec{a} = \dfrac{\partial a_x}{\partial x} + \dfrac{\partial a_y}{\partial y} + \dfrac{\partial a_z}{\partial z}$.

***Ротором*** (***вихрем***) векторного поля $\vec{a}(M) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ называется вектор $rot\vec{a} = \left(\dfrac{\partial a_z}{\partial y} - \dfrac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\dfrac{\partial a_x}{\partial z} - \dfrac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\dfrac{\partial a_y}{\partial x} - \dfrac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}$.

Все операции векторного анализа можно выразить при помощи ***оператора Гамильтона*** – символического вектора $\nabla$ (читается - набла), определяемого равенством $\nabla = \vec{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$. Так, например: $grad u = \nabla u$, $div\,\vec{a} = \nabla \cdot \vec{a}$,

$$rot\,\vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется ***потенциальным***, если $\vec{a} = grad\,u$, где $u = f(M)$ -скалярная функция (***потенциал*** векторного поля).

Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется ***соленоидальным***, если в каждой точке поля $div\,\vec{a} = 0$.

## 6.3 Основные математические формулы.

**Формулы сокращённого умножения:**

**1.** $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ **2.** $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

**3.** $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

**4.** $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$ **5.** $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$

**Формулы тригонометрии:**

**1.** $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$ **2.** $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1,$

**3.** $1 + tg^2\alpha = 1/\cos^2\alpha$, **4.** $1 + ctg^2\alpha = 1/\sin^2\alpha$ **.**

**5.** $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$

**6.** $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$

**7.** $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ **8.** $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

**9.** $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos[(\alpha+\beta)/2] \cdot \cos[(\alpha-\beta)/2]$

**10.** $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin[(\alpha+\beta)/2] \cdot \sin[(\alpha-\beta)/2]$

**11.** $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin[(\alpha+\beta)/2] \cdot \cos[(\alpha-\beta)/2]$

**12.** $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin[(\alpha-\beta)/2] \cdot \cos[(\alpha+\beta)/2]$

**13.** $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$ **14.** $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$

**Формулы приведения.**

| Функция | $\beta = \frac{\pi}{2} \pm \alpha$ | $\beta = \pi \pm \alpha$ | $\beta = \frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ | $\beta = 2\pi - \alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| $\sin\beta$ | $+\cos\alpha$ | $\mp\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ |
| $\cos\beta$ | | $-\cos\alpha$ | $\pm\sin\alpha$ | $+\cos\alpha$ |
| $tg\beta$ | $\mp ctg\alpha$ | $\pm tg\alpha$ | $\mp ctg\alpha$ | $-tg\alpha$ |
| $-tg\beta$ | $\mp tg\alpha$ | $\pm ctg\alpha$ | $\mp tg\alpha$ | $-ctg\alpha$ |

**Значения тригонометрических функций некоторых углов.**

| $\alpha$ | 0 | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ | $2\pi/3$ | $\pi$ | $3\pi/2$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | 0 | $1/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 | $\sqrt{3}/2$ | 0 | $-1$ | 0 |
| $\cos\alpha$ | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$ | 0 | $-1/2$ | $-1$ | 0 | 1 |
| $tg\alpha$ | 0 | $1/\sqrt{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\infty$ | $-\sqrt{3}$ | 0 | $\infty$ | 0 |
| $ctg\alpha$ | $\infty$ | $\sqrt{3}$ | 1 | $1/\sqrt{3}$ | 0 | $-1/\sqrt{3}$ | $\infty$ | 0 | $\infty$ |

## Таблица производных и дифференциалов основных элементарных функций.

| № п/п | $f(x)$ | $f'(x)$ | $df(x)$ |
|---|---|---|---|
| **1** | $x^{\alpha}\ \ (\alpha \neq 0)$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ | $\alpha x^{\alpha-1}dx$ |
| **2** | $a^{x}\ \ (a>0, \neq 1)$ | $a^{x}\ln a$ | $a^{x}\ln a dx$ |
| **3** | $e^{x}$ | $e^{x}$ | $e^{x}dx$ |
| **4** | $\log_{a} x\ \ (a>0, \neq 1)$ | $\frac{1}{x\ln a}$ | $\frac{dx}{x\ln a}$ |
| **5** | $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ | $\frac{dx}{x}$ |
| **6** | $\sin x$ | $\cos x$ | $\cos x dx$ |
| **7** | $\cos x$ | $-\sin x$ | $-\sin x dx$ |
| **8** | $tgx$ | $\frac{1}{\cos^{2} x}$ | $\frac{dx}{\cos^{2} x}$ |
| **9** | $ctgx$ | $-\frac{1}{\sin^{2} x}$ | $-\frac{dx}{\sin^{2} x}$ |
| **10** | $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$ | $\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}$ |
| **11** | $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$ | $-\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}$ |
| **12** | $arctgx$ | $\frac{1}{1+x^{2}}$ | $\frac{dx}{1+x^{2}}$ |
| **13** | $arcctgx$ | $-\frac{1}{1+x^{2}}$ | $-\frac{dx}{1+x^{2}}$ |
| **14** | $chx$ | $shx$ | $shxdx$ |
| **15** | $shx$ | $chx$ | $chxdx$ |
| **16** | $thx$ | $\frac{1}{ch^{2}x}$ | $\frac{dx}{ch^{2}x}$ |
| **17** | $cthx$ | $-\frac{1}{sh^{2}x}$ | $-\frac{dx}{sh^{2}x}$ |

**6.4 Образец оформления обложки с контрольной работой.**

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования**

**«Набережночелнинский институт Казанского (Приволжского) федерального университета»**

**кафедра математики**

# Контрольная работа

по дисциплине «____________________»

**Вариант № ____**

**(номера выполняемых заданий: __________________________)**

**Выполнил:** **студент группы № ________**

***Ф.И.О. студента*__________**

**зач. книжка - № __________**

**Проверил**: **преподаватель кафедры математики**

***Ф.И.О. преподавателя*_____**

**Набережные Челны**

**201…**

## 6.5. Таблица номеров выполняемых заданий.

| *Номер варианта* | *Номера выполняемых заданий* | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* | *10* |
| ***1*** | **1** | **11** | **21** | **31** | **41** | **51** | **61** | **71** | **81** | **91** |
| ***2*** | **2** | **12** | **22** | **32** | **42** | **52** | **62** | **72** | **82** | **92** |
| ***3*** | **3** | **13** | **23** | **33** | **43** | **53** | **63** | **73** | **83** | **93** |
| ***4*** | **4** | **14** | **24** | **34** | **44** | **54** | **64** | **74** | **84** | **94** |
| ***5*** | **5** | **15** | **25** | **35** | **45** | **55** | **65** | **75** | **85** | **95** |
| ***6*** | **6** | **16** | **26** | **36** | **46** | **56** | **66** | **76** | **86** | **96** |
| ***7*** | **7** | **17** | **27** | **37** | **47** | **57** | **67** | **77** | **87** | **97** |
| ***8*** | **8** | **18** | **28** | **38** | **48** | **58** | **68** | **78** | **88** | **98** |
| ***9*** | **9** | **19** | **29** | **39** | **49** | **59** | **69** | **79** | **89** | **99** |
| ***10*** | **10** | **20** | **30** | **40** | **50** | **60** | **70** | **80** | **90** | **100** |
| ***11*** | **3** | **12** | **21** | **32** | **43** | **52** | **61** | **72** | **83** | **92** |
| ***12*** | **4** | **13** | **22** | **33** | **44** | **53** | **62** | **73** | **84** | **93** |
| ***13*** | **5** | **16** | **27** | **38** | **49** | **60** | **69** | **78** | **87** | **96** |
| ***14*** | **6** | **17** | **28** | **39** | **50** | **59** | **68** | **77** | **86** | **95** |
| ***15*** | **7** | **18** | **29** | **40** | **49** | **58** | **67** | **76** | **85** | **94** |
| ***16*** | **8** | **19** | **30** | **39** | **48** | **57** | **66** | **75** | **84** | **93** |
| ***17*** | **9** | **20** | **29** | **38** | **47** | **56** | **65** | **74** | **83** | **92** |
| ***18*** | **1** | **12** | **23** | **34** | **45** | **56** | **67** | **78** | **89** | **100** |
| ***19*** | **2** | **13** | **24** | **35** | **46** | **57** | **68** | **79** | **90** | **99** |
| ***20*** | **3** | **14** | **25** | **36** | **47** | **58** | **69** | **80** | **89** | **98** |
| ***21*** | **4** | **15** | **26** | **37** | **48** | **59** | **70** | **79** | **88** | **97** |
| ***22*** | **5** | **14** | **23** | **32** | **41** | **52** | **63** | **74** | **85** | **96** |
| ***23*** | **6** | **15** | **24** | **33** | **42** | **51** | **62** | **73** | **84** | **95** |
| ***24*** | **7** | **16** | **25** | **34** | **43** | **52** | **61** | **72** | **83** | **94** |
| ***25*** | **8** | **17** | **26** | **35** | **44** | **53** | **62** | **71** | **82** | **93** |
| ***26*** | **9** | **18** | **27** | **36** | **45** | **54** | **63** | **72** | **81** | **92** |
| ***27*** | **10** | **19** | **28** | **37** | **46** | **55** | **64** | **73** | **82** | **91** |
| ***28*** | **2** | **11** | **22** | **33** | **44** | **55** | **66** | **77** | **88** | **99** |
| ***29*** | **3** | **12** | **21** | **32** | **43** | **54** | **65** | **76** | **87** | **98** |
| ***30*** | **4** | **13** | **22** | **31** | **42** | **53** | **64** | **75** | **86** | **97** |

Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы.

## С О Д Е Р Ж А Н И Е