Министерство науки и высшего образования РФ
Казанский (Приволжский) федеральный университет

Региональный научно-образовательный математический центр КФУ
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

XVIII Всероссийская молодежная школа-конференция «Лобачевские чтения - 2019»

Сборник трудов

(*25 – 30 ноября 2019 г., Казань*)

Казанский (Приволжский) федеральный университет

2019

Региональный научно-образовательный математический центр КФУ
Российская Федерация, Республика Татарстан, 420008,
Казань, ул. Кремлевская, 35
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета

Regional Scientific and Educational Mathematical Center of KFU
Lobachevski Institute of Mathematics and Mechanics
Kazan (Volga region) Federal University, 35, Kremlevskaya str., Kazan, Republic of Tatarstan, Russian Federation, 420008

Издание осуществлено за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности, проект № 1.13556.2019/13.1.

УДК 51+533
ББК 22.1 – 22.1
Т78

Печатается по рекомендации Редакционно-издательского совета института математики и механики им. Н.И. Лобачевского КФУ

Редакционная коллегия: А.Н. Абызов, А.А. Агафонов, Ю.Р. Агачев, Д.В. Бережной, Р.Р. Замалиев, С.Р. Насыров, А.А. Попов, К.А. Поташев, Л.У. Султанов, Е.А. Турилова, Л.Р. Шакирова

Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т.57 / Казанское математическое общество. «Лобачевские чтения - 2019» // Материалы XVIII Всероссийской молодежной школы-конференции – Казань: Издательство Казанского математического общества, Изд-во Академии наук РТ 2019. – Т.58. – 192 с.

Т78

ISBN 978-5-9690-0593-8

Сборник содержит материалы XVIII Всероссийской молодежной школы-конференции «Лобачевские чтения - 2019», организованной на базе Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета. Школа конференция проведена в Казани с 25 по 30 ноября 2019 года.

Материалы предназначены для научных сотрудников, преподавателей, аспирантов, магистрантов и студентов старших курсов, специализирующихся в различных областях математики, механики и их приложений.

УДК 51+533
ББК 22.1 - 22.1

ISBN 978-5-9690-0593-8

© Региональный научно-образовательный математический центр при КФУ, 2019
© Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2019
© Издательство Академии наук Республики Татарстан, 2019

СОДЕРЖАНИЕ

Ф.Г. Авхадиев, Р.В. Макаров. Неравенства типа Харди на открытых множествах с выпуклым дополнением . . . 6
А.А. Аганин, И.Н. Мустафин. Методика расчета динамики жидкости и её кавитации в цилиндре при ударе по его верхнему концу . . . 7
Ю.Р. Агачев, А.В. Гуськова. Сходимость метода коллокации для одного класса дробно-дифференциальных уравнений . . . 11
Ю.Р. Агачев, М.Ю. Першагин. Сходимость метода коллокации решения одного класса интегро–дифференциальных уравнений . . . 13
Б. Аффане. Параметрический резонанс при изгибно-крутильных колебаниях пластины . . . 15
И.К. Байтемиров, И.С. Балафендиева, Л.Р. Секаева. Исследование процессов взаимодействия подземных армированных конструкций и грунтов со сложными физико-механическими свойствами . . . 18
И.С. Балафендиева, А.А. Нотфуллина, Л.Р. Секаева. Исследование процессов упругопластического деформирования грунта в зоне бурения и монтажа скважины . . . 20
Л.А. Бигаева, И.И. Латыпов. Исследование нестационарных тепловых процессов в материале при воздействии ультракороткими лазерными импульсами . . . 20
Л.А. Бикбаева, Н.В. Зайцева. Применение СКМ Maple при изучении некоторых разделов теории функций комплексного переменного . . . 23
Л.А. Бикбаева, А.Р. Самигуллина. Создание электронного пособия по теме «Многогранники» курса стереометрии с применением систем компьютерной математики . . . 25
Р.И. Бикмухаметов, М.С. Еряшкин, А.Н. Фролов. 1-вычислимость линейных порядков с отношением соседства . . . 26
Е.А. Благовещенская. Дуальные связи абелевых групп без кручения с их кольцами эндоморфизмов . . . 28
П.В. Большаков. Методы оптимизации геометрии конструкции . . . 29
А.И. Булыгин. Об отображениях $\mathbb{R}$-деревьев, сохраняющих расстояние один . . . 30
В.Б. Васильев, А.А. Ходырева. О некоторых свойствах дискретных операторов . . . 32
В.Б. Васильев, Н.В. Эберлейн. О разрешимости некоторых интегро-дифференциальных уравнений . . . 35
Е.В. Вепрецкая, Е.А. Кормушкина, Г.Н. Мухаметзянова, Э.В. Чеботарева. Быстрый старт в компьютерное моделирование для будущих учителей математики . . . 37
А.А. Вышинская, З.А. Еникеева, Г.З. Вахитов. Статистический анализ метрик пользователей социальной сети . . . 39
Ф.Г. Габбасов, В.Т. Дубровин, М.С. Фадеева. Предельная теорема с большими уклонениями для тригонометрических сумм с показательной функцией . . . 42
О.Р. Галлямова. Плоско-симметричные решения в f(R) гравитации с дополнительными измерениями . . . 45
П.О. Гафурова. Методы управления хранилищами документов цифровых математических библиотек . . . 48
О.В. Герасимов. Моделирование элемента пористой среды по данным компьютерной томографии . . . 51
А.И. Давлетшин. Совместная динамика газовых пузырьков в жидкости в акустическом поле с центрами на одной плоскости . . . 54
А.И. Денисов, А.Д. Шевченко. О счетности действительных чисел . . . 57
А.С. Долгополов. Программный комплекс для распределенного выполнения инженерных и математических задач . . . 60
С.К. Еникеева, Г.З. Вахитов. Реализация персептрона с тремя скрытыми слоями для классификации числовых данных социальной сети . . . 63
Т.Р. Закиров, А.А. Галеев, М.Г. Храмченков. Классификация режимов двухфазного течения в пористых средах при оценке капиллярных и вязких сил с использованием решеточных уравнений Больцмана . . . 64
А.В. Калинин, С.Р. Лаврова. Моделирование квазистационарных электромагнитных полей . . . 67

И.А. Кареев. Последовательная процедура отбора популяции с наибольшим средним для нормальной-нормальной модели, основанная на концепциях первого перескока и заглядывания вперёд 69
И.Р. Каюмов, Д.М. Хамматова, С. Поннусами. Неравенство Бора-Рогозинского для оператора Чезаро 71
И.В. Кетов. Метод Галеркина для нелинейной спектральной задачи для системы граничных интегральных уравнений Мюллера 74
В.А. Киричек. Об одной нелокальной задаче для гиперболического уравнения 77
Л.А. Ковалева. О задаче Дирихле на двумерной сети 78
М.М. Кокурин. Об одном виде апостериорных оценок погрешности регуляризующих алгоритмов 81
Д.М. Коростелева, П.С. Соловьёв, С.И. Соловьёв, А.А. Самсонов. Исследование точности сеточной схемы метода конечных элементов с численным интегрированием решения задачи на собственные значения 84
А.Ф. Кужаев. Экспоненциальный тип целой функции при порядке один 87
В.И. Кузоватов, С.И. Башмаков. Об одном подходе к построению аналога формулы Бине . . . 89
О.И. Кузоватова. Численное исследование локализации деформации при медленном движении сыпучей среды 91
Д.С. Лисенков, П.И. Трошин. О построении кривой Коха и снежинки Коха на плоскости Лобачевского 94
Я.А. Михайловская. Отношения $S^n_{\mathscr{L}}$ на вычислимых линейных порядках и их взаимосвязи . . 97
Л.И. Мороз, А.Г. Масловская. Дробно-дифференциальная модель аномальной диффузии: приложение к описанию процесса переключения поляризации сегнетоэлектриков 98
Е.К. Мышкина. О подходах к нахождению результанта двух целых функций 101
Е.А. Мятлев, А.А. Белоусов. Исследование методов решения задач классификации 102
А.А. Насыров, А.В. Дмитерчук, Ш.Р. Сабитов. Особенности системы измерения социальных навыков студента 105
Г.А. Никифоров. О зависимости коэффициента вытеснения нефти от степени неоднородности керна 106
К.С. Николаев. Разработка системы для автоматического формирования тренировочной коллекции для искусственной нейронной сети, определяющей соответствие характеристик текстов и успеваемости в учебе 109
А.О. Октябрьская. Численное моделирование лазерного излучения круглым микрорезонатором с неконцентрической активной зоной 112
Д.А. Панин. Алгоритм решения задачи идентификации проницаемости бытового фильтра . . 116
С.В. Панина, Л.Ч. Мингалеева. О корректном решении одного сингулярного интегро-дифференциального уравнения аппроксимативными методами 119
К.А. Поташев, В.В. Раздобудько. Численное моделирование однофазной фильтрации с сорбируемой примесью 121
А.И. Репина. Компьютерное моделирование лазерного излучения фотонно-кристаллическим резонатором 125
А.А. Родионов, Д.А. Краснова. О групповом анализе уравнений гидростатической модели вязкой жидкости 128
Е.С. Рыков, Ф.М. Гафаров. Автоматическое распознавание действий на изображениях с использованием глубинного обучения 130
М.Р. Сагедиева, Е.Р. Садыкова, О.В. Разумова. Особенности изучения геометрических построений в школьном курсе стереометрии 132
Р.Р. Салахов. Расчет вихревого движения полидисперсных испаряющихся инерционных капель на основе метода моментов 135
Р.Ф. Салимов. D-риски оценок параметра распределения Бернулли при априорном бета-распределении 138
А.А. Самсонов, С.И. Соловьёв, Д.М. Коростелева. Исследование предельных свойств решений задачи о собственных колебаниях стержня с грузом 141
Н.А. Сарамбаев. Неравенства типа Реллиха на трубчатых множествах 143
А.С. Саховский, В.Д. Соловьев. Применение тематического моделирования при оценке сложности образовательных текстов 145

П.Д. Семенов, Г.З. Вахитов. Разработка информационной системы по оценке связи пользователей в социальной сети 148
Е.В. Семенова, Д.А. Мухин. Описание поведения сплошной среды с учетом структурных свойств 151
П.С. Соловьёв, С.И. Соловьёв, Д.М. Коростелева, А.А. Самсонов. Исследование метода конечных элементов решения нелинейной задачи на собственные значения 152
К.И. Сулейманова, Э.В. Чеботарева. Формирование системы визуальных образов математических понятий при изучении основ математического анализа 154
П.Е. Федотов. Решение уравнения энергии в смазочном слое упорного подшипника 157
Н.М. Фирстова. Анализ пороговых явлений в модели электорохимического реактора 160
Ш.М. Хайдаров. Система автоматизированного формирования выпусков научных журналов . 163
Д.Р. Хакимов. О свойствах пятимерных жестких h-пространств 164
В.А. Чепарин, З.А. Еникеева, Г.З. Вахитов. Классификация данных социальных сетей методами машинного обучения 165
О.В. Чернова. Частный случай задачи линейного сопряжения 167
М.А. Чешкова. Теорема Бонне и поверхности вращения постоянной средней кривизны . . . 169
Д.Р. Шагеева, Г.З. Вахитов, З.А. Еникеева. Формирование обучающей выборки для анализа профиля пользователя социальной сети 173
Ф.М. Шамсудинов, Х. Сайфулло. Об одной передопределенной системе дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярными коэффициентами 176
В.В. Яикова, Д.А. Мухин. Моделирование адаптации костной ткани под действием внешнего нагружения 179
F.P.B. Dossou. BD97 Places : Deep Convolutional Networks for Places Detection 181
C.C. Emezue, F.P.B. Dossou. SeegaAI : Deep Reinforcement Learning in Seega 183
А.А. Бердников, Н.М. Давлетшин. Распознавание объектов на фотографии с использованием архитектуры нейронной сети yolo v3 186
Н.М. Давлетшин, А.А. Бердников, П.Н. Устин. Методы автоматического сбора информации об активности пользователей социальной сети Вконтакте 189

УДК 514.822

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ХАРДИ НА ОТКРЫТЫХ МНОЖЕСТВАХ С ВЫПУКЛЫМ ДОПОЛНЕНИЕМ

Ф.Г. Авхадиев[1], Р.В. Макаров[2]

1 *avkhadiev47@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

2 *ruva2007@yandex.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В статье доказываются новые интегральные неравенства для действительнозначных функций в подмножестве евклидового пространства. Мы предполагаем, что дополнение является непустым выпуклым множеством. Доказывается расширение теоремы Хадвигера аппроксимации выпуклых множеств многоугольниками для получения некоторых обобщений и улучшений многомерных неравенств типа Харди.

Ключевые слова: неравенство типа Харди, выпуклое компактное множество, точная постоянная

В этой работе рассматриваются открытые множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ такие, что $n \geq 2$ и $K := \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ является непустым выпуклым множеством. Иначе говоря, любая рассматриваемая далее область Ω является множеством с выпуклым дополнением. И рассмотрим неравенство типа Харди на этих множествах, кроме теоремы, где мы рассматриваем открытые множества с компактным дополнением, которое может быть невыпуклым множеством.

Существует большое количество работ по многомерным неравенствам типа Харди. Читатель может ознакомиться с базовыми результатами в работах [2],[3]. Стоит заметить, что существует близкие неравенства типа Реллиха, связанные с неравенствами типа Харди.

Пусть $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ — это расстояние от точки $x \in \Omega$ до границы области. И $C_0^1(\Omega)$ — семейство гладких вещественных функций с компактными носителями.

Мы будем рассматривать неравенство, с параметрами $p \in [1, \infty)$ и $s \in (-\infty, \infty)$:

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u(x)|^p dx}{\operatorname{dist}^{s-p}(x, \partial\Omega)} \geq c_{nps}(\Omega) \int_\Omega \frac{|u(x)|^p dx}{\operatorname{dist}^s(x, \partial\Omega)} \quad \forall u \in C_0^1(\Omega),$$

где ∇u обозначает градиент функции $u : \Omega \to \mathbb{R}$, с константой $c_{nps}(\Omega) \in [0, \infty)$, которая является максимально возможной, то есть определяется по следующей формуле:

$$c_{nps}(\Omega) = \inf_{u \in C_0^1(\Omega),\, u \not\equiv 0} \int_\Omega \frac{|\nabla u(x)|^p dx}{\operatorname{dist}^{s-p}(x, \partial\Omega)} dx \Big/ \int_\Omega \frac{|u(x)|^p dx}{\operatorname{dist}^s(x, \partial\Omega)}.$$

Стоит отметить, что $c_{nps}(\Omega)$ является инвариантом относительно линейных преобразований, то есть:

$$c_{nps}(\Omega) = c_{nps}(a\Omega + b),$$

где $a\Omega + b = \{y \in \mathbb{R}^n : y = ax + b, x \in \Omega\}$ с фиксированной точкой $b \in \mathbb{R}^n$ и фиксированным числом $a \neq 0$.

В настоящей работе мы распространяем теоремы Хадвигера (см. [1]) об аппроксимации выпуклых тел на случай неограниченных выпуклых множеств. Эти обобщения, а также методы из работ [2],[3] используются в доказательствах следующих утверждений.

Теорема 1. *Предположим, что $n \geq 2$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — такое множество, что $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ — непустое выпуклое множество. Тогда для любого $p \in [1, \infty)$ и любого $s \in (-\infty, \infty)$ верно следующее:*

$$c_{nps}(\Omega) \geq \min\left\{|s-k|^p / p^p : k = 1, 2, \ldots, n\right\}$$

Теорема 2. *Предположим, что $n \geq 2$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытая область такая, что $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ непустое компактное множество. Тогда для любых $p \in [1, \infty)$ и любых $s \in [n, \infty)$ верно соотношение:*

$$c_{nps}(\Omega) = p^{-p} |s-n|^p.$$

Теорема. 3 *Для любого* $s \in \mathbb{R}$ *верно следующее соотношение:*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{|\nabla u(z)|^2}{r^{s-2}} dxdy \geq \frac{|s-2|^2}{4} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{u^2(z)}{r^s} dxdy$$

$$+ \iint_{\mathbb{R}^2} \left(u(z) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{it}) dt \right)^2 \frac{dxdy}{r^s} \quad \forall u \in C_0^1\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\right),$$

где $r = |z|$, $z = x + iy = re^{i\theta}$.

Работа поддержана Российским научным фондом, проект № 18-11-00115.

Литература

1. H. Hadwiger, *Vorlesungen über Inhalt, Oberflächer und Isoperimetrie*, (Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1957).

2. F. G. Avkhadiev, "Hardy-type inequalities on Planar and Spatial Open Sets,"Proc. Steklov Inst. Math. **255**, 2–12 (2006).

3. A. A. Balinsky, W. D. Evans and R. T. Lewis, *The Analysis and Geometry of Hardy's Inequality*, (Springer, Heidelberg-New York-Dordrecht-London, 2015).

HARDY TYPE INEQUALITIES ON OPEN SETS WITH CONVEX COMPLEMENT

F.G. Avkhadiev, R.V. Makarov

We describe new integral inequalities for real-valued test functions defined on subdomains of the Euclidean space. We assume that the complement of the subdomain is a non-empty convex set. We prove an extension of the Hadwiger theorems about approximations of convex compact sets by polytopes and obtain some generalizations and improvements of several Hardy type multidimensional inequalities.

Keywords: Hardy inequality, convex compact set, sharp constant

УДК 532.528

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ И ЕЁ КАВИТАЦИИ В ЦИЛИНДРЕ ПРИ УДАРЕ ПО ЕГО ВЕРХНЕМУ КОНЦУ

А.А. Аганин[1], И.Н. Мустафин[2]

1 *aganin@kfti.knc.ru*; Институт механики и машиностроения ФИЦ Казанский научный центр РАН
2 *mustafin@imm.knc.ru*; Институт механики и машиностроения ФИЦ Казанский научный центр РАН

Разработана методика расчёта динамики жидкости и её кавитации в цилиндре при ударе по его верхнему концу. Кавитация у днища моделируется одиночной кавитационной полостью в виде цилиндрического слоя между днищем и столбом жидкости, которая возникает при падении давления ниже давления насыщенного пара. Движение жидкости описывается уравнениями газовой динамики в смешанных Эйлерово-Лагранжевых координатах, связанных с границами столба жидкости. Решение находится численно методом С.К. Годунова. Для иллюстрации эффективности методики рассчитывается динамика жидкости в известных экспериментах по разрушению бутылки. Показано удовлетворительное согласование результатов расчётов с экспериментальными данными.

Ключевые слова: кавитация в столбе жидкости, кавитационная полость, схлопывание полости, гидроудар по днищу, уравнения газовой динамики, метод Годунова, СЭЛ координаты

Явление кавитации жидкости (образование кавитационных пузырьков) в окрестности стенки емкости, возникающей при ударе по её противоположной стороне, имеет довольно широкое распространение. В частности, подобная ситуация может возникать при ударе по верхнему концу бутылки

с жидкостью [1], при воздействии ударной волны на голову человека при взрыве заряда [2] и т.д. Последующее захлопывание образовавшихся в данных примерах кавитационных пузырьков может приводить к разрушению бутылки, повреждению головного мозга. Эти и другие подобные примеры имеют важное практическое значение.

Настоящая работа посвящена созданию методики расчёта динамики жидкости и её кавитации в цилиндрической емкости при ударе по её верхнему концу. Для иллюстрации её эффективности приводятся результаты расчётов задачи о разрушении бутылки в экспериментах [1].

Основные положения методики

Методика настоящей работы предназначена для расчёта динамики жидкости и кавитации в цилиндре при ударе по его верхнему концу. В результате обусловленного ударом ускоренного движения цилиндра вниз в окрестности его днища возникают кавитационные пузырьки (рис. 1 *a*). Со временем они расширяются, сливаются и образуют относительно однородную область. Фактически происходит отрыв столба жидкости от днища цилиндра. Затем пузырьки в окрестности днища схлопываются, что приводит к гидроудару по днищу, в результате чего ёмкость может разрушиться.

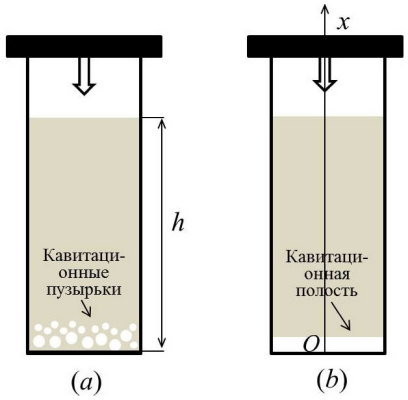


Рис. 1. Кавитация жидкости в ёмкости при ударе по её верхнему концу (*a*) и схема, используемая в модели (*b*).

В предлагаемой методике расчёта множество возникающих пузырьков в окрестности днища моделируется одиночной кавитационной полостью (рис. 1 *b*). Полагается, что эта полость образуется при падении давления в жидкости до уровня давления насыщенного пара в виде тонкого слоя вдоль всего сечения столба жидкости. Давление в полости считается равным давлению насыщенного пара. При таком допущении динамика кавитационной полости определяется перемещением днища и нижней границы столба жидкости.

В силу симметрии ёмкости задача считается пространственно одномерной, с параметрами жидкости (давлением p, плотностью ρ и т.д.), зависящими от осевой координаты x. Из-за подвижности верхней и нижней границ столба жидкости удобно использовать смешанные Эйлерово-Лагранжевые(СЭЛ) координаты ξ и τ, в которых положение этих границ остаётся постоянным. Эйлеровы и СЭЛ переменные связаны между собой преобразованием

$$x = x(\xi, \tau),\ t = \tau,$$

где t – время.

Уравнения газовой динамики в СЭЛ-координатах записываются следующим образом:

$$\frac{\partial \rho x_\xi}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho (v - w)}{\partial \xi} = 0,\ \frac{\partial \rho v x_\xi}{\partial \tau} + \frac{\partial (\rho v (v - w) + p)}{\partial \xi} = 0,\ \frac{\partial \rho e x_\xi}{\partial \tau} + \frac{\partial (\rho e (v - w) + p v)}{\partial \xi} = 0. \qquad (1)$$

Здесь v – скорость вдоль оси x, $e = \varepsilon + v^2/2$ – полная энергия единицы массы, ε – внутренняя энергия единицы массы, $x_\xi = \partial x / \partial \xi$.

Скорость подвижной сетки $w = \partial x / \partial \tau$ на границах столба жидкости равна скорости их перемещения, а внутри столба определяется с помощью линейной интерполяции с использованием граничных значений.

Система уравнений динамики жидкости (1) замыкается уравнением состояния «жёсткого» газа [3]

$$p = (\Gamma - 1)\rho\varepsilon - \Gamma B, \tag{2}$$

где Γ и B – константы.

Принимаются следующие граничные и начальные условия. На верхней границе столба жидкости давление считается равным давлению окружающей среды p_0. На его нижней границе сначала до момента возникновения кавитационной полости полагается, что скорость этой границы равна скорости днища. Затем после возникновения кавитационной полости, когда нижняя граница становится свободной поверхностью, принимается, что давление на ней равно давлению насыщенного пара p_v. До удара жидкость является неподвижной с давлением p_0.

Решение уравнений (1),(2) находится численно методом С.К. Годунова [4].

Иллюстрация применения

Оценка эффективности предложенной численной методики проводится на основе данных экспериментов [1], направленных на выявление механизма и условий разрушения бутылки, реализующегося при ударе рукой по её горлышку.

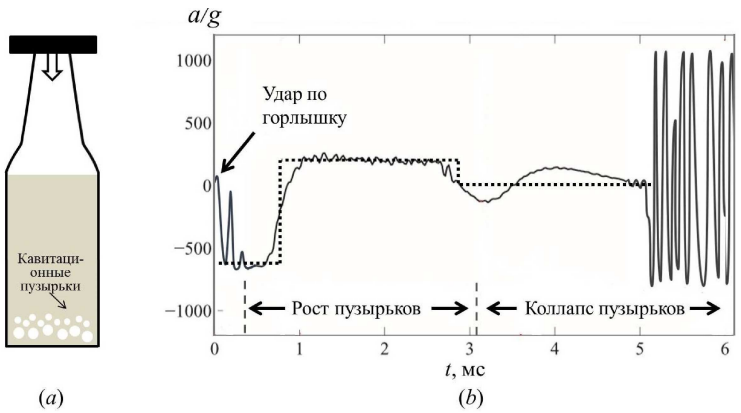


Рис. 2. Удар по верхнему концу бутылки: (a) – схема удара в экспериментах [1], (b) - изменение безразмерного осевого ускорения днища бутылки в экспериментах [1] (сплошная линия) и его кусочно-постоянная аппроксимация (пунктирная линия); a - размерное ускорение, g - ускорение свободного падения.

Жидкостью считается вода, бутылка заменяется на цилиндрическую ёмкость (рис. 1), высота столба жидкости $h = 13.3$ см. Условия комнатные (давление на внешней поверхности жидкости $p_0 = 1$ бар). Константы в уравнении состояния(2) для воды равны $\Gamma = 7.15$ и $B = 3.045$ кбар. Осевое ускорение днища бутылки аппроксимируется с помощью кусочно-постоянной функции (рис. 2).

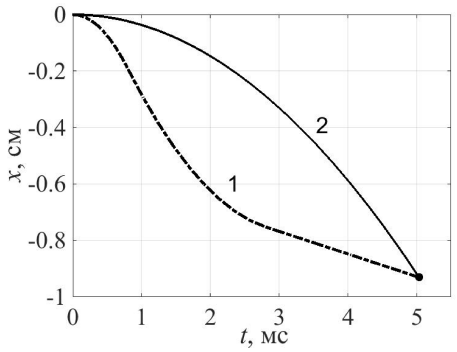


Рис. 3. Изменение положения днища емкости (кривая 1) и нижней границы столба жидкости (кривая 2) от момента удара по верхнему концу емкости до момента захлопывания (указан точкой) кавитационной полости между днищем и столбом жидкости.

Результаты расчётов данной задачи с применением методики настоящей работы приведены на рис. 3. В относительно кратковременной начальной стадии удара нижняя граница столба жидкости остаётся присоединённой к поверхности днища ёмкости. Давление на границе падает, скорость её перемещения возрастает. В некоторый момент давление на нижней границе столба жидкости становится равным давлению насыщенного пара p_v и образуется кавитационная полость. В следующей стадии расстояние между нижней границей столба жидкости и днищем растёт, пока не достигает максимума при $t \approx 2.5$ мс. Через некоторое время нижняя граница столба жидкости догоняет днище и кавитационная полость захлопывается. Захлопывание происходит при $t \approx 5$ мс, что вполне удовлетворительно согласуется с данными экспериментов [1], в которых коллапс пузырьков завершается при $t_{\text{ñ}} \approx 5.1$ мс (рис. 2).

Возникающее в момент захлопывания давление гидроудара можно оценить по формуле $p_{wh} = \rho_0 c_0 \Delta v$, где ρ_0, c_0 – плотность и скорость звука в невозмущенной воде, Δv – разница скоростей нижней границы столба жидкости и днища ёмкости. По этой формуле $p_{wh} \approx 42$ бар. Представляется, что такого давления достаточно для разрушения бутылки, что можно рассматривать как ещё один аргумент в пользу согласования результатов расчётов с экспериментальными данными.

Заключение

Разработана методика расчёта динамики жидкости и кавитации в цилиндре при ударе по его верхнему концу. Её важной особенностью является то, что в ней используется замена множества пузырьков в окрестности днища на одиночную кавитационную полость в виде цилиндрического слоя, а также применяются СЭЛ координаты. Согласование результатов расчётов динамики жидкости в бутылке при ударе по её горлышку с известными экспериментальными данными свидетельствует об эффективности предлагаемой методики.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-31-00214 мол_а).

Литература

1. Daily J., Pendlebury J., Langley K., Hurd R., Thomson S., Truscott T. *Catastrophic cracking courtesy of quiescent cavitation* // Physics of Fluids. – 2014. – V. 26, № 9. – Art. 091107. – P. 1–4.

2. Goeller J., Wardlaw A., Treichler D., O'Bruba J., Weiss G. *Investigation of Cavitation as a Possible Damage Mechanism in Blast-Induced Traumatic Brain Injury* // Journal of Neurotrauma. – 2012. – V. 29, No 10. – P. 1970–1981.

3. Harlow F., Amsden A. *Fluid dynamics*. – Los Alamos, N.M. : Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California, 1971. – No. LA-4700. – 122 p.

4. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. *Численное решение многомерных задач газовой динамики*. – М.: Наука, 1976. – 400 с.

A TECHNIQUE OF CALCULATING DYNAMICS OF LIQUID AND ITS CAVITATION IN A CYLINDER UPON IMPACT ON ITS TOP END

A.A. Aganin, I.N. Mustafin

A technique has been developed for calculating dynamics of liquid and its cavitation in a cylinder upon impact on its top end. Cavitation at the bottom of the cylinder, resulting from the pressure dropping below that of the saturated vapor, is modeled by a single cavity in the form of a cylindrical layer between the bottom and the liquid column. The liquid motion is governed by the gas dynamics equations in coupled Eulerian-Lagrangian coordinates related to the liquid column boundaries. The solution is found numerically by the Godunov method. To illustrate the efficiency of the technique, the dynamics of the liquid in the known experiments on breaking a bottle is calculated. Satisfactory agreement between the calculation results and experimental data is shown.

Keywords: cylindrical container with liquid, impact on bottom, cylindrical cavity collapse, gas dynamics equations, CEL coordinates, Godunov method

УДК 517.9

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю.Р. Агачев[1], А.В. Гуськова[2]

1 *jagachev@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *anyshkaflower@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В работе исследуется сходимость метода коллокаций решения задачи типа Коши для дифференциального уравнения с дробной производной Римана-Лиувилля в главной части и коэффициентами из пространства Лебега.

Ключевые слова: пространство Лебега, дифференциальное уравнение, дробная производная, задача типа Коши, метод коллокации, сходимость метода

Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $p, \alpha \in \mathbb{R} : p \geq 1, m-1 < \alpha \leq m$. Рассматривается задача типа Коши

$$(D_{a+}^{\alpha-k-1}x)(a) = 0, \quad k = \overline{0, m-1}, \tag{1}$$

для дифференциального уравнения дробного порядка вида

$$(D_{a+}^{\alpha}x)(t) + \sum_{k=1}^{m} g_k(t)(D_{a+}^{\alpha-k}x)(t) = y(t), \quad -\infty < a < t \leq b < +\infty, \tag{2}$$

где функции $g_k(t),\ k = \overline{1, m},\ y(t)$ — известные, $x(t)$ — искомая, определенные на $[a, b]$; $(D_{a+}^{\beta}x)(t)$ — левосторонняя производная Римана—Лиувилля порядка β функции $x(t)$ (см., напр., [4, с. 44]).

Предположим, что известные функции $g_k(t),\ k = \overline{1, m},\ y(t)$ — непрерывны и в качестве пространства правых частей возьмем $L_p \equiv L_p(a, b), 1 \leq p \leq \infty$ — пространство функций, интегрируемых по Лебегу на $[a, b]$ со степенью p, с нормой

$$\|z\|_p = \left\{\int_a^b |z(t)|^p\, dt\right\}^{1/p},\ z \in L_p.$$

В качестве пространства искомых элементов выберем $X = I_{a+}^{\alpha}(L_p)$ — пространство функций $f(t)$, представимых в виде левостороннего дробного интеграла Римана–Лиувилля порядка α от функции из L_p с соответствующей нормой в Y:

$$\|x\|_X = \|x\|_p + \|I_{a+}^{\alpha}x\|_p,\ x \in X.$$

Через Y_n будем обозначать пространство H_n алгебраических полиномов степени не выше n.

Задачу (1), (2) будем рассматривать в выбранной паре пространств (X, Y), в которой она эквивалентна операторному уравнению

$$Kx \equiv Gx + Tx = y \quad (x \in X, y \in Y).$$

Рассмотрим на $[a, b]$ систему точек

$$t_0, t_1, \ldots, t_n\ (a < t_0 < t_1 < \ldots < t_n < b).$$

Приближенное решение задачи (1), (2) будем искать в виде

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k (t-a)^{\alpha+k},$$

где неизвестные коэффициенты $\{c_k\}_{k=0}^{n}$ определим из условий метода коллокаций:

$$(Kx_n)(t_j) = y(t_j),\ j = \overline{0, n}. \tag{3}$$

Условия (3) представляют собой систему линейных уравнений вида

$$\sum_{k=0}^{n} \gamma_{kj} c_k = y_j,\ j = \overline{0,n}, \tag{4}$$

где

$$y_j = y(t_j),\ \gamma_{kj} = (K[(t-a)^{\alpha+k}])(t_j). \tag{5}$$

Для построенной вычислительной схемы метода коллокаций справедливы следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть функции $g_k, k = \overline{1,m}, y \in C[a,b]$, $\{t_k\}_{k=0}^{n}$ — нули полинома Лежандра степени $n+1$ на $[a,b]$. Задача (1),(2) имеет единственное решение при любой правой части из Y. Тогда система (4), (5) при всех $n \geq n_0$ однозначно разрешима и соответствующие приближения $x_n^*(t)$ будут сходиться к точному решению при $n \to \infty$ в метрике пространства $X = I_{a+}^{\alpha}(L_p), 1 \leq p < 4$.*

Замечание. Отметим, что при $p \leq 2$ скорость сходимости определяется как

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\left\{E_n(Dx^*)\right\},$$

где $E_n(Dx^*)$ — есть наилучшее равномерное приближение Dx^* алгебраическими полиномами степени не выше n.

Теорема 2. *Пусть функции $g_k, k = \overline{1,m}$, у удовлетворяют условиям Дини-Липшица, $\{t_k\}_{k=0}^{n}$ — узлы Чебышева I или II рода, экстремальные точки полинома Чебышева I рода. Задача (1), (2) имеет единственное решение при любой правой части из Y. Тогда система (4), (5) при всех $n \geq n_0$ однозначно разрешима и соответствующие приближения $x_n^*(t)$ сходятся при $n \to \infty$ к точному решению в пространстве $X = I_{a+}^{\alpha}(L_p)$, $p = \infty$, со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\left\{\ln n\, E_n(Dx^*)_p\right\},$$

где $E_n(Dx^*)_p$ — наилучшее равномерное приближение $Dx^* \in L_p$ алгебраическими полиномами степени не выше n.

Теоремы 1 и 2 доказываются с помощью результатов общей теории приближенных методов функционального анализа (см., напр., [1]), а также теории приближений функций (см. в [2], [3], [5]–[7]).

Литература

1. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач*. – Казань.: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – 232 с.

2. Даугавет И. К. *Приближенные решения линейных функциональных уравнений. Учебное пособие*. – Л: изд-во ЛГУ, 1985. – 224 с.

3. Натансон И. П. *Конструктивная теория функций*. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.

4. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. А. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. – Минск.: Наука и техника, 1987. – 688 с.

5. Тиман А. Ф. *Теория приближения функций действительного переменного*. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.

6. Турецкий А. Х. *Теория интерполирования в задачах. В 2–х частях*. – Минск: Изд–во «Высшая школа». – Часть 1, 1968, 328 с.; часть 2, 1977, 256 с.

7. Szabados J., Vertesi P. *A survey on mean convergence of interpolatory processes*. // Journal of Computational and Applied Mathematics. – North-Holland, 1992. – V. 43. – P. 3-18.

CONVERGENCE OF THE COLLOCATION METHOD FOR ONE CLASS OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Y.R. Agachev, A.V. Guskova

The paper investigates the convergence of the collocation method for solving a Cauchy-type problem

for a differential equation with the fractional Riemann-Liouville derivative in the main part and coefficients from the Lebesgue space.
Keywords: Lebesgue space, differential equation, fractional derivative, Cauchy type problem, collocation method, convergence of method

УДК 517.968: 519.6

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю.Р. Агачев[1], М.Ю. Першагин[2]

1 *juriy.agachev@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *michael.pershagin@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В статье в паре весовых пространств Соболева дается обоснование полиномиального метода коллокации по узлам Чебышева I рода решения краевых задач для обыкновенных интегро–дифференциальных уравнений в случае, когда порядок внутреннего дифференциального оператора выше соответствующего внешнего.

Ключевые слова: пространство Соболева, вес Якоби–Гегенбауэра, интегро–дифференциальное уравнение, задача Коши, полиномиальное приближение, метод коллокации, сходимость метода

Пусть $m+1, p \in \mathbb{N}, p > m$. Рассматривается, для определенности, однозначно разрешимая задача Коши[1]

$$x^{(i)}(-1) = 0,\ i = \overline{1,m}, \tag{1}$$

для интегро–дифференциального уравнения

$$Kx \equiv x^{(m)}(t) + \sum_{k=1}^{m} g_k(t)x^{(m-k)}(t) + \sum_{j=0}^{p}\int_{-1}^{+1} h_j(t,s)x^{(j)}(s)\,ds = y(t), \quad -1 \le t \le 1, \tag{2}$$

где $y(t), g_k(t),\ k = \overline{1,m}$, и $h_j(t,s), j = \overline{0,p}$, — известные функции в своих областях определения.

Пусть $\rho(t) = \sqrt{1-t^2}$ — вес Чебышева второго рода, $q_l(t) = \{\rho(t)\}^{2l-1}, l+1 \in \mathbb{N}$, — веса Якоби–Гегенбауэра. Обозначим через $L_{2,q_l} \equiv L_{2,q_l}(-1,1)$ — пространство Лебега функций, квадратично–суммируемых с весом $q_l(t)$ в промежутке $(-1,1)$, $W^r L_{2,q_r} \equiv W^r L_{2,q_r}[-1,1], r \in \mathbb{N}$, — пространство Соболева функций $f(t) \in L_{2,\rho}$, имеющих производные $f^{(l)}(t) \in L_{2,q_l}, 1 \le l \le r$. Норму в пространстве $W^r L_{2,q_r}$ зададим по формуле

$$\|f\|_{r;2,q_r} = \left(\int_{-1}^{+1}\sum_{l=0}^{r} q_l(t)|f^{(l)}(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Введем также пространства L_1 суммируемых в промежутке $(-1,1)$ функций и $W^s L_{2,q_r} \equiv W^s L_{2,q_r}[-1,1], s > r$, непрерывных функций $f(t)$, для которых существует производная $f^{(s-r)}(t) \in W^r L_{2,q_r}$. В пространстве $W^s L_{2,q_r}$ зададим полунорму по формуле

$$\|f\|_{s;2,q_r} = \|f^{(s-r)}\|_{r;2,q_r}. \tag{3}$$

Задачу (1), (2) будем рассматривать (при надлежащих требованиях относительно коэффициентов уравнения) в паре пространств (X,Y), где $Y = W^r L_{2,q_r}, r = p-m \ge 1$, $X = \overset{\circ}{W}{}^p L_{2,q_r}$ — подпространство функций из $W^p L_{2,q_r}$, удовлетворяющих начальным условиям (1). В пространстве X полунорма (3) представляет собой норму, по которой, очевидно, X становится полным.

В паре пространств (X,Y) исходная (однозначно разрешимая) задача может быть записана в операторном виде:

$$Kx \equiv Dx + Gx + Hx = y \quad (x \in X,\ y \in Y), \tag{4}$$

1 При $m = 0$ начальные условия отсутствуют.

где

$$Dx \equiv x^{(m)}(t), \quad Gx \equiv (Gx)(t) = \sum_{k=1}^{m} g_k(t) x^{(m-k)}(t),$$

$$Hx \equiv (Hx)(t) = \sum_{j=0}^{p} \int_{-1}^{+1} h_j(t,s) x^{(j)}(s)\, ds.$$

Возможность использования вычислительной схемы метода коллокации, обычно применяемой для корректно поставленных по Адамару задач, дает следующая (см. в [1])

Лемма 1. *Пусть выполнены условия:*
1) $g_k, k = \overline{1,m}, y \in Y$;
2) существует производная $\frac{\partial^r h_j(t,s)}{\partial t^r} \in L_{2,q_r} \times L_1$, $j = \overline{0, m-1}$;
3) существует производная $\frac{\partial^r h_j(t,s)}{\partial t^r} \in L_{2,q_r} \times L_{2,q_{m-j}}$, $j = \overline{m,p}$.
Тогда справедливы следующие утверждения:
1°. *Оператор* $D : X \to Y$ *имеет непрерывный обратный* $D^{-1} : Y \to X$, *причем*

$$\|D\|_{X \to Y} = \|D^{-1}\|_{Y \to X} = 1.$$

2°. *Операторы* $G : X \to Y$ *и* $H : X \to Y$ *вполне непрерывны.*

Приближенное решение задачи (1), (2) будем искать в виде

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k T_k(t), \tag{5}$$

где $T_k(t)$ – полиномы Чебышева I-рода. Неизвестные коэффициенты $\{c_k\}$ определим из условий

$$(Kx_n)(t_j) = y(t_j),\ j = \overline{0,n}, \tag{6}$$

где t_j – узлы Чебышева I-рода.

Условия (6) относительно $\{c_k\}$ представляют собой систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{kj} c_k = y_j,\ j = \overline{0,n}, \tag{7}$$

где

$$y_j = y(t_j), \alpha_{kj} = (KT_k)(t_j). \tag{8}$$

Обозначим через S_n – оператор Фурье, построенный по системе полиномов Чебышева I-рода и через L_n – оператор Лагранжа, построенный по узлам $\{t_j\}$.

Условия (6), как нетрудно видеть, эквивалентны соотношениям

$$((Kx_n - y) - S_n(Kx_n - y) + L_n(Kx_n - y), T_j) = 0,\ j = \overline{0,n}.$$

Введем в рассмотрение новое интегро–дифференциальное уравнение

$$\widetilde{K}x = \widetilde{y},\ x \in X,\ \widetilde{y} \in Y, \tag{9}$$

где $\widetilde{K}x \equiv Kx - S_nKx + L_nKx,\ \widetilde{y} = y - S_ny + L_ny$.

Имеет место следующая

Лемма 2. *Метод коллокации решения задачи (1), (2) эквивалентен методу Галеркина решения уравнения (9).*

Действительно, обозначив для краткости $z \equiv Kx_n - y$, имеем $S_n(Kx_n - y) \equiv S_nz = \sum_{k=0}^{n} c_k^T(z)\widetilde{T}_k$, где $\widetilde{T}_k$ – нормированные полиномы Чебышева I-рода; $L_n(Kx_n - y) \equiv L_nz = \sum_{k=0}^{n} z(t_k) l_k(t)$, где $l_k(t)$ – фундаментальные полиномы Лагранжа по узлам $\{t_j\}$.

Заметим, что $(Kx_n - y, T_j) = \frac{c_j^T(z)}{\pi}$, $(S_n(Kx_n - y), T_j) = (\sum_{k=0}^{n} c_k^T(z)\widetilde{T}_k, T_j) = \frac{c_j^T(z)}{\pi}$, $(L_n(Kx_n - y), T_j) = 0$, так как при $z(t_k) = 0, k = \overline{0,n}$ имеет место $L_n(Kx_n - y) = 0$.

Теорема. *Пусть функции* $y, g_k, k = \overline{1,m}$ *и* $h_j, j = \overline{0,p}$, *удовлетворяют условиям 1)–3) леммы 1, задача (1), (2) имеет единственное решение при любой правой части из* Y, $t_j = \cos n \arccos \frac{2j-1}{2n}\pi, j = \overline{0,n}$.

Тогда система (7), (8) для всех n, начиная с некоторого номера n_0, *имеет единственное решение* $\{c_i^*\}_0^n$. *Приближенные решения* x_n^*, *построенные по формуле (5) при* $\{c_i = c_i^*\}$, *при* $n \to \infty$ *сходятся по норме пространства X к точному решению* x^* *задачи (1), (2).*

Доказательство теоремы проводится с помощью варианта общей теории приближенных методов анализа, предложенного Габдулхаевым Б.Г. (см., например, [2, глава I]) и результата из работы [3] по сходимости метода Галеркина в пространстве X.

Литература

1. Агачев Ю. Р., Першагин М. Ю. *О корректной постановке общей краевой задачи для одного класса интегро–дифференциальных уравнений в паре весовых пространств Соболева* // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2018. – Т. 56. – С. 8–10.

2. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач*. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – 232 с.

3. Агачев Ю. Р., Першагин М. Ю. *К обоснованию метода Галеркина решения одного класса интегро–дифференциальных уравнений* // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во АН РТ, 2019. – Т. 57. – С. 9–11.

THE CONVERGENCE OF THE COLLOCATION METHOD FOR SOLVING A CLASS OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

J.R. Agachev, M.Y. Pershagin

The article in a pair of Sobolev weight spaces gives the justification the polynomial collocation method on Chebyshev nodes of the first kind for solving boundary value problems for ordinary integro – differential equations in the case when the order of the internal differential operator is higher than the corresponding external one.

Keywords: Sobolev space, Jacobi – Gegenbauer weight, integro - differential equation, Cauchy problem, polynomial approximation, collocation method, convergence of the method

УДК 534.121.1

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС ПРИ ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИНЫ

Б. Аффане[1]

1 *boudkhil.affane@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Статья посвящена исследованию параметрического резонанса крутильных колебаний возникающего при изгибных колебаниях консольных пластин. В работе проводится поиск окон параметрического резонанса крутильных колебаний. Для первых двух мод изгибных колебаний построены окна параметрического резонанса крутильных колебаний.

Ключевые слова: изгибные колебания, крутильные колебания, параметрический резонанс

Введение

Консольно закрепленные пластины стержневого типа, у которых толщина h, ширина b и длина L таковы, что $h \ll b \ll L$ используются, в частности при определении логарифмического декремента колебаний (ЛДК) материала на основе исследования затухающих изгибных колебаний тест-образцов по первой основной моде с учетом аэродинамического демпфирования [2, 3]. Однако при определении ЛДК материалов на основе исследования вынужденных колебаний тест-образцов по второй

формам изгибных колебаний, наряду с фиксируемыми изгибными колебаниями, наблюдаются также и высокочастотные крутильные колебания. Для корректного описания указанных механических эффектов в основу базовых уравнений движения положим уточненные геометрически нелинейные уравнения колебаний удлиненных пластин, предложенные в работе [1]. Для простоты, уравнения [1] анализируются в пренебрежении демпфированием (внутренним и внешним). Модель предсказывает возбуждение крутильных колебаний (КК) пластины за счет параметрического резонанса при наличии высокоамплитудных изгибных колебаний (ИК). В данной работе ставится задача теоретического изучения этого явления с целью построения окон параметрического резонанса КК. Задача сводится к решению бесконечной цепочке обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, эта цепочка усекается и определяются мультипликаторы усеченной системы. Для первых двух мод ИК построены окна параметрического резонанса крутильных колебаний. Показано, что при типичных значениях параметров для основной моды ИК окна резонанса чрезвычайно узки, в силу чего фиксация роста КК не представляется возможной на имеющемся экспериментальном оборудовании. Иначе обстоит ситуация для второй моды. Здесь окна параметрического резонанса проявляются более отчетливо и может ставится задача их экспериментального обнаружения

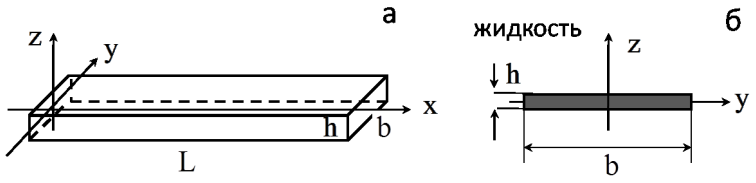


Рис. 1. Обозначения в задаче о вибрации пластины

Постановка задачи

Уточненная модель [1], описывающая изгибно-крутильные колебания пластины, имеет вид

$$\rho h b^3 \ddot{w} \frac{Ebh^3}{12}\left(1+\frac{b^2}{h^2}\varphi^2\right) w^{IV} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\rho h b^3}{12}\ddot{\varphi} + \frac{Ebh^3}{12}\varphi (w'')^2 - \frac{Gbh^3}{3}\varphi'' = 0 \tag{2}$$

Здесь и далее штрихами обозначается дифференцирование по x, точками – по времени t; w –смещение средней линии пластины в направлении оси z; φ – угол поворота вокруг оси Ox; ρ – эффективная плотность материала пластины, E и G – эффективные модуль Юнга и модуль сдвига. Граничные условия в изучаемом случае отвечают жесткой заделке пластины при $x = 0$ и свободному концу при $x = L$:

$$w(0) = w'(0) = \varphi(0) = w''(L) = w'''(L) = \varphi'(L) = 0. \tag{3}$$

Наличие членов $\varphi^2 w^{IV}$ è$\varphi (w'')^2$ обеспечивают взаимодействие ИК и КК. Слагаемое $b^2 h^{-2}\varphi^2$во всех разумных случаях много меньше единицы. Им можно пренебречь, таким образом, обратное влияние КК на ИК пренебрегается.

Примем, что КК происходят по одной из собственных мод

$$w = AW_k(x/L)cos(\omega^k_{(IK)} t) \tag{4}$$

Здесь A -амплитуда колебаний конца пластины, $\omega^k_{(IK)}$ -собственная частота колебаний, функция W_k описывает профиль собственных колебаний, $W_k(1) = 1$, индекс k указывает номер моды. Далее расчеты будут проводится для двух первых мод. Теоретические рассуждения от k не зависят, поэтому будем пока опускать этот индекс.

Нормируя пространственную координату на L, время – на $\omega^{-1}_{(IK)}$ и сохраняя за ними прежние обозначения, преобразуем (2) к виду

$$(\frac{\pi}{2\Omega})^2\ddot{\varphi} - \varphi'' + s^2 R(x)\varphi \sin^2 t = 0, \qquad R(x) = (W''(x))^2. \tag{5}$$

Параметры $s = \sqrt{\frac{E}{G}}\frac{bA}{2hL}$,$\Omega = \frac{\omega_{(KP)}}{\omega_{(IK)}}$ представляют собой безразмерную амплитуду ИК и отношение частоты ИК к главной частоте собственных крутильных колебаний. Необходимо проанализировать тривиальное решение уравнение (5) с граничными условиями

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(L) = 0$$

на устойчивость по отношению к бесконечно малым возмущениям.

Решение задачи в главном члене

Проводя переход к бесконечной цепочке ОДУ и удерживая главный члена в разложении задача сводится к одному дифференциальному уравнению второго порядка (уравнение Хилла)

$$\ddot{c} + \frac{4}{\pi^2}\Omega^2\mu(s^2\sin^2 t)c = 0 \tag{6}$$

Здесь и далее для простоты записи нижний индекс 1 при μ и c опускается. При каждом фиксированном ε и Ω определим на периоде $[0,\pi]$ решение c_0 уравнения (6), подчиненное условиям $c_0(0) = 1$,$\dot{c}_0(0) = 0$. Аналогично уравнению Матье, в зависимости от величины $c_* = c_0(\pi)$,проводится оценка устойчивости и определяется мультипликатор$\rho = | c_* | + \sqrt{c_*^2 - 1}$

Карту режимов удобно представлять в плоскости (Ω, s) .Расчеты для случая главной изгибной моды ИК проводились в диапазоне $s < 5, \quad 12 < \Omega < 24$. Они показали, что, с одной стороны, окна неустойчивости в этой области чрезвычайно узки (ширина менее 2.10^{-3}), практически стягиваясь в линию.Мультипликатор в них отличается от единицы менее, чем на одну тысячную. Это делает их обнаружение невозможным. Расчеты для случая второй изгибной моды ИК проводились в диапазоне

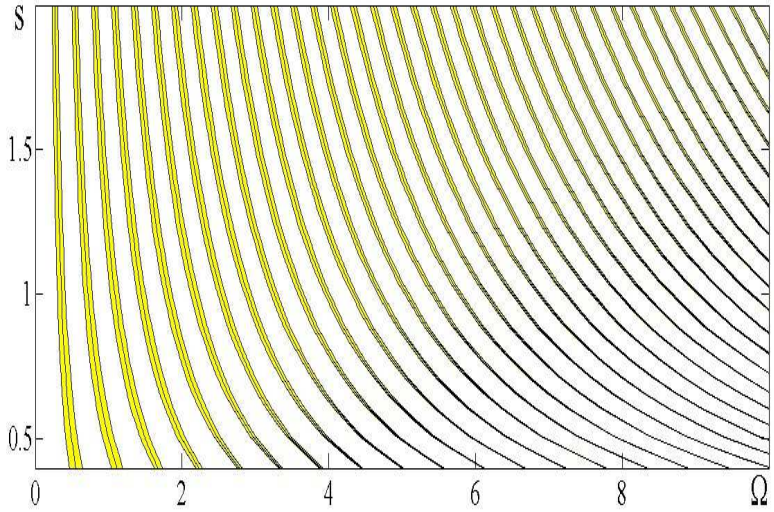


Рис. 2. Карта режимов параметрического резонанса. Желтым цветом выделены области неустойчивости. Кривые внутри них соответствуют максимальному вдоль Ω значению мультипликатора.

$s < 2, \Omega < 10$. Карта режимов в этом случае представлена на рис.2. Как видно, ширина δ окон неустойчивости возрастает с уменьшением Ω и ростом s . Максимальное значение мультипликатора растет с ростом ширины окна. Зависимости $\delta(\Omega), \rho(\Omega)$ для нескольких значений s показаны на рис 3. При стремлении s к нулю все окна стягиваются в точки $\Omega = 1,2,3....$ Интересно, что свойство равноудаленности окон друг от друга сохраняется при любом значении s.

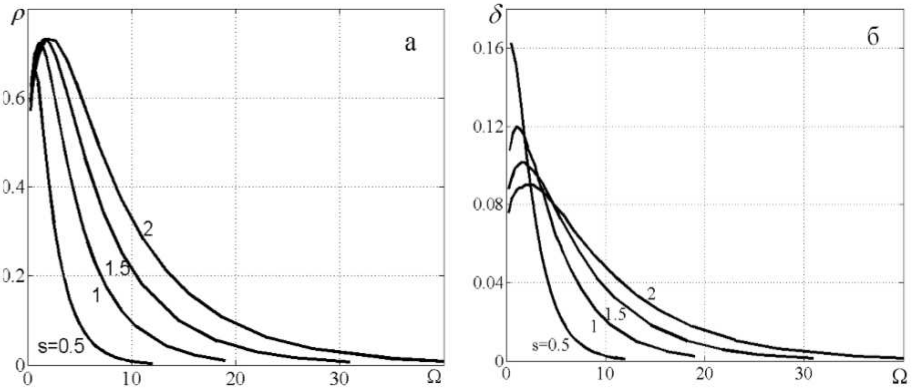


Рис. 3. Зависимость максимального мультипликтора (а) и ширины окна неустойчивости (б) в зависимости от отношения Ω частот колебаний при различных значениях безразмерной частоты *s* второй моды ИК.

Заключение

В работе был проведён анализ параметрического резонанса крутильных колебаний консольных пластин возникающего при их изгибных колебаниях. Построены окна резонанса в параметрической плоскости (Ω, s) для колебаний пластин по второй изгибной моде.

Литература

1. 1. Камалутдинов А.М., *Паймушин В.Н. Уточненные геометрически нелинейные уравнения движения удлиненной пластины стержневого типа* // Известия высших учебных заведений. Математика. - 2016. № 9. - С. 84-89

2. N. N. Davidenkov, *On Energy Dissipation due to Vibrations,* Zh. Tekh. Fiz. 8 (6), 483–499 (1938)..

3. V. G. Dubenets and V. V. Khil'chevskii,*Oscillations of Damped Composite Structures* (Vishcha Shkola, Kiev,1995), Vol. 1 [in Russian].

THE PARAMETRIC RESONANCE IN FLEXURAL-TORSIONAL VIBRATIONS OF PLATES

B. Affane

The article is devoted to studying the parametric resonance of torsional vibrations appearing during the flexural vibrations of cantilever beams. The aim is to find windows of this parametric resonance. For the first two modes of flexural vibrations windows were determined.
Keywords: flexural vibrations, torsional vibrations, parametric resonance

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОДЗЕМНЫХ АРМИРОВАННЫХ КОНСТРУКЦИЙ И ГРУНТОВ СО СЛОЖНЫМИ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

И.К. Байтемиров[1], И.С. Балафендиева[2], Л.Р. Секаева[3]

1 *zicmdi@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *isbalafendieva@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий
3 *lrsekaeva@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В статье рассматривается моделирование поэтапного строительства элементов конструкций, взаимодейтсвующих с грунтовым массивом.

Ключевые слова: грунт, трехмерные конструкции, геометрическая нелинейность

При моделировании поэтапного строительства элементов конструкций промышленных и транспортных сооружений для выявления формирующихся полей напряженно-деформированного состояния вводится понятия трансформирующихся конструкций или механических систем, которые на отдельных этапах процесса строительства переходят от одного структурного класса к другому. Трансформация расчетной схемы происходит дискретно при переходе с одного этапа строительства на другой. На каждом шаге трансформирования необходимые расчеты приходится проводить с учетом результатов, полученных в механической системе на предыдущих шагах. Такие расчеты требуют постановки соответствующих задач механики с учетом геометрической нелинейности. Для решения геометрически нелинейных задач в работе используется алгоритм, реализованный на основе «модифицированной инкрементальной теории Лагранжа», когда процесс деформирования представляется в виде последовательности равновесных состояний при соответствующих уровнях нагружения. При моделировании взаимодействия элементов конструкций с грунтами в ряде случаев для адекватной оценки характера деформирования используются различные методики контактного взаимодействия элементов конструкций между собой и с грунтом. Не учет контакта может привести к принципиально иному результату, в какой-то степени даже противоречащему здравому смыслу. Для примера приводится расчет напряженно-деформированного состояния подпорных стенок котлована станции метрополитена при поэтапном проведении работ. Так как котлован имеет форму параллелепипеда, его длина велика по сравнению с его шириной, то для выявления основных закономерностей деформирования расчет можно проводить в двумерной постановке, в условиях плоской деформации. Механические характеристики дискретно расположенных объектов при проведении расчетов пересчитывались к средним величинам. Дискретизация проводится квадратными конечными элементами сплошной среды, за базовый размер стороны элемента выбирается толщина бетонной стенки. При расчетах на первом этапе прикладывался собственный вес расчетной области. Далее, поэтапно и равными порциями проводится выемка грунта. Вычислительный эксперимент показал, что в данной задаче достаточно провести выемку всего грунта за десять этапов. Были проведены две серии расчетов. В первом случае контактная задача не решалась, во втором случае между грунтом и бетонными стенками вводился контактный элемент и допускался отрыв и проскальзывание между стенками котлована и грунтом. Анализ результатов показывает, что эти варианты расчета принципиально отличаются. В первом случае стенки расходятся в стороны и максимальные изгибные (растягивающие) напряжения возникают на внутренней поверхности подпорных стенок. Это объясняется тем, что после выемки грунта между стенками, который (при отсутствии контакта) как бы стягивал стенки, грунт, расположенный за подпорными стенками, начинает раздвигать их. Этого не происходит в случае учета контакта между стенками и грунтом, и в этом случае после выемки грунта под действием силы тяжести грунта за стенками они начинают изгибаться вовнутрь котлована. Кроме этого, уровень напряженного состояния в этом случае гораздо ниже. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №18-31-00419.

STUDY OF THE INTERACTION'S PROCESSES OF UNDERGROUND REINFORCED STRUCTURES AND SOILS WITH COMPLEX PHYSICAL AND MECHANICAL PROPERTIES

I.K. Baytemirov, I.S. Balafendieva, L.R. Sekaeva

The article discusses the modeling of the phased construction of structural elements interacting with the soil mass.

Keywords: soil, three-dimensional constructions, geometric nonlinearity

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГРУНТА В ЗОНЕ БУРЕНИЯ И МОНТАЖА СКВАЖИНЫ

И.С. Балафендиева[1], А.А. Нотфуллина[2], Л.Р. Секаева[3]

1 *isbalafendieva@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий
2 *aanotfullina@stud.kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
3 *lrsekaeva@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В статье рассматривается моделирование процессов бурения и монтажа скважин для определения полей напряженно-деформированного состояния.

Ключевые слова: грунт, бурение, трехмерные конструкции, упругопластическое деформирование

При моделировании процессов бурения и монтажа скважин в нефтяной и газодобывающей промышленности для определения полей напряженно-деформированного состояния на каждом этапе вводятся так называемые понятия структурно-трансформирующихся механических систем. Используемые при моделировании подобных задач алгоритмы предполагают, что на каждом шаге расчета может скачком изменяться жесткость всей системы. В этом случае необходим учет результатов, полученных на более ранних шагах применяемой схемы расчета, что ведет к необходимости использования геометрической нелинейности расчетной области. Кроме того, для решения задач бурения и монтажа скважин часто приходится использовать упругопластические модели грунта даже при невысоком уровне внешних нагрузок. В данной работе применяется методика, основанная на «модифицирован-ной инкрементальной теории Лагранжа», когда процесс деформирования представляется в виде последовательности равновесных состояний при соответствующих уровнях нагружения, определяющие соотношения вводятся в приращениях между истинными компонентами тензоров напряжений и деформаций. Кроме того, совместный расчет элементов конструкции скважины и грунта предполагает контактное взаимодействие между собой элементов расчетной области. Для примера приводится расчет напряженно-деформированного и предельного состояний грунта ствола скважины в зоне бурения. Расчеты проводились для скважин различной глубины бурения и реального залегания грунтов как в упругой, так и в упругопластической постановке. Полученные результаты решения задачи сравнивались с результатами, полученными при проведении мониторинга скважины. Результаты сравнения позволяют сделать вывод об адекватности и эффективности предложенной методики расчета напряженно-деформированного и предельного состояний расчетных областей, что позволяет более точно и технически грамотно принимать проектные решения для различных этапов строительных работ. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научног проекта №18-31-00419.

STUDY OF THE PROCESSES OF SOIL'S ELASTOPLASTIC DEFORMATION IN THE ZONE OF DRILLING AND WELL'S INSTALLATION

I.S. Balafendieva, A.A. Notfyllina, L.R. Sekaeva

The article discusses the modeling of drilling and wells installation to determine the fields of stress-strain state.

Keywords: soil, drilling, three-dimensional constructions, elastoplastic deformation

УДК 517.956

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В МАТЕРИАЛЕ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ УЛЬТРАКОРОТКИМИ ЛАЗЕРНЫМИ ИМПУЛЬСАМИ

Л.А. Бигаева[1], И.И. Латыпов[2]

1 *bigla@rambler.ru*; Башкирский государственный университет
2 *latypovii@rambler.ru*; Башкирский государственный университет

В докладе рассматривается задача нахождения распределения температуры в твердом материале при облучении ультракороткими лазерными импульсами, приводится двухтемпературная модель описания переходных явлений в неравновесном электронном газе и решетке при субпикосекундном лазерном воздействии.

Ключевые слова: асимптотика, нестационарное уравнение теплопроводности, сингулярно возмущенная краевая задача, лазерный импульс, подвижная граница

Введение. Интерес к изучению различного рода локально-неравновесных систем и процессов переноса (энергии, массы, импульса) связан с одной стороны с естественным направлением развития науки (равновесные системы, локально-равновесные и локально-неравновесные), а с другой с быстрым развитием технологии, использование материалов со сложной структурой (полимеров, жидких кристаллов, капиллярно-пористых и других дисперсных систем), лазерной техники. Быстрое развитие экспериментальной техники привело к тому, что, начиная с 80-х годов, исследования абляции проводились с лазерными импульсами наносекундного диапазона, в последующие годы все больше внимания уделяется абляции под действием ультракоротких лазерных импульсов пикосекундного и фемтосекундного диапазонов, для которых квазистационарный режим абляции не достигается [1,3]. В случае металла одной из особенностей являются эффекты, связанные с электрон-фононным взаимодействием, и явления, обусловленные горячим электронным газом в веществе. Так же важным является задача исследования влияния граничных условий и импульсного режима облучения на распределение температуры в материале.

В работе рассматривается задача нахождения распределения температуры в твердом материале при облучении ультракороткими лазерными импульсами, приводится двухтемпературная модель описания переходных явлений в неравновесном электронном газе и решетке при субпикосекундном лазерном воздействии в следующих постановках [2,3]:

Модель диффузионного типа, представляющая собой систему двух параболических уравнений теплопроводности;

Модель уравнения переноса гиперболического типа, представляющая собой систему двух уравнений переноса гиперболического типа.

Постановка задачи

Модель диффузионного типа. Двухтемпературная модель [2] описывает транспорт энергии внутри металла с помощью системы уравнений нестационарной теплопроводности для температуры электронов и решетки:

$$c_e\frac{\partial T_e(z,t)}{\partial t}=c_e\nu\frac{\partial T_e(z,t)}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\chi_e\frac{\partial T_e(z,t)}{\partial z}\right)+D_k\cdot Q-\mu_e\left(T_e(z,t)-T_i(z,t)\right),\quad (x,t)\in\Omega,$$

$$c_i\frac{\partial T_i(x,t)}{\partial t}=c_i\nu\frac{\partial T_i(x,t)}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\chi_i\frac{\partial T_i(x,t)}{\partial z}\right)+D_k\cdot Q+\mu_e\left(T_e-T_i\right),\quad (x,t)\in\Omega,$$

$$T_e(z,\ t_k)=T_{e,k}(z),\quad T_e(z,\ t_0)=T_{e,0}(z)=T_0,\quad k=\overline{0,m},$$

$$T_i(z,\ t_k)=T_{i,k}(z),\quad T_i(z,\ t_0)=T_{i,0}(z)=T_0,\ \ D_k=\begin{cases}1, & k=2p\\ 0, & k=2p+1\end{cases},$$

$$\Omega=\{(x,t):\ 0<\ z\ <\ H,\ \ t_0<t<t_\infty\},$$

$$-\chi\cdot\left.\frac{\partial T_e(z,t)}{\partial z}\right|_{z=0}=J_e(t),\ J_e(t)=-k_0b_0\left(T_{e,s}(t)+T_0\right)^2\exp\left\{-\frac{T_a}{T_{e,s}(t)+T_0}\right\},$$

$$-\chi\cdot\left.\frac{\partial T_i(z,t)}{\partial z}\right|_{z=0}=J_i(t)=-\varrho\nu\mathrm{L},\ \nu=\nu_0\exp\left\{-\frac{T_u}{T_{i,s}+T_0}\right\},$$

$$-\chi\cdot\left.\frac{\partial T_e(z,t)}{\partial z}\right|_{z=H}=\psi_e(t)+\sigma_{1,e}\left[T_e(z,t)-T_0\right]+\sigma_{2,e}\left[T_e^4(z,t)-U_0^4\right],$$

$$-\chi\cdot\left.\frac{\partial T_i(z,t)}{\partial z}\right|_{z=H}=\psi_i(t)+\sigma_{1,i}\left[T_i(z,t)-T_0\right]+\sigma_{2,i}\left[T_i^4(z,t)-U_0^4\right],$$

где $\mu_e=c_e/\tau$ - коэффициент скорости обмена энергией между электронной и решеточной подсистемами (τ- характерное время обмена для электронной подсистемы); b_0 - постоянная Ричардсона; $k_0=k_b\left(T_{s,e}-T_0\right)/e$- коэффициент преобразования плотности потока энергии J_e в энергетические единицы, где индекс s - обозначает значение соответствующей величины на поверхности $z=0$;

H, ψ, L- толщина, плотность и удельная теплота плавления материала; ν, T_a - константы, характеризующие модель испарения. Функции ψ_e, ψ_i и константы $\sigma_{1,e}$, $\sigma_{1,e}$, $\sigma_{1,i}$, $\sigma_{1,i}$ определяют режимы теплообменана на обратной стороне пластины. Функция $Q(z,t)$ - описывает вид и характер источника тепла.

Данная модель применима в случае, когда работают классические законы Фурье, т.е. для времен, много больших, чем характерное время τ_e установления равновесного распределения в электронном газе, которое в большинстве задач составляет несколько фемтосекунд.

Модель уравнения переноса гиперболического типа. Двухтемпературная модель диффузионного типа справедливы при условии, что время установления равновесия в подсистемах много меньше времени установления равновесия между ними. Если учитывать процессы релаксации внутри каждой подсистемы получим двухтемпературную модель системы уравнений переноса гиперболического типа [2]. Применительно к процессу теплообмена между электронным газом и решеткой при облучении поверхности металлов сверхкороткими импульса энергии система примет вид

$$\frac{a_e}{\nu_F^2}\frac{\partial^2 T_e(z,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial T_e(z,t)}{\partial t}=a_e\frac{\partial^2 T_e(z,t)}{\partial z^2}+Q_e+\mu\cdot F_e(\tau_e),$$

$$\frac{a_i}{\nu_C^2}\frac{\partial^2 T_i(z,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial T_i(z,t)}{\partial t}=a_i\frac{\partial^2 T_i(z,t)}{\partial z^2}+Q_i+\mu\cdot F_i(\tau_i),$$

где $Q_e=W+\tau_e\cdot\frac{\partial W}{\partial t}$, $F_e(\tau_e)=(T_e-T_i)+\tau_e\frac{\partial(T_e-T_i)}{\partial t}=-F_i(\tau_i)$, $\nu_e=\left(\frac{a_e}{\tau_e}\right)^{\frac{1}{2}}\approx\nu_F$, $\nu_i=\left(\frac{a_i}{\tau_i}\right)^{\frac{1}{2}}\approx\nu_C$, ν_C - скорость звука в металле; τ_e, τ_i- время релаксации к локальному равновесию подсистем соответственно; W- интенсивность распределенных в системе источников энергии; $a_e=\frac{\lambda_e}{C_e\varrho_e}$, $a_i=\frac{\lambda_i}{C_i\varrho_i}$; μ - коэффициент теплообмена между подсистемами.

Решение задачи. Ставится задача аналитического и численного исследования распределение температуры в материале при лазерной абляции. В этом случае источник тепла Q может быть определена в виде $Q=-\frac{\partial I}{\partial z}=\alpha\cdot I$, $I(0,t)=I_s(t)=A\cdot I(t)$, где α, I_s - коэффициент поглощения и интенсивность излучения на поверхности материала, зависящий от формы лазерного импульса.

Исходная задача, вводя безразмерные переменные, сводится к решению системы сингулярно возмущенных краевых задач уравнения теплопроводности с нелинейными граничными условиями. Приближенное решение которой, используя "геометро-оптический"асимптотический метод [4,5], получается в виде асимптотического разложения решения в смысле Пуанкаре по степеням малых параметров, в зависимости от близости рассматриваемой точки к границам [5-8].

Литература

1. Прохоров А. М., Конов В. И., Урсу И., Михэилеску И. Н. *Взаимодействие лазерного излучения с металлами.* – М.: Наука, 1988.

2. Соболев С. Л. *Процессы переноса и бегущие волны в локально-неравновесных системах* // УФН. 1991. Т. 161. –С. 5-29.

3. Анисимов С. И., Лукьянчук Б. С.*Избранные вопросы теории лазерной абляции.* // УФН. 2002. Том 172, № 3.

4. Kravchenko, V. F., Nesenenko, G. A., Latypov, I. I.*An application of integral equations to a singularly perturbed nonstationary boundary value problem for the heat equation in a domain with moving boundaries* // Differential Equations. Volume 35, Issue 9, September 1999, Pages 1184–1192.

5. Латыпов И. И. *Приближенный расчет распределения температурного поля активного элемента твердотельного лазера*// Труды кафедры экспериментальной и теоретической физики института физики молекул и кристаллов УНЦ РАН. Вып. 1. Уфа.: Гилем, 2001. –С. 82–92.

6. Латыпов И. И. *Моделирование испарения материала короткими лазерными импульсами.* Труды четвертой РНК по теплообмену: В 8 томах. Т.5. Испарение, конденсация. – М.: Изд.дом МЭИ, 2006. –С.138–142.

7. Latypov I. I.*Approximate solution to a singular perturbed boundary value problem of thermal shielding* // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 918 (2017) 012005

8. Latypov I. I., Bigaeva L. A., Chudinov V. V., Gilev A. Y., Gaisin F. R. *Material evaporation with ultrashort laser exposure*// IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 537 (2019) 022068

STUDY OF NON-STATIONARY THERMAL PROCESSES IN THE MATERIAL WHEN EXPOSED ULTRASHORT LASER PULSES

L.A. Bigaeva, I.I. Latypov

The article deals with the problem of finding the temperature distribution in a solid material when irradiated by ultrashort laser pulses, two-temperature model is a description of transient phenomena in nonequilibrium electron gas and lattice at subpicosecond laser irradiation.
Keywords: asymptotics, nonstationary heat equation, singular perturbed boundary value problem, laser pulse, moving boundary

УДК 517.53, 004.9

ПРИМЕНЕНИЕ СКМ MAPLE ПРИ ИЗУЧЕНИИ НЕКОТОРЫХ РАЗДЕЛОВ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Л.А. Бикбаева[1], Н.В. Зайцева[2]

1 *luiza99@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

2 *n.v.zaiceva@yandex.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В работе с помощью системы компьютерной математики Maple исследована теория рядов Лорана и изолированных особых точек однозначного характера.

Ключевые слова: функция комплексного переменного, ряд Лорана, особая точка, система компьютерной математики Maple

При решении конкретных задач комплексного анализа мы применили систему компьютерной математики Maple, позволившую не столько освободиться от математических вычислений и преобразований, но наглядно продемонстрировать поведение графика самой функции и ее разложений в ряд Лорана вблизи особых точек.

Известно [1, 2], что ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n,$$

где a – фиксированная точка комплексной плоскости, c_n – заданные комплексные числа, называется *рядом Лорана*.

Рассмотрим пример. Найти разложение функции $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)(2+z)}$ в ряд Лорана.

Функция $f(z)$ регулярна в следующих областях:

$$D_1: \ |z|<1, \quad D_2: \ 1<|z|<2, \quad D_3: \ |z|>2.$$

Разложения функции в ряд в каждой из указанных областей имеют вид:

$$D_1: \quad f(z) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)z^n;$$

$$D_2: \quad f(z) = -\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^n} + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}};$$

$$D_3: \quad f(z) = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}-1}{z^n}.$$

Продемонстрируем выполнение данного примера средствами системы компьютерной математики Maple. Сначала опишем функцию:

```
> restart;
> f:=z->1/((1-z)*(z+2));
```

Составим процедуру, зависящую от следующих параметров: - самой функции (u), - равенства, определяющего переменную и точку разложения (VarPoint), - степени остаточного члена (n).

```
> F:=proc(u,VarPoint,n) local t;
  t:=lhs(VarPoint);
  convert(series(u(t),VarPoint,n),polynom);
  end proc:
```

Второй параметр процедуры будем рассматривать, как равенство. Локальной переменной t присваивается левая часть этого равенства (z). Далее процедура выполняет разложение (с помощью команды series()) функции в ряд и преобразует его в полиномиальный вид.

Обратимся к процедуре по имени F и получим разложения функции в окрестностях точек: $z = 0$ (область D_1), $z = 1$ и $z = -2$.

```
> F(f, z=0, 5);
> F(f, z=1, 5);
> F(f, z=-2, 5);
```

Полученные выражения аппроксимируют исходную функцию в трех областях. Также в пакете Maple можно проиллюстрировать разложение функции в ряд Лорана в указанных областях. Для этого сначала подключим пакет для работы с графикой. И зададим значение true для опции discont, чтобы при отображении графиков функций программа Maple не соединяла точки разрыва линиями.

```
> with(plots):
> plot( [f(z),F(f, z=0, 5),F(f, z=1, 5),F(f, z=-2, 5)],z=-5..5,-5..5,
  color=[BLUE,RED,GREEN,VIOLET],style=[LINE,POINT,POINT,LINE],
  symbol=[POINT,CROSS,DIAMOND,POINT],thickness=[1,0,0,0],discont=true,
  title="Разложение функции в ряд Лорана",titlefont=[COURIER, BOLD, 13],
  legend=["функция","ряд в окрестности z=0","ряд в окрестности z=1",
  "ряд в окрестности z=-2"]);
```

Результаты настоящей работы являются примером демонстрации тесных межпредметных связей между математическими дисциплинами и информационными технологиями, а также методикой их преподавания.

Литература

1. Шабат Б. В., Лаврентьев М. А. *Методы теории функций комплексного переменного.* – М.: Книга по требованию, 2013. – 734 с.

2. Половкин Е. С. *Теория функций комплексного переменного.* – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. – 816 с.

3. Клочко Т. В., Парфенова Н. Д. *Решение задач комплексного анализа средствами Maple. Учебно-методическое пособие.* – Харьков: ХНУ им. В.Н. Каразина, 2009. – 68 с.

USING PROGRAM MAPLE TO STUDY SOME SECTIONS OF THE THEORY OF FUNCTIONS OF A COMPLEX VARIABLE

L.A. Bikbaeva, N.V. Zaitseva

In the paper investigates the Laurent series and singular points using of Maple computer mathematics system.

Keywords: complex variable function, Laurent series, singular point, Maple computer mathematics system

УДК 514.822

СОЗДАНИЕ ЭЛЕКТРОННОГО ПОСОБИЯ ПО ТЕМЕ «МНОГОГРАННИКИ» КУРСА СТЕРЕОМЕТРИИ С ПРИМЕНЕНИЕМ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Л.А. Бикбаева[1], А.Р. Самигуллина[2]

1 *luiza99@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

2 *alsu_sam@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Электронное пособие содержит краткое изложение тем курса стереометрии, который изучается учащимися 10-11 классов на уроках геометрии и студентами физико-математических и педагогических направлений по таким дисциплинам, как проективная геометрия, математическое моделирование и элементарная математика. Пособие снабжено не только теоретическим материалом, но и примерами решения задач с использованием систем компьютерной математики.

Ключевые слова: геометрия, стереометрия, Maple, Scilab, GeoGebra, Prezi

Электронное пособие содержит краткое изложение тем курса стереометрии в виде презентаций, выполненных с помощью сервиса «Prezi». В пособии имеются демонстрационные графические материалы и программные процедуры [1], [2], выполненные с помощью пакетов программ СКМ «Maple 2018», «Scilab», «GeoGebra», графического редактора «CorelDRAW» и программного обеспечения для создания трёхмерной компьютерной графики «Blender», позволяющего наглядно ознакомиться с материалом.

Ниже приведен пример создания процедуры в пакете Maple:

```
>Pyramida:=proc(X::(list(symbol)),Y::(list(list)))
 local L,L1,T,T1,n,P:
 n:=nops(X):
 L:=plottools[polygon]([seq(Y[i],  i=1..n-1)],
 style=line, color=blue, thickness=2):
 L1:=seq(plottools[line](Y[i],Y[n],
 color=blue, thickness=2), i=1..n-1):
 T:=plots[textplot3d]([seq([op(Y[i]), X[i]], i=1..n-1)],
 color=black, align=[left,above], font=[TIMES,ROMAN,18]):
 T1:=plots[textplot3d]([op(Y[n]),X[n]], color=black,
 align=[left,above], font=[TIMES,ROMAN,18]):
 P:=plot3d(0,x=-1..4,y=-1..5,style=surface,color=gray):
 plots[display](L,L1,T,T1,P, scaling=constrained,labels=[x,y,z]);
 end proc:
```

Исполнение процедуры:

```
>Pyramida([A,B,C,D,S],[[0,0,0],[2,0,0],[2,3,0],[0,3,0],[0,0,4]]);
```

Пособие может быть использовано учащимися старшей школы общеобразовательных учреждений при подготовке к занятиям по геометрии и выпускным экзаменам, студентами физико-математических и педагогических направлений, а также преподавателями.

Литература

1. Игнатьев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Обучение высшей математике на основе интегрирования методов математического и компьютерного моделирования в системах компьютерной математики // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – Вып. 2 – 2016. – с. 62-88

2. Свидетельство № 2016660615 Российская Федерация. Программный комплекс программных процедур для обучения высшей математике и самотестирования знаний с применением прикладного математического пакета Maple и его приложения Maplet в формате электронного учебника: свидетельство об офиц. регистрации программы для ЭВМ / Ю.Г. Игнатьев, А.Р. Самигуллина; заявитель и

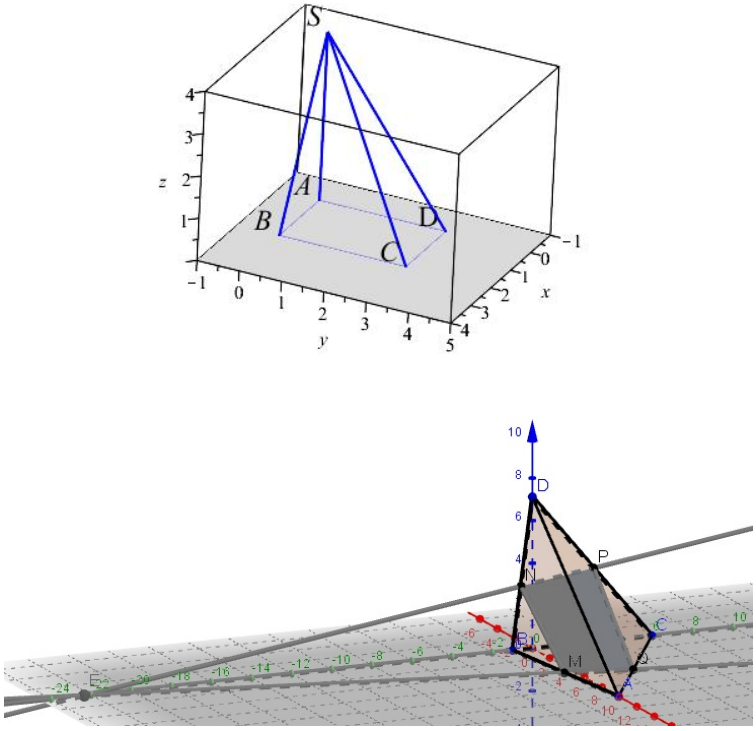


Рис. 1. Примеры геометрических фигур, созданных в Maple, GeoGebra

правообладатель ФГАО ВО Каз.фед.ун-т. № 2016617866 ; заявл. 18.07.2016 ; зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 19.09.2016. - [1] с.

CREATING AN ELECTRONIC MANUAL ON THE TOPIC "POLYHEDRONS" OF THE COURSE OF STEREOMETRY WITH USING COMPUTER MATHEMATICS SYSTEMS

L.A. Bikbaeva, A.R. Samigullina

The electronic manual contains a summary of the topics of the stereometry course, which is studied by students of grades 10–11 at geometry classes and students of physical and mathematical and pedagogical directions in such disciplines as projective geometry, mathematical modeling and elementary mathematics. The manual is equipped not only with theoretical material, but also with examples of solving problems using computer mathematics systems.
Keywords: geometry, stereometry, Maple, Scilab, GeoGebra, Prezi

УДК 510.5

1-ВЫЧИСЛИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ПОРЯДКОВ С ОТНОШЕНИЕМ СОСЕДСТВА

Р.И. Бикмухаметов[1], М.С. Ерашкин[2], А.Н. Фролов[3]

1 *ravil.bkm@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *mikhail.eryashkin@gmail.com*; Университет Иннополис
3 *andrey.frolov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В работе рассматриваются вычислимые линейные порядки, сигнатура которых обогащена отношением соседства. Получено описание 1-вычислимости таких порядков. Также были описаны линейные порядки для которых 1-вычислимость влечет 2-вычислимость.

Ключевые слова: линейные порядки, 1-вычислимость, отношение соседства, отношение плотности, отношение предельности, внутренне вычислимые отношения

Алгебраическая структура с конечной сигнатурой называется вычислимой, если основное множество и все отношения и функции структуры вычислимы. В частности, линейный порядок вычислим, если его основное множество и отношение порядка вычислимы, а (конечно) обогащенный линейный порядок вычислим, если сам порядок вычислим, а также вычислимы все добавленные предикаты. Самым естественным отношением на линейном порядке является отношение соседства S. Два элемента линейного порядка называются соседними, если между ними нет другого элемента этого порядка. М. Мозес [1] показал, что линейный порядок является 1-вычислимым тогда и только тогда, когда сам порядок и его отношение соседства вычислимы. Линейный порядок называется n-вычислимым (или n-разрешимым), если все формулы над его сигнатурой с n кванторами равномерно вычислимы.

В работе рассматриваются линейные порядки, сигнатура которых обогащена отношением соседства. Другими словами, рассматриваются вычислимые алгебраические структуры с двумя бинарными отношениями, первое из которых является отношением линейного порядка, а второе – отношением соседства, согласованным с отношение порядка. Назовем такие структуры *1-линейными порядками*. Это определение согласуется с вышеприведенным результатом М. Мозеса [1] об описании 1-вычислимых линейных порядков. А именно, 1-вычислимые линейные порядки являются вычислимыми 1-линейными порядками.

На протяжении истории исследований вычислимых линейных порядков сформировался круг наиболее естественных и применимых отношений на них. Помимо отношения соседства S, в этот круг входят отношения блока F, плотности dn, предельности справа P^+ и предельности слева P^-. Напомним определения этих отношений. Два элемента находятся в *отношении блока*, если между ними конечное число элементов. Элемент линейного порядка называется *предельным справа (слева)*, если он не имеет правого (левого) соседа. Два элемента линейного порядка находятся в отношении *плотности*, если множество элементов между ними имеет тип η. При описании 2-низких представлений линейных порядков А.Н. Фролов [2] ввел отношения Q_n. Два элемента линейного порядка находятся в отношении Q_n, если в множестве элементов между ними длины максимальных блоков меньше n. Отметим, что $Q_1 = dn$.

Получено следующее описание 1-вычислимости 1-линейных порядков.

Теорема. *Пусть L — линейный порядок. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(1) (L, S) является 1-вычислимым 1-линейным порядком;
(2) L является 2-вычислимым линейным порядком;
(3) L является вычислимым линейным порядком, на котором вычислимы отношения S, P^+, P^- и Q_n для любого $n > 0$.

М. Мозес [3] показал, что линейный порядок имеет внутренне вычислимое отношение соседства тогда и только тогда, когда порядок содержит конечное число пар соседних элементов. Напомним, что отношение на вычислимой структуре называется внутренне вычислимым, если оно является вычислимым в любом вычислимом представлении этой структуры.

Следствие. *Пусть L — 1-линейный порядок. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(1) всякая вычислимая копия L является 1-вычислимым 1-линейным порядком;
(2) отношения P^+, P^- и Q_n для любого $n > 0$ являются внутренне вычислимыми на L;
(3) L имеет вид

$$k_0 + f_0 + k_1 + f_1 + \cdots + k_{n-1} + f_{n-1} + k_n,$$

где f_i — конечны и не пусты, а каждый k_i либо имеет тип $k\eta$, либо k_i содержит лишь конечное число предельных справа и предельных слева элементов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-31-00174 "Алгоритмические аспекты линейных порядков и отношений на них").

Литература

1. Moses M. *Recursive linear orders with recursive successivities* // Ann. Pure Appl. Logic. -- 1984. -- V. 27. -- P. 253–264.

2. Frolov A. N. *Low linear orderings* // J. Logic Comput. – 2012. – V. 22, No 4. – C. 745–754.

3. Moses M. *Relations intrinsically recursive in linear orders* // Z. Math. Logik Grundlag. Math. — 1986. — V. 32. — P. 467–472.

1-COMPUTABILITY OF LINEAR ORDERS WITH THE SUCCESSIVITY RELATION

R.I. Bikmukhametov, M.S. Eryashkin, A.N. Frolov

In this paper we consider linear orders, in which the signature is added successivity relation. We obtain a description of 1-computability of these linear orders. We also obtain a description of linear orders for which 1-computability implies 2-computability.
Keywords: linear orders, 1-computability, successivity relation, density relation, limit relation, intrinsically computable relations

УДК 512.541.7

ДУАЛЬНЫЕ СВЯЗИ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ С ИХ КОЛЬЦАМИ ЭНДОМОРФИЗМОВ

Е.А. Благовещенская[1]

1 *kblag2002@yahoo.com*; Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I

Устанавливается двойственный подход к почти вполне разложимым абелевым группам и их кольцам эндоморфизмов. Он применяется для анализа прямых разложений групп конечного ранга данного класса, а также обобщается для определенных классов абелевых групп бесконечных рангов.

Ключевые слова: абелевы группы без кручения, кольца эндоморфизмов

Мы рассматриваем так называемые *почти вполне разложимые* абелевы группы, которые в последние десятилетия приобрели широкую известность, см. [1-2]. Исследуются связи групп из этого класса с их кольцами эндоморфизмов, которые обладают свойством двойственности и основываются на том факте, что аддитивные группы последних также принадлежат классу почти вполне разложимых групп.

По определению, почти вполне разложимая группа X — это абелева группа без кручения конечного ранга, содержащая некоторую вполне разложимую группу A (прямую сумму групп ранга 1) в качестве подгруппы конечного индекса. Не умаляя общности, считаем, что A — однозначно определенная вполне характеристическая вполне разложимая подгруппа в X конечного индекса, и называем ее *регулятором*, обозначая $A = R(X)$.

Пусть $\mathscr{A}$ — класс почти вполне разложимых групп, имеющих регулятор A. Известно, что для любой группы $X \in \mathscr{A}$ существует конечное множество простых чисел $P = P(X)$, такое что $X = \sum_{p\in P} X_p$ является суммой своих вполне характеристических подгрупп $X_p \in \mathscr{A}$, для которых X_p/A — p-примарная конечная группа. Обозначим $\mathscr{E} = End X$, $\mathscr{E}_A = End A$, $\mathscr{E}_p = End X_p$, $e = exp\ X/A$ и $e_p = exp\ X_p/A$. Для каждого $p \in P$ введем натуральное число $\hat{e}_p = \prod_{q\in P,\ q\neq p} e_q$ и определим группу $X'_p = \frac{X_p}{\hat{e}_p}$ в делимой оболочке группы X_p, так что $\hat{e}_p X'_p = X_p$. Очевидно, $X_p \subset \frac{X_p}{\hat{e}_p}$ и $\hat{e}_p\mathscr{E}_p \subset \mathscr{E}_p$.

В основе анализа связей почти вполне разложимых групп с их кольцами эндоморфизмов лежит двойственность определений этих структур, доказанная в следующей теореме.

Теорема. *Пусть $X = \sum_{p\in P} X_p \in \mathscr{A}$. Тогда канонические цепи*
$A \subset X \subset \frac{A}{e}$ *и* $e\mathscr{E}_A \subset \mathscr{E} \subset \mathscr{E}_A$, *совпадают со следующими,*

$$\bigcap_{p\in P} X_p \quad \subset \quad \sum_{p\in P} X_p = \bigcap_{p\in P} \frac{X_p}{\hat{e}_p} \quad \subset \quad \sum_{p\in P} \frac{X_p}{\hat{e}_p} \quad \textit{и}$$

$$\bigcap_{p\in P} \hat{e}_p\mathscr{E}_p \quad \subset \quad \sum_{p\in P} \hat{e}_p\mathscr{E}_p = \bigcap_{p\in P} \mathscr{E}_p \quad \subset \quad \sum_{p\in P} \mathscr{E}_p \quad \textit{соответственно.}$$

Литература

1. A. Mader. *Almost Completely Decomposable Abelian Groups*, Algebra, Logic and Applications, Vol.**13**, Amsterdam, 1999. – 355 с.

2. Е. Благовещенская. *Почти вполне разложимые абелевы группы и их кольца эндоморфизмов*, Математика в Политехническом Университете, Санкт-Петербург, 2009. – 215 с.

DUAL CONNECTIONS BETWEEN TORSION-FREE ABELIAN GROUPS AND THEIR ENDOMORPHISM RINGS

E.A. Blagoveshchenskaya

A dual approach to almost completely decomposable abelian groups and their endomorphism rings is established. It is used for direct decomposition investigation for finite rank groups of a given class, and it is also generalized to certain classes of abelian groups of infinite ranks.
Keywords: torsion-free abelian groups, endomorphism rings

УДК 531/534

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ГЕОМЕТРИИ КОНСТРУКЦИИ

П.В. Большаков[1]

1 *bolshakov-pavel@inbox.ru*; Кафедра теоретической механики института математики и механики им Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета

В работе предложены и реализованы алгоритмы топологической и структурной оптимизации конструкции. Получены функциональные зависимости базового пористого элемента и эффективных механических свойств. Приведены примеры оптимизации конструкции.

Ключевые слова: топологическая оптимизация, структурная оптимизация, аддитивные технологии

В настоящее время с развитием аддитивных технологий в конструкторских задачах нашли распространения задачи топологической оптимизации. Методики оптимального нахождения параметров, описывающих геометрию и структуру конструкции, но при этом удовлетворяющие прочностные и технологические свойства позволяют уменьшить габариты и вес изделия [3-4]. Одним из направлений исследований являются исследования пористо-сетчатых структур, такая геометрия выигрышна в своих массовых свойствах, а при корректном проектировании может выдерживать большие нагрузки.

Математически задача может быть сформулирована как: необходимо найти такое распределение тензора упругих свойств E в объеме V, что инвариант напряжений (в нашем случае интенсивность напряжений по Мизесу) достигают минимума при постоянных граничных условиях.

Из конструктивных условий дополнительно необходимо определить под область V, в которой компоненты тензора упругих свойств остаются неизменной.

Предлагается подход к обобщению базового элемента и оценке его механических свойств [1]. С этой целью необходимо определить множество параметров, определяющих базовый элемент. Далее проводятся численные эксперименты и определяются управляющие функции [2]. Последующая оптимизация конструкции реализована на основе метода конечных элементов. Из предположения наличия механической симметрии базового элемента может быть использована гипотеза ортотропности. Сформулирована итерационный процесс оптимизации конструкции, в рамках которого использована гипотеза соосности тензора напряжений и осей ортотропии базового элемента. Отдельно стоит отметить реконструкцию получаемой геометрии, что позволяет в полуавтоматическом режиме получать готовые файлы для производства и последующей обработки. Предлагаемый подход был реализован для пористого базового элемента с выраженной эллиптичностью в одном направлении.

Подход к оптимизации основывается на итерационном процессе, где на каждом шаге осуществляется определение интенсивности напряжений, главных напряжений и их направления. В

дальнейшем оси ортотропии элемента ориентируются по главным направлениям. После этого определяются безразмерные параметры элемента. После нахождения параметров, отвечающих за размер поры и ее эллиптичность, для каждого элемента определяются эффективные механические характеристики и данный итерационный процесс переходит на следующий шаг, где решается задача напряженно-деформированного состояния (НДС).

Для апробации методики была выбрана конструкция и вид ее нагружения, сформулирована математическая постановка задачи. В виду того, что механические характеристики данного материала зависят от качества изготовления и расходных материалов, в расчетах принимались во внимание, как минимальные, так и максимальные возможные характеристики материала.

В качестве расчетной модели была выбрана арка. Расчет и оптимизация конструкции реализовалась на основе метода конечных элементов. Для дискретизации объема был использован восьми узловой элемент с линейной аппроксимацией. В качестве граничных условий была принята жёсткая заделка на левом краю арки, и скользящая опора на правом. Нагрузка прикладывалась в виде давления P=10МПа.

Максимальные напряжения по Мизесу после оптимизации уменьшились на 3-10 процентов относительно первоначальной конструкции. Расчеты показали быструю сходимость метода и устойчивость к вариации механических свойств конструкции. Стоит отметить, что разница в максимальных напряжениях при структурной оптимизации для минимальных и максимальных возможных механических свойствах была незначительна (порядка 3 процентов). Распределение пористости и осей ортотропии конструкции в обоих случаях схожи.

По полученным распределениям пористости и эллиптичности было произведена реконструкция 3D геометрии арки. Производство образца осуществлялось с помощью аддитивных технологий. Полученный первоначальный и оптимизированный образцы подвергались натурным испытаниям.

Литература

1. Герасимов О. В.Бережной Д. В., Андреев П. С., Большаков П. В., *Построение механической модели элементов гетерогенной среды на основе численно-цифрового алгоритма обработки данных компьютерной томографии* // Российский журнал биомеханики – 2019. – Т. 23. – № 1. – С. 104–116.

2. Большаков П. В. Тихилов Р. М., Мазуренко А. В., Коноплев Ю. Г., *Численное исследование влияния недопокрытия тазобедренного сустава* // Российский журнал биомеханики – 2018. – Т. 22. – № 1. – С. 19–30.

3. Alkhader M., Vural M., *Mechanical response of cellular solids: Role of cellular topology and microstructural irregularity* // International Journal of Engineering Science. – 2008. – Vol. 46. – pp. –1035-1051.

4. Anh-Vu Do., Khorsand D., Ashman R. B., *3D Printing of Scaffolds for Tissue Regeneration Applications* // Adv Healthc Mater. – 201. – Vol. 4(12). – pp. –1742-1762.

OPTIMIZATION METHODS OF DESIGN GEOMETRY

P.V. Bolshakov

The paper proposes and implements algorithms for topological and structural design optimization. Functional dependences of the basic porous element and effective mechanical properties are obtained. Examples of design optimization are given.
Keywords: topological optimization, structural optimization, additive technologies

УДК 515.124

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ $\mathbb{R}$-ДЕРЕВЬЕВ, СОХРАНЯЮЩИХ РАССТОЯНИЕ ОДИН

А.И. Булыгин[1]

1 *alexey.buligin@gmail.com*; Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова

Рассматриваются свойства локально полных подобно однородных неоднородных $\mathbb{R}$-деревьев. Построены отображения некоторых классов $\mathbb{R}$-деревьев, сохраняющие расстояние один.

Ключевые слова: подобно однородное пространство, $\mathbb{R}$-дерево, метрика

В работе изучаются некоторые свойства подобно однородных неоднородных метрических пространств с внутренней метрикой, в частности $\mathbb{R}$-деревьев.

Подобно однородные пространства являются естественным обобщением однородных римановых пространств, геометрия которых хорошо изучена с различных точек зрения, см., например, [1].

Полученные результаты являются продолжением исследований по геометрии подобно однородных $\mathbb{R}$-деревьев, представленных в [2].

Определение 1. *Под отрезком в X с концами $x, y \in X$ понимается образ в X числового отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ при изометрическом вложении $i : [a, b] \to X$, при котором $i(a) = x$ и $i(b) = y$. Пространство X называется геодезическим, если любые две точки $x, y \in X$ можно соединить отрезком.*

Определение 2. *Пространство X называется подобно однородным, если для любых точек $x, y \in X$ существует подобие φ, переводящее x в $\varphi(x) = y$. Если для любых $x, y \in X$ существует изометрия φ, переводящая x в y, пространство X называется однородным.*

Определение 3. *Пространство X называется локально полным, если для любой точки $x \in X$ определено число $r > 0$, для которого замкнутый шар $B(x, r)$ полон в метрике d. Точная верхняя грань радиусов r, для которых шар $B(x, r)$ полон, называется радиусом полноты в точке x. Для радиуса полноты в [3] принято обозначение $c(x)$. Если $c(x_0) = +\infty$ хотя бы в одной точке $x_0 \in X$, то пространство X полное и $c(x) = +\infty$ во всех точках $x \in X$.*

Теорема 1. (Берестовский В.Н., см. [3]) *Локально полное подобно однородное пространство X однородно тогда и только тогда, когда оно полно.*

Далее рассматриваются исключительно подобно однородные пространства, не являющиеся однородными, поэтому функция $c(x)$ всюду конечна.

Определение 4. *Нетривиальное (содержащее более одной точки) геодезическое пространство (X, d) называется $\mathbb{R}$-деревом, если объединение любых двух отрезков $[xy]$ и $[yz]$ в X, пересечение которых есть их общий конец y, является вновь отрезком $[xz]$. Иначе говоря, X является $\mathbb{R}$-деревом, если любая сторона произвольного треугольника $\triangle xyz$ в X содержится в объединении двух других сторон: $[xz] \subset [xy] \cup [yz]$.*

Определение 5. *$\mathbb{R}$-дерево называется симплициальным деревом, если оно обладает структурой одномерного симплициального комплекса. Нульмерные симплексы такого комплекса называются вершинами, а одномерные — рёбрами симплициального дерева. Каждому ребру $e = [xy]$ сопоставляется некоторое положительное число $\ell(e)$ — его длина. Метрика симплициального дерева X является внутренней метрикой, при которой расстояния между вершинами $x, y \in X$ равно сумме длин рёбер, составляющих метрический отрезок $[xy]$.*

В 1960-х гг. А.Д. Александров сформулировал общую проблему характеризации метрических пространств:

“Найти условия, достаточные для того, чтобы в метрическом пространстве (M, d) выполнялась следующая характеризация изометрий. Всякая биекция $F : M \to M$, сохраняющая вместе с обратным к ней отображением фиксированное расстояние r, есть изометрия.”

Определение 6. *Для точек $x, y \in M$ прыжковый путь длины n между ними определяется как отображение*

$$\gamma : \{0, 1, \dots, n\} \to M,$$

при котором $\gamma(0) = x$, $\gamma(n) = y$ и $d(\gamma(i-1), \gamma(i)) = 1$ при всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Число n называется длиной прыжкового пути γ.

Предложение 1. *Пусть X — полное симплициальное дерево, для которого все расстояния между вершинами являются рациональными числами и представляются дробями, знаменатели которых равномерно ограничены. Тогда X допускает биективное отображение на себя, сохраняющее расстояние один, не являющееся изометрией.*

Предложение 2. *Пусть $\mathbb{R}$-дерево X допускает нетривиальную изометрию, а множество попарных расстояний между его точками ветвления не более чем счётно. Тогда X допускает биективное отображение на себя, сохраняющее расстояние один и не являющееся изометрией.*

Характеризация А.Д. Александрова для метрических пространств в представленных случаях не выполняется. Полученный результат согласуется с работами других авторов (см. [4, 5, 6]).

Литература

1. Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г. *Римановы многообразия и однородные геодезические* – Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2012. – 414 с.

2. Andreev P. D., Bulygin A. I. *On the Vertical Similarly Homogeneous $\mathbb{R}$-Trees* // Lobachevskii J. Math. – 2019. – V. 40, № 2. – P. 127–139. DOI: 10.1134/S1995080219020033.

3. Берестовский В. Н. *Подобно однородные локально полные пространтва с врутренней метрикой* // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 11. – С. 3–22.

4. Александров А. Д. *Отображения семейств множеств* // ДАН СССР. – 1970. – Т. 190, № 3. – С. 502–505.

5. Богатый С. А., Фролкина О. Д. *Изометричность отображений, сохраняющих периметр* // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2004. – № 1. – С. 3–11.

6. Berestovskii V. N. *Pathologies in Aleksandrov spaces of curvature bounded above* // Siber. Adv. Math. – 2002. – V. 12, № 4. – P. 1–18.

ON MAPPINGS OF $\mathbb{R}$-TREES PRESERVING A DISTANCE OF ONE

A.I. Bulygin

The properties of locally complete like homogeneous inhomogeneous $\mathbb{R}$-trees are considered. Mappings of some classes of $\mathbb{R}$-trees that preserve one distance are constructed.
Keywords: similarly homogeneous space, $\mathbb{R}$-tree, metrics

УДК 517.83

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В.Б. Васильев[1], А.А. Ходырева[2]

1 *vbv57@inbox.ru*; Белгородский государственный национальный исследовательский университет
2 *711012@bsu.edu.ru*; Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Мы рассматриваем дискретные функции в конусе и исследуем свойства их дискретных преобразований Фурье. Эти свойства связаны с аналитичностью исследуемых классов функций в специальных областях многомерного комплексного пространства.

Ключевые слова: дискретная область, дискретное преобразование Фурье, аналитичность

Пусть $D \subset \mathbb{R}^m$ – выпуклый конус, не содержащий целой прямой, и $\overset{*}{D}$ – сопряженный конус к D, т.е.

$$\overset{*}{D} = \{x \in \mathbb{R}^m : x \cdot y > 0,\ y \in D\}.$$

Положим $D_d = h\mathbb{Z}^m, h > 0, \hbar \equiv h^{-1}$. Обозначим $T(\overset{*}{D}) \subset \mathbb{C}^m$ множество вида $\hbar\mathbb{T}^m + i\overset{*}{D}$. Для $\hbar\mathbb{T}^m \equiv \mathbb{R}^m (h \to 0)$ такие множества многомерного комплексного пространства называются радиальными трубчатыми областями над конусом $\overset{*}{D}$ [1]. Введем функцию

$$B_d(z) = \sum_{\tilde{x} \in D_d} e^{i\tilde{x}\cdot z} h^m, \quad z = \xi + i\tau, \quad \xi \in \hbar\mathbb{T}^m, \quad \tau \in \overset{*}{D},$$

и определим оператор

$$(B_d u)(\xi) = \lim_{\tau\to 0} \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^m} B_d(z-\eta)\, u_d(\eta)\, d\eta.$$

Этот оператор представляет собой конический аналог периодического преобразования Гильберта [2,3,4].

Далее вводятся дискретные аналоги пространства Шварца $S(h\mathbb{Z}^m)$ и пространств Соболева–Слободецкого $H^s(h\mathbb{Z}^m), H^s(D_d)$ [3,4]. На дискретном множестве D_d рассматриваются функции дискретного аргумента u_d.

Пусть $P_d : H^s(h\mathbb{Z}^m) \to H^s(D_d)$ – проектор на D_d, т.е. $\forall u_d \in H^s(h\mathbb{Z}^m)$

$$(P_d u_d)(\tilde{x}) = \begin{cases} u_d(\tilde{x}), & \tilde{x} \in D_d, \\ 0, & \tilde{x} \notin \overline{D_d} \end{cases}$$

Дискретное преобразование Фурье определяется формулой

$$(F_d u_d)(\xi) = \sum_{\tilde{x}\in h\mathbb{Z}^m} e^{i\tilde{x}\cdot\xi} u_d(\tilde{x}) h^m, \quad \xi \in \hbar[-\pi,\pi]^m.$$

Лемма 1. Для $u_d \in S(h\mathbb{Z}^m)$ справедливо следующее тождество

$$F_d P_d u_d = B_d F_d u_d$$

Доказательство. Если ввести функцию $\chi(\tilde{x})$ как характеристическую функцию дискретного конуса D_d, то, очевидно

$$(P_d u_d)(\tilde{x}) = \chi(\tilde{x}) u_d(\tilde{x}).$$

Чтобы применить теорему о свертке, мы регуляризуем характеристическую функцию $\chi(\tilde{x})$ множителем $e^{i\tilde{x}\cdot\tau}, \tau \in \overset{*}{D}$, так, что произведение $\chi(\tilde{x})e^{i\tilde{x}\cdot\tau}$ является уже интегрируемой функцией.

Теперь можно воспользоваться теоремой о свертке для двух функций $\chi(\tilde{x})e^{i\tilde{x}\cdot\tau}$ и $u_d(\tilde{x})$. Вспоминая определение $B_d(z)$ и свойства дискретного преобразования Фурье, мы получаем утверждение Леммы 1. ▲

Замечание. Из Леммы 1 следует, что оператор $B_d : L^2(\hbar\mathbb{T}^m) \to L^2(\hbar\mathbb{T}^m)$ – линейный ограниченный оператор с нормой, не зависящей от h, она равна 1.

Пример 1. Пусть $m = 2$ и конус D– это первый квадрант на плочкости

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_1 > 0, x_2 > 0\},$$

тогда соответствующее периодическое ядро $B_d(z)$ имеет вид

$$B_d(z_1, z_2) = \frac{h^2}{4i\pi} \operatorname{ctg}\frac{hz_1}{2} \operatorname{ctg}\frac{hz_2}{2},$$

и соответствующий оператор выглядит следующим образом ($\tau = (\tau_1, \tau_2) \in D$)

$$(B_d \tilde{u})(\xi_1, \xi_2) =$$

$$\frac{h^2}{4i\pi} \lim_{\tau\to 0} \int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \operatorname{ctg}\frac{h(\xi_1 + i\tau_1 - t_1)}{2} \operatorname{ctg}\frac{h(\xi_2 + i\tau_2 - t_2)}{2} \tilde{u}(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2.$$

Вычисления в одномерном случае приведены в [2]. Отметим, что в нашем случае конус D – самосопряженный, т. е. $D = \overset{*}{D}$.

Лемма 2. Функция $B_d(z)$ аналитична в области $T(\overset{*}{D})$ и удовлетворяет оценке

$$\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^m} |B_d(\xi + i\tau)|^2 d\xi \le C\left(\frac{h}{1 - e^{-hb|\tau|}}\right)^m,$$

где постоянная C не зависит отh.

Доказательчтво. Условия Коши–Римана проверяются непосредственно. Далее мы воспользуемся аргументами из [1]. Согласно равенству Парсеваля имеем

$$\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^m} |B_d(\xi+i\tau|^2 d\xi = \frac{1}{(2\pi)^m}\sum_{\tilde{x}\in D_d} |e^{i\tilde{x}\cdot z}|^2 h^m = \frac{1}{(2\pi)^m}\sum_{\tilde{x}\in D_d} e^{-2\tilde{x}\cdot\tau} h^m =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^m}\sum_{\tilde{x}\in D_d} e^{-2|\tilde{x}|\cdot|\tau|\cdot\cos\widehat{(\tilde{\ },\tau)}} h^m,$$

где $\widehat{(\tilde{\ },\tau)}$ обозначает угол между $\tilde{x}$ и τ. Последний ряд схзодится только в том случае, когда $\tau \in \overset{*}{D}$. Следовательно,

$$\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^m} |B_d(\xi+i\tau|^2 d\xi \le \frac{1}{(2\pi)^m}\sum_{\tilde{x}\in D_d} e^{-2a|\tilde{x}|\cdot|\tau|} h^m,$$

где $a>0, \tilde{x}\in D'_d, \tau \in \overset{*}{D}{}''_d$ (см.[1]).

Учитывая, что для $b>0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-khb|\tau|} h = \frac{h}{1-e^{-hb|\tau|}}$$

мы получаем

$$\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^m} |B_d(\xi+i\tau|^2 d\xi \le C\left(\frac{h}{1-e^{-hb|\tau|}}\right)^m.$$

Это завершает доказательство. ▲

Замечание 2. Очевидно, что при $h\to 0$ мы получаем известную оценку [1] вида $C'|\tau|^{-m}$.

Пример 2. Пусть $m=3$ и область D – одномерное ребро

$$D=\{x\in\mathbb{R}^3 : x=(x_1,x_2,x_3), x_1>0, x_2>0\},$$

тогда

$$(B_d\tilde{u})(\xi_1,\xi_2,\xi_3) =$$

$$\frac{h^2}{4i\pi}\lim_{\tau\to 0}\int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi}\int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \cot\frac{h(\xi_1+i\tau_1-t_1)}{2}\cot\frac{h(\xi_2+i\tau_2-t_2)}{2}\tilde{u}(t_1,t_2,\xi_3)dt_1dt_2.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ
(проект № 1 .7311.2017/8.9).

Литература

1. Владимиров В. С. *Методы теории фунций многих комплексных переменных.* – М.: Наука, 1964. – 411 с.

2. Vasilyev A., Vasilyev V.. *Discrete singular operators and equations in a half-space*// Azerb. J. Math. –2013. – V. 3. –No 1. –P. 84–93.

3. Vasilyev A., Vasilyev V. *Pseudo-differential operators and equa- tions in a discrete half-space*// Math. Model. Anal. –2018. –V. 23. –No 3. –P. 492–506.

4. Vasilyev V. *The periodic Cauchy kernel, the periodic Bochner kernel, discrete pseudo-differential operators*// In: T. Simos and C. Tsitouras(Eds.), Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applications (ICNAAM- 2016), V. 1863 of AIP Conf. Proc., p. 140014, Melville, 2017. AIP Publishing.

ON CERTAIN PROPERTIES OF DISCRETE OPERATORS

V.B. Vasilyev, A.A. Khodyreva

We consider discrete functions in a cone and study the properties of their discrete Fourier transforms. These properties are related to analyticity of functional classes under consideration in special domains of multidimensional complex space.
Keywords: discrete domain, discrete Fourier transform, analyticity

УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.Б. Васильев[1], Н.В. Эберлейн[2]

1 *vbv57@inbox.ru*; Белгородский государственный национальный исследовательский университет
2 *649377@bsu.edu.ru*; Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Мы рассматриваем краевую задачу с условием типа Дирихле для пары эллиптических псевдодифференциальных уравнений в плоском угле в пространствах Соболева–Слободецкого. Показано, что однозначная разрешимость такой задачи эквивалентна разрешимости системы интегральных уравнений, построенных с помощью волновой факторизации эллиптических символов.

Ключевые слова: псевдодифференциальное уравнение, разрешимость, краевая задача

Мы напомним некоторые основные факты и методы [1,2], связанные с разрешимостью псевдодифференциального уравнения

$$(Au_+)(x) = f(x),\ x \in C^a_+, \tag{1}$$

в пространстве $H^s(C^a_+)$, где C^a_+ – m-мерный конус $C^a_+ = \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x_1, ..., x_{m-1}, x_m), x_m > a|x'|, a > 0\}$, $x' = (x_1, ..., x_{m-1})$, A – псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$, удовлетворяющим условию

$$c_1 \le |A(\xi)(1 + |\xi|)^{-\alpha}| \le c_2. \tag{2}$$

Такие символы являются эллиптическими [1,2], и имеют порядок $\alpha \in \mathbb{R}$.

По определению, пространство $H^s(C^a_+)$ состоит из (обобщенных) функций из пространства $H^s(\mathbb{R}^m)$, носители которых содержатся в $\overline{C^a_+}$. Норма в пространстве $H^s(C^a_+)$ индуцируется нормой пространства $H^s(\mathbb{R}^m)$.

Обозначим $\overset{*}{C}{}^a_+$ конус, сопряженный конусу C^a_+:

$$\overset{*}{C}{}^a_+ = \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x', x_m), ax_m > |x'|\},$$

$C^a_- \equiv -C^a_+$, $T(C^a_+)$ обозначает радиальную трубчатую область над конусом C^a_+, т.е. область многомерного комплексного пространства $\mathbb{C}^m$ вида $\mathbb{R}^m + iC^a_+$ [3], знак "~" обозначает преобразование Фурье:

$$\tilde{u}(\xi) \equiv (Fu)(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{-ix\cdot\xi} u(x)dx.$$

Для описания картины разрешимости уравнения (1) вводится следующее

Определение. *Волновой факторизацией символа $A(\xi)$ щтносительно конуса C^a_+ называется его представление в виде*

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi)A_{=}(\xi),$$

где сомножители $A_{\neq}(\xi), A_{=}(\xi)$ должны удовлетворять следующим условиям:

1) $A_{\neq}(\xi), A_{=}(\xi)$ определены для всех значений $\xi \in \mathbb{R}^m$ кроме, возможно, точек $\{\xi \in \mathbb{R}^m : |\xi'|^2 = a^2\xi_m^2\}$;

2) $A_{\neq}(\xi), A_{=}(\xi)$ *допучкают аналитическое продолжение врадиальные трубчатые области* $T(\overset{*}{C}{}^{a}_{+}), T(\overset{*}{C}{}^{a}_{-})$ *соответственно с оценками*

$$|A^{\pm 1}_{\neq}(\xi + i\tau)| \le c_1(1 + |\xi| + |\tau|)^{\pm \jmath_A},$$

$$|A^{\pm 1}_{=}(\xi - i\tau)| \le c_2(1 + |\xi| + |\tau|)^{\pm(\alpha - \jmath_A)}, \ \forall \tau \in \overset{*}{C}{}^{a}_{+}.$$

Число $\jmath_A \in \mathbb{R}$ *называется индексом волновой факторизации символа* $A(\xi)$.

Здесь мы рассмотрим следующую задачу на плоскости: найти пару функций $u_+ \in H^{s_1}(C^a_+), v_- \in H^{s_2}(\mathbb{R}^2 \setminus C^a_+)$, которые удовлетворяю уравнениям

$$(Au_+)(x) = 0, \quad x \in C^a_+, \tag{3}$$

$$(Bv_-)(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus C^a_+, \tag{4}$$

где $C^a_+ = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 > a|x_1|, \ a > 0\}$, A, B – псевдодифференциальные операторы с символами $A(\xi), B(\xi)$, удовлетворяющими условию (2) с порядками α, β соответственно.

Мы здесь предположим, что индексы волновой факторизации $\jmath_A, \jmath_B$ символов $A(\xi), B(\xi)$ таковы, что $\jmath_A - s_1 = 1 + \delta_1, \jmath_B - s_2 = 1 + \delta_2, |\delta_1| < 1/2, |\delta_2| < 1/2$.

Согласно теории, развитой в [2], общие решения уравнений (3),(4) имеют вид

$$\tilde{u}_+(\xi) = A^{-1}_{\neq}(\xi)\left(\tilde{c}_0(\xi_1 - a\xi_2) + \tilde{d}_0(\xi_1 + a\xi_2)\right), \tag{5}$$

$$\tilde{v}_-(\xi) = B^{-1}_{=}(\xi)\left(\tilde{r}_0(\xi_1 - a\xi_2) + \tilde{q}_0(\xi_1 + a\xi_2)\right), \tag{6}$$

где c_0, d_0, r_0, q_0 – произвольные функции одной переменной, $c_0, d_0 \in H^{s'_1}(\mathbb{R}_+), r_0, q_0 \in H^{s'_2}(\mathbb{R}_-), s'_k = s_k - 1/2, k = 1,2$.

Для определения 4 произвольных функций задается одно интегральное условие (это устанавливает связь между парами c_0, d_0 и r_0, q_0) и линейная комбинация граничных значений u_+ и v_-, подобно [4], в результате чего получается (2×2)-система линейных интегральных уравнений. Разрешимость последней системы линейных интегральных уравнений эквивалентна разрешимости поставленной краевой задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект 1.7311.2017/8.9).

Литература

1. Эскин Г. И. *Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1973. – 232 с.

2. Васильев В. Б. *Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи.* – М.: КомКнига—2-е изд., 2010. – 135 с.

3. Владимиров В. С. *Методы теории фунций многих комплексных переменных.* – М.: Наука, 1964. – 411 с.

4. Vasilyev V. B. *On some transmission problems in a plane corner* // Tatra Mt. Math. Publ. – 2015. – V. 63. – P. 291–301.

ON SOLVABILITY OF SOME INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

V.B. Vasilyev, N.V. Eberlein

We consider boundary value problem with Dirichlet type condition for a pair of elliptic pseudo-differential equations in a plane sector in Sobolev–Slobodetskii spaces. It was shown that for unique solvability of the problem is equivalent to a unique solvabilityt of a system of linear integral equations which constructed by the wave factorization.

Keywords: pseudo-differential equation, solvability, boundary value problem

УДК 372.8

БЫСТРЫЙ СТАРТ В КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛЯ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

Е.В. Вепрецкая[1], Е.А. Кормушкина[2], Г.Н. Мухаметзянова[3], Э.В. Чеботарева[4]

1 *abigaill13@yandex.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
2 *kormushkina.katya@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
3 *gmuxametzyanova@list.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
4 *elvchb@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В статье приводится описание методики проведения разработанного авторами экспресс-практикума, направленного на формирование у будущих учителей математики навыков по использованию различных инструментов компьютерного моделирования, адаптированных для применения в образовательном процессе.

Ключевые слова: математическое образование, математическое моделирование, компьютерное моделирование, экспресс-практикум, компьютерное моделирование

Роль компьютерного моделирования в математическом образовании не ограничивается лишь использованием компьютерных моделей в качестве наглядных материалов, демонстрирующих свойства изучаемых объектов и явлений. Компьютерное моделирование является эффективным средством реализации прикладной направленности различных учебных дисциплин [1, 2, 3, 4]. Интеграция компьютерного моделирования в математическое образование позволяет усилить междисциплинарные и прикладные аспекты образовательного процесса. Однако на практике возникает ряд общих проблем, мешающих использовать преимущества данного подхода. Одной из таких проблем является острая нехватка учебного времени для изучения инструментов компьютерного моделирования.

Как правило, профессиональные системы компьютерной математики обладают специфическим интерфейсом и требуют дополнительного изучения языка программирования, свойственного для той или иной системы. Поэтому при внедрении конкретной системы компьютерной математики в учебный процесс необходимо особое внимание уделить изучению основ работы с такими системами. Отсутствие навыков работы с системой компьютерной математики как с инструментом компьютерного моделирования делает невозможным осознанное построение учебных компьютерных моделей. Таким образом, изучение профессиональных систем компьютерной математики, используемых при моделировании, требует от обучающихся значительных временных затрат.

Другой проблемой, даже при достаточном количестве учебного времени на изучение системы компьютерной математики, является проблема чрезмерного увлечения применением информационных технологий при изучении математических дисциплин [5]. В этом случае, целью решения задач на построение компьютерных моделей становится изучение самих инструментов компьютерного моделирования. При этом прикладная направленность в изучении математических дисциплин и междисциплинарный подход не реализуются в полной мере.

В настоящей работе для решения указанных проблем предлагается проведение экспресс-практикума по компьютерному моделированию, позволяющего быстро сформировать навыки, необходимые для построения учебных компьютерных моделей. Практикум предназначен для студентов бакалавриата – будущих учителей математики, обучающихся по направлению “Педагогическое образование”. Также практикум может быть использован при подготовке учащихся 10–11 классов к проектной деятельности.

Для эффективного использования компьютерного моделирования в качестве инструмента, реализующего прикладную направленность и междисциплинарный подход в математическом образовании, необходимо, чтобы программные средства разработки учебных компьютерных моделей, удовлетворяли ряду функциональных и нефункциональных требований.

Функциональные требования определяются, в первую очередь, математическим аппаратом,

применяемым обучающимися для решения прикладных задач, требующих построения и исследования математических моделей. Минимальный функционал образовательных программных средств должен включать в себя явное и параметрическое задание функции одной переменной, вычисление значений функции в точке, решение уравнений и систем уравнений, вычисление производной функции, вычисление определенных и неопределенных интегралов, решение простейших обыкновенных дифференциальных уравнений. К функциональным требованиям, связанным с графическим представлением объектов моделирования, также относятся возможность построения геометрических объектов, построение графиков функций одной переменной, визуализация динамики графических объектов по заданному закону движения, возможность экспорта построенных моделей в популярные графические форматы. Среди нефункциональных требований к таким программным средствам важнейшую роль играют: удобство и простота использования для обучающихся, интуитивно понятный интерфейс, нетребовательность к ресурсам.

В рамках экспресс-практикума по построению компьютерных моделей предлагается использовать систему компьютерной математики GeoGebra [6], а также язык программирования Processing [7]. Экспресс-практикум рассчитан на 8 академических часов. В ходе практикума обучающимся предлагается решение прикладных задач, требующих построения и исследования математической модели. Решение всех задач реализуется с помощью классической схемы “модель – алгоритм – программа” [8].

На первом этапе строится математическая модель процесса и производится ее исследование с помощью теоретических методов, доступных обучающимся. На втором этапе разрабатывается алгоритм реализации данной модели с помощью программных средств. На третьем этапе строится компьютерная модель процесса. Процедура построения модели может содержать несколько циклов, состоящих из трех указанных этапов. В результате, обучающиеся не только получают навыки работы с программными средствами, но и разрабатываю компьютерную модель, пригодную для проведения экспериментов.

Структурно практикум разбит на четыре части. Каждая часть рассчитана на 2 академических часа и посвящена решению одной задачи, согласно приведенной выше схеме.

Задача 1. “Яблоко массой 250 г бросили с высоты 21 м. Через какое время и с какой скоростью оно упадет на землю?”

Задача 2. “Баскетбольный мяч бросили с высоты 2 м с начальной скоростью 9 м/с. Под каким углом необходимо произвести бросок, чтобы мяч попал в корзину, находящуюся на расстоянии 4 м от бросающего и подвешенную на высоте 3 м от пола?”

Задача 3. “Автомобиль, двигаясь со скоростью 80 км/ч, начинает торможение. Сопротивление движению после начала торможения пропорционально весу автомобиля с коэффициентом 0,7. Через сколько секунд автомобиль остановится? Чему равен тормозной путь автомобиля?”

Задача 4. “Чашка кофе остывает с 64°C до 54°C за 6.5 минут. Скорость изменения температуры кофе пропорциональна разности между температурой кофе и температурой окружающей среды. За какое время кофе охладится с 65°C до 45°C, если температура в комнате 24°C?”

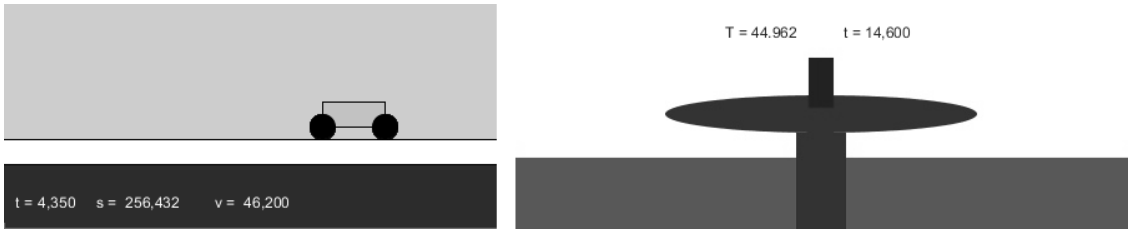


Рис. 1. Примеры компьютерных моделей к задачам 3 и 4, построенных учащимися при первом знакомстве с языком Processing

Экспресс-практикум был проведен в учебной группе студентов, обучающихся по направлению “Педагогическое образование”. Студенты были частично знакомы с основным функционалом системы GeoGebra и не имели опыта программирования на языке Processing. Все участники экспериментальной учебной группы успешно справились с предложенными задачами. На рис. 1 представлены примеры компьютерных моделей, построенных участниками. Несмотря на предельно простое графическое представление моделей, они обладают всеми качествами, необходимыми для проведения вычислительного эксперимента. На построение таких моделей у обучающихся уходит малое

количество учебного времени. А сам процесс построения модели не отвлекает от решения основной задачи. После прохождения практикума участникам эксперимента было предложено построить две компьютерные модели, иллюстрирующие колебания математического маятника согласно заданному закону. При этом первая компьютерная модель должна была быть построена средствами GeoGebra, а вторая с помощью языка Processing. Все участники эксперимента также успешно справились с предложенным заданием.

Таким образом, предлагаемый эксперсс-практикум позволяет систематизировать уже имеющиеся у обучающихся знания и получить новые полезные в дальнейшем навыки по созданию простых графических компьютерных моделей.

Литература

1. Гербеков Х. А., Башкаева О. П. *Место математического и компьютерного моделирования в системе современного общего образования* // Вестник РУДН. Серия: Информатизация образования. – 2017. – Т. 14. – № 1. – С. 17–23.

2. Жук Л. В. *Компьютерное моделирование в структуре учебной деятельности по решению геометрических задач* // Педагогическая информатика. – 2018. – № 3. – С. 45–50.

3. Ge Q., Peng X., Chen M. *Application of animation of Super Sketch-Pad on mathematics education* // Int. Conf. on Comp. Sci. & Edu. – Nanning, 2009. – P. 1790–1795.

4. Kovac M.M., Eret L. *Correlation educational model in primary education curriculum of mathematics and computer science* // Proceedings of the 35th International Convention MIPRO – Opatija, 2012. – P. 1393–1397.

5. Мирзаева Т. В., Загребельная С. В., Нахман А. Д. *Актуальные вопросы реализации концепции развития математического образования* // Вопросы педагогики. – 2019. – № 3. – С. 202–206.

6. GeoGebra Math Apps [Электронный ресурс]. URL: https://www.geogebra.org/ (дата обращения: 28.10.2019).

7. Processing [Электронный ресурс]. URL: https://processing.org/ (дата обращения: 28.10.2019). https://processing.org/

8. Самарский А. А., Михайлов А.П. *Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры.* – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.

QUICK START WITH SIMULATION FOR FUTURE MATH TEACHERS

E.V. Vepreckaja, E.A. Kormushkina, G.N. Muhametzjanova, E.V. Chebotareva

The article describes the methodology for conducting an express workshop, aimed at developing future mathematics teachers' skills in using various computer modeling tools adapted for the educational process.

Keywords: mathematical education, mathematical modeling, computer modeling, simulation, express workshop

УДК 519.254

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕТРИК ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ СОЦИАЛЬНОЙ СЕТИ

А.А. Вышинская[1], З.А. Еникеева[2], Г.З. Вахитов[3]

1 *vyshanastasiya@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *zenikeeva@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
3 *asdzxc0303@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В работе проведен расчет ряда статистических показателей с целью выявления взаимосвязеей между количественными показателями профиля пользователя социальной сети и академической успешностью студентов.

Ключевые слова: академическая успешность, психометрика, социальные сети

Данные личностного профиля пользователей социальных сетей, отражая взаимосвязи их виртуального и реального «Я», выступают психометрическими показателями их жизненной активности. Соответственно, одним из вариантов их использования выступает возможность прогнозирования различных аспектов жизненной активности личности. В работе в качестве одного из аспектов жизненной активности, которые можно исследовать через социальные сети, выделена академическая успешность студентов, под которой понимаются их достижения на этапе профессионального становления в учебном процессе.

Для осуществления поиска взаимосвязей между профилем социальной сети «Вконтакте» и академической успешностью были предоставлены данные о студентах Казанского (Приволжского) Федерального Университета, обучавшихся с 2013 по 2019 год по программам бакалавриата, магистратуры и специалитета, в количестве 32581 человек. Из них была удалена информация о лицах, официально отчисленных или не приступивших к учебе на момент проведения исследования, а также о тех, чей возраст превышал 30 лет. Также в итоговую анализируемую выборку не вошли студенты, обучавшиеся по программе магистратуры. Это было сделано с целью получения наиболее объективной оценки успеваемости обучающихся по отношению друг к другу. Итоговое количество данных о студентах в полученной выборке составило 21631 человек.

В качестве показателя успеваемости были взяты средние баллы по экзаменам в течении всех семестров обучения. У всех рассматриваемых студентов минимальная оценка составляла 3 балла, максимальная – 5 баллов. В связи с этим 15% с наиболее высокими баллами (4.83 – 5.0] были отнесены к лицам с высокой успеваемостью, 15% с наименьшими баллами [3.0 – 3.53) – к лицам с низкой успеваемостью, а остальные вошли в группу лиц со средней успеваемостью с соответствующим интервалом баллов [3.53 – 4.83].

Для анализа информации из социальной сети «Вконтакте» были выбраны пять параметров профилей: количество друзей, подписчиков, фотографий, видеозаписей и интересных страниц. Это связано с тем, что они наиболее полно отражены в числовом формате.

Далее для всей выборки и групп успешности были рассчитаны следующие статистические показатели: среднее, дисперсия, среднее квадратичное, асимметрия, эксцесс. Результаты представлены в таблице 1.

где $\overline{X}$ – среднее, $D(X)$ – дисперсия, σ – среднеквадратичное отклонение, A – асимметрия, E – эксцесс.

Подводя итог, можно сказать, что при анализе данных о студентах Казанского (Приволжского) Федерального Университета было выдвинуто предположение о наличии связи между академической успеваемостью и количественными параметрами из личных профилей студентов в социальной сети «Вконтакте». Однако в процессе обработки представленной информации и расчета статистических показателей итоговых выборок подтвердить данное предположение в явном виде не удалось. Это говорит либо о необходимости проведения дополнительных исследований и, возможно, использования других методов поиска взаимосвязей, либо об отсутствии какой бы то ни было зависимости между исследуемыми в данной работе параметрами.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №19-18-00253, «Нейросетевая психометрическая модель когнитивно-поведенческих предикторов жизненной активности личности на базе социальных сетей»)

Литература

1. Фер М., Бакарак В. *Психометрика: Введение.* – Челябинск.: ЮУрГУ, 2010. – 213 с.

Таблица 1. Табл.1 Расчет статистических параметров

	$\overline{X}$	$D(X)$	σ	A	E
Вся анализируемая выборка					
Друзья	221,6388	73484,1649	271,0796	9,7818	189,5342
Подписчики	297,003	316638,86	562,7067	45,5016	3637,3913
Фотографии	74,1371	70727,179	265,9458	31,6984	1950,7052
Видеозаписи	140,227	169381,388	411,5597	8,21286	106,2077
Страницы	98,6749	14044,619	118,5099	5,08021	57,9565
Высокая успеваемость					
Друзья	239,9965	52790,1	229,761	3,773353	23,43514
Подписчики	290,429	138994,3	372,8193	12,75259	274,5496
Фотографии	82,42237	43593,74	208,7911	9,502009	151,8442
Видеозаписи	137,1852	183437,8	428,2964	10,15868	159,4047
Страницы	98,7718	14136,48	118,8969	6,294341	98,29589
Средняя успеваемость					
Друзья	224,0128	79503,72	281,964	10,24947	196,7253
Подписчики	306,5299	366172,5	605,1219	49,7688	3872,716
Фотографии	78,301	88095,58	296,809	32,17194	1817,454
Видеозаписи	140,0879	157973,5	397,4588	7,487889	83,9917
Страницы	98,4927	13152,21	114,6831	4,9487	57,0057
Низкая успеваемость					
Друзья	191,7694	66438,56	257,7568	11,2114	233,6286
Подписчики	260,9144	278433,2	527,6677	18,7455	568,3679
Фотографии	46,6321	20014,23	141,4717	8,080684	93,62053
Видеозаписи	144,0219	206658	454,5965	8,5565	116,3548
Страницы	99,4018	18010,27	134,2023	4,4502	30,88947

2. Баранюк В. В., Десяткова А. Д., Смирнова О. С. *Подходы к определению психоэмоциональных особенностей информационного образа пользователя социальных сетей* //International Journal of Open Information Technologies – 2016. – Т. 4. – № 8. – С. 61–65.

STATISTICAL ANALYSIS OF SOCIAL NETWORK USER METRICS

A.A. Vyshinskaya, Z.A. Enikeeva, G.Z. Vahitov

In this work a number of statistical indicators are calculated in order to identify the relationship between the quantitative indicators of the user profiles in a social network and the academic success of students.

Keywords: academic success, psychometrics, social networks

УДК 519.21

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА С БОЛЬШИМИ УКЛОНЕНИЯМИ ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ С ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ

Ф.Г. Габбасов[1], В.Т. Дубровин[2], М.С. Фадеева[3]

1 *gabbasov@kgasu.ru*; Казанский государственный архитектурно-строительный университе
2 *vyacheslav.dubrovin@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
3 *manysha-98@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Работа посвящена дальнейшему исследованию сумм с дробными долями показательной функции. Улучшена оценка скорости сходимости в многомерной предельной теореме с большими уклонениями для сумм функций от независимых случайных величин. Следствием этой теоремы и является предельная теорема для распределения модуля тригонометрической суммы с показательной функцией.

Ключевые слова: показательная функция, тригонометрическая сумма, предельная теорема, скорость сходимости

При изучении ряда прикладных задач, в частности, задач фильтрации [1, 2, 3, 4], задач механики твердого тела [5, 6, 7, 8], расчета многослойных структур [9, 10, 11, 12], задач низкотемпературной плазмы [13, 14, 15, 16], возникает необходимость использовать соотношения, связывающие различные характеристики процессов. Эти соотношения эмпирические, они получены в результате статистической обработки результатов натурных экспериментов. Важную роль при этом играют предельные теоремы. В настоящей работе мы доказали предельную теорему для распределения модуля тригонометрической суммы с показательной функцией. Отметим, что в [17, 18, 19, 20] была исследована скорость сходимости в различных предельных теоремах для слабо зависимых случайных членов.

Тригонометрические суммы типа Вейля $\sum_{j=0}^{n-1}\exp(2\pi i t f(j))$ играют большую роль в теории чисел. Метод тригонометрических сумм является рабочим аппаратом, как в индивидуальной, так и в метрической теории распределения показательной функции. Этим и объясняется интерес к исследованию распределения модуля тригонометрических сумм с показательной функцией. В настоящей работе доказано, что справедлива

Теорема 1 *При* $1 \le x \le o(n^{1/6}/\ln^{4/3} n)$ *имеет место оценка*

$$\operatorname{mes}\left\{t: 0 \le t \le 1, \left|n^{-1/2}\sum_{j=0}^{n-1}\exp(2\pi i t 2^j)\right| > x\right\} = \exp(-x^2)\left(1 + O(x^3 n^{-1/2}\ln^{1/2} n)\right),$$

где $\operatorname{mes}\{\cdot\}$ *– мера Лебега.*

История вопроса такова. В.П. Минеев [21] показал, что

$$\left|\operatorname{mes}\left\{t: 0 \le t \le 1, \left|n^{-1/2}\sum_{j=0}^{n-1}\exp(2\pi i t 2^j)\right| > x\right\} - \exp(-x^2)\right| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Д.А. Москвин [22] получил оценку скорости сходимости порядка $n^{-2/9}$, Ф.Г.Габбасов [23] – оценку порядка $n^{-2/9}$. Кроме того, Д.А. Москвин [24] получил следующий результат.

Пусть вещественнозначная периодическая с периодом 1 функция $f(t)$ удовлетворяет на отрезке $[0,1]$ условно Липшица $|f(t) - f(t')| \le A|t - t'|^{\alpha}$, где $A > 0$, $\alpha > 0$, $t, t' \in [0,1]$, и, кроме того, $\int_0^1 f(t)dt = 0$, $\sigma^2 = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \left(n^{-1/2}\sum_{k=0}^{n-1} f(t2^k)\right)^2 dt > 0$. Тогда равномерно относительно $x \in \left[0, n^{1/6}/(\overline{\omega}(n)\ln^{7/6}(n))\right]$ (здесь $\overline{\omega} \to \infty$ при $n \to \infty$) имеет место соотношение

$$\operatorname{mes}\left\{\xi: 0 \le \xi \le 1, \sigma^{-1} n^{-1/2}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi 2^k) \in \overline{\Delta}_x\right\} = \Phi(\overline{\Delta}_x)\left(1 + O\left(x^3 n^{-1/2}\ln^{3/2}(n(1+x^3))\right)\right),$$

где $\Delta_x = [-x, x]$, а $\overline{\Delta}_x$ – внешность отрезка Δ_x. Это – так называемая теорема о больших уклонениях. Доказательство теоремы проводится методами теории вероятностей и основано на том, что функцию $f(t)$ можно записать в виде $f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ – функции Радемахера, которые можно считать независимыми случайными величинами. При доказательстве нет необходимости ограничиваться стать специальным классом функций от независимых случайных величин. В данной работе получен многомерный аналог этой теоремы с оценкой остатка лучше чем в [25].

Теорема 2 *Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, f – измеримое отображение пространства числовых последовательностей в k-мерное евклидово пространство R^k. Допустим, что случайные векторы $\overline{\xi}_j = f(\varepsilon_j, \varepsilon_{j+1}, \ldots) = (\xi_{j1}, \xi_{j2}, \ldots, \xi_{jk})$ удовлетворяют условиям*

1) $E\xi_{j1} = 0, \quad |\xi_{j1}| \le C_1, \ j = 1, 2, \ldots, k;$

2) $E^{1/\nu}\left|\nu_{j1} - E\{\xi_{j1}\left|\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r\}\right|^{\nu} \le C_2 \nu \exp(-\alpha r)$ для всех $\nu \ge 1$, где $E\{\xi_{j1}\left|\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r\right\}$ – условное математическое ожидание ξ_{j1} при условии, что фиксированы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$;

3) матрица R с элементами $\rho_{lj} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} E\left\{\sum\limits_{s=1}^{n} \xi_{sl} \sum\limits_{s=1}^{n} \xi_{sj}\right\}$ невырождена.

Тогда при $1 \le r \le o\left(n^{1/6}/(\ln^{2k/3} n)\right)$ справедливо соотношение

$$P\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{\xi}_j \in \overline{0}_r\} = \Phi_r\left(\overline{0}_r\right)\left(1 + O\left(n^{-1/2} r^3 \ln^{k/4}(n)\right)\right),$$

где $\overline{0}_r$ – внешность шара радиуса r с центром в начале координат, $\Phi_r(\cdot)$ – k-мерное нормальное распределение.

Доказательство теоремы проводится методом условных вероятностей [23, 24, 26]. Если в качестве $\overline{\xi}_j$ взять вектор $\left(\cos(2\pi t 2^j), \sin(2\pi t 2^j)\right)$, то получим теорему 1 о распределении модуля тригонометрической суммы.

Работа выполненв при поддержке РНФ (проект 16-11-10299)

Литература

1. Бадриев И. Б., Задворнов О. А. *Исследование стационарной задачи фильтрации с многозначным законом при наличии точечного источника* // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41. – № 7. – С. 874–880.

2. Badriev I. B., Zadvornov O. A. *On the convergence of the dual-type iterative method for mixed variational inequalities* // Differential Equations. – 2006. – V. 42. – № 8. – P. 1180–1188.

3. Badriev I. B., Fanyuk B. Y. *Iterative methods for solving seepage problems in multilayer beds in the presence of a point source* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2012. – V. 33. – № 4. – P. 386–399.

4. Бадриев И. Б., Ляшко А. Д., Панкратова О. В. *Исследование сходимости итерационных методов решения нелинейных задач теории фильтрации* // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1998. – № 11. – С. 8–13.

5. Бадриев И. Б., Задворнов О. А. *Исследование разрешимости осесимметричной задачи об определении положения равновесия мягкой оболочки вращения* // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2005. – № 1. – С. 25–30.

6. Бадриев И. Б., Бандеров В. В., Задворнов О. А. *О решении задачи равновесия мягкой сетчатой оболочки при наличии нагрузки, сосредоточенной в точке* // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2013. – № 3. – С. 16–34.

7. Бадриев И. Б., Бандеров В. В. *Численное моделирование деформирования биокомпозитов* // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред.

Материалы XXI международного симпозиума имени А.Г. Горшкова. – М: ООО "ТРП 2015. – С. 7–9.

8. Solov'ev S. I. *Eigenvibrations of a bar with elastically attached load*// Differential Equations. – 2017. – V. 53. – № 3. – P. 409–423.

9. Бадриев И. Б., Макаров М. В., Паймушин В. Н. *Численное исследование физически нелинейной задачи о продольном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем* // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 1. – С. 39–51.

10. Бадриев И. Б., Макаров М. В., Паймушин В. Н. *Геометрически нелинейная задача о продольно-поперечном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем* // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2016. – Т. 158. – № 4. – С. 453–468.

11. Badriev I. B., Makarov M. V., Paimushin V. N. *Geometrically nonlinear problem of longitudinal and transverse bending of a sandwich plate with transversally soft core* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2018. – V. 39. – № 3. – P. 448–457.

12. Badriev I. B., Banderov V. V., Makarov M. V. *Mathematical simulation of the problem of the pre-critical sandwich plate bending in geometrically nonlinear one dimensional formulation* // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2017. – V. 208. – № 1. – Art. 012002

13. Бадриев И. Б., Желтухин В. С., Чебакова В. Ю. *О решении некоторых нелинейных краевых и начально-краевых задач* // Материалы XXII Международного симпозиума "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред" им. А.Г. Горшкова. – Москва: ООО "ТРП" , 2016. – С. 31–33.

14. Чебакова В. Ю. *Моделирование высокочастотного емкостного разряда при атмосферном давлении в аргоне* // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2016. – Т. 158. – № 3. – С. 4049-423.

15. Бадриев И. Б., Чебакова В. Ю. *Математическое моделирование низкотемпературной ВЧЕ-плазмы в аргоне* // Математическое моделирование и краевые задачи Труды десятой Всероссийской научной конференции с международным участием: в 3-х томах. – Саратов, 2016. – С. 17–21.

16. Zheltukhin V. S., Solovyev S. I., Solovyev P. S., Chebakova V. Yu. *Existence of solutions for electron balance problem in the stationary radio-frequency induction discharges* // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2016. – V. 158. –№ 1. – Art. 012103

17. Dubrovin V. T. *Convergence rate in limit theorems for weakly dependent random values* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2014. – V. 35. – № 4. – P. 390–396.

18. Габбасов Ф. Г., Дубровин В. Т., Чебакова В. Ю. *Предельная теорема для слабо зависимых векторных случайных полей при расчете ВЧЕ-разряда* // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы. Материалы международной научной конференции. – Самара, 2017. – С. 186–187.

19. Дубровин В. Т. *Скорость сходимости в предельных теоремах для слабозависимых случайных величин* // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – Т. 155. – № 4. – С. 40–47.

20. Gabbasov F. G., Dubrovin V. T., Fadeeva M. S. *On the estimation of the convergence rate in the multidimentional limit theorem for the sum of weakly dependent random variables functions* // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2018. – Т. 160. – № 2. – С. 266–274.

21. Минеев М. П. *Метрические теоремы о тригонометрических суммах с быстрорастущими функциями*// Успехи математических наук. – 1959. – Т. 14. – № 3. – С. 169–171.

22. Москвин Д. А. *Задачи вероятностей теории чисел*. – Дисс...канд. физ.-мат.наук. – Казань, 1970.

23. Габбасов Ф. Г. *Метрические теоремы о тригонометрических суммах с быстрорастущими функциями*// Успехи математических наук. – 1959. – Т. 14. – № 3. – С. 169–171. О многомерной предельной теореме для сумм $\sum f(t2^k)$ // Известия вузов. Математика. – 1987. – № 9. – С. 26–35.

24. Москвин Д. А. *Большие уклонения в центральной предельной теореме для стационарных последовательностей s-зависимых величин и величин вида* $\sum f(t2^k)$ // Вероятностные методы и кибернетика. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1971. – № 9. – С. 78–94.

25. Габбасов Ф. Г., Дубровин В. Т. *О больших уклонениях в многомерной центральной предельной теореме для сумм функций от независимых величин и сумм вида* $\sum f(t2^k)$ // V межд. Вильнюсская конф. по теории вероятностей и матем. статистике. – Вильнюс, 1989. – Т. 3.

26. Дубровин В. Т., Ладохин В. И., Москвин Д. А. *О центральной предельной теореме для сумм функций от независимых величин* // Ученые записки Казанского университета. – 1970. – Т. 130. – № 3. – С. 28–40.

LARGE DEVIATION LIMIT THEOREM FOR TRIGONOMETRIC SUMS WITH EXPONENTIAL FUNCTION

F.G. Gabbasov, V.T. Dubrovin, M.S. Fadeeva

The work is devoted to the further study of sums with fractional fractions of an exponential function. The estimation of the convergence rate in the multidimensional limit theorem with large deviations for sums of functions of independent random variables is improved. A consequence of this theorem is the limit theorem for the distribution of the modulus of a trigonometric sum with an exponential function.
Keywords: exponential function, trigonometric sum, limit theorem, rate of convergence

УДК 514.83

ПЛОСКО-СИММЕТРИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В F(R) ГРАВИТАЦИИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ИЗМЕРЕНИЯМИ

О.Р. Галлямова[1]

1 *gallyamova_o_r@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В работе получены явные решения с плоской симметрией 4-х мерного пространства в рамках $f(R)$ гравитации с дополнительным двумерным сферическим пространством. Показано, что в таком пространстве существуют гравитационные сингулярности. Найдены ограничения на параметры модели $f(R)$ гравитации, при которых решения существуют.

Ключевые слова: $f(R)$ гравитация, дополнительные измерения, плоская симметрия

Введение

Компактные дополнительные пространства - это широко используемая идея. Их рассмотрение в физических теориях помогает продвигаться в таких сложных вопросах как объединение сильного, слабого и электромагнитного взаимодействий, массы нейтрино, проблемы космологической постоянной и так далее. Любая многомерная модель при низких энергиях должна приводить к четырехмерной теории, что будет говорить о наличии связи между ними. Теории гравитации с высшими

производными часто рассматриваются в современных исследованиях, несмотря на сложности, которые порождает такой подход. Многочисленные статьи посвящены $f(R)$ гравитации - одному из самых простых обобщений теории гравитации Эйнштейна. Чпастными случаями $f(R)$ гравитации является теория Гаусса-Бонне.

В этой работе получено решение с плоской симметрией 4-х мерного пространства в рамках $f(R)$ гравитации с дополнительным двумерным сферическим пространством.

Уравнения $f(R)$ гравитации

Действие $f(R)$ гравитации в шестимерном пространстве имеет следующий вид

$$S = \int d^6x \sqrt{-g}\, f(R), \tag{1}$$

где $f(R)$ - функция скалярной кривизны пространства-времени R.

Уравнения такой теории имеют вид

$$-\frac{1}{2} f(R)\delta^B_A + \left(R^B_A + \nabla_A\nabla^B - \delta^B_A\Box\right) f_R = 0, \tag{2}$$

где $A, B, C, \ldots = 1,2,3,4,5,6$, ∇_A – обозначение ковариантной производной, а $\Box = g^{AB}\nabla_A\nabla_B$.

Если пространство-время обладает плоской симметрией, то его первая квадратичная форма в предположении, что дополнительное пространство является двумерной сферой постоянного радиуса, может быть записана в виде

$$ds^2 = E(x)^2 dt^2 - dx^2 - M(x)^2\left(dy^2 + dz^2\right) - L_0^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right). \tag{3}$$

Нетривиальные уравнения (2) рассматриваемой теории в метрике (3) принимают вид

$$\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow \quad f_{RRR}R'^2 + \left(R'' + 2R'\frac{M'}{M}\right) f_{RR} + \left(-\frac{E''}{E} - 2\frac{E'}{E}\frac{M'}{M}\right) f_R - \frac{f}{2} = 0, \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \left(\frac{E'}{E} + 2\frac{M'}{M}\right) f_{RR}R' + \left(-\frac{E''}{E} - 2\frac{M''}{M}\right) f_R - \frac{f}{2} = 0, \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \quad f_{RRR}R'^2 + \left(R'' + R'\frac{E'}{E} + R'\frac{M'}{M}\right) f_{RR} + \left(-\frac{M''}{M} - \frac{M'^2}{M^2} - \frac{E'}{E}\frac{M'}{M}\right) f_R - \frac{f}{2} = 0, \tag{6}$$

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \phi \end{pmatrix} \Rightarrow \quad f_{RRR}R'^2 + \left(R'' + R'\frac{E'}{E} + 2R'\frac{M'}{M}\right) f_{RR} + \frac{f_R}{L_0^2} - \frac{f}{2} = 0, \tag{7}$$

Для функции $R(x)$ имеем

$$R(x) \quad = \quad 2\frac{E''}{E} + 4\frac{M''}{M} + 2\frac{M'^2}{M^2} + 4\frac{E'}{E}\frac{M'}{M} - \frac{2}{L_0^2}. \tag{8}$$

Если составить комбинацию $3\cdot(7) + f_R\cdot(8) - (4) - (5) - 2\cdot(6)$ уравнений (4)-(8), получим

$$R(x) - \frac{5}{L_0^2} - \frac{f}{2f_R} = 0, \tag{9}$$

Это уравнение на функцию $R(x)$, решение которого, если оно существует, постоянно. Следовательно

$$R(x) = R_0 = const. \tag{10}$$

Переписав уравнения (4)-(8) с учётом (10), получим

$$\binom{t}{t} \Rightarrow \qquad \frac{E''}{E} + 2\frac{E'}{E}\frac{M'}{M} + \frac{f}{2f_R}\Big|_{R=R_0} = 0, \tag{11}$$

$$\binom{x}{x} \Rightarrow \qquad \frac{E''}{E} + 2\frac{M''}{M} + \frac{f}{2f_R}\Big|_{R=R_0} = 0, \tag{12}$$

$$\binom{y}{y} = \binom{z}{z} \Rightarrow \qquad \frac{M''}{M} + \frac{M'^2}{M^2} + \frac{E'}{E}\frac{M'}{M} + \frac{f}{2f_R}\Big|_{R=R_0} = 0, \tag{13}$$

$$\binom{\theta}{\theta} = \binom{\phi}{\phi} \Rightarrow \qquad \frac{1}{L_0^2} - \frac{f}{2f_R}\Big|_{R=R_0} = 0, \tag{14}$$

$$R_0 \quad = \quad 2\frac{E''}{E} + 4\frac{M''}{M} + 2\frac{M'^2}{M^2} + 4\frac{E'}{E}\frac{M'}{M} - \frac{2}{L_0^2}, \tag{15}$$

$$R_0 = \frac{5}{L_0^2} + \frac{f}{2f_R}\Big|_{R=R_0}. \tag{16}$$

Из (14) следует, что

$$\frac{f}{2f_R}\Big|_{R=R_0} = \frac{1}{L_0^2}. \tag{17}$$

Эти уравнения имеют следующее решение

$$L(x) = L_0, \tag{18}$$

$$R(x) = R_0 = \frac{6}{L_0^2}, \tag{19}$$

$$M(x)^2 = A^2 \cos^{4/3}\left(\frac{\sqrt{3}x}{2L_0}\right), \tag{20}$$

$$E(x)^2 = B^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\sqrt{3}x}{2L_0}\right)}{\cos^{2/3}\left(\frac{\sqrt{3}x}{2L_0}\right)}. \tag{21}$$

Эти выражения совместно с (17) определяют решение поставленной задачи. При этом (17) даёт ограничение на функцию $f(R)$ при которой рассматриваемое решение возможно. В случае

$$f(R) = aR^2 + R + c \tag{22}$$

это ограничение может быть записано так

$$c\ L_0^4 + 4\ L_0^2 + 12\ a = 0, \tag{23}$$

что определяет радиус дополнительного пространства

$$L_0^2 = \begin{cases} -3a, & c = 0 \\ \dfrac{2\left(-1 \pm \sqrt{1-3ac}\right)}{c}, & c \neq 0 \end{cases}$$

Коэффициенты метрического тензора имеют следующий вид в точках

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{\pi\sqrt{3}}{3}(2k+1) \qquad M(x)^2 = 0, \quad E(x)^2 \to \infty, \\ x_m &= \frac{\pi\sqrt{3}}{3}2m \qquad M(x)^2 = 1, \quad E(x)^2 = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Однако, инварианты преобразования координат $R, R^{AB}R_{AB}, R^{ABCD}R_{ABCD}$ в этих точках принимают следующие значения

$$\begin{aligned} x = x_k \Rightarrow R = \frac{6}{L_0^2}, \quad R^{AB}R_{AB} = \frac{6}{L_0^2}, \quad R^{ABCD}R_{ABCD} \to \infty, \\ x = x_m \Rightarrow R = \frac{6}{L_0^2}, \quad R^{AB}R_{AB} = \frac{6}{L_0^2}, \quad R^{ABCD}R_{ABCD} = \frac{8}{L_0^2}. \end{aligned} \tag{25}$$

Таким образом, равенство нулю метрического коэффициента $E(x)^2$ в точках x_m является координатной сингулярностью, так как все инварианты кривизны в этих точках не расходятся, а точки x_k - это гравитационные сингулярности, так как инвариант преобразования координат $R^{ABCD}R_{ABCD}$ расходится.

FLAT SYMMETRY SOLUTIONS IN F (R) GRAVITY WITH EXTRA DIMENSIONS

O.R. Gallyamova

An explicit solution with plane symmetry of a 4-dimensional space in the framework of $f(R)$ gravity with an additional two-dimensional spherical space is obtained. It is shown that gravitational singularities exist in such a space. Restrictions on the parameters of the $f(R)$ model of gravity are found for which a solution exists.

Keywords: $f(R)$ gravity, extra dimensions, plane symmetry

УДК 004.42

МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ ХРАНИЛИЩАМИ ДОКУМЕНТОВ ЦИФРОВЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ БИБЛИОТЕК

П.О. Гафурова[1]

1 *polina.mannshtern@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Высшая школа информационных технологий и интеллектуальных систем

Предложен алгоритм автоматического формирования метаданных цифровых математических коллекций в соответствии с правилами хранилища DSpace, интеграция их с помощью хранилища DSpace. Приведен обзор технологии DSpace, описаны способы импорта метаданных в цифровое хранилище DSpace, структура импортируемых документов и реализация отмеченных технологий в цифровой математической библиотеке.

Ключевые слова: DSpace, метаданные, цифровые математические библиотеки, Dublin Core

Данная работа посвящена процессам управления документами в цифровых математических библиотеках. Эти вопросы в последнее время вышли на первый план в связи с развитием проекта World Digital Mathematical Library (WDML) и созданием цифровых математических библиотек ([1],

[2]). Агрегирующих мат. библиотеки, таких как MathNet.ru [3], EuDML [4] предлагают форматы метаданных, трансформация в которые требует создание специализированных инструментов в цифровых математических библиотеках, а также организация хранилища цифровых документах. Для интеграции цифровых документов разработаны платформы хранения и представления документов.

Среди свободно распространяемых систем наибольшим функционалом обладает платформа создания репозиториев данных DSpace. Платформа позволяет создавать коллекции документов в различных форматах, искать по этим коллекциям, импортировать и экспортировать метаданные [5]. Основной формат метаданных принятый в Dspace - формат Дублинского ядра (Dublin Core) [6]. Добавление пользовательских форматов метаданных требует создания специализированных программных инструментов, обеспечивающих перевод из пользовательских форматов в формат Дублинского ядра.

Одной из особенностей DSpace является поддержка протокола Open Archives Initiative Protocol for Metadata Harvesting (OAI-PMH) [7]. Данный протокол позволяет собирать метаданные с других ресурсов, предоставлять метаданные, а также следить за доступом в базу данные – попытка скачивания не останется незамеченной. Список OAI-PMH серверов, которые прошли сертификацию приведен в [8].

Метаданные для загрузки в DSpace могут представляться в виде csv файла или в виде Simple Arcive Format - архива метаданных и файлов.

В процессе импорта с помощью файла csv необходимо сформировать таблицу столбцы которой имеют формат дублинского ядра. Далее заполнив данную таблицу необходимо экспортировать ее в формате csv, и зарузить через сервис "Import metadata". Файлы с данными могут быть прикреплены к записям в самой среде DSpace. Данный способ не предполагает автоматизации процесса загрузки метаданных. В настоящей работе предложен алгоритм автоматизации, основанный на использовании особенностей структуры архива Simple Arcive Format.

В хранилище формируется архив, который состоит из папок, в каждой из которых содержится один элемент. Название папок имеют вид: «itemXXX»,где XXX – номер папки. В каждой такой папке, минимальным содержимым является: файл dublin_core.xml, файл content, файлы, которые относятся к данному элементу. Файл dublin_core.xml содержит в себе описание элемента в формате дублинского ядра. Пример записи файла представлен на рисунке 1.

```
<?xml version="1.0" encoding="UTF-8"?>
<dublin_core>
<dcvalue element="title" qualifier="none">
Сервис-ориентированная информационная система научного журнала «Электронные библиотеки»
</dcvalue>
<dcvalue element="date" qualifier="issued">2016-02-22</dcvalue>
<dcvalue element="title" qualifier="alternative" language="en">
Service-oriented information system of "Russian Digital Libraries Journal"
</dcvalue>
<dcvalue element="contributor" qualifier="author">
Ахметов, Дмитрий Юрьевич</dcvalue>
<dcvalue element="contributor" qualifier="author">
Елизаров, Александр Михайлович</dcvalue>
<dcvalue element="contributor" qualifier="author">
Липачёв, Евгений Константинович</dcvalue>
<dcvalue element="publisher" qualifier="none">
Казанский (Приволжский) федеральный университет
</dcvalue>

</dublin_core>
```

Рис. 1. Пример файла dublin_core.xml

Файл content включает в себя список файлов, которые прикладываются к данной записи. Необходимо отметить что файл content не имеет расширения. Как дополнительные файлы, которые могут быть прикреплены – файлы с лицензией, а также при предоставлении метаданных в другом формате схема метаданных. Далее папки запечатываются в zip архив. Загрузка производится через сервис "Batch Import". Таким образом можно загружать большое количество файлов и автоматически формировать zip архивы для загрузки файлов.

Поскольку система DSpace работает на локальном сервере, необходимо создать методы автоматической загрузки метаданных. Для загрузки в DSpace было написано приложение, которое позволяет организовать коллекцию файлов. В качестве тестовой коллекции были приняты файлы принятые для загрузки в РИНЦ.

Основные этапы алгоритм обработки метаданных: для каждой статьи автоматически происходит считывание метаданных из xml файла, формирование из них набора метаданных, необходимого для Dspace. По полученному набору организуется файл dublin_core.xml, формируется файл content, происходит запись в папку. После обработки всех файлов происходит архивирование файлов в Simple

Archive Format. Алгоритм реализован на языке C#, входными данными являются xml файлы, содержащие выпуски статей журнала.
В качестве результата получаем zip архив, который сразу можно загружать в систему DSpace.

В работе предложен алгоритм автоматического формирования метаданных цифровых математических коллекций в соответствии с правилами хранилища DSpace, интеграция их с помощью хранилища DSpace.
Необходимо отметить, что DSpace эффективно работает с другими системами организации данных(например OJS) [9]. Компонуя DSpace с OJS получаем систему управления библиографической информацией.
Следующим этапом работы является разворачивание хранилища DSpace на глобальном сервере, применение разработанных методов на реальном сервере, разработка автоматических инструментов загрузки и харвестинга метаданных другими OAI-PMH серверами.

Работа частично содержит результаты проекта «Мониторинг и стандартизация развития и использования технологий хранения и анализа больших данных в цифровой экономике Российской Федерации», выполняемого в рамках реализации Программы Центра компетенций Национальной технологической инициативы «Центр хранения и анализа больших данных», поддерживаемого Министерством науки и высшего образования Российской Федерации по Договору МГУ имени М. В. Ломоносова с Фондом поддержки проектов Национальной технологической инициативы от 15.08.2019 № 7/1251/2019. Работа выполнялась также при частичной поддержке РФФИ (проекты 18-29-03086, 18-47-160012).

Литература

1. *Developing a 21st Century Global Library for Mathematics Research*
Washington: The National Academies Press – 2014. – 131 p.

2. Elizarov A M, Lipachev E K, Zuev D S. *Digital mathematical libraries: Overview of implementations and content management services*//CEUR Workshop Proceedings. – 2017. – Vol.2022 – P.317-325.

3. Общероссийский математический портал Math-Net.Ru – URL: http://www.mathnet.ru/index.phtml/?option_lang=

4. EuDML. The European digital mathematis library – URL: https://eudml.org/

5. DSpace - A Turnkey Institutional Repository Application – URL: https://duraspace.org/dspace/

6. Dublin Core Metadata Iniciative – URL: https://www.dublincore.org/

7. Open Archives Initiative Protocol for Metadata Harvesting – URL: http://www.openarchives.org/OAI/openarchivesprotocol.html.

8. OAI-PMH Registered Data Providers – URL: https://www.openarchives.org/Register/BrowseSites

9. Елизаров А М., Зуев Д С., Липачёв Е К *Информационные системы управления электронными научными журналами* // Научно-техническая информация. Серия 1: Организация и методика информационной работы – 2014. – № 3. – С.31-38.

METHODS FOR MANAGING DOCUMENT STORES IN DIGITAL MATH LIBRARIESS

P.O. Gafurova

An algorithm is proposed for the automatic generation of metadata of digital mathematical collections in accordance with the rules of the DSpace repository, their integration using the DSpace repository. An overview of DSpace technology is given, methods for importing metadata into DSpace digital storage are described, the structure of imported documents, and the implementation of the noted technologies in a digital mathematical library.
Keywords: DSpace, metadata, digital mathematics library, Dublin Core

УДК 531/534:[57+61]

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТА ПОРИСТОЙ СРЕДЫ ПО ДАННЫМ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ

О.В. Герасимов[1]

1 *valeriy.karasikov@gmail.com*; Кафедра теоретической механики института математики и механики им Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета

В работе рассматривается один из возможных численных подходов к описанию поведения гетерогенных сред под действием внешних нагрузок, основанный на моделировании структуры исследуемой области с учетом данных ее компьютерной томографии. В работе проведена оценка влияния данных томографического исследования на сходимость предложенной численной методики, решены тестовые задачи. Приведены результаты решения модельной задачи для участка диафиза бедренной кости.

Ключевые слова: математическое моделирование, негомогенные среды, компьютерная томография, метод конечных элементов, цифровой прототип.

В настоящее время наиболее перспективным направлением в моделировании поведения гетерогенных сред является использование данных компьютерной томографии. Этот подход позволяет получать информацию о структуре сложных анизотропных, мелкозернистых или пористых материалов, а также иных тел, характеризующихся неоднородностью. Эта задача особенно актуальна в ортопедической клинической практике, т.к. дефекты костной ткани, связанные с всевозможными патологиями, могут оказать большое влияние на качество проводимого лечения.

Существует несколько подходов к построению моделей элементов пористых сред, деформирующихся под действием внешних нагрузок. В первую очередь к ним можно отнести аппроксимацию распределения неоднородности методом средних пересечений линий: в этом случае формулируются соотношения, связывающие компоненты тензора упругих констант и тензора структуры [1], характеризующего осредненное направление пор. Другой подход – сведение анизотропии материала к ортотропии путем определения констант из численных экспериментов [2]. В данной работе предлагается подход, основанный на учете особенностей структуры пористого материала, выявленных по данным компьютерной томографии при построении численной модели [3].

Проведение компьютерной томографии элемента пористой среды предполагает создание его цифрового прототипа, представляющего собой трехмерный целочисленный массив определенной структуры. Элементами этого массива являются единицы или нули, которые характеризуют наличие или отсутствие вещества в определенном микроэлементе объема и отражают рентгеновскую плотность согласно шкале Хаунсфилда [4]. Таким образом, цифровой прототип представляет структуру элемента пористой среды в виде совокупности элементарных микрообъемов (кубиков), про каждый из которых известно – содержит он вещество (кости) или нет. По этим данным на основе какого-либо приближенного метода можно построить дискретную механическую модель элемента пористой среды. Наиболее удобным с алгоритмической точки зрения в этом случае методом дискретизации (а в дальнейшем и расчета) будет метод конечных элементов [3][5].

Наивысшая точность расчета будет достигнута в случае моделирования каждого микрообъема трехмерным конечным элементом сплошной среды [6]. Но в этом случае затраты ресурсов ЭВМ на создание дискретной модели, постпроцессорную обработку результатов и на этапе процессорных вычислений превысят все разумные пределы. Поэтому представляется целесообразным увеличить размеры конечных элементов, а каждый определенный в цифровом прототипе микрообъем считать окрестностью точки интегрирования при численном вычислении матрицы жесткости конечного элемента. Остается неясным вопрос определения числа квадратур в каждом из направлений при интегрировании локальной матрицы жесткости. Если число точек интегрирования по каждой координате мало, то точность решения задач на основе такого элемента может быть невысокой, так как в самом простом случае при интегрировании придется применять метод прямоугольников [7][8]. Однако использование конечных элементов с очень большим числом квадратур хоть и повышает точность интегрирования в пределах элемента, но может увеличить жесткость расчетной области из-за возможно малого количества элементов.

Рассматривалась широко известная методика построения восьмиузлового трёхмерного изопараметрического конечного элемента сплошной среды с линейной аппроксимацией геометрии и

поля перемещений в локальных координатах [9]. Для оценки влияния плотности заполнения конечного элемента вокселями были решены тестовые задачи, результаты которых сравнивались с результатами решения в пакете *Ansys* 14.5. Варьируя величину вокселей и устанавливая в каждом из них значение из данных компьютерной томографии, была произведена серия численных экспериментов для сплошного материала. Установлено, что при увеличении количества вокселей решение стремится к результатам, полученным в программном комплексе *Ansys* . Исходя из зависимости времени выполнения программы от количества вокселей внутри конечного элемента, был сделан вывод о том, что для наиболее эффективного решения (оптимального по точности и времени выполнения) предпочтительно использовать порядка 50 вокселей на стороне куба. Результаты для других случаев нагружения конечного элемента аналогичны.

С целью оценки влияния густоты сетки при постоянной плотности компьютерной томографии были решены тестовые задачи для одноосного сжатия и изгиба. Задача ставилась для геометрии в виде параллелепипеда с одним характерным размером. В этом случае на одном торце фиксировались все перемещения в узлах, на противоположном – прикладывалась распределенная по узлам нагрузка. Исходя из полученных результатов, относительная погрешность решения несущественно зависит от количества вокселей внутри одного конечного элемента, что позволяет в допустимых пределах изменять размер и количество конечных элементов с целью лучшей аппроксимации геометрии.

В модельной задаче использовались данные компьютерной томографии для диафиза бедренной кости крысы. Сканирование выполнялось с применением микро- и нанофокусной системы рентгеновского контроля для компьютерной томографии и 2D-инспекции *Phoenix V|tome|X S*240 в лаборатории рентгеновской компьютерной томографии Института геологии и нефтегазовых технологий Казанского (Приволжского) федерального университета. Система оснащена двумя рентгеновскими трубками: микрофокусной с максимальным ускоряющем напряжением 240 кВ мощностью 320 Вт и нанофокусной с максимальным ускоряющем напряжением 180 кВ мощностью 15 Вт. Для первичной обработки данных и создания объемной (воксельной) модели образца на базе рентгеновских снимков (проекций) использовалось программное обеспечение datos|x reconstruction. Зафиксированный в держателе образец помещался на вращающийся столик камеры рентгеновского компьютерного томографа на оптимальном расстоянии от источника рентгеновского излучения. Съемка проводилась при ускоряющем напряжении 90–100 кВ и токе 140–150 мА. Размер исследуемой области – 4, 21 ? 3, 46 ? 5,89 мм, количество вокселей в направлении соответствующих координатных осей Ox, Oy и Oz – 624x512x874 , размер вокселя – 6,747x6,747x6,747 мкм.

Геометрия образца бедренной кости крысы была аппроксимирована двумя конечно-элементными сетками: 44 и 1200 конечных элементов. На сетке с меньшим количеством конечных элементов значения перемещений усредняются одним конечным элементом по толщине, при дискретизации по толщине двумя конечными элементами порядок аппроксимации распределения перемещений на торце повышается. Время выполнения расчетов составило: грубая сетка – 3.07 мин., мелкая сетка – 3.56 мин. Видно, что затраченное время реализации алгоритма решения задачи на ЭВМ для различных сеток сопоставимо. Это объясняется тем, что формируемые матрицы жесткости конечного элемента для разных сеток вычисляются в одних и тех же квадратурных точках. Однако эта ресурсозатратная операция для конкретной расчетной области проводится только один раз, а при дальнейших расчетах сформированная ранее матрица жесткости просто считывается с носителя информации.

Полученные численные результаты отображают влияние точности аппроксимации геометрии образца, а также иллюстрируют зависимость поля перемещений и напряженно-деформированного состояния от структуры материала. Данный подход позволяет исследовать поведение пористой структуры под действием внешних нагрузок на основе её оптической плотности. Исследования могут быть расширены с использованием другого вида обработки данных компьютерной томографии, с усовершенствованием формулы численного интегрирования локальной матрицы жёсткости, а также с применением иных типов конечных элементов. В дальнейшем предполагается исследовать возможные критерии оценки прочности материала при квазихрупком разрушении в условиях статического нагружения на основе локально усреднённого по объёму напряжённо-деформированного состояния по данным компьютерной томографии.

Литература

1. Киченко А. А., Тверье В. М., Няшин Ю. И., Заборских А. А., *Экспериментальное определение тензора структуры трабекулярной костной ткани* // Российский журнал биомеханики – 2011. – Т. 15. – No 4. – С. 78–93.

2. Киченко А. А., Тверье В. М., Няшин Ю. И., Симановская Е. Ю., Еловикова А. Н., *Становление и развитие классической теории описания структуры костной ткани* // Российский журнал биомеханики – 2008. – Т. 12. – No 1. – С. 69–89.

3. Крылов О. В., *Метод конечных элементов и его применение в инженерных расчетах: учеб. пособие для вузов* – М.: Радио и связь, 2002. – 104 с.

4. Сагдатуллин М. К., Бережной Д. В., *Постановка задачи численного моделирования конечных деформаций* // Прикладные математические науки – 2014. – Т. 8. – No 35. – С. 1731–1738.

5. Саченков О. А., Герасимов О. В., Королева Е. В., Мухин Д. А., Яикова В. В., Ахтямов И. Ф., Шакирова Ф. В., Коробейникова Д. А., Хань Х. Ч., *Построение негомогенной конечно-элементной модели по данным компьютерной томографии* // Российский журнал биомеханики – 2018. – Т. 22. – No 3. – С. 332–344.

6. Саченков О. А., Хасанов Р. Ф., Андреев П. С., Коноплев Ю. Г., *Численное исследование НДС тазобедренного сустава при ротационной остеотомии проксимального участка бедренной кости* // Российский журнал биомеханики – 2016. – Т. 20. – No3. – С. 257–271.

7. Саченков О. А., Хасанов Р. Ф., Андреев П. С., Коноплев Ю. Г., *Численное исследование НДС тазобедренного сустава при ротационной остеотомии проксимального участка бедренной кости* // Российский журнал биомеханики – 2016. – Т. 20. – No3. – С. 257–271.

8. Тверье В. М., Няшин Ю. И., Никитин В. Н., Оборин Л. Ф., *Механическое давление как основа биомеханического моделирования зубочелюстной системы человека* // Российский журнал биомеханики – 2014. – Т. 18. – No 1. – С. 24–35.

9. Харин Н. В., Воробьев О. В., Бережной Д. В., Саченков О. А., *Методика построения репрезентативной модели по данным компьютерной томографии* // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – No 3. – С. 95–102.

10. Чикова Т. Н., Киченко А. А., Тверье В. М., Няшин Ю. И., *Биомеханическое моделирование трабекулярной костной ткани в состоянии равновесия* // Российский журнал биомеханики. – 2018. – Т. 22. – No 3. – С. 282–291.

MODELING OF A POROUS MEDIUM ELEMENT ACCORDING TO COMPUTED TOMOGRAPHY

O.V. Gerasimov

The paper considers one of the possible numerical approaches to the description of the behavior of heterogeneous media under the action of external loads, based on modeling the structure of the studied area taking into account the data of its computed tomography. In the work, the impact of tomographic research data on the convergence of the proposed numerical technique is evaluated, test problems are solved. The results of solving the model problem for the femoral diaphysis site are presented.

Keywords: mathematical modeling, inhomogeneous media, computed tomography, finite element method, digital prototype

УДК 532.5.031:534-14

СОВМЕСТНАЯ ДИНАМИКА ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ В ЖИДКОСТИ В АКУСТИЧЕСКОМ ПОЛЕ С ЦЕНТРАМИ НА ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ

А.И. Давлетшин[1]

1 *anas.davletshin@gmail.com*; Институт механики и машиностроения ФИЦ Казанский научный центр РАН

Приводятся результаты расчетов совместной динамики слабонесферических газовых (воздушных) пузырьков в жидкости (воде) в акустическом поле в трехмерной постановке задачи. Рассматриваются плоские конфигурации взаимного расположения пузырьков, когда один из пузырьков находится в центре круга, а другие расположены на его границе на равном удалении от соседних. Динамика пузырьков описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно радиусов пузырьков, радиус-векторов их центров, векторов, характеризующих малое отклонение поверхности пузырьков от сферической, и температур внутри пузырьков. Учитываются эффекты вязкости и сжимаемости жидкости, поверхностного натяжения и теплообмена между пузырьками и жидкостью.

Ключевые слова: гидродинамическое взаимодействие пузырьков, акустическое поле, деформации пузырьков

По мере уменьшения межпузырьковых расстояний важную роль в динамике парогазовых пузырьков в жидкости начинает играть их гидродинамическое взаимодействие [1]. Оно особенно сильно проявляется в акустических полях, где давление жидкости является переменным, вследствие чего пузырьки испытывают сильные радиальные расширения и сжатия. Результатом взаимодействия может быть ослабление или усиление радиальных колебаний пузырьков, их пространственное перемещение, деформирование их поверхностей и т.д.

В настоящей работе изучается совместная динамика газовых пузырьков, расположенных в жидкости в пучности интенсивной ультразвуковой стоячей волны с давлением p_∞, изменяющимся по гармоническому закону

$$p_\infty = p_0 - p_a \sin(\omega t),$$

где p_0 — статическое давление, p_a, ω — амплитуда и частота колебаний, t — время.

Рассматриваются такие конфигурации взаимного расположения пузырьков (рис. 1), в которых в начале взаимодействия (при $t = 0$) один из пузырьков (центральный) находится в центре круга, а другие (боковые) расположены на его границе на равном расстоянии от соседних. Число пузырьков K варьируется от 3 до 7.

Изначально все пузырьки сферические, с одинаковыми радиусами $R_k = 3$ мкм ($k = 1, 2, \ldots, K$). Начальное расстояние между центрами боковых и центрального пузырьков $d_0 = 300$ мкм. Пузырьки заполнены воздухом, а жидкостью является вода при комнатных условиях. Входные параметры задачи следующие: температура жидкости $T_0 = 293.15$ К, скорость звука в жидкости $c_0 = 1500$ м/с, плотность жидкости $\rho_0 = 998$ кг/м^3, статическое давление жидкости $p_0 = 1$ бар, коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = 0.0725$ Н/м, динамический коэффициент вязкости жидкости $\mu = 10^{-3}$ кг/(м с), показатель адиабаты газа $\kappa = 1.4$, коэффициент теплопроводности газа $\kappa_0 = 0.0258$ Вт/(м К), удельная теплоемкость газа при постоянном объеме $c_v = 720$ Дж/(кг К), амплитуда колебаний давления в волне $p_a = 1.13$ бар, частота колебаний давления в волне $\omega/2\pi = 20$ кГц.

Математическая модель

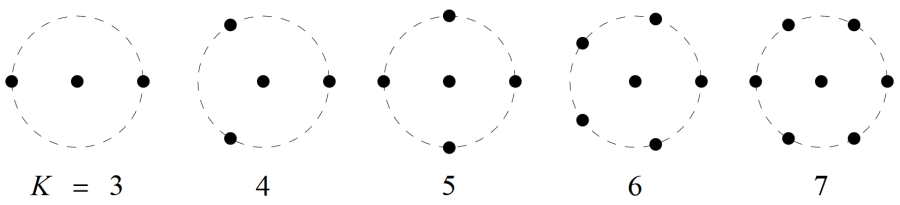


Рис. 1. Рассматриваемые конфигурации взаимного расположения K пузырьков на одной плоскости

Используется математическая модель, в которой уравнение поверхности k-го пузырька представляется в виде ряда

$$F_k\left(r_k,\theta_k,\varphi_k,t\right)=r_k-R_k\left(t\right)-\sum_{n=2}^{N}\mathbf{a}_{nk}\left(t\right)\mathbf{Y}_n\left(\theta_k,\varphi_k\right)=0,$$

где r_k, θ_k, φ_k — сферическая система координат с началом отсчёта в центре этого пузырька; $\mathbf{Y}_n\left(\theta_k,\varphi_k\right)=\left(Y_{nk}^{-n},Y_{nk}^{-n+1},\ldots,Y_{nk}^{n-1},Y_{nk}^{n}\right)$, $Y_{nk}^{m}=P_n^{|m|}\left(\cos\theta_k\right)e^{i\,m\varphi_k}$ — сферическая функция; $P_n^{|m|}$ — присоединённый полином Лежандра степени n порядка $|m|$; i — мнимая единица; $\mathbf{a}_{nk}=\left((a_{nk}^{-n}+ia_{nk}^{n})/2,\ldots,a_{nk}^{0},\ldots,(a_{nk}^{-n}-ia_{nk}^{n})/2\right)$, a_{nk}^{m} — амплитуда отклонения поверхности k-го пузырька от сферической в виде поверхностной гармоники с номером n и порядком m; N — максимальное значение номера сферических гармоник в представлении поверхности пузырьков. Отклонения от сферической формы пузырьков характеризуются величиной

$$\varepsilon_{nk}=\max_{\theta,\varphi}\left|\sum_{m=-n}^{n}\varepsilon_{nk}^{m}Y_{nk}^{m}\left(\theta,\varphi\right)\right|,$$

где $\varepsilon_{nk}^{m}=a_{nk}^{m}/R_k$. Предполагается, что $\varepsilon_{nk}^{2}\ll 1$.

Изменение радиусов пузырьков R_k, радиус-векторов их центров $\mathbf{p}_k$ и векторов $\mathbf{a}_{nk}$, определяющих несферичность пузырьков, в ходе их совместной динамики описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) второго порядка, полученными в [2] методом сферических функций в адиабатическом приближении. При их получении полагается, что пузырьки расположены не очень близко друг к другу, а их несферичность и скорости пространственного смещения малы. Принимается во внимание поверхностное натяжение. Влияние и вязкости, и сжимаемости жидкости считается малым и не зависящим от взаимодействия между пузырьками. Теплообмен между пузырьками и жидкостью учитывается с применением подхода работы [3], согласно которому показатель адиабаты газа в пузырьках считатется зависящим от их радиуса и скорости его изменения. В результате указанные ОДУ второго прядка [2] дополняются ОДУ первого порядка относительно температур T_k внутри пузырьков. При этом давление в пузырьках определяется по выражению работы [3]. Решение системы ОДУ первого и второго порядка находится численно при заданных начальных значениях R_k, $\mathbf{p}_k$, $\mathbf{a}_{nk}$, T_k, $\dot{R}_k$, $\dot{\mathbf{p}}_k$ и $\dot{\mathbf{a}}_{nk}$.

Результаты

В рассматриваемом режиме акустического воздействия амплитуда колебаний давления жидкости p_a значительно превышает статическое давление p_0, так что в начальной стадии взаимодействия пузырьков жидкость в их окрестности находится под действием больших растягивающих напряжений. В результате этого пузырьки сначала сильно расширяются, а затем в фазе положительного давления жидкости стремительно сжимаются, после чего наступает стадия затухающих к концу периода радиальных пульсаций пузырьков (рис. 2*a*). Изменение радиусов всех пузырьков во всех рассматриваемых конфигурациях их взаимного расположения качественно подобно. Его основные закономерности иллюстрирует рис. 2*a*.

В результате гидродинамического взаимодействия боковые пузырьки перемещаются в сторону центрального. При этом в силу симметрии центральные пузырьки остаются неподвижными. Наибольшее за период смещение боковых пузырьков наблюдается в ходе первого наиболее сильного сжатия (рис. 2*b*). Последующие пространственные перемещения в ходе затухающих радиальных колебаний являются менее выраженными, а к концу периода практически исчезают. При этом, с увеличением числа взаимодействующих пузырьков степень первого сжатия центрального пузырька (рис. 2*d*) и скорость сближения пузырьков (рис. 2*e*) возрастаают.

Взаимодействие приводит к деформированию поверхности как центрального, так и боковых пузырьков. Во всех конфигурациях взаимного расположения деформации неподвижного центрального пузырька оказываются меньше, чем у смещающихся к нему боковых пузырьков. Центральный пузырек в силу неподвижности деформируется только по гармоникам с четными номерами. Максимальными оказываются деформации по второй гармонике (рис. 2*c*), что соответствует эллипсоидальным отклонениям его поверхности от сферической вдоль прямой, перпендикулярной плоскости центров пузырьков. Увеличение числа пузырьков приводит к возрастанию максимальных за период деформаций поверхности центрального пузырька (рис. 2*f*), которые достигаются в окрестности его интенсивных радиальных пульсаций (рис. 2*c*).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-00214 мол_а).

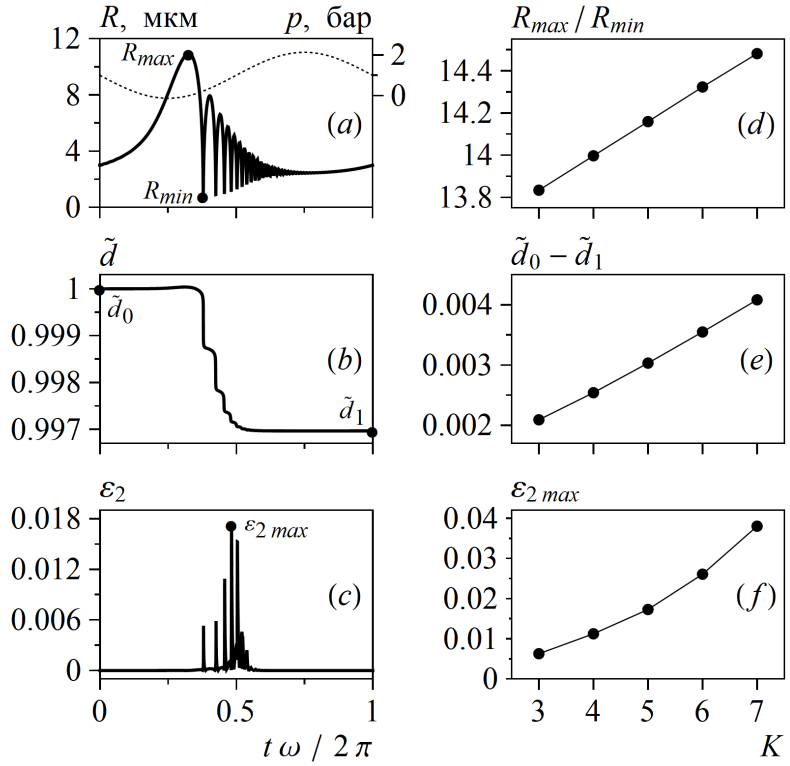


Рис. 2. Изменение радиуса центрального пузырька R (*a*, сплошная кривая), безразмерного расстояния между центрами боковых и центрального пузырьков $\tilde{d} = d/d_0$ (*b*), деформаций центрального пузырька по второй поверхностной гармонике ε_2 (*c*) в ходе одного периода колебаний давления жидкости p_∞ (*a*, пунктирная кривая) при $K = 5$ (рис. 1) и зависимость от количества пузырьков K степени первого сжатия центрального пузырька R_{max}/R_{min} (*d*), величины безразмерного перемещения боковых пузырьков в ходе одного периода $\tilde{d}_0 - \tilde{d}_1$ (*e*) и максимальных за период деформаций поверхности центрального пузырька $\varepsilon_{2\,max}$ (*f*)

Литература

1. Bjerknes V. F. K. *Field of force.* – New York: Columbia Univ. Press., 1906.

2. Aganin A. A., Davletshin A. I. *Interaction of cavitation bubbles in acetone at their strong enlargement and collapse* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. – V. 40. – № 6. – P. 699–704.

3. Hilgenfeldt S., Grossmann S., Lohse D. *Sonoluminescence light emission* // Physics of Fluids. – 1999. – V. 11. – № 6. – P. 1318–1330.

JOINT DYNAMICS OF ACOUSTICALLY-EXCITED GAS BUBBLES LOCATED IN LIQUID ON THE SAME PLANE

A.I. Davletshin

The results of the three-dimensional numerical modeling of the joint dynamics of weakly non-spherical gas (air) bubbles in a liquid (water) in an acoustic field are presented. Plane configurations of the spatial arrangement of bubbles, in which one of the bubbles is in the center of a circle whereas the others are eqally spaced on its boundary, are considered. The dynamics of the bubbles is governed by a system of ordinary differential equations for the radii of the bubbles, the position-vectors of their centers, the vectors characterizing the small deviation of the bubbles from the spherical one, and the temperatures inside the bubbles. The effects of the liquid viscosity and compressibility, the surface tension, and the heat transfer between the bubbles and the liquid are taken into account.
Keywords: hydrodynamic interaction of bubbles, acoustic field, deformation of bubbles

УДК 510.222

О СЧЕТНОСТИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

А.И. Денисов[1], А.Д. Шевченко[2]

1 *alexey.lifeomics@gmail.com*; ООО “Интелливижн”, Казанский (Приволжский) федеральный университет

2 *shevchenka@yandex.ru*; ООО “Октонус Софтваре”

В классической теории множеств действительные числа являются несчетными. Подмножество действительных чисел, которое соответствует вычислимым функциям является счетным. Поскольку на практике встречаются только те действительные числа, которые можно вычислить или хотя бы дать определение, мы рассматриваем вопрос о построении не классической теории множеств, в которой отсутствуют действительные числа, которым нельзя дать определение. Множество таких действительных чисел будет счетным.

Ключевые слова: теория множеств, счетность, действительные числа

Введение

В классической теории множеств дается строгое определение действительного числа (см. например [1]), таких чисел оказывается несчетное количество. С другой стороны, существует определение вычислимого действительного числа [2], это то число, которому соответствует функция, которую можно рассчитать с помощью машины Тьюринга. Таких чисел существует только счетное количество, поскольку множество всех программ является счетным. Вычислимые числа образуют подмножество всех действительных чисел.

На практике, в большинстве случаев, ученые и инженеры сталкиваются с вычислимыми действительными числами. Более того, если посмотреть на действительное число с геометрической точки зрения, то оказывается, что на малых масштабах мы не можем сказать, что объект находится в определенной точке пространства. Квантовая механика накладывает фундаментальные ограничения на информацию о точном положении объектов. Наше знание о положении объекта в пространстве, то, что мы можем измерить или почитать, больше соответствует определению вычислимого числа.

Соответственно возникает вопрос о том, существует ли невычислимые числа в реальности. Ответить на этот вопрос в рамках математики невозможно, поскольку сопоставление математических объектов реальным не является предметом изучения математики. В рамках математики можно ответить на другие вопросы, такие как:

- Можно ли создать математическую теорию в рамках которой будут существовать только вычислимые действительные числа?
- Какие будут различия в результатах между такой теорией и классической?

Ответы на эти вопросы могут нас приблизить к пониманию того, какое определение действительных чисел больше соответствует реальности. И более того, потенциально это может расширить наше понимание устройства реального мира.

Множества и функция принадлежности.

Будем считать, что каждому множеству должна соответствовать функция, которая показывает, какие множества принадлежат ему, а какие нет. В этом смысле будем отождествлять функцию и множество. Простейшие функции - это пустое множество void:

```
bool void(Set x) {
    return false }
```

и множество всех множеств all:

```
bool all(Set x) {
    return true }
```

В терминах функций принадлежности легко получать объединение, пересечение и дополнение множеств. Парадокс Рассела записывается в следующей форме (множество всех множеств не принадлежащих сами себе):

```
bool russell(Set x) {
    return not x(x) }
```

В классической теории множеств считается, что функция принадлежности определена для каждого аргумента, но в данном случае, если подать на вход саму функцию russell, то она будет рекурсивно вызывать сама себя без остановки. Отсюда следует, что эта функция принадлежности не определена для данного аргумента. Т. е. существуют множества, для которых мы не всегда можем сказать - входит в него данный элемент или нет. Вот пример функции, которая нигде не определена:

```
bool none(Set x) {
    return none(x) }
```

На первый взгляд, при таком определении множеств удается избежать классических парадоксов наивной теории множеств (таких как парадокс Рассела). Особо отметим, что в отличие от классической теории, в предлагаемом варианте у множества могут существовать элементы принадлежность которых данном множеству не определена.

Множество натуральных чисел.

Поскольку у нас есть определение пустого множества (1), также как в классической теории множеств можно дать определение множеству натуральных чисел:

- $void = \{\}$,
- $0 = \{\}$,
- $1 = 0 \cup \{0\} = \{0\} = \{\{\}\}$,
- $2 = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\} = \{\{\}, \{\{\}\}\}$,
- $n = n-1 \cup \{n-1\} = \{0, 1, ..., n-1\} = \{\{\}, \{\{\}\}, ..., \{\{\}, \{\{\}\}, ...\}\}$,

Также как в классической теории множеств натуральные числа удовлетворяют аксиомам арифметики.

Множество всех подмножеств.

Конечные множества. Также как в классической теории множеств, для конечного множества {A,B} - будут существовать следующие подмножества: {}, {A}, {B}, {A,B}. Также как и в классической теории множеств можно определить все классические действия, такие как пересечение, объединения и т.д.

Бесконечные множества. Можно определить множество всех подмножеств натуральных чисел P(N), например содержащее только четные числа even = {2, 4, 6, ...}. Не сложно записать функцию принадлежности для even. Также отметим, что можно написать функцию принадлежности для P(N), например такая функция может проверять, что подмножества, такие как even возвращают возрастающие натуральные числа. Также как и в классической теории, с помощью множеств можно определить натуральные числа, и далее вещественные.

Обсуждение теоремы Кантора.

В отличие от классической теории множеств, множество всех подмножеств натуральных чисел оказывается счетным. С одной стороны это следует из счетности всех возможных описаний. Рассмотрим все возможные подмножества P(N), для них можно построить соответствие N P(N) следующим образом. Возьмем все возможные программы или определения множеств, содержащих последовательности натуральных чисел, их можно перенумеровать, поскольку алфавит символов ограничен. Соответственно можно построить отображение N P(N). Получается, что множество всех подмножеств натуральных чисел оказывается счетным. Отметим, что ситауции в данном случае полностью аналогична ситуации со счетностью всех программ, определяющих вычислимые числа.

С другой стороны, для лучшего понимания отличий, рассмотрим построение аналогичное теореме Кантора. Если рассмотреть теорему Кантора для множества всех подмножеств натуральных чисел, то в классической теории множеств показывает его несчетность методом от противного. Предполагается, что существует всюду определенная функция, которая перечисляет все элементы этого множества. Но если взять частичные функции (не всюду определённые), то они могут перечислить все элементы, там где они определены, как это только что сделано выше. Соответственно, по нашему мнению, теорема Кантора доказывает лишь то, что не существует всюду определенной функции, которая бы перечисляла все элементы этого множества.
На предлагаемом нами языке функций принадлежности теорема Кантора будет выглядеть следующим образом. Пусть P_M – это множество всех подмножеств множества M.
В теореме Кантора строится следующее подмножество множества M:

$$bool\ \ cantor(Set\ \ x)\ \{$$
$$return\ \ M(x)\ \ and\ \ (not\ \ G[x](x))\ \}$$

Здесь G[x] – это отображение элемента x из множества M на какое-то подмножество множества P_M. В случае, когда G[x] = cantor мы имеем классическую неопределённость, когда функция cantor бесконечно вызывает сама себя с аргументом x, то есть для этого x функция cantor не определена.
Соответственно в данной теории теорема Кантора не работает, отметим, что аналогичная ситуация наблюдается для вычислимых действительных чисел. И появляется существенное отличие от классической теории множеств в том, что все множества оказываются не более, чем счетными.

Выводы:

Нами предложен вариант построения теории множеств с использованием частичных функций принадлежности, который позволяет определить действительные числа аналогично классической теории множеств. Существенным отличием данной теории от классической оказывается счетность всех множеств и, соответственно, всех действительных чисел. В нашей теории существует только те действительные числа, которым можно дать определение, это множество будет содержать в себе как подмножество множество всех вычислимых чисел $Computable \subset Definable$, при этом оба эти множества будут счетными.
Развитие данной теории и соотнесение выводов с реальностью будет предметом дальнейших исследований.

Литература

1. Robert Andre, Axioms and Set Theory. (2014). 444 c, ISBN 978-0-9938485-0-6.

2. A. M. Turing, On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, Proceedings of the London Mathematical Society. Second Series, vol. 42 (1936), pp. 230–265.

ON COUNTABILITY OF REAL NUMBERS

A.I. Denisov, A.D. Shevchenko

In the classical set theory real numbers are uncountable. There is a countable subset of real numbers which corresponds to computable numbers. In practice there is only computable numbers and numbers which correspond to some definition, therefore we consider the question of formulating a non-classical set theory, in which there is no undefinable real numbers. Such real numbers will be countable.
Keywords: set theory, countability, real numbers

УДК 004.75

ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ВЫПОЛНЕНИЯ ИНЖЕНЕРНЫХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

А.С. Долгополов[1]

1 *dolgopolov.work@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В данной статье обсуждаются особенности реализации распределенной мультипроцессорной системы для ускорения выполнения математических, аналитических и инженерных задач. Отдельно выделены проблемы отказоустойчивости и безопасности. Описываемая система может быть использована как в научных, так и в коммерческих целях. Система полностью реализована и готова к технической эксплуатации.

Ключевые слова: распределенные системы, инженерные задачи, отказоустойчивость, безопасность

Каждый инженер рано или поздно встречается с проблемой производительности разработанного программного обеспечения. Иногда проблема решается путем подбора более эффективных алгоритмов, но каждая программа имеет определенные пределы оптимизации. К счастью, проблему производительности можно решить при помощи горизонтального масштабирования, наращивая количество объединенных одной сетью вычислительных устройств. На данный момент существует множество поставщиков облачных услуг, которые могут предоставить кластер любой мощности и сложности. Аренда вычислительных устройств в действительности обходится намного дешевле покупки дорогостоящего оборудования, но, так или иначе, это стоит денег, пусть и небольших. Гораздо дешевле организовать вычислительную сеть в домашних условиях или в компьютерной аудитории, однако не каждому инженеру хватит терпения, навыков и времени, чтобы построить производительную, стабильную и безопасную распределенную систему, в связи с чем предлагается рассмотреть разработанную автором статьи систему, которая позволяет построить легко масштабируемую вычислительную сеть, функции которой могут быть определены непосредственно самим инженером.

Разработанная система основана на архитектуре «ведущий-ведомый», где ведущий (далее мастер-сервер) и ведомый (далее слэйв-сервер) представляют собой полноценные вычислительные устройства со своей памятью, системой ввода-вывода и процессором. Сеть организована таким образом, что мастер-сервер подключен ко множеству слэйв-серверов, которые, в свою очередь, занимаются вычислениями.

Принцип выполнения задач в разработанной распределенной системе относительно прост:

1. Задача поступает мастер-серверу, а после чего разбивается на подзадачи, которые равномерно распределяются среди слэйв-серверов

2. Слэйв-сервера выполняют поставленную подзадачу и передают по сети промежуточный результат обратно мастер-серверу

3. Мастер-сервер дожидается всех промежуточных результатов и формирует конечный результат

Описываемая вычислительная сеть имеет множество применений. Например, система может быть использована как средство ускорения инженерных вычислений, как платформа для организации майнинг пула [1] в сети Биткоин или же быть задействована в создании платформы для добровольных вычислений.

Характерной чертой разработанной системы является возможность прозрачной масштабируемости. Система была заложена с мыслью о том, что участники сети могут подключаться и отключаться от системы в любой момент времени таким образом, чтобы это не повлияло на общий ход процесса выполнения вычислительных задач.

На данный момент система была протестирована на задачах из области теории чисел и абстрактной алгебры. Однако пользователям системы предоставляется возможность разработать свою реализацию задачи, которая будет выполнена системой распределенно на множестве компьютеров слэйв-серверов. Для этого необходимо определить логику задачи при помощи программного кода на языке программирования Java и распространить jar архив в вычислительной сети.

Стоит признаться, что разработка распределенной системы – это технически сложная задача. Так как система состоит из множества компьютеров, которые обмениваются данными по сети, следует учесть множество факторов, чтобы построить хорошо функционирующую распределенную систему. Участники сети могут выйти из строя в любой момент времени, сеть может иметь плохую пропускную способность или вовсе быть ненадежной.

На первый взгляд, проблема стабильности не является столь актуальной. К сожалению, эта точка зрения обманчива, так как выход из строя любого участника сети без должной обработки может привести к ошибочному поведению системы. Допустим, перед Вами стоит задача сложить пару векторов из n-мерного пространства, имея в распоряжении m слэйв-серверов. Очевидным решением будет разделить пару на m пар векторов длиной n/m, передать полученные векторы всем слэйв-серверам, сложить малые пары векторов параллельно и сформировать конечный результат. Но что произойдет с системой, если во время выполнения сложения векторов один из слэйв-серверов отключится от вычислительной сети? Стоит ли передать пользователю системы ошибку исполнения или же возвратить неполный результат сложения? Ни один из озвученных вариантов не является желанным. В связи с этим стоит обратить особое внимание на проблему стабильности и отказоустойчивости в вычислительной сети.

Как уже отмечалось ранее, мастер-сервер имеет в своем распоряжении множество слэйв-серверов. Любой из слэйв-серверов, как впрочем и мастер-сервер, может перестать функционировать по многим непредвиденным причинам. Однако выход из строя любого участника сети не должен приводить к полной потере работоспособности, в связи с чем в системе был предусмотрен механизм перераспределения задач. Если слэйв-сервер перестал функционировать, то все задачи, которые не были выполнены слэйв-сервером на момент выхода из строя, будут перераспределены среди тех слэйв-серверов, что продолжают работать в штатном режиме. Такое решение позволяет скрывать внутренние поломки от пользователей системы, пусть и ценой временной общей деградации вычислительной сети.

Стоит подчеркнуть, что выход из строя одного-единственного мастер-сервера полностью лишает систему любой работоспособности. Проблема единой точки отказа может быть решена при помощи репликации мастер-серверов. Системой заложена подобная функциональность, как и разрешена проблема балансировки нагрузки и перераспределения задач в случае выхода из строя основного мастер-сервера. Балансировка нагрузки и перераспределение задач на уровне мастер-сервера разрешается при помощи введения дополнительного слоя промежуточного программного обеспечения. Клиент системы не отправляет запрос на выполнение задачи мастер-серверу напрямую, но пересылает запрос промежуточному программному обеспечению, которое сохраняет запрос в очереди задач. Мастер-сервер прочитает входящую задачу из очереди и приступит к выполнению. Стоит отметить, что мастер-сервер и промежуточное обеспечение работают отдельно друг от друга. Таким образом мастер-серверу необязательно функционировать на момент отправки задачи, так как она будет выполнена сразу, как только мастер-сервер прочитает входящую задачу из очереди задач. Если мастер-сервер не сможет выполнить задачу по какой-либо причине, сообщение с задачей попадет обратно в очередь задач, после чего будет прочитана и обработана другим мастер-сервером. Все сообщения из очереди задач читаются по принципу «round robin», что позволяет равномерно распределить вычислительную нагрузку на всех участников сети.

Вторая важная проблема, с которой приходится сталкиваться во время разработки распределенной системы – это проблема безопасности. Стоит отметить как минимум две особенности системы, на которые следует обратить особое внимание: работа в открытой сети и возможность расширять компоненты системы.

Для начала предлагается рассмотреть проблемы безопасности, которые возникают во время работы в открытой сети. Как уже упоминалось ранее, мастер-сервер имеет определенную привилегию, которая позволяет нагрузить слэйв-сервера вычислительными задачами. Выполнение задачи требует выделения значительных вычислительных ресурсов. Если мастер-сервер неравномерно распределяет нагрузку или «перенагружает» систему нескончаемым потоком задач, то некоторые участники вычислительной сети могут выйти из строя, что может привести к полной потере работоспособности системы. В связи с чем каждое сообщение в сети дополняется цифровой подписью при помощи RSA [2] в связке с SHA-256 [3]. Такой подход позволяет защитить систему от подмены запроса и также предоставляет возможность однозначно идентифицировать инициатора запроса и ответа.

Немаловажная проблема, которую следует обсудить в деталях – это проблема расширяемости. Система изначально разрабатывалась как потенциально дополняемая, подразумевая, что администратор системы имеет возможность как воспользоваться существующими компонентами, так

и дополнить систему своим программным кодом. Подобная гибкость вносит в том числе и угрозу распространения вредоносного кода. На первый взгляд, подобная проблема не имеет решения, так как отследить поведение пользовательского кода – это достаточно сложная или почти невыполнимая задача. К счастью, проблема разрешается при помощи изолирования окружения: изолирование файловой системы, сети и пространства пользователей. Аналогичной обособленности можно легко достичь при помощи виртуализации. К сожалению, запуск компонентов вычислительной системы в отдельной виртуальной машине является достаточно ресурсоемкой стратегией, однако подобное изолирование так же можно достичь при помощи контейнеризации [4], что является менее требовательным к ресурсам компьютера решением. Мастер и слэйв-сервер запускаются в отдельных «контейнерах», что значительно ограничивает допустимый вред от пользовательского кода. Запуская систему в контейнерах, вредоносный код не может получить доступ к ресурсам хост-машины, передать данные по сети или прочитать конфиденциальную информацию из файловой системы.

Суммируя все описанные техники, в конечном итоге получилась распределенная вычислительная система, которая может быть использована для проведения инженерных или математических расчетов. Важным преимуществом системы является высокая отказоустойчивость, что позволяет проводить массовые вычисления, задействовав множество удаленных друг от друга компьютеров, соединенных между собой при помощи сети Интернет. Другой отличительной чертой сети является возможность расширения существующего функционала, что позволяет инженерам и программистам разрабатывать свои программы для распределенного выполнения в вычислительной сети. Несмотря на все особенности сетевого взаимодействия и специфики описываемого программного обеспечения, система является безопасной для эксплуатации и требует малый объем вычислительных ресурсов.

На данный момент в системе реализованы все основные функции, которые были запланированы на этапе проектирования. Исходный программный код находится в открытом доступе, в то время как сама система поставляется в виде образов, которые периодически загружаются в публичное хранилище образов Docker Hub. Любой заинтересованный человек может запустить контейнеры с системой и начать работу без установки дополнительного программного обеспечения.

Литература

1. Narayanan A., Bonneau J., Felten E. *Bitcoin and Cryptocurrency Technologies: A Comprehensive Introduction* – Princeton: Princeton University Press, 2016. – 336 с.

2. Yan S. *Cryptanalytic Attacks on RSA* – Berlin: Springer, 2008. – 255 с.

3. Hoffstein J., Pipher J., Silverman J. *An Introduction to Mathematical Cryptography* – Berlin: Springer, 2014. – 538 с.

4. Nickoloff J., Kuenzli S. *Docker in Action* – New-York: Manning Publications, 2019. – 350 с.

THE DISTRIBUTED SYSTEM FOR HIGH-SPEED MATHEMATICAL COMPUTATIONS

A.S. Dolgopolov

This paper briefly describes the distributed system intended for high-speed mathematical computations. The main goal of the project is to make it simple to utilize computer resources. The node project may be used in non-profit fields like scientific volunteer computations, or Bitcoin mining. The system is easy to use and simple to extend, so engineers or mathematicians with decent programming skills can develop their own distributed tasks with no pain. The project is entirely open-source and contribution friendly.

Keywords: distributed systems, high-speed computations, security, open-source, development

УДК 004.9

РЕАЛИЗАЦИЯ ПЕРСЕПТРОНА С ТРЕМЯ СКРЫТЫМИ СЛОЯМИ ДЛЯ КЛАССИФИКАЦИИ ЧИСЛОВЫХ ДАННЫХ СОЦИАЛЬНОЙ СЕТИ

С.К. Еникеева[1], Г.З. Вахитов[2]

1 *s.enikeeva1@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Высшая школа ИТИС
2 *gzvahitov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий

В статье обсуждается применение нейросетевых технологий в задаче классификации числовых данных профиля пользователей социальной сети. Изучение числовых метрик пользователя показало, что построение классификатора является трудно формализуемой задачей, так как тенденции в данных прослеживаются весьма слабо. Тем не менее удалось создать классификатор, эффективность которого в среднем составляет 80%. Статистический анализ показал, что специфика обрабатываемых данных не позволяет повысить точность классификатора.

Ключевые слова: многослойный персептрон, социальные сети, академическая успешность, прогностика, психометрия

Математическая обработка данных профиля пользователя социальной сети позволяет с некоторой вероятностью получить сведения о пользователе, не отражённые в профиле. Такая информация может быть полезна для создания выборок с заданными свойствами, например, для продуманного формирования контингента абитуриентов.

Возможности прогнозирования академической успешности среди студентов имеет особое значение, так как это снижает риск рассогласования между ожиданиями к выпускнику вуза как специалисту, способному решать производственные задачи и уровнем его профессиональной готовности. В работе реализован классификатор, делящий выборку студентов, рассматриваемых как пользователей социальной сети, на два класса: студенты с высокой и низкой успеваемостью. В качестве классификатора использована многослойная нейронная сеть . Для обучения сети использовалась технология обучения с учителем. Обучение и тестирование сети проводилась на выборках, относящихся к студентам технических специальностей. Эффективность сети в среднем составляет 80%. Интересным фактом является то, что самая низкая эффективность (73%) была достигнута на обучающей выборке. На тестовых выборках эффективность оказалась выше. Самая высокая точность составила 91%.

Сеть представляет из себя персептрон с тремя скрытыми слоями. Входной слой содержит 5 нейронов, первый скрытый слой – 210 нейронов, второй -10 нейронов, третий два и выходной слой один нейрон. Сумматорная функция в нейронах первого скрытого слоя имеет специфический вид:

$$S_j^{(1)} = \sum_{i=1}^{5} I_{ij} \times w_{ij} \times x_i,$$

где j - номер нейрона на первом скрытом слое, i - номер входного нейрона, x_i - значение входного нейрона, - w_{ij} вес, характеризующий связь между i-ым входным нейроном и j-ым скрытым нейроном, I_{ij} - нидикатор, принимающий значения 0 или 1 в зависимости от значения соответствующего входного нейрона.

Функция активации на нейронах первого скрытого слоя сопоставляет аргумент частоте соответствующего эмпирического распределения возможных значений аргумента. Функция активации на нейронах второго скрытого слоя имеет вид $h_j^{(2)} = \ln S_j^{(2)}$. На нейронах третьего слоя функция активации линейна. На выходном слое использована пороговая функция активации. Сходимость нейронной сети сильно зависит от начальной инициализации весов. Первоначальные значения весов были подобраны из статистического анализа изучаемых данных.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-18-00253 «Нейросетевая психометрическая модель когнитивно-поведенческих предикторов жизненной активности личности на базе социальных сетей»

Литература

1. Popov L. M, Ustin P. N *) Psychological alienation problem in moral and ethical psychology of personality. Mathematics Education.* – Vol.11. -№ 4. P.787-797 https://www.iejme.com/article/psychological-alienation-problem-in-moral-and-ethical-psychology-of-personality.

2. Tumakov D., Godovykh C., Valeeva A. *Mathematical model of socio-psychological adaptation through a person's interaction with the environment* // Herald National Academy of Managerial Staff of Culture and Arts, 2018, No. 3, P. 310-318.

3. Вахитов Г. З., Еникеева З. А.*Использование нейросетей для прогнозирования динамики фондового рынка* // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2017): Материалы XVI Международной конференции имени А.Ф. Терпугова (29 сентября - 3 октября 2017 г.). - Томск: Изд-во НТЛ, 2017. - Ч.2. - с.264-267.

IMPLEMENTATION OF A PERCEPTRON WITH THREE HIDDEN LAYERS FOR THE CLASSIFICATION OF NUMERICAL DATA OF A SOCIAL NETWORK

S.K. Enikeeva, G.Z. Vakhitov

This paper describes the use of neural network technologies in the task of classifying the numerical data of the profile of users of a social network. A study of the user's numerical metrics has shown that the construction of a classifier is a difficult formalized task, since trends in the data are very weakly traced. Nevertheless, it was possible to create a classifier, the effectiveness of which is on average 80 %. Statistical analysis showed that the specificity of the processed data does not allow to increase the accuracy of the classifier.

Keywords: multilayer perceptron, social networks, academic success, prognostics, psychometry

УДК 514.822

КЛАССИФИКАЦИЯ РЕЖИМОВ ДВУХФАЗНОГО ТЕЧЕНИЯ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ ПРИ ОЦЕНКЕ КАПИЛЛЯРНЫХ И ВЯЗКИХ СИЛ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЕШЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА

Т.Р. Закиров[1], А.А. Галеев[2], М.Г. Храмченков[3]

1 *tirzakirov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *akhmet.galeev@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
3 *mkhramch@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В данной работе предложен метод для классификации двухфазных течений дренирования в пористой среде (вязкие пальцы, капиллярные пальцы, течение со стабильным фронтом). Метод основан на оценке перепадов давления, вызванных действием капиллярных и вязких сил. Предложенный подход валидируется на трех моделях пористых сред с различными фильтрационно-емкостными свойствами.

Ключевые слова: математическое моделирование, пористая среда, пальцы, капиллярные и вязкие силы

Введение

Двухфазные течения жидкостей в пористых средах актуальны во многих отраслях науки и техники, среди которых нефтедобывающая промышленность, гидрогеология, почвоведение и грунтоведение, динамика подземных вод и др. Согласно проведенным исследованиям [1, 2], динамика двухфазного течения дренирования в пористых средах управляется силами вязкого трения и капиллярного сопротивления. Было показано, что распределение двух жидкостей в поровом пространстве зависит от двух безразмерных параметров – числа капиллярности Ca и отношения вязкостей несмачивающей (нагнетаемой) и смачивающей (вытесняемой) фаз M. Было выявлено, что в зависимости

от пары Ca и M различают три типа течения: с формированиями капиллярных пальцев, вязких пальцев и со стабильным фронтом вытеснения. Цель настоящего исследования заключается в разработке нового метода, позволяющего классифицировать и предсказывать возникновение одного из типов течений на основе оценки капиллярных и вязких сил.

1. Материалы и методы

Для моделирования двухфазных течений в пористой среде используются решеточные уравнения Больцмана и модель градиента цветового поля. Подробная математическая постановка и валидация модели представлены в работе [2]. В качестве образцов для исследования используются двухмерные гранулярные модели со случайным расположением зерен, статистическое распределение которых подчиняется нормальному закону. Было сгенерировано три модели с различными коэффициентами абсолютной проницаемости: 6.05, 23.08 и 48.60 мкм^2.

2. Результаты и обсуждение

В начальный момент времени поровое пространство целиком заполнено смачивающей скелет жидкостью. Вычислительный эксперимент проводится при заданной постоянной скорости течения $u_0 = 10^{-3}$ м/с в каждой ячейке входного сечения. Баланс между капиллярными и вязкими силами контролируется при помощи межфазного натяжения, значения которого принимают значения 0.1, 1, 2, 5, 10, 15, 20, 30, 40, 50, 60 мН/м и соотношением вязкостей несмачивающей и смачивающей фаз равным 10/1, 1/1, 1/10, 1/50, 1/100.

2.1. Классификация течений

При малости сил инерции в пористой среде двухфазные течения дренирования контролируются вязкими и капиллярными силами: Таким образом, общий перепад давления ΔP между входным и выходным сечением может быть вычислен как $\Delta P = P^{visc} + P^{cap}$, где P^{visc} и P^{cap} – падения давления, вызванные действием вязких и капиллярных сил, соответственно (рис. 2). Согласно данному простому соотношению, в данной работе предлагается новый подход для классификации течений, основанный на отдельной оценке величин P^{visc} и P^{cap}. P^{visc} вычисляется при отсутствии межфазного натяжения и эффектов смачивания.P^{cap} оценивается по формуле $P^{cap} = \Delta P - P^{visc}$.

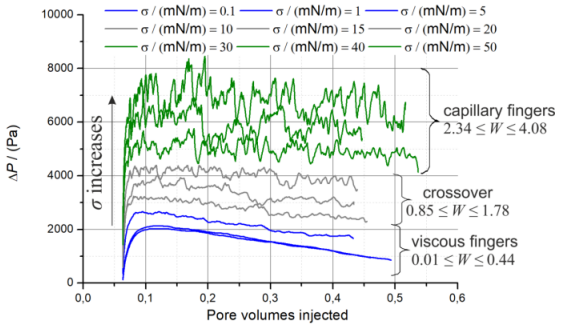


Рис. 1. Динамика суммарного перепада давления ΔP при различных σ для образца Sample 1 (Low) и $log_{10}M = -1$

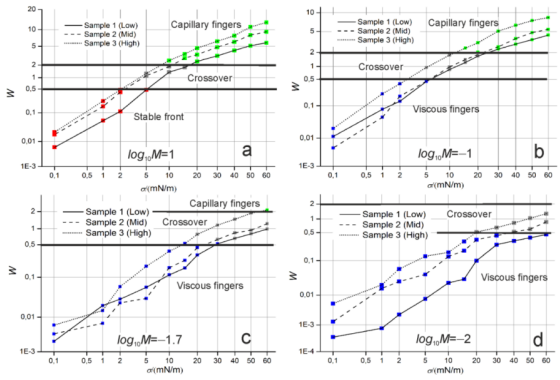


Рис. 2. Зависимость $W = P^{cap}/P^{visc}$ от межфазного натяжения при различных соотношениях вязкостей

Режимы течения в данной работе классифицируются при помощи величины $W = P^{cap}/P^{visc}$. При $W \geq 2$ капиллярные силы превосходят силы вязкого трения (рис.1). Согласно работам [1, 2], ожидается режим с формированием капиллярных пальцев при всех M. Вязкие силы трения считаются доминирующими при $W \leq 0.5$ (рис.2). Течение с вязкими пальцами ожидается при $M \leq 0.1$ и со стабильным фронтом при $M > 1$. При $0.5 \leq W \leq 2$ доминирование одной из сил отсутствует, в образце одновременно возникает более одного типа течения. Это режим кроссовера (рис.2).

2.2. Валидация метода

В данном разделе проводится валидация метода на трех образцах с различными фильтрационно-емкостными свойствами, основанная на уже известных отличительных особенностях режимов [1, 2]. Рис.2 показывает зависимость W от межфазного натяжения при различных M.

а) Стабильный фронт. Красные символы на рис.2 при $W \leq 0.5$ и $log_{10}M = 1$, согласно классификации соответствуют течению со стабильным фронтом. На рис.3 показано распределение жидкостей, включая значение W близкое к 0.5. Как видно по рисунку, несмачивающая фаза практически полностью заполняет поровое пространство, о чем свидетельствуют значения насыщенности S_{nw} близкие к 0.5. Таким образом, валидацию метода предсказания стабильного фронта можно считать успешной для всех испытуемых образцов.

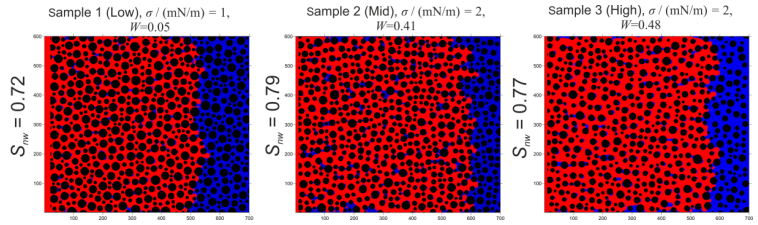


Рис. 3. Распределение жидкостей при течении со стабильным фронтом. Красный – нагнетаемая фаза, синий – вытесняемая фаза, черный – скелет

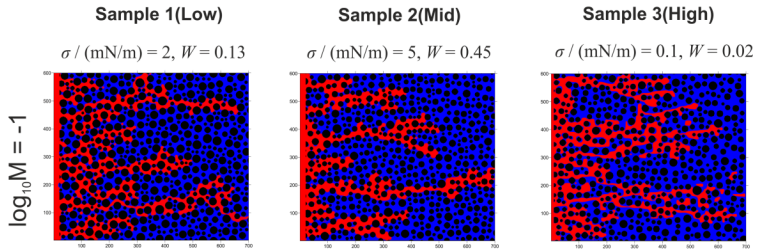


Рис. 4. Распределение жидкостей при течении с формированием вязких пальцев

б) Вязкие пальцы. Синие символы на рис.2 при $W \leq 0.5$ и $log_{10}M \leq -1$ указывают на течения с формированием вязких пальцев. Данный режим течения характеризуется образованием доминантных каналов течения с преимущественным направлением к выходному сечению вдоль перепада давления (рис.4).

в) Капиллярные пальцы. Зеленые символы на рис.2 при $W \geq 2$ соответствуют режиму течения с формированием капиллярных пальцев. Наиболее яркими отличительными характеристиками такого течения являются эпизоды резкого падения давления или скачки Хайнса (рис.2), возникающие при миграции мениска их узкого горла поры в ее широкое тело, и формированием каналов вытеснения по направлениям, отличным от внешнего перепада давления (рис.5).

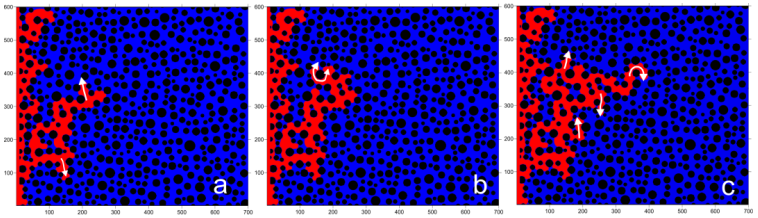


Рис. 5. Развитие капиллярных пальцев (белые стрелки) по направлениям, отличным от внешнего перепада давления ($W = 3.1$, Sample 3(High))

Заключение

В данной работе представлен метод для классификаций двухфазных течений дренирования, основанный на оценке капиллярных и вязких сил. Предложенный метод был успешно валидирован на трех образцах пористых сред с различными структурами порового пространства и фильтрационно-емкостными характеристиками.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект №18-31-00134).

Литература

1. Tsuji T., Jiang F., Christensen K.T. *Characterization of immiscible fluid displacement processes with various capillary numbers and viscosity ratios in 3D natural sandstone* // Advances in Water Recourses. – 2016. V. 95. – P. 3–15.

2. Zakirov T.R., T., Galeev A.A., Khramchenkov M.G. *Pore-scale Investigation of Two-Phase Flows in Three-Dimensional Digital Models of Natural Sandstones* // Fluid Dynamics. – 2018. – V. – 53. – №5. – P. 76–91.

CHARACTERIZATION OF TWO-PHASE DISPLACEMENT MECHANISMS IN POROUS MEDIA WHEN EVALUATING CAPILLARY AND VISCOUS FORCES USING LATTICE BOLTZMANN MODELS

T.R. Zakirov, A.A. Galeev, M.G. Khramchenkov

In this paper, we propose a method for classifying two-phase drainage flows in porous media (viscous fingers, capillary fingers, flow with a stable front). The method is based on the assessment of pressure drops caused by the action of capillary and viscous forces. The proposed approach is validated on three models of porous media with different filtration-capacitive properties. As a research tool, the lattice Boltzmann equations and the color field gradient method are used.
Keywords: mathematical modeling, porous medium, fingers, capillary and viscous forces

УДК 517.958

МОДЕЛИРОВАНИЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

А.В. Калинин[1], С.Р. Лаврова[2]

1 *avk@mm.unn.ru*; ФГАОУ ВО Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Институт информационных технологий, математики и механики

2 *motivation-sv-lav@yandex.ru*; ФГАОУ ВО Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Институт информационных технологий, математики и механики

В работе обсуждается моделирование глобальной электрической цепи в атмосфере Земли в квазистационарном электрическом приближении. Уставновлено существование и единсвенность решения этой задачи.

Ключевые слова: система уравнений Максвелла,глобальная электрическая цепь, квазистационарное электрическое приближение, ионосферный потенциал

В работе рассматривается псевдопараболическое дифференциальное уравнение для электрического потенциала, возникающее при моделировании глобальной электрической цепи в атмосфере Земли в квазистационарном электрическом приближении следующего вида [1-3]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\triangle\varphi(x;t)+4\pi div(\sigma(x)grad\,\varphi(x;t))=4\pi div\,\vec{j}^{ex}(x;t), \tag{1}$$

$$x\in\Omega,\Omega\subset R^3, \tag{2}$$

где Ω- открытое множество, гомеоморфное шаровому слою, с границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$,где Γ_1, Γ_2- компоненты связности границы Ω гомеоморфное сфере R^3, $t \in (0; +\infty)$. В уравнении (1) функция $\vec{J}^{ex}(x;t)$ заданная объемная плотность тока, $\sigma = \sigma(x)$- удельная проводимость среды.

Рассмотрим уравнение (1) и дополним граничными условями (3)-(4):

$$\varphi|_{\Gamma_1} = 0, \varphi|_{\Gamma_2} = V_I, \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_2}\frac{\partial\varphi(x;t)}{\partial\vec{n}}d\Gamma + 4\pi\int_{\Gamma_2}\sigma(x)\frac{\partial\varphi(x;t)}{\partial\vec{n}}d\Gamma = 4\pi\int_{\Gamma_2}(\vec{J}^{ex}(x;t)\cdot\vec{n})d\Gamma, \tag{4}$$

где $\vec{n}$-единичный вектор внешней нормали к границе Γ_2, V_I -неизвестная подлежащая определению постоянная, имеющая смысл, называемая ионосферным потенциалом.

Вопросы математической корректности в соответсвующих функциональных пространствах для системы уравнений (1),(3),(4) с начальными условиями для φ были изучены в работах [4-5].

В настоящей работе изучается вопрос о существовании периодических по времени решений системы (1),(3),(4) в предположении о периодичности объемной плостности сторонних токов:

$$\vec{J}^{ex}(x;t) = \vec{\boldsymbol{J}}(x)e^{i\omega t}. \tag{5}$$

В этом случае электрический потенциал ищется в виде:

$$\varphi(x;t) = \boldsymbol{\Phi}(x)e^{i\omega t}. \tag{6}$$

Рассматривается соответсвующая задача для определения комплексной амплитуды $\boldsymbol{\Phi}(x)$, которая имеет вид:

$$i\omega\triangle\boldsymbol{\Phi}(x) + 4\pi div(\sigma(x)grad\boldsymbol{\Phi}(x)) = 4\pi div\vec{\boldsymbol{J}}(x), \tag{7}$$

с граничными условиями

$$\boldsymbol{\Phi}|_{\Gamma_1} = 0, \boldsymbol{\Phi}|_{\Gamma_2} = \boldsymbol{V}_I, \tag{8}$$

$$i\omega\int_{\Gamma_2}\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}(x)}{\partial\vec{n}}d\Gamma + 4\pi\int_{\Gamma_2}\sigma(x)\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}(x)}{\partial\vec{n}}d\Gamma = 4\pi\int_{\Gamma_2}(\vec{\boldsymbol{J}}(x)\cdot\vec{n})d\Gamma, \tag{9}$$

Основным результатом работы является теорема существования и единственности решения этой задачи (7),(8),(9), для строгой формулировки которой вводятся следующие функциональные пространства [6]:

$$V(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u(x) = 0, x \in \Gamma_1; u(x) = c, x \in \Gamma_2\}, \tag{10}$$

$$H(div;\Omega) = \{\vec{u} \in L_2^3(\Omega) : div\,\vec{u}(x) \in L_2(\Omega)\}, \tag{11}$$

где $H^1(\Omega)$ -комплексное пространство Соболева, $L_2(\Omega)$ - комплексное пространство суммируемых с квадратом по Лебегу функций.

Справедлива теорема

Теорема. *Пусть границы Γ_1 и Γ_2 удовлетворяют условию Липшица, пусть также $\vec{\boldsymbol{J}}(x) \in H(div;\Omega)$ и $\sigma(x)$ измеримая функция, определенная на области Ω, удовлетворяющая при некоторых положительных постоянных σ_1 и σ_2 условию*

$$\sigma_1 \leqslant \sigma(x) \leqslant \sigma_2. \tag{12}$$

Тогда задача (7),(8),(9) имеет единственное решение $\boldsymbol{\Phi} \in V(\Omega)$.

Литература

1. Мареев Е. А. *Достижения и перспективы исследований глобальной электрической цепи* // Успехи физических наук – 2010. – Т. 180 – № 5. – С. 527–534.

2. Толмачев В. В., Головин А. М., Потапов В. С. *Термодинамика и электродинамика сплошной среды.* – М.: МГУ, 1988. – 232 с.

3. Калинин А. В., Слюняев Н. Н., Мареев Е. А., Жидков А. А. *Стационарные и нестационарные модели глобальной электрической цепи: корректность, аналитические соотношения, численная реализация* // Физика атмосферы и океана. –2014. – Т. 50. – № 3. – С. 314–322.

4. Жидков А. А., Калинин А. В. *Корректность одной математической задачи атмосферного электричества* // Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского – 2009. –№ 4. – С. 123–129.

5. Kalinin A. V., Slyunyaev N. N. *Initial-boundary value problems for the equations of the global atmospheric electric circuit* // J. Math. Anal. Appl. – 2017. –Т. 450 – № 1. – P. 112–136.

6. Girault V., Raviart P. *Finite element methods for Navier–Stokes equations.* – N.Y.: Springler-Verlag, 1986. – 387 p.

MODELING OF QUASISTATIONARY ELECTROMAGNETIC FIELDS

A.V. Kalinin, S.R. Lavrova

This paper discusses the modeling of the global electric circuit in the Earth's atmosphere of a quasistationary electric approximation. Also the existence and uniqueness of the solution for this problem is established.

Keywords: the Maxwell's system of equations, the global electric circuit, quasistationary electric approximation, ionospheric potential

УДК 519.233.6

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ ПРОЦЕДУРА ОТБОРА ПОПУЛЯЦИИ С НАИБОЛЬШИМ СРЕДНИМ ДЛЯ НОРМАЛЬНОЙ-НОРМАЛЬНОЙ МОДЕЛИ, ОСНОВАННАЯ НА КОНЦЕПЦИЯХ ПЕРВОГО ПЕРЕСКОКА И ЗАГЛЯДЫВАНИЯ ВПЕРЁД

И.А. Кареев[1]

1 *kareevia@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий

В статье обсуждается новый подход к построению последовательной процедуры статистического отбора популяции с наибольшим средним из нескольких. Задача рассматривается в рамках нормальной-нормальной байесовской парадигмы с известными дисперсией популяции и параметрами априорного распределения. При построении процедуры применяется оригинальный симбиоз идеи первого перескока апостериорного риска за заданный уровень и идеи заглядывания вперёд.

Ключевые слова: процедура отбора, байесовский подход, последовательная процедура, первый перескок, заглядывание вперёд, нормальная-нормальная модель

Пусть $\xi_i \sim \mathcal{N}(\vartheta_i, \sigma^2)$, где ϑ_i — реализация случайной величины $\vartheta_i \sim \mathcal{N}(\mu, \tau^2)$, а σ^2, μ, τ^2 — известные параметры модели. Такая постановка соответствует байесовской нормальной-нормальной модели. Рассматривается задача статистического отбора: по результатам наблюдений из популяций $\xi_1, \ldots, \xi_p$ требуется определить наибольшее из $\theta_1, \ldots, \theta_p$. От процедуры отбора φ, решающей эту задачу требуется выполнение ограничений на вероятность корректного решения:

$$\mathbb{P}(\vartheta_\delta \geq \vartheta_j,\ j \in \{1, \ldots, p\}) \geq p^*, \tag{1}$$

где δ обозначает итоговое решение критерия φ в эксперименте, а $p^* \in (0,1)$ — заданное ограничение.

В этой работе предлагается процедура отбора, основанная на идеях первого перескока (см. [1, 2]) и заглядывания вперёд (см. [3]). Опишем процедуру описанием трёх правил: правила остановки, правила принятия решения и правила управления. Далее через $t = 0, 1, 2, \ldots$ будет обозначаться этап проведения эксперимента, а через $X^{(t)} = \{X_1^{(t)}, \ldots, X_p^{(t)}\}$ — множество всех выборочных данных, полученных к t-ому этапу эксперимента, где $X_i^{(t)}$ — выборочные данные, полученные наблюдением i-ой популяции. Заметим, что рассматриваемая последовательная процедура предполагает взятие на каждом этапе эксперимента ровно одного наблюдения, так что значение t будет совпадать с суммарным объёмом выборки к t-ому этапу эксперимента.

1. Правило остановки φ_s. Пусть $\varphi_s(t) = 1$ обозначает остановку эксперимента на этапе t, а $\varphi_s(t) = 0$ — его продолжение. Зададим φ_s следующим образом:

$$\varphi_s = \mathbb{I}\big(\exists i : \mathbf{P}(\vartheta_i > \max_j \vartheta_j \mid X^{(t)}) \geq p^*\big),$$

где $\mathbb{I}$ — индикаторная функция. φ_s можно интерпретировать следующим образом — эксперимент должен быть завершён как только хотя бы для одной популяции байесовская апостериорная вероятность её наилучшести перевалит за заданное ограничение p^*. В целом, такое правило остановки соответствует стандартной методике построения оптимальных байесовских процедур статистического вывода.

2. Правило принятия решения φ_d. Значение φ_d принимает в качестве значения один из индексов популяций, и определяет итоговое решение процедуры отбора после остановки эксперимента. Зададим φ_d следующим образом:

$$\varphi_d = \arg\max_i \mathbf{P}(\vartheta_i > \max_j \vartheta_j \mid X^{(t)}).$$

Как обычно для байесовской парадигмы, в качестве решения принимается популяция с наибольшей апостериорной вероятностью (т.е. у которой математическое ожидание с наибольшей апостериорной вероятностью является наибольшим).

3. Правило управление φ_c. Основная новация предлагаемой процедуры заключена в особом задании правила управления. Значение φ_c обозначает номер популяции, из которой должно быть произведено следующее наблюдение. Для предлагаемой процедуры оно принимает вид:

$$\varphi_c = \arg\max_i \mathbf{P}_{X_i^*}\Big(\max_j \mathbf{P}_{\boldsymbol{\vartheta}}\big(\vartheta_j \geq \max_l \vartheta_l \mid \mathrm{Concat}(X^{(t)}, X_i^*)\big) \geq P^* \mid X^{(t)}\Big),$$

где $\mathrm{Concat}(X^{(t)}, X_i^*)$ обозначает выборку $X^{(t)}$ в которую в подвыборку наблюдений из i-ой популяции добавлено дополнительное наблюдение X_i^*.

Приведём основные аналитические результаты, полученные на данном этапе исследования процедуры.

Утверждение 1. *Процедура отбора, определяемая правилами 1–3, удовлетворяет ограничению на вероятность корректного отбора (1).*

Пусть

$$\theta_i(X^{(t)}) = \frac{\sigma^2\mu + n_i^{(t)}\tau^2\bar{X}_i^{(t)}}{n_i^{(t)}\tau^2 + \sigma^2}, \quad \tau_i(X^{(t)})^2 = \frac{\sigma^2\tau^2}{n_i^{(t)}\tau^2 + \sigma^2},$$

где $n_i^{(t)}$ — количество наблюдений, совершённых к t-ому этапу эксперимента из i-ой популяции; $\bar{X}_i^{(t)}$ — среднее арифметическое значений из выборки i-ой популяции.

Утверждение 2. *Апостериорная вероятность того, что ξ_i является наилучшей, может быть представлена в виде:*

$$\mathbf{P}(\vartheta_i \geq \max_l \vartheta_l \mid X^{(t)}) = \mathbf{E}_{\vartheta_i \mid X^{(t)}} \prod_{l \neq i} \mathcal{N}\big(\vartheta_i^{(t)} \mid \theta_l(X^{(t)}), \tau_l(X^{(t)})\big),$$

где $\mathcal{N}(x \mid m, s)$ — функция распределения нормального закона с математическим ожиданием m и дисперсией s, а случайные величины $\vartheta_i^{(t)} \sim \mathcal{N}\big(\theta_i(X^{(t)}), \tau_i(X^{(t)})\big)$.

Утверждение 3. *Пусть*

$$a_i = \max_{j \neq i} \arg\max_x \mathbb{I}\Big(\mathbf{P}_{\boldsymbol{\vartheta}}\big(\vartheta_j \geq \max_l \vartheta_l \mid \mathrm{Concat}(X^{(t)}, X_i^* = x)\big) \geq P^*\Big),$$

$$b_i = \arg\min_x \mathbb{I}\Big(\mathbf{P}_{\boldsymbol{\vartheta}}\big(\vartheta_i \geq \max_l \vartheta_l \mid \mathrm{Concat}(X^{(t)}, X_i^* = x)\big) \geq P^*\Big).$$

Тогда для правило управления верны следующие утверждения:

- $\varphi_c = 1$ *для* $a_i \geq b_i$
- $\varphi_c = \arg\max_i \left(\mathcal{N}\left(a_i | \theta_i(X^{(t)}), \tau_i(X^{(t)})^2 + \sigma^2\right) + \mathcal{N}\left(-b_i | \theta_i(X^{(t)}), \tau_i(X^{(t)})^2 + \sigma^2\right) \right)$ *для* $a_i < b_i$.

Утверждения 2 и 3 значительно упрощают численную реализацию процедуры. Открытой остаётся проблема аналитического доказательства сходимости метода, т.е. что с вероятностью 1 процедура произведёт конечное число наблюдений для любых корректных конфигураций параметров популяций.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта N 18-31-00094.

Литература

1. Salimov R. *A sequential d-guaranteed test for distinguishing two interval hypotheses.* – Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2016. – Vol.37. – Is.4. – P.500–503.

2. Simushkin D. S, Simushkin S. V, Volodin I. N. *D-Guaranteed Discrimination of Statistical Hypotheses: a Review of Results and Unsolved Problems.* – Journal of Mathematical Sciences (United States). – 2018. – Vol.228. – Is.5. – P.543–565.

3. Berger J. O. *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis, 2nd ed.* – Springer. – 1985. – New York.

SEQUENTUAL FIRST-CROSSING LOOK-AHEAD PROCEDURE FOR SELECTING A POPULATION WITH THE LARGEST MEAN IN NORMAL-NORMAL MODEL

I.A. Kareev

A problem of statistical selecting of population with the largest mean value is considered. We introduce a sequential selection procedure, which we call first-crossing look-ahead, for normal-normal Bayesian setting of the problem, where variances of the populations are supposed to be the same and known and the means are realizations of prior normal random variable with known distribution parameters. The paper includes the definition of the procedure with some basic analytical results.

Keywords: selection problem, Bayesian approach, sequential procedure, first-crossing, look-ahead, normal-normal model

УДК 517.547

НЕРАВЕНСТВО БОРА-РОГОЗИНСКОГО ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЧЕЗАРО

И.Р. Каюмов[1], Д.М. Хамматова[2], С. Поннусами[3]

1 *ikayumov@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

2 *dianalynx@rambler.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

3 *samy@iitm.ac.in*; Индийский технологический институт Мадраса, отделение математики

В данной работе рассматривается радиус Бора-Рогозинского для оператора Чезаро на пространстве ограниченных и аналитических в единичном круге функций. Найдены соответствующие радиусы, отвечающие разным постановкам задачи.

Ключевые слова: ограниченные аналитические функции, радиус Бора, радиус Рогозинского, операторы Чезаро, лемма Шварца-Пика

Одним из важных результатов в комплексном анализе является утверждение, известное как теорема Бора. Работа в этом направлении была начата Харальдом Бором в 1914 году [1], позже его результат был улучшен Риссом, Шуром и Винером.

Теорема А. *Для ограниченной и аналитической в единичном круге* $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ *функции* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *выполняется следующее неравенство:*

$$B_f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k \le \|f\|_\infty \ \ for\ |z| = r \le \tfrac{1}{3}.$$

Константа $\frac{1}{3}$ *называется радиусом Бора и является точной.*

Существует также такое понятие, как радиус Рогозинского ([2], [3], [4]). Он возникает из следующего результата:

Теорема В. *Для аналитической в единичном круге* $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ *функции* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|f(z)| \le 1$, *выполняется неравенство* $|S_N(z)| \le 1$ *при* $|z| \le \frac{1}{2}$. *Здесь* $S_N(z) = \sum\limits_{k=0}^{N-1} a_k z^k$ *- частные суммы разложения* f *в ряд Тейлора.*

Константа $\frac{1}{2}$ *называется радиусом Рогозинского и является точной.*

На сегодняшний день существует много работ, посвящённых различным обобщениям и аналогам неравенства Бора. Большой интерес представляют, например, статьи [5] и [6]. Также есть несколько статей, изучающих радиус Рогозинского (см., например, [7]). По аналогии с суммой Бора $B_f(z)$ можно ввести сумму Бора-Рогозинского, определённую как

$$R_N^f(z) := |f(z)| + \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| r^k, \quad |z| = r.$$

Очевидно, что

$$|S_N(z)| = \left| f(z) - \sum_{k=N}^{\infty} a_k z^k \right| \le R_N^f(z)$$

Имеет смысл рассмотреть аналог радиуса Бора для $R_N^f(z)$: радиус круга, в котором эта величина не превышает единицы. Эту величину будем называть радиусом Бора-Рогозинского.

В рамках данного исследования мы рассмотрели радиус подобного типа для оператора Чезаро $\mathscr{C} f(z)$ ([8], [9]), действующего на пространстве аналитических в единичном круге функций $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ следующим образом:

$$\mathscr{C} f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{n=0}^{k} a_n \right) z^k = \int_0^1 \frac{f(tz)}{1-tz}\, dt.$$

Для оператора Чезаро сумма Бора выглядит так:

$$\mathscr{C}_f(r) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |a_k| \right) r^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \phi_k(r),$$

где

$$\phi_k(r) = \sum_{s=k}^{\infty} \frac{r^s}{s+1} = \frac{1}{r} \int_0^r \frac{x^k}{1-x}\, dx. \tag{1}$$

Легко показать, что для оператора Чезаро верна оценка

$$|\mathscr{C} f(z)| \le \frac{1}{r} \log \frac{1}{1-r}, \qquad r = |z| \in [0,1).$$

Необходимо сформулировать утверждение, которое даст некоторый аналог радиуса Бора-Рогозинского для оператора Чезаро. Существуют разные варианты постановки задачи. Наиболее естественной представляется следующая формулировка теоремы:

Теорема 1. *Пусть* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *аналитична в* $\mathbb{D}$, $|f(z)| \le 1$ *в* $\mathbb{D}$, $\phi_N(r)$ *определены равенством (1). Тогда*

$$|\mathscr{C} f(z)| + \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \phi_k(r) \le \frac{1}{r} \log \frac{1}{1-r} \ \ для \ \ r \le P_N,$$

где $|z| = r$, P_N *- положительный корень уравнения* $\psi_N(r) = 0$,

$$\psi_N(r) = -(1-r)\log(1+r) + 2r^{N+1} - 2Nr(1-r)\phi_N(r).$$

Радиус P_N *является наилучшим.*

Аналогичный результат получен для $|\mathscr{C}f(z)|^2$:

Теорема 2. *Пусть* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *аналитична в* $\mathbb{D}$, $|f(z)| \le 1$ *в* $\mathbb{D}$, $\phi_N(r)$ *определены равенством (1). Тогда*

$$|\mathscr{C}f(z)|^2 + \sum_{k=N}^{\infty} |a_k|\phi_k(r) \le \frac{1}{r^2}\log^2\frac{1}{1-r} \quad при \quad r \le P'_N,$$

где $|z| = r$, P'_N *- положительный корень уравнения* $\Psi_N(r) = 0$,

$$\Psi_N(r) = -\frac{1}{r^2}\log(1+r)\log\frac{1}{1-r} + \frac{r^N}{1-r} - N\phi_N(r).$$

Радиус P'_N *является наилучшим.*

Теорему 1 можно обобщить, заменив $|\mathscr{C}f(z)|$ на $|\mathscr{C}f(z^m)|$. Получен следующий результат:

Теорема 3. *Пусть* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *аналитична в* $\mathbb{D}$, $|f(z)| \le 1$ *в* $\mathbb{D}$, $\phi_N(r)$ *определены равенством (1). Тогда для любых* $m, N \in \mathbb{N}$, *имеем*

$$|\mathscr{C}f(z^m)| + \sum_{k=N}^{\infty} |a_k|\phi_k(r) \le \frac{1}{r^m}\log\frac{1}{1-r^m} \quad при \quad r \le P_{m,N},$$

где $|z| = r$, $P_{m,N}$ *- положительный корень уравнения*

$$-(1-r)\log\left(1+r^m\right) + 2r^m\left(r^N - N\phi_N(r)(1-r)\right) = 0.$$

Радиус $P_{m,N}$ *не может быть улучшен. Более того,*

$$\lim_{N\to\infty} P_{m,N} = 1 \quad и \quad \lim_{m\to\infty} P_{m,N} = B_N,$$

где B_N *- положительный корень уравнения*

$$\frac{2r^N}{1-r} = 2N\phi_N(r) + 1.$$

Работа Каюмова И.Р. и Хамматовой Д.М. выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 18-11-00115). Работа Поннусами С. выполнена при финансовой поддержке центра Mathematical Research Impact Centric Support of DST, Индия (проект MTR/2017/000367).

Литература

1. Bohr, H. *A theorem concerning power series* / H. Bohr // Proc. London Math. Soc. –1914. – № 13, Vol.2. – P. 1–5.

2. Landau, E. *Darstellung und Begrüundung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie* / E. Landau, D. Gaier // Springer-Verlag – 1986.

3. Rogosinski, W. *Über Bildschranken bei Potenzreihen und ihren Abschnitten* / W. Rogosinski // Math. Z. – 1923. – № 17. – P. 260–276.

4. Schur, I. *Über die Abschnitte einer im Einheitskreise beschränkten Potenzreihe* / I. Schur, G. Szegö // Sitz.-Ber. Preuss. Acad. Wiss. Berlin Phys.-Math. Kl. – 1925. – P. 545–560.

5. Bombieri, E. *Sopra un teorema di H. Bohr e G. Ricci sulle funzioni maggioranti delle serie di potenze* / E. Bombieri // Boll. Unione Mat. Ital. –1962. – № 17. – P. 276–282.

6. Bombieri, E. *A remark on Bohr's inequality* / E. Bombieri, J. Bourgain // IMRN International Mathematics Research Notices – 2004. – № 80. – P. 4307–4330.

7. Aizenberg, L. *On the Rogosinski radius for holomorphic mappings and some of its applications* / L. Aizenberg, M. Elin, D. Shoikhet // Studia Math. – 2005. – № 168, Vol. 2. – P. 147–158.

8. Hardy, G.H. *Some properties of fractional integrals II* / G. H. Hardy, J. E. Littlewood // Math. Z. – 1932. – № 34. – P. 403–439.

9. Stempak, K. *Cesáro averaging operators* / K. Stempak // Proc. Royal Soc. of Edinburgh – 1994. – № 124A. – P. 121–126.

ON THE BOHR-ROGOSINSKI INEQUALITY FOR CESÁRO OPERATOR

I.R. Kayumov, D.M. Khammatova, S. Ponnusamy

In this work we consider Bohr-Rogosinski radius for Cesáro operator on the space of bounded analytic functions defined on the unit disk. We found the corresponding radii for different problem statements.
Keywords: bounded analytic functions, Bohr radius, Rogosinski radius, Cesáro operators, Schwarz-Pick Lemma

УДК 517.958

МЕТОД ГАЛЕРКИНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЮЛЛЕРА

И.В. Кетов[1]

1 *ketov99@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий

В работе предлагается метод решения нелинейной спектральной задачи для системы граничных интегральных уравнений, возникающей при математическом моделировании лазерного излучения активными микрорезонаторами с отверстиями. Алгоритм основан на аппроксимации интегральных уравнений методом Галеркина с тригонометрическим базисом. Решения, полученные предложенным методом сравниваются с построенными методом разделения переменных.

Ключевые слова: Задача на собственные значения, активный микрорезонатор, граничные интегральные уравнения Мюллера

Работа посвящена численному решению задачи о собственных модах активного резонатора с отверстием [1]. В работе [2] она сформулирована как нелинейная спектральная задача для системы граничных интегральных уравнений Мюллера, для ее решения предложен квадратурный метод. В статье [3] аналогичная задача решалась методом Галеркина. В настоящей работе для резонаторов и отверстий круглой формы получены явные выражения для элементов матрицы, возникающих при аппроксимации интегральных уравнений методом Галеркина с тригонометрическим базисом. Задача для активного микрокольца ранее решалась в [4] методом разделения переменных. Вычисленные в настоящей работе методом Галеркина решения совпали с полученными в [4].

Рассмотрим одно из уравнений системы Мюллера [2]

$$u_1(x) - \int\limits_{\Gamma_1} K_1^{(1,1)}(x,y)u_1(y)dl(y) - \int\limits_{\Gamma_1} K_1^{(1,2)}(x,y)v_1(y)dl(y) - \\ - \int\limits_{\Gamma_2} K_1^{(1,3)}(x,y)u_2(y)dl(y) - \int\limits_{\Gamma_2} K_1^{(1,4)}(x,y)v_2(y)dl(y) = 0, \quad x \in \Gamma_1. \quad (1)$$

Ядра уравнения имеют следующий вид:

$$K_1^{(1,1)}(x,y) = \frac{\partial G_2(x,y)}{\partial r_1(y)} - \frac{\partial G_1(x,y)}{\partial r_1(y)}, \qquad K_1^{(1,3)}(x,y) = -\frac{\partial G_2(x,y)}{\partial r_2(y)}, \quad (2)$$

$$K_1^{(1,2)}(x,y)=\frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}G_1(x,y)-\frac{2\eta_1}{\eta_2+\eta_1}G_2(x,y),\qquad K_1^{(1,4)}(x,y)=\frac{2\eta_o}{\eta_o+\eta_2}G_2(x,y). \tag{3}$$

где

$$G_m(x,y)=\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k_m|x-y|),\qquad m=1,2. \tag{4}$$

Решение будем искать в виде отрезков рядов Фурье

$$u_1(\tau)=\sum_{k=-n}^{n}u_{1k}e^{ik\tau},\ v_1(\tau)=\sum_{k=-n}^{n}v_{1k}e^{ik\tau},\ u_2(\tau)=\sum_{k=-n}^{n}u_{2k}e^{ik\tau},\ v_2(\tau)=\sum_{k=-n}^{n}v_{2k}e^{ik\tau}. \tag{5}$$

Перейдем в (1) к полярным координатам, согласно (2), (3), (5) запишем уравнение в следующем виде:

$$\sum_{k=-n}^{n}u_{1k}e^{ikt}-a_1\sum_{k=-n}^{n}u_{1k}\int_0^{2\pi}\Big(\frac{\partial G_2(t,\tau)}{\partial r_1(\tau)}-\frac{\partial G_1(t,\tau)}{\partial r_1(\tau)}\Big)e^{ik\tau}d\tau-$$

$$-a_2\sum_{k=-n}^{n}u_{2k}\int_0^{2\pi}\Big(-\frac{\partial G_2(t,\tau)}{\partial r_2(\tau)}\Big)e^{ik\tau}d\tau-a_2\sum_{k=-n}^{n}v_{2k}\int_0^{2\pi}\Big(\frac{2\eta_o}{\eta_o+\eta_2}G_2(x,y)\Big)e^{ik\tau}d\tau-$$

$$-a_1\sum_{k=-n}^{n}v_{1k}\int_0^{2\pi}\Big(\frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}G_1(t,\tau)-\frac{2\eta_1}{\eta_2+\eta_1}G_2(t,\tau)\Big)e^{ik\tau}d\tau=0,\quad t,\tau\in[0,2\pi]. \tag{6}$$

Когда аргумент x в уравнении (1) находится на окружности интегрирования, используем формулы, следуя [3],

$$\int_0^{2\pi}G_n(t,\tau)e^{ik\tau}d\tau=\frac{i\pi}{2}J_k(k_na)H_k^{(1)}(k_na)e^{ikt}, \tag{7}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial G_n(t,\tau)}{\partial r(\tau)}e^{ik\tau}d\tau=\Big(-\frac{1}{2a}+\frac{ik_n\pi}{2}J_k^{'}(k_na)H_k^{(1)}(k_na)\Big)e^{ikt}, \tag{8}$$

где a — радиус окружности, r — нормаль к ней.

Когда аргумент находится на окружности отличной от окружности интегрирования, применим теорему сложения Графа к (4) и получим

$$G_n(t,\tau)=\frac{i}{4}\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(k_nr_1)H_m^{(1)}(k_nr_2)e^{-im\tau}e^{imt}. \tag{9}$$

Тогда в силу (9) и ортогональности тригонометрических функций имеем

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial G_n(t,\tau)}{\partial r_2(\tau)}e^{ik\tau}d\tau=\frac{i}{4}\int_0^{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(k_nr_1)\frac{\partial\Big(H_m^{(1)}(k_nr_2)\Big)}{r_2(t)}e^{-im\tau}e^{imt}e^{ik\tau}d\tau=$$

$$=\frac{i}{4}k_n\int_0^{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(k_nr_1)H_m^{(1)'}(k_nr_2)e^{-im\tau}e^{imt}e^{ik\tau}d\tau=\frac{\pi i}{2}k_nJ_k(k_na_1)H_k^{(1)'}(k_na_2)e^{ikt}. \tag{10}$$

Аналогично имеем

$$\int_0^{2\pi}G_n(t,\tau)e^{ik\tau}d\tau=\frac{i\pi}{2}J_k(k_na_1)H_k^{(1)}(k_na_2)e^{ikt}. \tag{11}$$

В силу (7), (8), (10), (11) уравнение (6) примет следующий вид:

$$\sum_{k=-n}^{n}u_{1k}\Big[1+a_1\frac{i\pi}{2}\Big(-k_2J_k^{'}(k_2a_1)H_k^{(1)}(k_2a_1)+k_1J_k^{'}(k_1a_1)H_k^{(1)}(k_1a_1)\Big)\Big]e^{ikt}+$$

$$+\sum_{k=-n}^{n} u_{2k}\left[a_2\frac{ik_2\pi}{2}J_k(k_2a_1)H_k^{(1)'}(k_2a_2)\right]e^{ikt}+\sum_{k=-n}^{n} v_{2k}\left[-a_2\frac{i\pi\eta_o}{\eta_o+\eta_2}J_k(k_2a_1)H_k^{(1)}(k_2a_2)\right]e^{ikt}+$$

$$+\sum_{k=-n}^{n} v_{1k}\left[a_1\frac{i\pi}{\eta_2+\eta_1}\left(-\eta_2J_k(k_1a_1)H_k^{(1)}(k_1a_1)+\eta_1J_k(k_2a_1)H_k^{(1)}(k_2a_1)\right)\right]e^{ikt}=0. \qquad (12)$$

Уравнение (12) скалярно умножим на e^{imt}, где за скалярное произведение примем

$$(f(t),g(t))=\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

В таком случае (12) примет следующий вид:

$$u_{1m}\left[1+a_1\frac{i\pi}{2}k_1J_m'(k_1a_1)H_m^{(1)}(k_1a_1)-a_1\frac{i\pi}{2}k_2J_m'(k_2a_1)H_m^{(1)}(k_2a_1)\right]+$$

$$+v_{1m}\left[a_1\frac{i\pi\eta_1}{\eta_2+\eta_1}J_m(k_2a_1)H_m^{(1)}(k_2a_1)-a_1\frac{i\pi\eta_2}{\eta_2+\eta_1}J_m(k_1a_1)H_m^{(1)}(k_1a_1)\right]+$$

$$+u_{2m}\left[a_2\frac{ik_2\pi}{2}J_m(k_2a_1)H_m^{(1)'}(k_2a_2)\right]+v_{2m}\left[-a_2\frac{i\pi\eta_o}{\eta_o+\eta_2}J_m(k_2a_1)H_m^{(1)}(k_2a_2)\right]=0.$$

Аналогично поступим для остальных уравнений системы (14) из статьи [2] и получим задачу

$$\begin{pmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}&C_{14}\\C_{21}&C_{22}&C_{23}&C_{24}\\C_{31}&C_{32}&C_{33}&C_{34}\\C_{41}&C_{42}&C_{43}&C_{44}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{1m}\\v_{1m}\\u_{2m}\\v_{2m}\end{pmatrix}=0,\qquad m=-N,\ldots,N,$$

где, например:

$$C_{11}=1+a_1\frac{i\pi}{2}k_1J_m'(k_1a_1)H_m^{(1)}(k_1a_1)-a_1\frac{i\pi}{2}k_2J_m'(k_2a_1)H_m^{(1)}(k_2a_1),$$

$$C_{12}=a_1\frac{i\pi\eta_1}{\eta_2+\eta_1}J_m(k_2a_1)H_m^{(1)}(k_2a_1)-a_1\frac{i\pi\eta_2}{\eta_2+\eta_1}J_m(k_1a_1)H_m^{(1)}(k_1a_1),$$

$$C_{13}=a_2\frac{ik_2\pi}{2}J_m(k_2a_1)H_m^{(1)'}(k_2a_2),\qquad C_{14}=-a_2\frac{i\pi\eta_o}{\eta_o+\eta_2}J_m(k_2a_1)H_m^{(1)}(k_2a_2).$$

На рисунке 2 изображена структура собственной функции рассматриваемой задачи при относительном радиусе $\sigma=0.5$.

Литература

1. Spiridonov A. O., Karchevskii E. M., Nosich A. I. *Rigorous formulation of the lasing eigenvalue problem as a spectral problem for a fredholm operator function* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2018. – Vol. 39. – № 8. – pp. 1148–1157.

2. Spiridonov A. O., Karchevskii E. M., Nosich A. I. *Mathematical and numerical modeling of on-threshold modes of 2-D microcavity lasers with piercing holes* // Axioms. – 2019. – Vol. 8. – № 3. – art. no. 101.

3. Boriskina S. V., Sewell P., Benson T. M., Nosich A. I. *Accurate simulation of two-dimensional optical microcavities with uniquely solvable boundary integral equations and trigonometric Galerkin discretization* // Journal of the Optical Society of America A. – 2004. – Vol. 21. – № 3. – pp. 393–402.

4. Zolotukhina A. S., Spiridonov A. O., Karchevskii E. M., Nosich A. I. *Lasing modes of a microdisk with a ring gain area andof an active microring* // Optical and Quantum Electronics. – 2015. – Vol. 47. – № 12. – pp. 3883–3891.

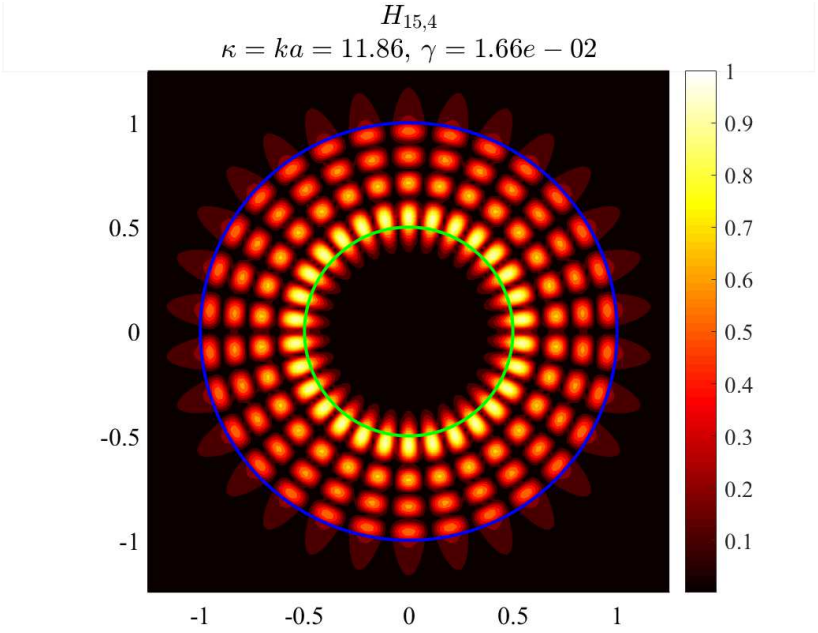


Рис. 1. Структура собственной функции

GALERKIN METHOD FOR A NONLINEAR EIGENVALUE PROBLEM FOR A SYSTEM OF MULLER BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS

I.V. Ketov

This article describes a method of solving a nonlinear eigenvalue problem for a system of boundary integral equations arising in the mathematical modeling of lasing in active microresonators with breaches. The algorithm is based on the approximation of integral equations by the Galerkin method with the trigonometric basis. The solutions obtained by the proffered method are compared with exact solutions obtained by the method of separation of variables.

Keywords: eigenvalue problem, active microcavity, Muller boundary integral equations

УДК 517.956

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В.А. Киричек[1]

1 *vitalya29@gmail.com*; Самарский университет

В статье рассматривается задача с нелокальными условиями для гиперболического уравнения. Для исследования данной задачи был использован метод, суть которого состоит в переходе к классической начально-краевой задаче для нагруженного уравнения. Применение этого метода позволило доказать однозначную разрешимость поставленной задачи.

Ключевые слова: нелокальная задача, интегральные условия, гиперболическое уравнение

В работе рассматривается следующая задача: найти в области $Q_T = (0, l) \times (0, T)$ решение уравнения

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + cu = f(x,t), \tag{1}$$

удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x) \tag{2}$$

и интегральным условиям

$$u(0,t)+\int_0^l K_1(x)u(x,t)dx=0,\quad u(l,t)+\int_0^l K_2(x)u(x,t)dx=0. \tag{3}$$

Условия (3) представляют собой нелокальные интегральные условия второго рода. На данный момент существует большое количество работ, посвященных исследованию нелокальных задач для гиперболических уравнений. Выбор метода исследования нелокальных задач зависит от вида интегральных условий [1]. Для исследования разрешимости подобных задач можно применить метод вспомогательных задач, а также метод сведения к краевой задаче для нагруженного уравнения с однородными граничными условиями [2]. Именно этот метод применен в представленной работе. Для сведения к нагруженному уравнению введем следующий оператор

$$v(x,t)=u(x,t)+\int_0^l H(x,\xi)u(\xi,t)d\xi,$$

где $H(x,\xi)=\frac{1}{l}((l-x)K_1(\xi)+xK_2(\xi))$. Предполагая, что $u(x,t)$ является решением задачи (1) – (3), получим следующую задачу относительно новой неизвестной функции $v(x,t)$: найти в области Q_T решение уравнения

$$v_{tt}-(av_x)_x+cv+\int_0^l P(x,\xi,t)u(\xi,t)d\xi=g(x,t),$$

удовлетворяющее однородными краевыми условиями

$$v(0,t)=0,\quad v(l,t)=0$$

и начальным данным

$$v(x,0)=\Phi(x),\quad v_t(x,0)=\Psi(x).$$

В работе доказано существование единственного решения поставленной задачи.

Литература

1. Пулькина Л. С.*Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений.* – Самара : Издательство «Самарский университет», 2012. – 194 с.

2. Кожанов А. И.,Пулькина Л. С. *О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений* // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42. – № 9. – С. 1166–1179.

ON CERTAIN NONLOCAL PROBLEM FOR HYPERBOLIC EQUATION

V.A. Kirichek

In this paper, we consider a nonlocal problem for hyperbolic equation. The essence of this method is the reduction of a nonlocal problem to the classical initial-boundary problem for the loaded equation. The application of these method allowed us to prove the existence of a unique solution to the problem.
Keywords: nonlocal problem, integral conditions, hyperbolic equation

УДК 517.9

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ НА ДВУМЕРНОЙ СЕТИ

Л.А. Ковалева[1]

1 *kova1eva1ida@yandex.ru*; Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Институт инженерных и цифровых технологий

В статье рассматривается задача Дирихле для гармонических функций на двумерной сети (комплексе), состоящей из плоских выпуклых многоугольников. Была доказана разрешимость задачи в пространствах Гельдера с весом, найдено значение индекса в соответствующих пространствах. Получена степенно-логарифмическая асимптотика решения вблизи вершин комплекса.

Ключевые слова: Задача Дирихле, индекс задачи, пространство Гельдера, асимптотика решения, двумерная сеть

В пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим конечное множество $\mathscr{M}$ плоских выпуклых многоугольников M, которые попарно могут пересекаться только по своим сторонам. Совокупность отрезков L, являющихся сторонами одного или нескольких многоугольников, обозначим $\mathscr{L}$, а множество их концов – F. Обьединение K многоугольников $M \in \mathscr{M}$, рассматриваемых как замкнутые подмножества $\mathbb{R}^3$, называется двумерным комплексом, и сетью, если дополнительно каждый отрезок $L \in \mathscr{L}$ может служить границей не более двух многоугольников. По отношению к K элементы $M \in \mathbb{M}$ называем гранями, а элементы $L \in \mathscr{L}$ – сторонами или ребрами в зависимости от того, входит L в границу одной или нескольких граней. Удобно еще с каждым элементом $L \in \mathscr{L}$ связать совокупность $\mathscr{M}_L$ всех граней, граничащих с L.

Пусть подмножество $K^1 \subseteq \mathbb{R}^3$ означает обьединение всех отрезков $L \in \mathscr{L}$, взятых без своих концов, так что замкнутое множество $F \cup K^1$ представляет собой ломаную в $\mathbb{R}^3$. Аналогично под K^2 условимся понимать обьединение всех граней, взятых без своей границы. Множество $\mathscr{L}$ всех ребер разобьем на два попарно непересекающихся подмножества $\mathscr{L}_D$ и $\mathscr{L}_H$, первое из которых состоит из некоторого подмножества сторон. Соответствующие обьединения этих ребер, взятые без своих концов, обозначим K^1_D и K^1_H. Аналогично пусть F_D состоит из точек, являющихся концами отрезков $L \in \mathscr{L}_D$. Тогда $F_H = F \setminus F_D$ состоит из точек τ, для которых все отрезки $L \in \mathscr{L}$ с этим концом принадлежат $\mathscr{L}_H$.

Следуя [1], функцию $u(x) \in C(K \setminus F)$ назовем гармонической на множестве $K^2 \cup K^1_H$, если внутри каждой грани $M \in \mathscr{M}_L$ она гармонична, непрерывно дифференцируема вплоть до внутренних точек отрезка L и сумма нормальных производных

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_M},$$

взятых изнутри M, равна нулю:

$$\sum_{M \in \mathscr{M}_L} \frac{\partial u}{\partial \nu_M}\Big|_L = 0.$$

Задача Дирихле (задача D) заключается в отыскании гармонической на $K^2 \cup K^1_H$ функции $u \in C(K \setminus F)$ по краевому условию

$$u\big|_{K^1_D} = f, \tag{1}$$

где правая часть $f \in C(K^1_D)$ задана.

Эта задача подробно изучена в [1] в семействе весовых гельдеровых пространств $C^\mu_\lambda(K, F)$ на произвольном двумерном комплексе. Случай двумерной сети, рассматриваемый в данной работе, позволяет несколько дополнить результаты указанной работы.

Напомним определение пространства $C^\mu_\lambda(K, F)$, $0 < \mu < 1$, с весовым порядком $\lambda \in \mathbb{R}$. Исходя из весовой функции

$$\rho_\lambda(z) = \prod_{\tau \in F} |x - \tau|^\lambda$$

этого порядка, пространство $C^\mu_\lambda(K; F)$ определим как класс всех функций $\varphi \in C(K \setminus F$, для которых функция $\psi = \rho_{\mu-\lambda}\varphi$ принадлежит классу Гельдера $C^\mu(K)$ и обращается в нуль в точках $\tau \in F$. В частности, функция $\varphi(x)$ ведет себя как $O(|x - \tau|^{\lambda_\tau})$ при $x \to \tau$. Относительно нормы $|\varphi| = |\psi|_{C^\mu}$ это пространство банахово и с возрастанием λ семейство (C^μ_λ) монотонно убывает по вложению, так что можно ввести классы

$$C^\mu_{\lambda-0} = \cap_{\varepsilon>0} C^\mu_{\lambda-\varepsilon}, \quad C^\mu_{\lambda+0} = \cup_{\varepsilon>0} C^\mu_{\lambda+\varepsilon}.$$

Заметим, что произведение $\varphi\psi$ двух функций $\varphi \in C^\mu_{\lambda+0}$ и $\psi \in C^\mu_{\nu-0}$ принадлежит $C^\mu_{\lambda+\nu+0}$. При $\lambda = 0$ эти классы обозначаем кратко $C^\mu_{\pm 0}$. Очевидно, функции $\varphi \in C^\mu_{-0}$ допускают особенности сколь

угодно малого порядка (т.е. логарифмического типа), а каждая функция $\varphi \in C^{\mu}_{+0}$ принадлежит C^{μ}_{ε} с некоторым малым $\varepsilon > 0$.

Удобно кроме того ввести конечномерное расширение $C^{\mu}_{(+0)}$ последнего класса путем добавления гладких функций, постоянных в окрестности точек $\tau \in F$. Аналогичный смысл имеют классы $C^{\mu}_{\pm 0}(K^1_D, F_D)$ и $C^{\mu}_{(+0)}(K^1_D, F_F)$ на K^1_D. Ясно, что сужение функции $u \in C^{\mu}_{\lambda}(K, F)$ на K^1_D принадлежит $C^{\mu}_{\lambda}(K^1_D, F_D)$, так что можно говорить о фредгольмовости задачи (1) для функций, гармонических на K^2_H. Более точно, по определению эта задача *фредгольмова* в пространстве C^{μ}_{λ}, если однородная задача (с $f = 0$) в этом классе имеет конечное число линейно независимых решений $u_1, \ldots, u_n$ и существуют такие линейно независимые функции $g_1, \ldots, g_m \in C^{\mu}_{-\lambda-1-0}(K^1_D, F_D)$, что условия ортогональности

$$\int_{K^1_D} f(y) g_k(y) d_1 y = 0, \quad 1 \le k \le m, \tag{2}$$

необходимы и достаточны для разрешимости неоднородной задачи (1) в этом классе [2]. Заметим, что произведение $f g_k$ под знаком интеграла принадлежит классу C^{μ}_{-1+0}, так что интеграл имеет смысл.

Разность $\jmath = n - m$ называется индексом задачи. Конечномерное пространства, натянутые на функции u_j и g_j, называются, соответственно, ядром $\ker D$ и коядром $\operatorname{coker} D$ задачи D.

В дальнейшем главный интерес представляют классы $C^{\mu}_{\pm 0}$ и $C^{\mu}_{(+0)}$, в которых будет рассматриваться задача. Ее фредгольмовость в классе $C^{\mu}_{\pm 0}$ определяется аналогично предыдущему с функциями g_k в (2), принадлежащими $C^{\mu}_{-1\mp 0}$. Что касается класса $C^{\mu}_{(+0)}$, то он является конечномерным расширением C^{μ}_{+0} и потому свойством фредгольмовости в этих классах задача Дирихле обладает одновременно.

Очевидно, пространство $C^{\mu}_{(+0)}(K, F)$ является расширением C^{μ}_{+0} на n измерений, где n – число элементов F. Точно также пространство $C^{\mu}_{(+0)}(K^1_D, F_D)$ является расширением C^{μ}_{+0} на n_D измерений, где n_D – число элементов F_D. Поэтому индексы $\jmath_{+0}$ и $\jmath_{(+0)}$ задачи Дирихле в соответствующих пространствах связаны соотношением $\jmath_{(+0)} = \jmath_{+0} + n - n_D$. Поскольку $F_H = F \setminus F_D$, разность $n - n_D$ есть число n_H элементов множества F_H, так что окончательно

$$\jmath_{(+0)} = \jmath_{+0} + n_H.$$

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема. *Пусть комплекс K является двумерной сетью. Тогда индекс задачи Дирихле в пространствах $C^{\mu}_{-0}(K, F)$ и $C^{\mu}_{+0}(K, F)$ принимает, соответственно, значения $\jmath_{-0} = n_H$ и $\jmath_{+0} = n_H$. В частности, индекс $\jmath_{(+0)} = 0$ этой задачи в классе $C^{\mu}_{(+0)}(K, F)$ равен нулю.*

При доказательстве данной теоремы использовался следующий ключевой результат.

Лемма. Пусть комплекс K является двумерной сетью. Тогда для каждой его вершины в соответствующих пространствах $C^{\nu}_{\pm}$справедливы следующее равенство:

$$r_\tau = \begin{cases} 0, & \tau \in F^1_D, \\ 1, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где r_τ порядок полюса матрицы концевого символа.

Замечание. Для двумерного комплекса K можно рассмотреть асимптотику решения вблизи вершин $\tau \in F$. Из леммы, следует, что $r_\tau \le 1$ для всех точек $\tau \in F_H$. Тогда согласно [1] теорема 2.2, если $f \in C^{\mu}_{+0}(K^1_D, F_D)$, то функция $u(x)$ в каждом секторов, полученных при пересечении грани M и шара $B_\tau = \{|x - \tau| \le \rho\}$ достаточно малого радиуса $\rho > 0$ с вершиной $\tau \in F_H$, представима в виде

$$u(x) = a + b \ln|x - \tau| + cA(x - \tau) + u_0(x),\ u_0(x) \in C^{\mu}_{+0}(M \cap B_\tau, \tau).$$

Остальные вершины τ принадлежат F_D и соответственно функция $u \in C^{\mu}_{+0}(K \cap B_\tau, \tau)$.

Литература

1. Ковалева Л.А., Солдатов А.П., Задача Дирихле на двумерных стратифицированных множествах, Известия РАН, сер. Матем., 2015, Т. 79, №1, С. 77-114

2. Чернова О.В., О фредгольмовости одной краевой задачи для эллиптической системы, Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика.2019. Т.7. №1(44). С. 471-473

ON THE DIRICHLET PROBLEM ON A TWO-DIMENSIONAL NETWORK

L.A. Kovaleva

The article deals with the Dirichlet problem for harmonic functions on a two-dimensional network (complex) consisting of plane convex polygons. The solvability of the problem in Helder spaces with weight was proved, the index value in the corresponding spaces was found. The power-logarithmic asymptotics of the solution near the vertices of the complex is obtained.
Keywords: Dirichlet problem, two-dimensional network, Helder spaces, asymptotics of the solution

УДК 517.988.8

ОБ ОДНОМ ВИДЕ АПОСТЕРИОРНЫХ ОЦЕНОК ПОГРЕШНОСТИ РЕГУЛЯРИЗУЮЩИХ АЛГОРИТМОВ

М.М. Кокурин[1]

1 *kokurin@nextmail.ru*; Марийский государственный университет

Рассматривается особый класс апостериорных оценок погрешности регуляризующих алгоритмов для некорректных задач. Оценки этого класса, названные равномерно–апостериорными, в отличие от других апостериорных оценок не содержат неконструктивных условий на уровень погрешности входных данных. Дана характеристика класса условно–корректных задач в терминах регуляризуемости с равномерно–апостериорными оценками погрешности.

Ключевые слова: некорректная задача, регуляризующий алгоритм, апостериорная оценка погрешности

Следуя [1; 2], вначале приведём необходимые нам определения. Под *абстрактной вычислительной задачей* (ниже — просто задачей) понимается совокупность $(G, D(G), X, Y)$, где $X = (X, \rho_X)$ — метрическое пространство входных данных, $Y = (Y, \rho_Y)$ — метрическое пространство решений, $G\colon X \to Y$ — оператор с областью определения $D(G) \subset X$, ставящий в соответствие каждому элементу $f \in D(G)$, описывающему входные данные, соответствующее решение $G(f) \in Y$. Предполагается, что решение $G(f)$ единственно при $f \in D(G)$ и решений нет, если $f \notin D(G)$. Задача $(G, D(G), X, Y)$ называется *корректной*, если $D(G) = X$ и оператор $G\colon X \to Y$ непрерывен. Задача $(G, D(G), X, Y)$ называется *условно–корректной*, если оператор G относительно непрерывен на своей области определения $D(G)$, т.е. если

$$\forall f \in D(G),\ \forall \{f_n\} \subset D(G)\ (\{f_n\} \xrightarrow{X} f),\ \{G(f_n)\} \xrightarrow{Y} G(f).$$

В прикладных задачах вместо точного элемента $f \in X$ обычно бывает известно его приближение $f_\delta \in X$, $\rho_X(f_\delta, f) \le \delta$ с известным уровнем погрешности $\delta > 0$. Естественно предполагать, что точный элемент f принадлежит области определения $D(G)$, т.е. что решение $G(f) \in Y$ существует. Если задача $(G, D(G), X, Y)$ корректна, то элемент $G(f_\delta) \in Y$ также определён и при малом δ может служить приближением в метрике пространства Y для искомого решения $G(f)$. Если же рассматриваемая задача некорректна, то элемент $G(f_\delta)$ может не существовать, поскольку приближение f_δ не обязательно принадлежит $D(G)$. Более того, если $f_\delta \in D(G)$, то элемент $G(f_\delta)$ может не быть близок к $G(f)$ в метрике пространства Y при сколь угодно малом δ. Если задача $(G, D(G), X, Y)$ не является корректной, но является при этом условно–корректной, то элемент $G(f_\delta)$ также не обязательно определён, однако в случае $f_\delta \in D(G)$ он может служить приближением для решения $G(f)$ в смысле метрики ρ_Y при достаточно малых $\delta > 0$.

На практике устойчивые методы решения некорректных задач строятся с использованием регуляризующих алгоритмов. Семейство отображений $\{R_\delta : X \to Y\}_{\delta>0}$ называется *регуляризующим алгоритмом*, если $D(R_\delta) = X$ для всех $\delta > 0$ и

$$\forall f \in D(G),\ \lim_{\delta\to 0} \sup_{f_\delta \in B_\delta(f)} \rho_Y(R_\delta(f_\delta), G(f)) = 0.$$

Здесь и далее $B_\delta(f) = \{g \in X \mid \rho_X(f, g) \le \delta\}$. Регуляризующий алгоритм позволяет найти приближение $R_\delta(f_\delta) \in Y$ к точному решению $G(f) \in Y$, где $f \in D(G)$, если известны приближённые входные данные

$f_\delta \in X$ и уровень погрешности $\delta > 0$. *Апостериорной оценкой погрешности* [3–5] регуляризующего алгоритма $\{R_\delta\}_{\delta>0}$ для задачи $(G, D(G), X, Y)$ называется функция $\psi(\delta, f_\delta)$, определённая при любых $\delta > 0$ и $f_\delta \in B_\delta(f)$, $f \in D(G)$ и удовлетворяющая следующим двум условиям:

$$(A) \quad \forall f \in D(G), \lim_{\delta\to 0} \sup_{f_\delta \in B_\delta(f)} \psi(\delta, f_\delta) = 0;$$

$$(B) \quad \forall f \in D(G), \exists \delta_0(f) > 0 : \forall \delta \in (0, \delta_0(f)], \forall f_\delta \in B_\delta(f), \rho_Y(R_\delta(f_\delta), G(f)) \le \psi(\delta, f_\delta).$$

Из приведённого определения видно, что наличие апостериорной оценки не позволяет гарантированно оценить расстояние от приближённого решения $R_\delta(f_\delta)$ до точного решения $G(f)$ в силу того, что вместо элемента f на практике известно лишь его приближение f_δ и для имеющегося δ нет возможности проверить условие $\delta \in (0, \delta_0(f)]$. Рассмотрим следующую модификацию определения апостериорной оценки погрешности, лишённую данного недостатка. *Равномерно–апостериорной оценкой погрешности* регуляризующего алгоритма $\{R_\delta\}_{\delta>0}$ для задачи $(G, D(G), X, Y)$ будем называть функцию $\psi(\delta, f_\delta)$, определённую при любых $\delta > 0$ и $f_\delta \in B_\delta(f)$, $f \in D(G)$ и удовлетворяющую условию (A), а также следующему условию:

$$(B') \quad \forall f \in D(G), \forall \delta > 0, \forall f_\delta \in B_\delta(f), \rho_Y(R_\delta(f_\delta), G(f)) \le \psi(\delta, f_\delta).$$

Здесь мы считаем, что функция $\psi(\delta, f_\delta)$ может принимать неотрицательные числовые значения или значение $+\infty$, т.е. $\psi : [0, +\infty) \times X \to [0, +\infty]$. Практическая ценность равномерно–апостериорных оценок заключается в том, что они потенциально позволяют получить сколь угодно точную и достоверную информацию о расположении искомого решения при наличии возможности неограниченно увеличивать точность измерения входных данных.

Пример 1. Рассмотрим операторное уравнение $F(u) = f$ с фиксированным инъективным непрерывным оператором $F : Y \to X$ и входными данными $f \in X$. Пусть об искомом решении u^* известна априорная информация $u^* \in M$, где $M \subset Y$ — компактное множество. Такая задача формализуется в виде $(G, D(G), X, Y)$, где оператор задачи $G = F^{-1}$, $D(G) = F(M) \subset X$. Хорошо известно [1], что она является условно–корректной. Отметим, что требование инъективности оператора F на всём Y можно заменить требованием инъективности его сужения на M. Рассмотрим метод невязки для решения данной задачи. Согласно этому методу в качестве приближённого решения $R_\delta(f_\delta)$ выбирается произвольный элемент множества $\Omega_\delta(f_\delta) = \{u \in M \mid \rho_Y(F(u), f_\delta) \le \delta\}$. Справедлива равномерно–апостериорная оценка погрешности

$$\rho_Y(R_\delta(f_\delta), G(f)) \le \psi(\delta, f_\delta) \equiv \operatorname{diam}\Omega_\delta(f_\delta).$$

Как и любая равномерно–апостериорная оценка, она является в то же время апостериорной.

Пример 2. Рассмотрим линейное операторное уравнение $Au = f$, где $A \in L(Y, X)$ — линейный ограниченный инъективный оператор, X, Y — линейные нормированные пространства. Пусть об искомом решении $u^* \in Y$ априори известно, что оно допускает представление $u^* = Bv^*$, где $v^* \in V$, V — линейное нормированное пространство, $B \in L(V, Y)$ — вполне непрерывный оператор. Оператор задачи имеет вид $G = A^{-1}$, $D(G) = \operatorname{Im}(AB) \subset X$. В [4] изучен метод регуляризации данной задачи (метод расширяющихся компактов) и построена апостериорная оценка погрешности этого метода. Однако она не является равномерно–апостериорной. Более того, регуляризующие алгоритмы с равномерно–апостериорными оценками погрешности для данной задачи при наложении некоторых естественных условий на операторы A и B вообще не существуют. Критерий существования таких алгоритмов даёт следующая теорема.

Теорема. *Задача $(G, D(G), X, Y)$ допускает регуляризующий алгоритм с равномерно–апостериорной оценкой погрешности тогда и только тогда, когда она условно–корректна.*

Известно [1], что если задача $(G, D(G), X, Y)$ допускает регуляризующий алгоритм с априорной оценкой погрешности, то её оператор G равномерно непрерывен на $D(G)$. Отсюда следует, что существуют задачи, для которых существуют регуляризующие алгоритмы с равномерно–апостериорными оценками погрешности, но не существует регуляризующих алгоритмов с априорными оценками погрешности. Приведём один содержательный пример такой задачи.

Пример 3. Пусть $X = C[-a, b]$ — пространство непрерывных функций с равномерной метрикой на отрезке $[-a, b]$, где $a, b > 0$, $Y = \mathbb{R}$, $G(f) = f'(0)$ и $D(G) \subset X$ есть множество выпуклых непрерывных

функций на отрезке $[-a,b]$, дифференцируемых в точке $x=0$. Такая постановка задачи означает, что входными данными является непрерывная функция $f(x)$, $x\in[-a,b]$, про которую априори известно, что она выпуклая на $[-a,b]$ и дифференцируемая в нуле, и требуется найти $f'(0)$. При этом вместо самой функции $f(x)$ известно её приближение — непрерывная функция $f_\delta(x)$, $x\in[-a,b]$ такая, что

$$\rho_X(f_\delta,f)=\max_{x\in[-a,b]}|f_\delta(x)-f(x)|\le\delta,$$

и уровень погрешности $\delta>0$ также известен. Показано, что

$$R_\delta(f_\delta)=\frac{1}{2}\Big(\sup_{x\in[-a,0)}\frac{f_\delta(x)-f_\delta(0)+2\delta}{x}+\inf_{x\in(0,b]}\frac{f_\delta(x)-f_\delta(0)+2\delta}{x}\Big)$$

и

$$\psi(\delta,f_\delta)=\frac{1}{2}\Big(\inf_{x\in(0,b]}\frac{f_\delta(x)-f_\delta(0)+2\delta}{x}-\sup_{x\in[-a,0)}\frac{f_\delta(x)-f_\delta(0)+2\delta}{x}\Big)$$

суть регуляризующий алгоритм для задачи $(G,D(G),X,Y)$ и его равномерно–апостериорная оценка погрешности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания Марийскому госуниверситету (проект 1.5420.2017/8.9) и стипендии Президента РФ молодым учёным и аспирантам (СП-5252.2018.5).

Литература

1. Бакушинский А. Б., Гончарский А. В. *Некорректные задачи. Численные методы и приложения.* – М.: Изд–во Моск.ун–та, 1989. – 199 с.

2. Кокурин М. Ю. *Об условно–корректных и обобщённо–корректных задачах* // Журнал вычислительной математики и математической физики – 2013. – Т. 53. – № 6. – С. 857–866.

3. Гапоненко Ю. Л. *Об одном классе вполне регуляризуемых отображений* // Журнал вычислительной математики и математической физики – 1982. – Т. 22. – № 1. – С. 3–9.

4. Дорофеев К. Ю., Титаренко В. Н., Ягола А. Г. *Алгоритмы построения апостериорных погрешностей решения для некорректных задач* // Журнал вычислительной математики и математической физики – 2003. – Т. 43. – № 1. – С. 12–25.

5. Леонов А. С. *Об апостериорных оценках точности решения линейных некорректно поставленных задач и экстраоптимальных регуляризующих алгоритмах* // Вычислительные методы и программирование – 2010. – Т. 11. – С. 14–24.

ON ONE CLASS OF A POSTERIORI ACCURACY ESTIMATES FOR REGULARIZATION ALGORITHMS

M.M. Kokurin

We consider a class of a posteriori accuracy estimates for regularization algorithms of solving ill–posed problems. The estimates of this class do not contain nonconstructive assumptions on the error level of input data. We show the relation between the existence of such estimates and the conditionally–well–posedness of the problem.

Keywords: ill–posed problem, regularization algorithm, a posteriori estimate

УДК 519.62

ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ СЕТОЧНОЙ СХЕМЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ЧИСЛЕННЫМ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Д.М. Коростелева[1], П.С. Соловьёв[2], С.И. Соловьёв[3], А.А. Самсонов[4]

1 *diana.korosteleva.kpfu@mail.ru*; Казанский государственный энергетический университет
2 *pavel.solovev.kpfu@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
3 *sergei.solovyev@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
4 *anton.samsonov.kpfu@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Исследуется задача на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с коэффициентами нелинейно зависящими от спектрального параметра. Установлено существование собственных значений и собственных функций задачи. Исходная дифференциальная задача на собственные значения аппроксимируется сеточной схемой метода конечных элементов с численным интегрированием на неравномерной сетке с конечными элементами произвольного порядка. Устанавливаются оценки погрешности приближённых собственных значений и собственных функций в зависимости от шага сетки и точности применяемой квадратурной формулы.

Ключевые слова: собственное значение, собственная функция, задача на собственные значения, обыкновенное дифференциальное уравнение, метод конечных элементов, численное интегрирование, квадратурная формула

Обозначим $\Omega = (0,1)$, $\overline{\Omega} = [0,1]$, $\Lambda = (0,\infty)$. Зададим непрерывные функции $p(\mu,x) > 0$, $q(\mu,x) \geq 0$, $r(\mu,x) \geq 0$, $\mu \in \Lambda$, $x \in \overline{\Omega}$. При фиксированном первом аргументе эти функции являются кусочно гладкими. При фиксированном $x \in \overline{\Omega}$ функции $p(\mu,x)$, $q(\mu,x)$, $\mu \in \Lambda$, предполагаются невозрастающими, функция $r(\mu,x)$, $\mu \in \Lambda$, предполагается ненулевой и неубывающей.

Рассмотрим дифференциальную нелинейную задачу на собственные значения: найти числа $\lambda \in \Lambda$ и ненулевые функции $u(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, такие, что

$$-(p(\lambda,x)u'(x))' + q(\lambda,x)u(x) = \lambda r(\lambda,x)u(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Дифференциальное уравнение понимается в обобщенном смысле.

Сформулируем вспомогательную дифференциальную линейную задачу на собственные значения: найти числа $\gamma(\mu) \in \Lambda$ и ненулевые функции $u(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, такие, что

$$-(p(\mu,x)u'(x))' + q(\mu,x)u(x) = \gamma(\mu)r(\mu,x)u(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Здесь дифференциальное уравнение также понимается в обобщенном смысле. Линейная задача на собственные значения имеет возрастающую последовательность положительных простых собственных значений $\gamma_k(\mu)$, $k = 1,2,\ldots$, с предельной точкой на бесконечности, $0 < \gamma_1(\mu) < \gamma_2(\mu) < \ldots < \gamma_k(\mu) < \ldots$, $\gamma_k(\mu) \to \infty$ при $k \to \infty$. Последовательности собственных значений соответствует нормированная система кусочно-гладких собственных функций u_k, $k = 1,2,\ldots$

Установлено, что нелинейная задача на собственные значения имеет возрастающую последовательность положительных простых собственных значений λ_k, $k = 1,2,\ldots$, с предельной точкой на бесконечности, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k < \ldots$, $\lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Последовательности собственных значений соответствует нормированная система кусочно-гладких собственных функций u_k, $k = 1,2,\ldots$ Каждое собственное значение λ_i является единственным корнем уравнения $\mu - \gamma_i(\mu) = 0$, $\mu \in \Lambda$, $i \geq 1$.

Исходная дифференциальная задача на собственные значения аппроксимируется сеточной схемой метода конечных элементов с численным интегрированием на неравномерной сетке с конечными элементами произвольного порядка. Устанавливаются оценки погрешности приближённых собственных значений и собственных функций в зависимости от шага сетки и точности применяемой квадратурной формулы.

Задачи на собственные значения с нелинейным вхождением спектрального параметра возникают, например, в физике плазмы [1, 2, 3, 4], в механике конструкций [5, 6, 7, 8, 9], при построении вычислительных методов решения сеточных уравнений [10, 11, 12]. Численные методы решения нелинейных самосопряжённых матричных задач на собственные значения исследовались в работах [13, 14]. Метод конечных разностей для решения обыкновенных дифференциальных задач на

собственные значения с линейной и нелинейной зависимостью от спектрального параметра изучался в работах [7, 8, 9]. Метод конечных элементов для одномерных и многомерных нелинейных дифференциальных спектральных задач исследовался в [1, 4, 5], а эффект приближённого вычисления интегралов с помощью квадратурных формул в сеточных схемах метода конечных элементов изучался в [15, 16, 17]. Теоретическое исследование погрешности приближённых методов решения спектральных задач в гильбертовом пространстве проведено в работах [15, 16].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 18-41-160029. Работа поддержана РФФИ (проект № 19-31-90063).

Литература

1. Zheltukhin V. S., Solov'ev S. I., Solov'ev P. S., Chebakova V. Yu. *Computation of the minimum eigenvalue for a nonlinear Sturm–Liouville problem* // Lobachevskii J. Math. – 2014. – V. 35. – No 4. – P. 416–426.

2. Zheltukhin V. S., Solov'ev S. I., Solov'ev P. S., Chebakova V. Yu. *Existence of solutions for electron balance problem in the stationary radio-frequency induction discharges* // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Engin. – 2016. – V. 158. – No 1. – Art. 012103. – P. 1–6.

3. Zheltukhin V. S., Solov'ev S. I., Solov'ev P. S., Chebakova V. Yu., Sidorov A. M. *Third type boundary conditions for steady state ambipolar diffusion equation* // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Engin. – 2016. – V. 158. – No 1. – Art. 012102. – P. 1–4.

4. Solov'ev S.I., Solov'ev P.S. *Finite element approximation of the minimal eigenvalue of a nonlinear eigenvalue problem* // Lobachevskii J. Math. – 2018. – V. 39. – No 7. – P. 949–956.

5. Solov'ev S. I. *Eigenvibrations of a bar with elastically attached load* // Differ. Equations. – 2017. – V. 53. – No 3. – P. 409–423.

6. Samsonov A. A., Solov'ev S. I. *Eigenvibrations of a beam with load* // Lobachevskii J. Math. – 2017. – V. 38. – No 5. – P. 849–855.

7. Samsonov A.,A., Solov'ev S. I., Solov'ev P. S. *Eigenvibrations of a bar with load* // MATEC Web Conf. – 2017. – V. 129. – Art. 06013. – P. 1–4.

8. Samsonov A. A., Korosteleva D. M., Solov'ev S. I. *Approximation of the eigenvalue problem on eigenvibration of a loaded bar* // J. Phys.: Conf. Ser. – 2019. – V. 1158. – No 4. – Art. 042009. – P. 1–5.

9. Samsonov A. A., Korosteleva D. M., Solov'ev S. I. *Investigation of the eigenvalue problem on eigenvibration of a loaded string* // J. Phys.: Conf. Ser. – 2019. – V. 1158. – No 4. – Art. 042010. – P. 1–5.

10. Lyashko A. D., Solov'ev S. I. *Fourier method of solution of FE systems with Hermite elements for Poisson equation* // Rus. J. Numer. Anal. Math. Model. – 1991. – V. 6. – No 2. – P. 121–130.

11. Solov'ev S. I. *Fast direct methods of solving finite-element grid schemes with bicubic elements for the Poisson equation* // J. Math. Sci. – 1994. – V. 71 – No 6. – P. 2799–2804.

12. Solov'ev S. I. *A fast direct method of solving Hermitian fourth-order finite-element schemes for the Poisson equation* // J. Math. Sci. – 1995. – V. 74. – No 6. – P. 1371–1376.

13. Samsonov A.,A., Solov'ev P. S., Solov'ev S. I. *The bisection method for solving the nonlinear bar eigenvalue problem* // J. Phys.: Conf. Ser. – 2019. – V. 1158. – No 4. – Art. 042011. – P. 1–5.

14. Samsonov A.,A., Solov'ev P. S., Solov'ev S. I. *Spectrum division for eigenvalue problems with nonlinear dependence on the parameter* // J. Phys.: Conf. Ser. – 2019. – V. 1158. – No 4. – Art. 042012. – P. 1–5.

15. Solov'ev S. I. *The error of the Bubnov–Galerkin method with perturbations for symmetric spectral problems with a non-linearly occurring parameter* // Comput. Math. Math. Phys. – 1992. – V. 32. – No 5. – P. 579–593.

16. Solov'ev S. I. *Approximation of operator eigenvalue problems in a Hilbert space* // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Engin. – 2016. – V. 158. – No 1. – Art. 012087. – P. 1–6.

17. Solov'ev S. I. *Quadrature finite element method for elliptic eigenvalue problems* // Lobachevskii J. Math. – 2017. – V. 38. – No 5. – P. 856–863.

ACCURACY INVESTIGATION OF THE MESH SCHEME OF THE FINITE ELEMENT METHOD WITH NUMERICAL INTEGRATION FOR SOLVING EIGENVALUE PROBLEM

D.M. Korosteleva, P.S. Solov'ev, S.I. Solov'ev, A.A. Samsonov

The eigenvalue problem for the ordinary differential equation with coefficients nonlinearly depending on a spectral parameter is investigated. The existence of eigenvalues and eigenfunctions of the problem is established. The original differential eigenvalue problem is approximated by the mesh scheme of the finite element method with numerical integration on a nonuniform grid and with finite elements of arbitrary order. Error estimates for approximate eigenvalues and eigenfunctions in dependence on the mesh size and the accuracy of the applied quadrature formula are established.
Keywords: eigenvalue, eigenfunction, eigenvalue problem, ordinary differential equation, finite element method, numerical integration, quadrature formula

УДК 517.518

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ ТИП ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ ПРИ ПОРЯДКЕ ОДИН

А.Ф. Кужаев[1]

1 *arsenkuzh@outlook.com*; Башкирский государственный университет, Уфимский государственный нефтяной технический университет

В работе приводится нижняя оценка на экспоненциальный тип целой функции при порядке 1 (такие функции ещё называют целыми функциями экспоненциального типа). Данная оценка была сделана через логарифмическую блок-плотность последовательности нулей этой целой функции. Предполагается, что нули вещественны.

Ключевые слова: целая функция, порядок целой функции, тип целой функции, нули целой функции, логарифмическая блок-плотность

Пусть f — целая функция. Напомним (см. [1, стр. 8-9]), что *порядком целой функции* называется следующая величина

$$\rho(f) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(f,r)}{\ln r}, \quad M(f,r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Типом этой функции при порядке ρ называют величину

$$\sigma(f) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(f,r)}{r^{\rho}}$$

Если для целой функции выполнено одно из двух условий: либо $\rho < 1$, либо $\rho = 1$, но тип σ конечный, то говорят, что это целая функция экспоненциального типа. Эквивалентное определение: целая функция является целой функцией экспоненциального типа, если во всей комплексной плоскости она удовлетворяет неравенству

$$\ln|f(z)| \leqslant A|z| + B, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Рассмотрим последовательность нулей $\Lambda(f) = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ целой функции f, которая пронумерована по неубыванию модулей. Некоторые числа в последовательности могут повторяться, но количество повторений каждой точки конечно. Если функция f не тождественный нуль, то последовательность $\Lambda(f)$ не ограничена по модулю, либо пустая (при условии, что f не многочлен).

В данной работе будем предполагать, что все числа λ_k вещественны.

Пусть $A = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неограниченная последовательность на вещественной прямой. Напомним (см. [2]), что *логарифмической блок-плотностью* положительной последовательности называют следующую величину

$$\bar{L}(A) = \inf_{u>1} \varlimsup_{t\to\infty} \sum_{t<a_k\leqslant ut} \frac{1}{a_k},$$

где каждой слагаемое в сумме считаетя ровно столько раз, какова кратность точки a_k в последовательности A.

Согласно лемме 3.2 работы [3] логарифмическую блок-плотность можно вычислять иначе:

$$\bar{L}(A) = \lim_{u\to\infty} \varlimsup_{t\to\infty} \sum_{t<a_k\leqslant ut} \frac{1}{a_k},$$

то есть предел по $u \to \infty$ всегда существует.

Согласно теореме Линделёфа (см. [1, стр. 35]) и лемме 1 работы [4] для целой функции экспоненциального типа логарифмическая блок-плотность её нулей всегда конечна.

Справедлив следующий результат.

Теорема. *Пусть f — целая функция экспоненциального типа, и пусть σ — её экспоненциальный тип. Пусть далее $\Lambda(f) = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность нулей функции f, $\bar{L}\big(\Lambda(f)\big)$ — лоагарифмическая блок-плотность этой последовательности. Тогда справедлива следующая оценка*

$$\sigma(f) \geqslant \pi\bar{L}\big(\Lambda(f)\big).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект №18-11-00002).

Литература

1. Леонтьев А. Ф. *Целые функции. Ряды экспонент.* – М.: Наука, 1983. – 176 с.

2. Rubel L. A. *Necessary and sufficient conditions for Carlson's theorem on entire functions.* // Trans. Amer. math. Soc. 1956. V. 83. Pp. 417–429.

3. Malliaven P., Rubel L.À. *On small entire functions of exponential type with given zeros.* // Bull. Soc. Math. France. 1961. V. 89. Pp. 175–201.

4. Кривошеев А. С., Кужаев А. Ф. *Об одной теореме Леонтьева-Левина.* // Уфимск. матем. журн. 2017. Т. 9, №3. С. 89–101.

EXPONENTIAL TYPE OF AN ENTIRE FUNCTION WITH ORDER EQUAL TO ONE

A.F. Kuzhaev

The paper provides an lower bound on the exponential type of an entire function at order 1 (such functions are also called entire functions of exponential type). This estimate was made through the logarithmic block density of the sequence of zeros of this entire function. Zeros are assumed to be real.
Keywords: entire function, order of an entire function, type of an entire function, zeros of an entire function, logarithmic block density

УДК 517.5

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПОСТРОЕНИЮ АНАЛОГА ФОРМУЛЫ БИНЕ

В.И. Кузоватов[1], С.И. Башмаков[2]

1 *kuzovatov@yandex.ru*; Сибирский федеральный университетт
2 *krauder@mail.ru*; Сибирский федеральный университет

Получен аналог интегрального представления Бине, которое имеет существенное значение при нахождении функционального соотношения для классической дзета-функции Римана.

Ключевые слова: формула Бине, интегральное представление, целая функция

Классическая формула Бине выражает значение логарифмической производной гамма-функции Эйлера $\Gamma(z)$ (в случае, если вещественная часть z положительна) через следующие интегралы:

$$\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z) = -\frac{1}{2z} + \ln z - 2\int\limits_0^\infty \frac{t\,dt}{\left(z^2+t^2\right)\left(e^{2\pi t}-1\right)}.$$

Данное интегральное представление используется при нахождении функционального соотношения для классической дзета-функции Римана $\zeta(s)$. Рассмотрим для вещественных x:

$$\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} - \ln x = -2\int\limits_0^\infty \frac{t}{t^2+x^2}\left(\frac{1}{e^{2\pi t}-1} - \frac{1}{2\pi t}\right)dt.$$

Подставляя найденное соотношение в интегральное представление для дзета-функции Римана $\zeta(s)$ и меняя порядок интегрирования, можно получить функциональное соотношение для классической дзета-функции Римана.

Напомним, что интегральное представление для дзета-функции Римана $\zeta(s)$ в полосе $0 < \mathrm{Re}\ s < 1$ имеет вид:

$$\zeta(s) = -\frac{\sin\pi s}{\pi}\int\limits_0^\infty \left(\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} - \ln x\right)x^{-s}\,dx.$$

Целью данной работы является получение аналога интегрального представления Бине. В дальнейшем с использованием построенного аналога интегрального представления Бине будет осуществлен переход к получению функционального соотношения для дзета-функции корней некоторого класса целых функций.

Пусть $f(z)$ – целая функция конечного порядка роста ρ в $\mathbb{C}$. Рассмотрим уравнение

$$f(z) = 0. \tag{1}$$

Обозначим через $N_f = f^{-1}(0)$ множество всех корней уравнения (1) (каждый корень считается столько раз, какова его кратность). Число корней не более чем счетно.

Дзета-функция $\zeta_f(s)$ корней z_n уравнения (1) определяется следующим образом:

$$\zeta_f(s) = \sum_{z_n\in N_f} (-z_n)^{-s},$$

где $s \in \mathbb{C}$.

Будем предполагать, что $z_n = -q_n$, $q_n > 0$, где q_n образуют некоторую последовательность натуральных чисел.

Рассмотрим функцию ($z = x + iy$)

$$F\left(f, 2\pi i z\right) = \sum_{n=1}^\infty e^{z_n 2\pi i z} = \sum_{n=1}^\infty e^{-q_n 2\pi i z}. \tag{2}$$

С помощью замены $e^{-2\pi i z} = w$ ряд (2) приводится к виду $\sum\limits_{n=1}^\infty w^{q_n}$, то есть

$$G(w) = \sum_{n=1}^\infty f_n w^n, \tag{3}$$

где коэффициенты f_n определяются следующим образом:

$$f_n = \begin{cases} 1, & n = q_k; \\ 0, & n \neq q_k, \end{cases}$$

и, следовательно, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|f_n|} = 1$.

Заметим, что в ряде (3) бесконечное число коэффициентов f_n отлично от нуля.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением классов рациональных функций $G(w)$, для которых справедливо представление (3). Как показывает теорема Сеге, степенной ряд (3), коэффициенты которого f_n могут принимать лишь конечное число различных значений, или представляет собой рациональную функцию, или непродолжаем за пределы единичного круга. В случае рациональности суммы ряда (3)

$$G(w) = \frac{P(w)}{1 - w^N},$$

где $P(w)$ — многочлен, а N — некоторое натуральное число.

Предположим, что $\deg P(w) = N$, то есть

$$P(w) = a_1 w + a_2 w^2 + \ldots + a_{N-1} w^{N-1} + w^N, \tag{4}$$

где коэффициенты $a_j \in \{0,1\}$ ввиду разложения (3), $j = 1,\ldots,N-1$. Коэффициенты a_j зависят от распределения $\{q_n\}$.

Приведем явное выражение функции $F(f, 2\pi i z)$ через функцию $G(w)$. Будем иметь

$$F(f, 2\pi i z) = \frac{P(e^{-2\pi i z})}{1 - e^{-2\pi i z N}}.$$

Заметим, что функции $F(f, 2\pi y)$ и $1 + F(f, -2\pi y)$, входящие в правую часть формулы (5), определяются следующим образом $(t = e^{2\pi y})$:

$$F(f, 2\pi y) = -\frac{a_1 t^{N-1} + a_2 t^{N-2} + \ldots + a_{N-1} t + 1}{1 - t^N},$$
$$1 + F(f, -2\pi y) = \frac{1 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_{N-1} t^{N-1}}{1 - t^N}.$$

Для сокращения записи обозначим

$$W(x, y) = \varphi(x - iy) F(f, 2\pi y) + \varphi(x + iy)\left[1 + F(f, -2\pi y)\right].$$

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема. *Справедливо равенство*

$$\frac{P(1)}{N} \sum_n \frac{1}{(z + q_n)^2} = \frac{P(1)}{N}\left(\frac{1}{2}\varphi(x_2) - \frac{1}{2}\varphi(0)\right) + \int_0^{x_2} \varphi(z)\, dz + \frac{1}{i}\int_0^{\infty} W(0, y)\, dy - \frac{1}{i}\int_0^{\infty} W(x_2, y)\, dy, \tag{5}$$

где суммирование берется по всем точкам q_n, лежащим в отрезке $[1; x_2]$, x_2 – целое положительное число, полином $P(w)$ определен формулой (4).

Здесь

$$\varphi(\zeta) = \frac{Q_1(\zeta)\, Q_2(\zeta)\, e^{\zeta^2}}{(z + \zeta)^2},$$

$$Q_1(\zeta) = \prod_{j \in J}\left(1 - \frac{\zeta}{\alpha_j}\right) e^{\frac{\zeta}{\alpha_j}}, \quad \alpha_j = \frac{j}{N}, \quad Q_2(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Q_1(q_n)\, e^{q_n^2}} \cdot \frac{\psi(\zeta)}{\psi'(q_n)(\zeta - q_n)},$$

$$\psi(\zeta) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\zeta}{q_n}\right), \quad J = \left\{j : j = 1, 2, \ldots,\ j \neq mN,\ m \in \{q_n\}\right\}.$$

Первый автор использовал финансовую поддержку РФФИ (проект 18-31-00019), второй автор использовал финансовую поддержку РФФИ, Правительства Красноярского края и Красноярского краевого фонда науки (проект 18-41-240005).

ON SOME APPROACH FOR FINDING AN ANALOG OF THE BINET FORMULA

V.I. Kuzovatov, S.I. Bashmakov

We obtain an analog of the Binet integral representation, which is essential in obtaining the functional equation for the classical Riemann zeta-function.
Keywords: Binet formula, integral representation, entire function

УДК 539.37

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ МЕДЛЕННОМ ДВИЖЕНИИ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ

О.И. Кузоватова[1]

1 *oik17@yandex.ru*; Сибирский федеральный университет

С помощью вычислительного алгоритма на основе метода конечных элементов проводятся численные расчеты задачи о движении сыпучей среды в сходящемся канале, которые подтверждают наличие зон локализации деформаций.

Ключевые слова: вариационное неравенство, разнопрочная среда, локализация деформаций, метод конечных элементов, метод начальных напряжений

Многие природные и искусственные материалы имеют существенно различные прочностные свойства при растяжении и сжатии. Для описания напряженно-деформированного состояния сыпучей среды как разнопрочного материала используется модель среды с пластическими связями. Под действием сжимающих или растягивающих напряжений, меньших коэффициента сцепления, такая среда не деформируется. По мере достижения предела прочности деформация развивается в соответствии с теорией линейного упрочнения. Реологическая схема модели представлена на рис. 1.

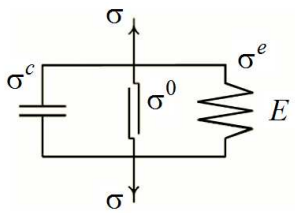


Рис. 1. Реологическая схема

Судя по этой схеме, справедливо аддитивное представление $\sigma = \sigma^c + \sigma^0 + \sigma^e$, здесь σ – тензор полных напряжений, σ^c – тензор напряжений в контакте, σ^0 – тензор сцепления, $\sigma^e = E : \varepsilon$ – тензор упругих напряжений, ε – тензор деформаций, E – симметричный положительно определенный тензор модулей упругости. Тензор σ^c подчиняется вариационному неравенству

$$\sigma^c : (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) \leqslant 0, \quad \varepsilon, \tilde{\varepsilon} \in C, \tag{1}$$

в котором C – конус допустимых деформаций, имеющий вид $C = \{\varepsilon | \kappa\gamma(\varepsilon) \leqslant \theta(\varepsilon)\}$, κ – параметр дилатансии, $\gamma(\varepsilon) = \sqrt{2\varepsilon' : \varepsilon'}$ – интенсивность сдвига, $\varepsilon' = \varepsilon - \theta\delta/3$ – девиатор деформаций, $\theta(\varepsilon) = \varepsilon : \delta$ – деформация объема, δ – символ Кронекера.

С учетом введенных обозначений неравенство (1) принимает вид

$$\left(E : \varepsilon - \sigma + \sigma^0\right) : (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) \geqslant 0, \quad \varepsilon, \tilde{\varepsilon} \in C.$$

По определению проекции это означает, что

$$\varepsilon = \pi_C\left[E^{-1}\left(\sigma - \sigma^0\right)\right],$$

где π – оператор проекции на конус C по норме $|\varepsilon| = \sqrt{\varepsilon : E : \varepsilon}$.

Рассмотрим элемент конструкции из разнопрочного материала, занимающий плоскую область Ω с границей $\partial\Omega = \Gamma$, состоящей из двух непересекающихся частей Γ_u и Γ_σ, на первой из которых отсутствуют перемещения, а на второй задан вектор распределенной нагрузки p. Справедливы уравнения равновесия в вариационной форме и граничные условия:

$$\int_\Omega \left(\nabla \cdot \sigma + f\right)(\tilde{u} - u)\, d\Omega = 0, \tag{2}$$

$$u = \tilde{u} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_u, \qquad \sigma \cdot n = p \quad \text{на} \quad \Gamma_\sigma. \tag{3}$$

Задача (2) – (3) сводится к задаче о минимуме $\min\limits_{\tilde{u} \in U_c} J(\tilde{u}) = J(u)$, где

$$J(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varepsilon : E : \varepsilon + \varepsilon : \sigma^0 - f \cdot u\right) d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} p \cdot u d\Gamma,$$

$$U_C = \left\{u \in H^1(\Omega) \mid \ u|_{\Gamma_u} = 0,\ \varepsilon(u) \in C\right\}.$$

Непосредственное вычисление показывает, что

$$J(u) = -\max_{\substack{\tilde{u} \in U_c \\ \tilde{u} \neq 0}} \frac{\left[\int\limits_\Omega \left(\varepsilon(\tilde{u}) : \sigma^0 - f \cdot \tilde{u}\right) d\Omega - \int\limits_{\Gamma_\sigma} p \cdot \tilde{u} d\Gamma\right]_+^2}{2\int\limits_\Omega \varepsilon(\tilde{u}) : E : \varepsilon(\tilde{u})\, d\Omega}.$$

Отсюда можно показать, что поле перемещений тождественно равно нулю, в том и только том случае, если

$$\int_\Omega \left(\varepsilon(\tilde{u}) : \sigma^0 - f \cdot \tilde{u}\right) d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} p \cdot \tilde{u} d\Gamma \leqslant 0, \quad \forall \tilde{u} \in U_C. \tag{4}$$

Нагрузка (f, p) называется безопасной, если $u \equiv 0$. Пусть $p = 0$, $f = m \cdot f^0$, где m – параметр нагружения. Тогда из (4) получим, что нагрузка будет безопасной при изменении параметра m от нуля до предельного значения (коэффициента запаса)

$$m^* = \min_{\substack{\tilde{u} \in U_c \\ \tilde{u} \neq 0}} \frac{\int\limits_\Omega \varepsilon(\tilde{u}) : \sigma^0 d\Omega}{\left[\int\limits_\Omega f \cdot \tilde{u} d\Omega\right]_+}. \tag{5}$$

Данное утверждение представляет собой формулировку кинематической теоремы о предельном равновесии, известной из теории пластичности.

Рассмотрим задачу о плоском течении под действием собственного веса сыпучей среды в сходящемся канале, $\alpha > \beta$. Предполагается, что в случае 1 локализация деформации простого сдвига с дилатансией происходит в узкой линейной зоне толщины h, наклоненной под углом φ (рис. 2), а случае 2 – под углом ψ (рис. 3).

Коэффициентом запаса m^* в данной задаче будет наименьшее значение из значений коэффициентов m_1 и m_2, для каждого случая соответственно.

При $\sin\varphi = \frac{\nu\sin\alpha - \cos\alpha}{\sqrt{\nu^2+1}}$ формулы для коэффициента запаса (5) для случая 1 и случая 2 принимают вид:

$$m_1 = \frac{2\tau_s}{\kappa\rho g a}\frac{1}{\sin\alpha}\frac{1}{(\nu\sin\alpha - \cos\alpha)}, \qquad m_2 = \frac{2\tau_s}{\kappa\rho g a}\frac{1}{\sin\beta}\frac{1}{\left(\nu\sin\beta - \cos\beta\right)},$$

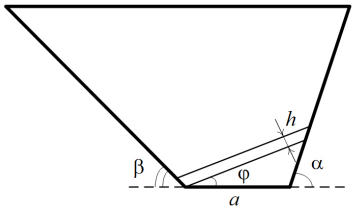


Рис. 2. Случай 1

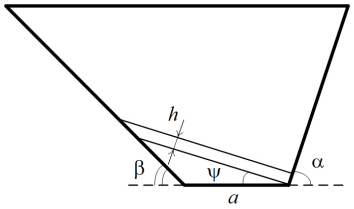


Рис. 3. Случай 2

здесь τ_s – предел текучести. Анализ показал, что неравенство $m_1 < m_2$ справедливо при $\beta < \alpha$. Таким образом, зона локализации направлена под углом

$$\varphi = \alpha - \arcsin \frac{1}{\sqrt{\nu^2 + 1}} \tag{6}$$

и соответствует рис. 2.

Вычислительный алгоритм основан на конечно-элементной аппроксимации модели. Алгоритм приводит задачу определения поля перемещений в разнопрочной среде к решению последовательности статических задач линейной упругости с начальными напряжениями. С его помощью предельные нагрузки можно определить только приближенно как нагрузки, превышение которых приводит к интенсивному деформированию материала.

В качестве начального приближения в итерационном процессе используется решение упругой задачи. Идея алгоритма состоит в замене определяющих уравнений итерационной формулой ($n = 1, 2, 3, \ldots$)

$$\sigma^n = E : \varepsilon^n - \frac{1}{1+\lambda}\,\pi\left(E : \varepsilon^{n-1} - \sigma_0\right).$$

Здесь $\lambda = \text{const} \geqslant 0$, π – оператор проекции на конус $K = \{\sigma \mid \ \tau(\sigma) \leq \kappa p(\sigma)\}$ по норме $|\sigma|_0 = \sqrt{\sigma : E^{-1} : \sigma}$, который действует следующим образом (k – модуль объемного сжатия, μ – модуль сдвига, $\tau(\sigma) = \sqrt{\sigma' : \sigma'/2}$ – интенсивность касательных напряжений, $\sigma' = \sigma + p(\sigma)\,\delta$, $p(\sigma) = -\sigma : \delta/3$ – гидростатическое давление):

- если $\tau(s) \leqslant \kappa p(s)$, то $\sigma = s$;
- если $\tau(s) > \kappa p(s)$ и $\mu p(s) + \kappa k\tau(s) \leqslant 0$, то $\sigma = 0$;
- если $\tau(s) > \kappa p(s)$ и $\mu p(s) + \kappa k\tau(s) > 0$, то

$$\sigma = \frac{\kappa p(\sigma)}{\tau(s)}\left[s + p(s)\cdot\delta\right] - p(\sigma)\cdot\delta, \quad p(\sigma) = \frac{\mu p(s) + \kappa k\tau(s)}{\mu + \kappa^2 k}.$$

Итерации продолжаются до тех пор пока норма разности двух последовательных решений не станет меньше наперед заданной точности вычислений.

Параметр внутреннего трения разнопрочной среды изменяется в пределах $0 < \kappa < \sqrt{3}/2$, расчеты проведены при $\kappa = 0{,}3$. Параметр регуляризации λ в расчетах полагался равным $0{,}0001$. Точность вычислений в итерационном алгоритме $\varepsilon = 0{,}0001$.

Далее рассмотрим графическую интерпретацию результатов вычислительных экспериментов для задачи о плоском течении под действием собственного веса сыпучей среды в сходящемся канале (рис. 2). Заданы следующие параметры образца $\alpha = 76{,}2°$, $\beta = 35°$, $a = 2$ м.

Обозначим через

$$f_{\text{кр}} = m^* \rho g = \frac{2\tau_s}{\kappa a}\,\frac{1}{\sin\alpha\,(\nu\sin\alpha - \cos\alpha)}. \tag{7}$$

Если $f < f_{\text{кр}}$, то локализации деформаций нет. Среда слишком легкая, чтобы продвигаться по каналу. Если $f > f_{\text{кр}}$, то среда движется. В этом случае должна быть видна зона проскальзывания.

По формуле (7) рассчитано значение $f_{\text{кр}} = 0{,}06\tau_s$. По формуле (6) рассчитан наиболее вероятный угол выхода линейной зоны локализации деформаций $\varphi = 58{,}49°$.

На рис. 4 (*a*) представлено поле интенсивности сдвига, полученное на основе классической теории упругости, на рис. 4 (*b*) – на основе модели разнопрочной среды, прямой черного цвета показано направление локализации деформаций под углом $\varphi = 58,49°$.

a *b*

Рис. 4. Интенсивность деформации сдвига

Итак, вычислительные эксперименты задачи о движении сыпучей среды в сходящемся канале подтверждают наличие линейных зон локализации деформаций под углом φ, вычисляемого по формуле (6), и соответствуют рис. 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-31-00019).

NUMERICAL RESEARCH OF STRAIN LOCALIZATION DURING SLOW MOTION OF A GRANULAR MEDIUM

O.I. Kuzovatova

Using a computational algorithm based on the finite element method, numerical solutions of the problem of loose medium motion in a converging channel are carried out, which confirm the presence of a deformation localization zones.

Keywords: variational inequality, materials with different strengths, strains localization, finite element method, initial stress method

УДК 514.135:519.688

О ПОСТРОЕНИИ КРИВОЙ КОХА И СНЕЖИНКИ КОХА НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Д.С. Лисенков[1], П.И. Трошин[2]

1 *lesman1985@gmail.com* ; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *paul.troshin@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Реализуется построение фрактальных множеств методом L-систем в модели Бельтрами–Клейна плоскости Лобачевского. Предложен гиперболический аналог кривой и снежинки Коха.

Ключевые слова: неевклидова геометрия, геометрия Лобачевского, фрактал, L-система

В [1] предложен аналог треугольника Серпинского на плоскости Лобачевского, построенный с помощью метода систем итерированных функций. В данной работе мы продолжаем исследование построений фрактальных множеств в неевклидовых пространствах, а именно, строим кривую и снежинку Коха на плоскости Лобачевского методом L-систем [2].

Рассмотрим аналог кривой Коха [3] в модели Бельтрами–Клейна плоскости Лобачевского. Модель (Λ, ρ) состоит из внутренности единичного круга на евклидовой плоскости, снабженной расстоянием по Лобачевскому ρ [4]. Напомним, что в этой модели геодезические сегменты являются прямолинейными отрезками.

Зафиксируем произвольный отрезок $\mathscr{K}_0 = A_0^0 A_1^0 \subset (\Lambda, \rho)$ длины $S > 0$, а также число $\gamma \in (0,2)$. Множество $\mathscr{K}_1$ получается заменой отрезка $\mathscr{K}_0$ на ломаную линию $A_0^1 A_1^1 A_2^1 A_3^1 A_4^1$ со следующими свойствами (рис. 1, слева):

$$A_0^1 = A_0^0, \quad A_4^1 = A_1^0, \quad A_1^1, A_3^1 \in A_0^1 A_4^1,$$

$$\rho(A_0^1, A_1^1) = \rho(A_1^1, A_2^1) = \rho(A_2^1, A_3^1) = \rho(A_3^1, A_4^1), \quad \rho(A_1^1, A_3^1) = \gamma \rho(A_0^1, A_1^1).$$

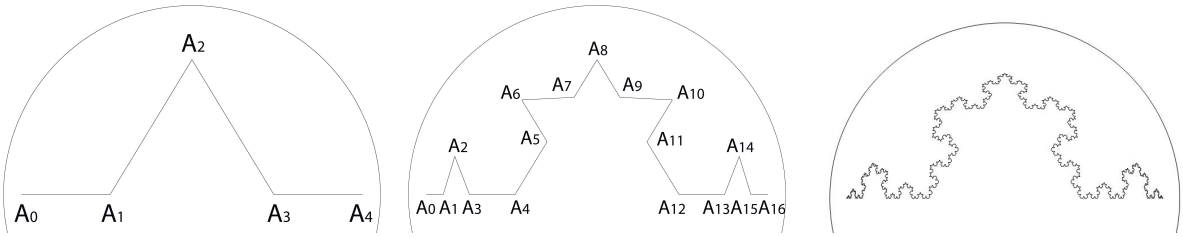


Рис. 1. Итерации $n = 1, 2, 5$ кривой Коха в модели Бельтрами–Клейна.

Множество $\mathscr{K}_n = A_0^n \dots A_{4^n}^n$, $n \geq 1$, получается из множества $\mathscr{K}_{n-1}$ заменой каждого отрезка ломаной на 4 новых отрезка аналогично построению множества $\mathscr{K}_1$. Тогда кривая Коха $\mathscr{K} = \lim_{n\to\infty} \mathscr{K}_n$ (в метрике Хаусдорфа). Для построения предфрактала $\mathscr{K}_n$, $n \geq 0$, методом L-систем необходимо знать метрические характеристики этого множества: величины сторон и углов.

Предложение 1 (Об устройстве предфрактала кривой Коха). *Предфрактал $\mathscr{K}_n$, $n \geq 1$, состоит из n семейств ($k = 0, \dots, n-1$) 4^{n-k-1} равных равнобедренных треугольников*

$$\triangle A^n_{4^k(1+4q)} A^n_{4^k(2+4q)} A^n_{4^k(3+4q)}, \qquad q = \overline{0, 4^{n-k-1} - 1}$$

с основаниями $A^n_{4^k(1+4q)} A^n_{4^k(3+4q)}$, при этом:

1) $\rho(A^n_{4^k(1+4q)}, A^n_{4^k(2+4q)}) = \rho(A^n_{4^k(2+4q)}, A^n_{4^k(3+4q)}) = \dfrac{S}{(2+\gamma)^{n-k}}$,

2) $\rho(A^n_{4^k(1+4q)}, A^n_{4^k(3+4q)}) = \dfrac{\gamma S}{(2+\gamma)^{n-k}}$,

3) $\cos\angle A^n_{4^k(2+4q)} A^n_{4^k(1+4q)} A^n_{4^k(3+4q)} = \cos\angle A^n_{4^k(2+4q)} A^n_{4^k(3+4q)} A^n_{4^k(1+4q)} =$

$$= \operatorname{cth} \frac{S}{(2+\gamma)^{n-k}} \operatorname{th} \frac{\gamma S}{2(2+\gamma)^{n-k}},$$

4) $\cos\angle A^n_{4^k(1+4q)} A^n_{4^k(2+4q)} A^n_{4^k(3+4q)} = 1 - 2\dfrac{\operatorname{sh}^2 \dfrac{\gamma S}{2(2+\gamma)^{n-k}}}{\operatorname{sh}^2 \dfrac{S}{(2+\gamma)^{n-k}}}.$

Замечание 1. *Заметим, что по номеру вершины $A_i^n = A^n_{4^k(p+4q)} \in \mathscr{K}_n$ можно определить необходимые для расчета угла при этой вершине числа k ($n-k$ — номер итерации, на которой впервые появляется данная вершина) и p ($p = 1, 3$ соответствуют вершинам у оснований равнобедренных треугольников, а $p = 2$ — вершинам напротив этих оснований):*

$$k = \phi(i), \qquad p = \frac{i}{4^{\phi(i)}} \mod 4,$$

где $\phi(i)$ — наибольшая степень числа 4, делящая $i \in \mathbb{N}$: $\phi(i) = \max\{k = 0, 1, \dots \mid i \vdots 4^k\}$.

Обратим внимание на построение снежинки (острова) Коха. Для этого из трех экземпляров кривой Коха ABC, CDE, EFA составим фигуру, показанную на рис. 2.

Рис. 2. Снежинка Коха (слева, $n = 5$), кривая $S = S(\gamma)$ из Предложения 3 (справа).

Предложение 2 (Об устройстве предфрактала снежинки Коха)**.** *В дополнение к формулам из Предложения 1 мы имеем:*

$$\cos\angle C = \cos\angle E = \cos\angle A = \operatorname{cth} S \operatorname{th}\frac{S}{2} = 1 - 2\frac{\operatorname{sh}^2\frac{S}{2}}{\operatorname{sh}^2 S}.$$

Предложение 3. *Для снежинки Коха фигуры ABC и BCD равны тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{S}{2}}{\operatorname{sh} S} = \frac{\operatorname{sh}\frac{\gamma S}{2(2+\gamma)}}{\operatorname{sh}\frac{S}{2+\gamma}},$$

график этой зависимости $S = S(\gamma)$ изображен на рис. 2, $\gamma \in (0,1)$, $\gamma = 0$ — вертикальная асимптота.

Для построения описанных множеств мы предлагаем воспользоваться операцией поворота точки $y \in (\Lambda, \rho)$ вокруг произвольной точки $x \in (\Lambda, \rho)$ на угол α, заданной формулой

$$U_{x,\alpha}(y) = G_x \circ U_{0,\alpha} \circ G_{-x}(y),$$

где $U_{0,\alpha}$ — поворот на угол α вокруг начала координат евклидового пространства, $G_x(y)$ — параллельный перенос точки y на вектор x на плоскости Лобачевского [4].

Напомним, построение L-систем осуществляется с помощью так называемой «черепашьей» графики. Зададим «черепашку» тройкой $(x_{old}, x_{new}, \alpha)$ с начальными параметрами $(\{-\operatorname{th} S, 0\}, \{0,0\}, 0)$. Для предфрактала $\mathcal{K}_n$, $n \geq 1$, шаг вперед с номером $i = \overline{1, 4^n}$ зададим преобразованием

$$(x_{old}, x_{new}, \alpha) \mapsto (x_{new}, U_{x_{new}, \pi+\alpha}(x_{old}), \angle A_i),$$

где $\angle A_i$ — угол, расчитанный с помощью формул из Предложения 1.

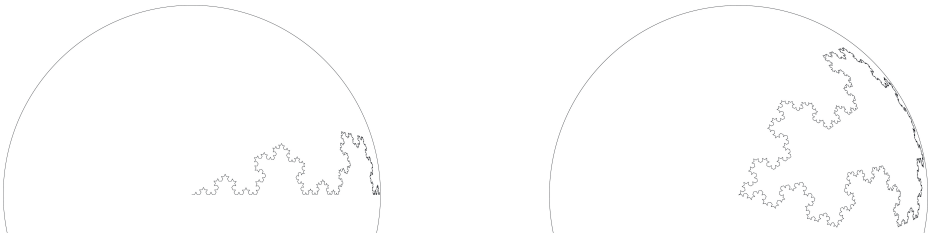


Рис. 3. Предфракталы кривой Коха (слева) и снежинки Коха (справа), $n=5$, $S=3$, $\gamma=0.9$.

Для построения снежинки Коха остается воспользоваться Предложением 2. Заметим, что полученное множество будет сдвинутым относительно центра модели (Λ, ρ) (рис. 3). Чтобы поместить его в центр, надо применить к нему параллельный перенос G на вектор $\{-\operatorname{th}\frac{S}{2}, 0\}$ в случае кривой Коха и $\{-\operatorname{th}\frac{S}{2}, \operatorname{th}\frac{\operatorname{sh} S\sqrt{1-\operatorname{cth}^2 S \operatorname{th}^2\frac{S}{2}}}{1+2\operatorname{ch} S}\}$ для снежинки Коха.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-00295).

Литература

1. Troshin P. On generalization of Sierpiński gasket in Lobachevskii plane, Lobachevskii Journal of Mathematics **38** (4), 751–762 (2017).

2. Prusinkiewicz P. *Lindenmayer Systems, Fractals, and Plants* / P. Prusinkiewicz, J. Hanan. Lecture Notes in Biomathematics no. 79. – New York : Springer-Verlag, 1989. – 120 p.

3. von Koch H. Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire, Arkiv för Matematik **1**, 681–704 (1904).

4. Сосов Е.Н. *Геометрия Лобачевского и ее применение в специальной теории относительности*: Учебно-методическое пособие / Е.Н. Сосов. – Казань : Казан. ун-т, 2016. – 84 с.

ON CONSTRUCTION OF THE KOCH CURVE AND THE KOCH SNOWFLAKE IN THE BELTRAMI–KLEIN MODEL OF THE LOBACHEVSKII PLANE

D.S. Lisenkov, P.I. Troshin

We construct fractal sets in the Beltrami–Klein model of the Lobachevskii plane by means of L-systems. Hyperbolic analogues of the Koch curve and the Koch snowflake are suggested.
Keywords: non-Euclidean geometry, Lobachevskii geometry, fractal, L-system

УДК 510.5

ОТНОШЕНИЯ $S^N_{\mathscr{L}}$ НА ВЫЧИСЛИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПОРЯДКАХ И ИХ ВЗАИМОСВЯЗИ

Я.А. Михайловская[1]

1 *yana.michailovskaya@yandex.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Данная работа посвящена исследованию взаимосвязей отношений $S^n_{\mathscr{L}}$ на вычислимом линейном порядке $\mathscr{L}$. В работе построены примеры вычислимых линейных порядков, на которых отношения $S^n_{\mathscr{L}}$ и $S^{n+1}_{\mathscr{L}}$ имеют разные тьюринговые степени, а также была исследована замкнутость наверх в классе всех вычислимо перечислимых степней отношения $S^n_{\mathscr{L}}$ на вычислимых линейных порядках, не являющихся η-схожими.

Ключевые слова: вычислимый линейный порядок, тьюринговая степень, вечислимо перечислимая степень

В данной работе рассматриваются вычислимые линейные порядки, в сигнатуру которых добавлены некоторые дополнительные отношения. Эти отношения обозначаются как $S^n_{\mathscr{L}}$ и задаются следующим образом:

$$S^{2k}_{\mathscr{L}}(x,y) \leftrightharpoons (x <_{\mathscr{L}} y)\&(|(x,y)_{\mathscr{L}}| = 0 \vee |(x,y)_{\mathscr{L}}| = 2 \vee \ldots \vee |(x,y)_{\mathscr{L}}| = 2k),$$

$$S^{2k+1}_{\mathscr{L}}(x,y) \leftrightharpoons (x <_{\mathscr{L}} y)\&(|(x,y)_{\mathscr{L}}| = 1 \vee |(x,y)_{\mathscr{L}}| = 3 \vee \ldots \vee |(x,y)_{\mathscr{L}}| = 2k+1),$$

здесь $(x,y)_{\mathscr{L}} = \{z \mid x <_{\mathscr{L}} z <_{\mathscr{L}} y\}$.

В ходе изучения отношений $S^n_{\mathscr{L}}$ на вычислимых линейных порядках возник вопрос об их взаимосвязи. На данный вопрос проливают свет следующие предложения:

Предложение 1. Для любого $n > 0$ существует вычислимый линейный порядок $\mathscr{L}$ такой, что отношение $S^n_{\mathscr{L}}$ вычислимо, но отношение $S^{n+1}_{\mathscr{L}}$ не вычислимо.

Предложение 2. Для любого n существует вычислимый линейный порядок $\mathscr{L}$ такой, что отношение $S^{n+1}_{\mathscr{L}}$ вычислимо, но отношение $S^n_{\mathscr{L}}$ не вычислимо.

Спектром отношения $P_{\mathscr{L}}$ вычислимого линейного порядка $\mathscr{L}$ называется класс $DgSp_{\mathscr{L}}(P) = \{deg_T(P_{\mathscr{R}}) \mid (\exists \mathscr{R} \cong \mathscr{L})\, \mathscr{R} \equiv_T \emptyset\}$.

Обобщая результат А.Н. Фролова [1] на случай отношений $S^n_{\mathscr{L}}$, была доказана следующая теорема:

Теорема 1. Если вычислимый линейный порядок $\mathscr{L}$ не является η-схожим, то спектр отношения $S^n_{\mathscr{L}}$ замкнут наверх в в.п. степенях.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-31-00174 – Алгоритмические аспекты линейных порядков и отношений на них).

Литература

1. Фролов, А.Н. *Представления отношения соседства вычислимого линейного порядка* // Известия ВУЗов. Математика. – 2010. – No. 7. – С. 73–85.

THE RELATIONS $S^N_{\mathscr{L}}$ ON COMPUTABLE LINEAR ORDERS AND THEIR CORRELATIONS

Ya.A. Michailovskaya

This paper is devoted to the study of correlations of the relations $S^n_{\mathscr{L}}$ on a computable linear order $\mathscr{L}$. In this paper, we constructed some examples of computable linear orders, on which the relations $S^n_{\mathscr{L}}$ and $S^{n+1}_{\mathscr{L}}$ have different Turing degrees, and also a closing upwards of the relation $S^n_{\mathscr{L}}$ on non-η-like computable linear orders in the class of all computably enumerable degrees was studied.
Keywords: computable linear order, Turing degree, computably enumerable degree

УДК 51:519.63+519.688

ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ: ПРИЛОЖЕНИЕ К ОПИСАНИЮ ПРОЦЕССА ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ ПОЛЯРИЗАЦИИ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКОВ

Л.И. Мороз[1], А.Г. Масловская[2]

1 *svpn.1402@gmail.com*; Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Амурский государственный университет

2 *maslovskayaag@mail.ru*; Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Амурский государственный университет

В работе предложена фрактальная математическая модель гистерезисных явлений в сегнетоэлектрических материалах с использованием концепций теории дробного дифференцирования. Математическая модель формализована в виде начально-граничной задачи для уравнения аномальной диффузии. На основе аппроксимации дробной производной по формуле Грюнвальда – Летникова сконструирована неявная разностная схема решения поставленной задачи. Разработано программное решение для проведения компьютерного моделирования. Представлены результаты вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: уравнение аномальной диффузии, уравнение Ландау – Халатникова, формула Грюнвальда – Летникова, неявная схема, модель переключения поляризации сегнетоэлектрика, сегнетоэлектрический гистерезис

Введение. В настоящее время активное развитие получила теория дробного дифференцирования, которая нашла свое применение в физике, химии, экономике, механике и других областях науки [1]. С помощью дробного исчисления можно описать процессы, происходящие во фрактальных структурах со сложными топологическими свойствами и в системах, проявляющих эффекты памяти или эредитарность. Результатом трехвековой истории развития дробно-дифференциального аппарата стало существование нескольких неэквивалентных подходов к определению производной нецелого порядка: Римана – Лиувилля, Грюнвальда – Летникова, Капуто, Маршо и др. Невзирая на их различия, в случае целого порядка, все они совпадают с понятием обычной производной. В практике численного решения дробно-дифференциальных задач наибольшее распространение получила конечно-разностная формула Грюнвальда – Летникова:

$$\frac{d^\theta y(x)}{dx^\theta} = \frac{1}{\Gamma(-\theta)} \frac{1}{h^\theta} \sum_{i=0}^{r} \frac{\Gamma(i-\theta)}{\Gamma(i+1)} y(x-ih), \tag{1}$$

где θ – порядок дробной производной, Γ – гамма-функция Эйлера, h – шаг пространственной сетки. В качестве объекта математического моделирования выберем класс полярных материалов, обладающих свойствами самоподобия и эффектами памяти – сегнетоэлектрики [2]. Одной из важных особенностей сегнетоэлектрических материалов является гистерезисная зависимость поляризации

от приложенного поля. Поскольку переключение поляризации и динамика доменов в сегнетоэлектриках имеют важное фундаментальное и практическое значение, то научный интерес представляет построение и реализация модели сегнетоэлектрического гистерезиса. Поэтому цель настоящей работы заключалась в разработке и численной реализации фрактальной модели сегнетоэлектрического гистерезиса на основе дробно-дифференциального подхода.

Математическая постановка задачи. Феноменологическая теория Ландау – Гинзбурга – Девоншира применительно к сегнетоэлектрикам позволяет описать связь между напряженностью электрического поля Å и поляризацией Ð [3, 4]. Для нестационарного случая используют уравнение Ландау – Халатникова. Дополнив уравнение начальным и граничными условиями, а также принимая во внимание эредитарность процесса и фрактальное поведение в процессе переключения поляризации, получим следующую начально-краевую задачу для дробно-дифференциального уравнения в частных производных:

$$\frac{1}{t^*}\frac{\partial^\sigma P}{\partial \tau^\sigma} = \frac{\delta}{(x^*)^2}\frac{\partial^\theta P}{\partial \chi^\theta} - \frac{1}{\xi}\left(\alpha P + \beta P^3 + \gamma P^5 - E\right), \tag{2}$$

$$P(\chi, \tau = 0) = 0, P(\chi = 0, \tau) = P_s, P(\chi = 1, \tau) = P_s,$$

где P – спонтанная поляризация, Кл/м^2; σ, θ – порядки дробного дифференцирования по времени и координате соответственно: $0 < \sigma \le 1, 1 < \theta \le 2; \mathrm{t} \ge 0; \tau = \frac{t}{t^*}$ – безразмерное время, t^* – некоторое характерное время процесса, с; $\chi = \frac{x}{x^*}$ – безразмерное расстояние, x^* – характерный масштаб расстояния, м, $0 \le x \le L$; δ – коэффициент диффузии, м^2/с; ξ – феноменологический параметр, В·м·с/Кл; $\alpha = \alpha_0 (T - T_c)$, α_0, β, γ – термодинамические постоянные, a, Н·м^2/Кл^2; b, Н·м^6/Кл^4; c, Н·м^{10}/Кл^6; T_c – температура Кюри – Вейсса, К; $E = E_{\max}\sin(\omega \mathrm{t})$ – напряженность внешнего поля, изменяющегося по периодическому закону, В/м; P_s – спонтанная поляризация, Кл/м^2.

Вычислительная схема. В общем виде многомерное уравнение с дробными производными (2) представляет собой уравнение аномальной диффузии:

$$\frac{\partial u^\sigma(x,t)}{\partial t^\sigma} = D\frac{\partial u^\theta(x,t)}{\partial x^\theta} - Au(x,t) - Bu^3(x,t) - Cu^5(x,t) + q(t), \tag{3}$$

где A, B, C, D – некоторые постоянные. Используя идею построения неявной конечно-разностной схемы [5, 6], полученной на основе формулы Грюнвальда – Летникова (1), сформулируем для дифференциального уравнения (3) его конечно-разностный аналог

$$\frac{1}{(\Delta t)^\sigma}\sum_{n=0}^{j+1} g_{\sigma,n} u_i^{j-n+1} = \frac{D}{(\Delta x)^\theta}\sum_{m=0}^{i+1} g_{\chi,m} u_{i-m+1}^{j+1} - Au_i^{j+1} - B\left(u_i^{j+1}\right)^3 - C\left(u_i^{j+1}\right)^5 + q^{j+1}, \tag{4}$$

где $g_{\sigma,n} = \frac{\Gamma(n-\sigma)}{\Gamma(-\sigma)\Gamma(n+1)}, g_{\chi,m} = \frac{\Gamma(m-\chi)}{\Gamma(-\chi)\Gamma(m+1)}$. нормированные веса Грюнвальда – Летникова. Нелинейные слагаемые уравнения (4) аппроксимируем следующим способом: $\left(u_i^{j+1}\right)^3 \approx u_i^{j+1}\cdot\left(u_i^j\right)^2, \left(u_i^{j+1}\right)^5 \approx u_i^{j+1}\cdot\left(u_i^j\right)^4$.

Ранее подобная конечно-разностная схема – аналог схемы Кранка – Николсон для решения дробно-дифференциального уравнения была использована нами для моделирования теплового отклика сегнетоэлектрика в условиях интенсивного нагрева [7].

Результаты вычислительного эксперимента. В качестве модельной задачи, описывающей сегнетоэлектрический гистерезис, рассмотрим следующий пример:

$$\frac{\partial u^\sigma(\chi,\tau)}{\partial \tau^\sigma} = D\frac{\partial u^\theta(\chi,\tau)}{\partial x^\theta} - Au(\chi,\tau) - Bu^3(\chi,\tau) - Cu^5(\chi,\tau) + E(\tau) \tag{5}$$

$$P(\chi, \tau = 0) = 0, P(\chi = 0, \tau) = 0.1, P(\chi = 1, \tau) = 0.1$$

здесь σ, θ – порядки дробных производных по времени и координате; $0 \le \tau \le 2, 0 \le \chi \le 1, A = -1, B = -1, C = 30, D = 1$ отн. ед., напряженность $E = 20\sin(5\tau)$. Для верификации результатов вычислительного эксперимента проведем сравнение данных, полученных при $\Delta\chi = 0.01, \Delta\tau = 0.02$ решении задачи (5) с помощью неявных схем для моделей, использующих целые и дробные производные. Норма Евклида при $\Delta\chi = 0.01, \Delta\tau = 0.02$ составила 0.0011. Результаты решения задачи (5) при варьировании значений порядков дробных производных σ, θ приведены на рисунке 1 а, б при $\Delta\chi = 0.01, \Delta\tau = 0.02$.

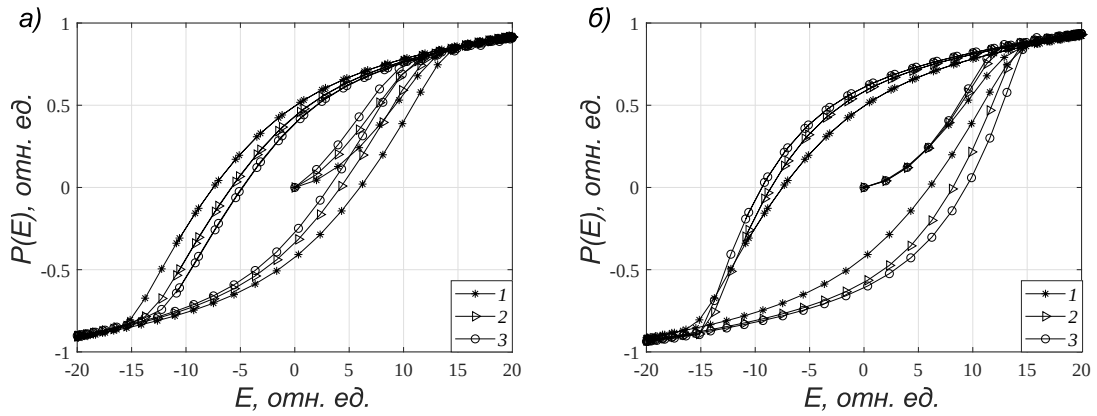


Рис. 1. Петля гистерезиса а) при фиксированном $\theta = 1.9999, 1 - \sigma = 0.9999, 2 - \sigma = 0.85, 3 - \sigma = 0.75$; б) при фиксированном $\sigma = 0.9999, 1 - \theta = 1.9999, 2 - \theta = 1.5, 3 - \theta = 1.1$

Из рис. 1 а и 1 б видно, что уменьшение порядка дробной производной по времени приводит к расширению петли сегнетоэлектрического гистерезиса при сохранении ее формы, варьирование дробной производной по времени характеризуется противоположным эффектом.

Заключение. В работе предложена фрактальная модификация термодинамической модели сегнетоэлектрического гистерезиса. С помощью неявной конечно-разностной схемы на основе определения Грюнвальда – Летникова был получен разностный аналог рассматриваемой задачи. В пакете Matlab разработана прикладная программа, функционал которой направлен на визуализацию гистерезисной зависимости поляризации сегнетоэлектрика от напряженности приложенного поля при вариации порядков дробного дифференцирования. Показано, что использование аппарата дробного дифференцирования дает исследователю более «гибкий инструмент», позволяющий оптимально управлять параметрами вычислительного эксперимента.

Литература

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

2. Рабе К. М., *Физика сегнетоэлектриков: современный взгляд.* – М.:БИНОМ, 2015. – 443 с.

3. Bin Z. *Model for coupled ferroelectric hysteresis using time fractional operators: Application to innovative energy harvesting*// Diss. . . . doctor of science. – Lyon, 2014. – 95 p.

4. Song T. K. *Landau – Khalatnikov simulation for ferroelectric switching in ferroelectric random access memory application* // Journal of the Korean Physical Society. – 2005. – V. 46. – № 1. – P. 5–9.

5. Петухов А. А., Ревизников Д. Л. *Алгоритмы численного решения дробно-дифференциальных уравнений* // Вестник МАИ. – 2009. – Т. 16. – С. 228–234.

6. Meerschaert M. M., Tadjeran C. *Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equations* // Journal of the Computational and Applied Mathematics. – 2004. – V. 172. – P. 65–77.

7. Мороз Л. И., Масловская А. Г. *Дробно-дифференциальная модель процесса теплопроводности сегнетоэлектрических материалов в условиях интенсивного нагрева* // Математика и математическое моделирование. – 2019(2). – С. 29–47.

FRACTIONAL DIFFERENTIAL MODEL OF ANOMALOUS DIFFUSION WITH APPLICATION TO SPECIFYING FERROELECTRICS POLARIZATION SWITCHING PROCESS

L.I. Moroz, A.G. Maslovskaya

The present study suggests a fractal model of hysteresis phenomena in ferroelectrics with use of the

fractional differentiation theory concepts. The mathematical model was formalized as initial-boundary problem for anomalous diffusion equation. The implicit finite-deference scheme was proposed to solve the considered problem based on Gr?nwald – Letnikov formula for approximation of fractional derivative. The program solver was designed to perform computer simulation. Computational experiment results were also demonstrated.
Keywords: anomalous diffusion equation, Landau – Khalatnikov equation, Gr?nwald – Letnikov formula, implicit scheme, ferroelectric polarization switching model, ferroelectric hysteresis.

УДК 517.55

О ПОДХОДАХ К НАХОЖДЕНИЮ РЕЗУЛЬТАНТА ДВУХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Е.К. Мышкина[1]

1 *elfifenok@mail.ru*; Институт вычислительного моделирования СО РАН

В статье обсуждаются подходы к нахождению результанта двух целых функций, в том числе основанных на рекуррентных формулах Ньютона.

Ключевые слова: целые функции, формулы Ньютона, результант

Напомним понятие результанта двух многочленов f и g от одной переменной – это число R, которое равно нулю тогда и только тогда, когда система $f = g = 0$ имеет общие корни.

Формально,

$$R(f,g) = \prod_{\{z:f(z)=0\}} g(z), \tag{1}$$

однако, для вычисления R эффективно использовать его представление в виде определителя Сильвестра: пусть $f(z) = a_0 + \ldots + a_n z^n$ и $g(z) = b_0 + \ldots + b_m z^m$, обозначим

$$D_{n,m} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & a_0 & \ldots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & b_0 & \ldots & b_m \end{vmatrix}$$

и если $a_n \neq 0$, то

$$R(f,g) = \frac{1}{a_n^m} D_{n,m}.$$

Один из подходов к определению результанта в случае, когда $g(z)$ - это целая функция

$$g(z) = b_0 + \ldots + b_m z^m + \ldots,$$

заключается в рассмотрении предела

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} a_n^{-m} D_{n,m},$$

однако, анализ этого предела достаточно сложен.

Согласно подходу, рассмотренному в [1]

$$R_{f,g} = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ S_2 & S_1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_n & S_{n-1} & \ldots & \ldots & S_1 \\ , & & & & \end{vmatrix}$$

где S_k - сумма значений функции g^k в нулях функции $f(z)$. При этом S_k вычисляются как предел последовательности определителей из коэффициентов функций $f, g, g^2, g^3, \ldots$.

Мы предлагаем еще один подход [2], основанный на прямом обобщении формулы (1). В этом случае результант представляется в виде бесконечной суммы выражений, зависящих от коэффициентов функций f и g, а также степенных сумм корней многочлена $f(z)$.

Пример. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} f(z) = z^2 - a^2, \\ g(z) = e^{bz} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(bz)^n}{n!} = 1 + bz + \frac{(bz)^2}{2!} + \ldots + \frac{(bz)^n}{n!} + \ldots. \end{cases}$$

Тогда

$$\prod_{i=1}^{2} g(z_i) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(ab)^{2k}}{(k!)^2} + 2 \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^t (ab)^{2t+2j}}{t!(t+2j)!} = 1.$$

Заметим, что первая сумма в этом выражении - это функция Бесселя первого рода $J_0(2ab)$. Таким образом, получаем тождество

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^t (ab)^{2t+2j}}{t!(t+2j)!} = \frac{1 - J_0(2ab)}{2}.$$

Кроме этого, следует отметить, что этот подход допускает обобщение и на случай, когда f также является целой функцией, так как степенные суммы нулей f можно вычислять комбинаторно [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 18-31-00019, 19-31-60012).

Литература

1. Kytmanov A. M., Naprienko Ya. M. *An approach to define the resultant of two entire functions* // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2017. – P. 269-286.

2. Kytmanov A. M., Myshkina E. K. *On some approach for finding the resultant of two entire functions* // Журнал СФУ. – Серия Математика и физика. – 2019. – Т. 12. – № 4. – С. 434–438.

3. Кытманов А. М., Мышкина Е. К. *Вычетные интегралы и формулы Варинга для алгебраических и трансцендентных систем уравнений* // Известия вузов. – Математика. – 2019. – № 5. – С. 40–55.

ON APPROACHES TO FINDING THE RESULTANT OF TWO ENTIRE FUNCTIONS

E.K. Myshkina

This paper approaches to finding the resultant of two entire functions are discussed, including the one involving Newton's recurrent formulas.

Keywords: entire functions, Newton's formulas, resultant

УДК 004.85

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КЛАССИФИКАЦИИ

Е.А. Мятлев[1], А.А. Белоусов[2]

1 *spaceclive@gmail.com*; Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, институт информатики, математики и электроники

2 *adark@narod.ru*; Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, институт информатики, математики и электроники

В статье рассматриваются различные подходы к решению задачи классификации. Рассмотрены различные этапы предварительной обработки документов в выборках, их влияние на конечный результат и возможные нюансы при использовании тех или иных подходов. Рассмотрены различные категории

классифицирующих алгоритмов и особенности их использования в зависимости от задачи. Описаны способы и необходимые метрики для оценки результата полученного в результате произведенной классификации.

Ключевые слова: анализ текста, классификация, классификаторы

Введение

Целью данной работы является исследование методов решения задачи классификации, лежащей в основе любой системы которая так или иначе сортирует, каталогизирует и структурирует информацию. В нее входит предварительная обработка информации, выделение значимых признаков необходимых для улучшения качества классификации и непосредственно сама классификация.

Предварительная обработка документа

На первом этапе предобработки, документ представляется в виде множества термов. Каждому терму ставится в соответствие вес - характеристика обозначающая встречаемость данного терма. Полученное таким образом n-мерное пространство является пространством признаков для данного множества документов. Таким образом каждый документ представлен своим вектором.

Вторым этапом происходит уменьшение размерности пространства векторов: удаляются все не буквенные символы, знаки препинания, тэги, символы разметки. Так же на данном этапе удаляются стоп-слова: местоимения, союзы, предлоги. В противном случае они приводят к засорению термов и стремительному росту их количества. Для категорий можно определить коэффициент значимости в рамках конкретной темы, тем самым обозначив важность или неважность каждого терма. Кроме удаления термов можно искусственно объединять несколько термов в один: так можно группировать синонимы или слова, часто встречающиеся в одном окружении.

Третьим этапом производится лемматизация термов - этап, на котором каждый терм приводится к своей нормальной форме: именительный падеж, единственное число, мужской род для существительных и неопределенная форма для глаголов, причастий, деепричастий. Следует отметить что при построении множества термов не учитываются и не сохраняются различные формы слова.

Четвертым этапом производится стемминг - отбрасывание любых изменяемых частей слов, главным образом окончаний. Этот процесс основан на правилах морфологии языка. Например, стемминг хорошо подходит для английского языка, но несколько хуже для русского, поэтому его применение не всегда целесообразно. Для увеличения эффективность данного этапа предобработки зачастую приходится обращаться к контексту обрабатываемого слова в предложении. Синонимы и омонимы являются основной причиной низкой эффективности данного этапа предварительной обработки.

Заключительным этапом предварительной обработки является взвешивание термов. Для этого используются специальные статистические меры, в работе использовались следующие две: TF-IDF (term frequency - inverse document frequency) и TF-SLF(term frequency - the sum of logariphmyc frequency).

Применение алгоритма классификации

После проведения предварительной обработки документов они обрабатываются классификатором. Конечной целью работы алгоритма является определение документа в ту или иную категорию. Некоторым алгоритмам необходимо обучение, другая же категория не нуждается в обучении. При использовании алгоритмов из первой категории требуется предварительно их обучить - классифицировать с их помощью тестовую выборку - верно размеченную по категориям выборку документов. На основании этой выборки позднее и будет производится классификация. Вторая группа алгоритмов при классификации документа опирается на оставшиеся документы из выборки - добавление или удаление документов заведомо принадлежащих определенной категории может улучшить качество работы алгоритма. Конечный успех классификации зависит от способа взвешивания термов, от того как они приводились к нормальной форме и от того какой алгоритм классификации использовался.

Измерение качества произведенной классификации

При решении задачи классификации необходимо сделать за метриками каждого из классов и следовать логике решаемой задачи, а не оптимизации метрики. Не редки те случаи, когда метрики демонстрируют отличные показатели, а результат далек от логически верного. Поэтому количество документов в каждой категории из тестовых и обучающих выборок необходимо выбирать исходя из логики решаемой задачи и метрики, по которой решено оценивать конечный результат. Так же следует сказать, что результаты оценок сильно зависят от предметной области: одни и те же оценки, примененные к алгоритмам обучавшихся на различных тематических данных, могут значительно отличаться. Двумя основными метриками на которых строятся остальные оценки: полнота и точность. Полнота характеризует количество ошибочных пропусков, а точность количество ложных срабатываний. При необходимости сравнивать алгоритмы, у которых меры полноты и точности отличаются довольно сильно вводят понятие F-меры. В настоящее время, F-мера является основной метрикой при оценивании конечного результата проведенной классификации. При решении задачи классификации для бухгалтерских документов наилучшего результата удалось добиться при помощи метода опорных векторов, который применялся к термам, взвешенным с помощью TF-SLF меры. В это случае F-мера конечной классификации достигла 0.849. Перед этим были выполнены все этапы предварительной обработки документа описанные выше. В ходе решения данной задачи были сделаны выводы что определенные методы взвешивания термов дают лучший результат в паре с классификаторами из категории "обучения с учителем классификаторы из категории "обучение без учителя"показывают лучшие результаты с использованием другой статистической меры.

Литература

1. Michie D., Spiegelhalter D., Taylor C. *Machine Learning, Neural and Statistical Classification.* – Ellis Horwood Ltd, 1994. – 290 p.

2. Вьюгин В. *Математические основы машинного обучения и прогнозирования* – М.: МЦНМО, 2014. – 389 с.

3. Raschka S. *Python Machine Learning* – Packt Publishing Ltd, 2015. – 425 p.

4. Токарева Е. *Иерархическая классификация текстов* – М.: МГУ имени М.В. Ломоносова, 2010. – 46 с.

RESEARCHES OF SOLUTIONS FOR CLASSIFICATION PROBLEM

E.A. Miatlev, A.A. Belousov

The article discusses various approaches to solving the problem of classification. The various stages of preliminary processing of documents in the samples, their influence on the final result and possible nuances when using certain approaches are considered. Different categories of classifying algorithms and features of their use depending on the task are considered. The methods and necessary metrics for evaluating the result of the resulting classification are described.

Keywords: text analysis, classification, classifiers

УДК 004.42

ОСОБЕННОСТИ СИСТЕМЫ ИЗМЕРЕНИЯ СОЦИАЛЬНЫХ НАВЫКОВ СТУДЕНТА

А.А. Насыров[1], А.В. Дмитерчук[2], Ш.Р. Сабитов[3]

1 *aydar999@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт Вычислительной Математики и Информационных Технологий

2 *great.arthur.foe@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт Вычислительной Математики и Информационных Технологий

3 *sh.r.sabitov@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт Вычислительной Математики и Информационных Технологий

В данной статье рассмотрена существующая и работающая система оценивания учебной и внеучебной деятельности студентов Института Вычислительной Математики и Информационных Технологий. Были указаны и описаны доступные направления самореализации, а также навыки развиваемые при участии в них. Проанализирована ситуация, подтвердившая преимущество активистов над другими студентами.

Ключевые слова: социальные навыки, soft-skills, информационная система

Студенческая жизнь состоит из учебной и внеучебной деятельности. Участие в культурных фестивалях и спортивных соревнованиях, а также выступление на различных мероприятиях является неотъемлемой и значимой частью жизни любого студента, однако подобная деятельность не поддаются корректной оценки со стороны учебного заведения, несмотря на то, что это самый яркий показатель soft-skills студента, то есть навыка коммуникации и работы в команде. Профессиональный навык, hard-skills, развивается на занятиях, оценивается преподавателями и высоко котируется работодателями.

Безусловно, hard-skills играет большую роль в работе, но результативность специалиста, не умеющего взаимодействовать с коллегами, будет ниже показателей человека с чуть меньшими профессиональными компетенциями, но развитым эмоциональным интеллектом. Тем не менее работодателям неоткуда брать данные о soft-skills студента, так как в большинстве российских университетов измерению этого показателя не уделяют должное внимание.

Ввиду сложившейся ситуации, была создана “Система Учета Активности Студента”, при помощи которой проводятся все внеучебные мероприятия Института Вычислительной Математики и Информационных Технологий Казанского Федерального Университета. Данная система в полной мере функционирует справляется не только с задачами упрощения документооборота, но и оценкой социальных навыков студента.

В Институте существуют различные направления внеучебной деятельности, и каждое развивает определенные навыки: Первичная профсоюзная организция студентов развивает умение защищать собственные права и усиляет лидерские качества; "МедиаЦентр"позволяет студенту окунуться в мир журналистики и дает возможность наладить контакт с интересными личностями; волонтеры "Добровольческого центра"проводят субботники и выезды в дома подшефных ветеранов; участие в культурной деятельности Института разивает творческие навыки и способность решений поблемных ситуаций нестандартными способами; участники "Спортивного сектора"учаться работь в команде; Научная и олимпиадная деятельность является показателем наличия умения решать задачи выходящих за рамки образовательной программы.

Студент может проявить себя при участии в мероприятии как волонтер, а может получить шефство над направлением и организовать всё самому. Любая подобная деятельность оценивается и поощеряется согласно нормативным документам КФУ, таким образом студент не только получит объективную оценку способностей, но и вознаграждение за свои старания и результаты. Приведем пример, студент 3 курса Михаил в течение семестра участвовал во множестве мероприятий, связанных с профсоюзной и научной деятельностью. За это он получит 5 дополнительных баллы к каждому экзамену, проводимому в текущем семестре. При устройстве на работу эти же данные поставят его намного выше других соискателей, ведь работодатель уже имеет представление о навыках Михаила и знает, что от него можно ожидать, на какую должность он подхоодит и с какими задачами справится. Таким образом, активный студент получает приемущество и во время учебы в Университете и при устройстве на работу.

Навыки общения сложно измерить привычными тестами, для объективной оценки данной деятельности необходимо планомерно собирать и анализировать полученные результаты в течение установленного срока, и только затем делать вывод, который позволит студенту получить все доступные приемущества.

Литература

1. Казанский Федеральный Университет *Регламент о балльно-рейтинговой системе оценки знаний обучающихся в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования "Казанский (Приволжский) Федеральный Университет"* , 2015

2. Ивонина А. И., Чуланова О. И., Давлетшина Ю. М. *Современные направления теоретических и методических разработок в области управления: роль soft-skills и hard skills в профессиональном и карьерном развитии сотрудников* //Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» – 2017 – Т. 9 – №1

3. Чуланова О. Л. *Компетенции персонала в цифровой экономике: операционализация soft skills персонала организации с учетом ортобиотических навыков и навыков well-being"* // Вестник Евразийской науки – 2019 – №2,

FEATURES OF THE STUDENT SOCIAL SKILLS ACCOUNTING SYSTEM

A.A. Nasyrov, A.V. Dmiterchuk, S.R. Sabitov

This article discusses the existing and working system for assessing the educational and extracurricular activities of students of the Institute of Computational Mathematics and Information Technology. The available areas of self-realization, as well as the skills developed with participation in them, were indicated and described. The example situation was analyzed, which confirmed the advantage of activists over other students.
Keywords: features, social skills, soft-skills, system

УДК 532.685

О ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТА ВЫТЕСНЕНИЯ НЕФТИ ОТ СТЕПЕНИ НЕОДНОРОДНОСТИ КЕРНА

Г.А. Никифоров[1]

1 *ganikiforov@mail.ru*; Институт механики и машиностроения - обособленное структурное подразделение Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр Российской академии наук»

В статье моделируется изотермическое течение двух несжимаемых несмешивающихся жидкостей в пористой среде с учетом капиллярных и гравитационных сил. Считается, что нефть обладает неньютоновскими свойствами. Отклонения от линейного закона фильтрации Дарси учитывается введением в закон движения нефти функции, зависящей от скорости фильтрации. Используется постановка задачи в переменных "скорость-насыщенность". На численных примерах демонстрируется влияние неоднородности керна на коэффициент вытеснения нефти. В производимых расчетах керн составлен из хорошо и плохо проницаемых блоков, при этом всегда сохраняется среднее значение абсолютной проницаемости керна. Выявлено, что коэффициента вытеснения нефти зависит от размеров хорошо и плохо проницаемых блоков керна.

Ключевые слова: керн, неньютоновская нефть, двухфазный поток

Постановка задачи

Решается задача о вытеснении нефти, обладающей неньютоновскими свойствами, водой из пористого тела, составленного из блоков различной проницаемости. Течение считается изотермическим, учитываются капиллярные и гравитационные силы. В качестве искомых переменных берутся суммарная скорость фильтрации и водонасыщенность. Законы фильтрации для двух фаз можно записать в виде [1] уравнений неразрывности

$$m\frac{\partial S_i}{\partial t} + div(U_i) = 0.$$

и уравнений движения в форме обобщенного закона Дарси

$$U_o = -k\frac{R(U_o)f_o}{\mu_o}grad(P_o - \rho_o gz),$$

$$U_w = -k\frac{R(U_w)f_w}{\mu_w}grad(P_w - \rho_w gz),$$

Где m - пористость, k – абсолютная проницаемость, P_i – давление в фазах, μ_i – динамическая вязкость, U_i – скорость фильтрации i - ой фазы; S_i – насыщенность пористого тела i -ой фазой, $R(U_o)$ – безразмерная функция, определяющая нелинейный закон, f_i – функция относительной фазовой проницаемости, ρ_i – плотность фазы, g – ускорение свободного падения. Индексы «w» и «o» соответствуют величинам, характеризующим соответственно смачивающую и несмачивающую фазы. . Разность давлений в фазах принимается равной капиллярному давлению: $P_o - P_w = P_c$, а насыщенности фаз удовлетворяют условию полного насыщения пласта нефтью и водой $S_o + S_w = 1$.

Введем суммарную скорость фильтрации

$U = U_o + U_w$.

В работе [1] в случае линейной фильтрации ($R_o(U_o) = 1$) описан способ сведения данной системы уравнений к системе уравнений относительно суммарной скорости фильтрации U и насыщенности пласта смачивающей фазой S_w. В случае нелинейной фильтрации выкладки принципиально не отличаются, поэтому выпишем сразу конечный результат (здесь и далее у насыщенности индекс «w» опускается):

$$div(U) = 0$$

$$rot(\frac{U}{K}) = rot(Fgrad(P_k))$$

$$m\frac{\partial S}{\partial t} + div(FU + F_{ow}grad(P_k)) = 0$$

где $K_o = k\frac{R(U_o)f_o}{\mu_o}$, $K_w = k\frac{f_w}{\mu_w}$, $K = K_o + K_w$, $F_{ow} = K_o\frac{K_w}{K}$, $F = \frac{K_w}{K}$

Пусть процесс фильтрации происходит в области Ω с границей $\partial\Omega$, состоящей из двух частей – $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$. Будем считать, что для начального момента времени известно распределение насыщенности $S = S^0$, а на $\partial\Omega$ задана нормальная составляющая скорости фильтрации U_n, которая должна удовлетворять условию $\int_{\partial\Omega} U_n d\gamma = 0$, где n – внешняя нормаль к $\partial\Omega$. На части границы $\partial\Omega_1$ будем считать известной насыщенность – $S\,|_{\partial\Omega_1} = S^0\,|_{\partial\Omega_1}$, а на другой ее части $\partial\Omega_2$ – $\frac{\partial S}{\partial n}\,|_{\partial\Omega_2} = 0$.

Численные результаты

Моделируется течение жидкости в фрагменте нефтенасыщенного пористого тела (керна) размерами 0,03 m в длину и 0,015 m в ширину. Через левую границу нагнетается вода, а через правую границу отбирается жидкость. Остальные грани считаются непроницаемыми. Оси координат Õ и Z связаны с нижней поверхностью пористого тела и входным сечением соответственно. Распределение абсолютной проницаемости четырех образцов керна приведено на рисунке 2, где $k_1 = 0.01\ \mu m^2$, $k_1 = 0.5\ \mu m^2$. Пористость коллектора постоянная: $m = 0.2$. В начальный момент времени пористое тело целиком заполнено нефтью и связанной водой. Динамическая вязкость нефти $\mu_o = 200\ mPa \cdot s$, воды - $\mu_w = 1\ mPa \cdot s$. Через левую границу нагнетается вода, а через правую границу отбирается жидкость. Область течения покрывалась равномерной сеткой 0,000625 ì по оси X и 0,000625 ì по оси Z.

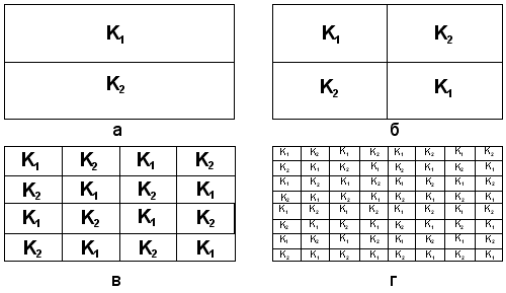


Рис. 1. Схема распределения проницаемости в образцах керна

Расчеты прерывались при достижении обводненности продукции на выходе из керна 98%.

Функция $R_o(U_o)$, определяющая нелинейность в законе движения, показана на рисунке 2. На рисунке 3 приведены поля водонасыщенности для каждого из образцов керна при достижении обводненности отбираемой продукции 98%

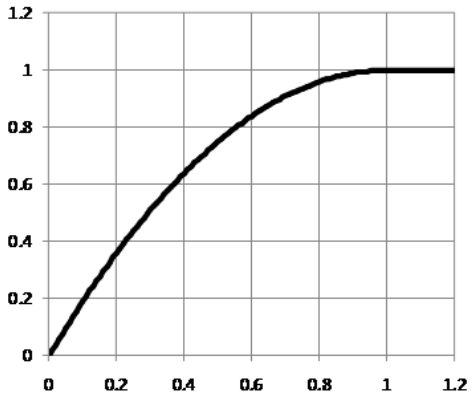


Рис. 2. Свид функцией $R_o(U_o)$

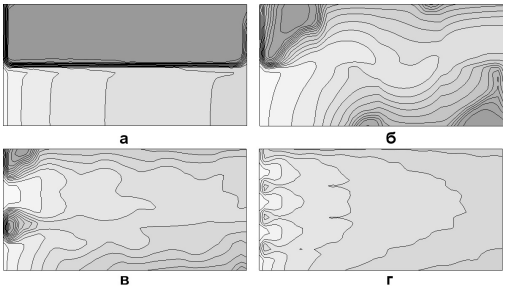


Рис. 3. Распределение водонасыщенности

Из рисунков видно, что величина застойных зон и степень "промытости"керна, а следовательно, и коэффициент вытеснения нефти, существенно зависят от размеров блоков. В случае крупных блоков целики нефти больше.

По рассчитанным вариантам получились следующие коэффициенты извлечения нефти: а) 0.22, б) 0.339, в) 0.338, г) 0.392.

Полученные результаты позволяют лучше понять причину больших разбросов в определении коэффициента вытеснения по керновому материалу, взятому из одной скважины с одного пласта.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-00134 мол_а)

Литература

1. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. *Движение жидкостей и газов в природных пластах.* – М.: Не-дра, 1984, 211 с.

2. Никифоров Г. А. *О вихревых течениях двухфазной жидкости в пористой среде* // Вычислительная меха-ника сплошных сред. – 2014. – Т. 7. – № 3. – С. 253–259.

ON THE DEPENDENCE OF THE COEFFICIENT OF OIL DISPLACEMENT ON THE DEGREE OF KERN HETEROGENEITY

G.A. Nikiforov

In this work, the isothermal flow of two incompressible immiscible liquids in a porous medium is simulated taking into account capillary and gravitational forces. It is believed that oil has non-Newtonian properties. Deviations from the linear Darcy filtration law are taken into account by introducing into the law of oil motion a function that depends on the filtration rate. The statement of the problem is used in the variables "speed-saturation". Numerical examples demonstrate the influence of kern heterogeneity on oil displacement coefficient. In the calculations performed, the kern is composed of well and poorly permeable blocks, while the average absolute permeability of the kern is always preserved. It was revealed that the oil displacement coefficient depends on the sizes of well and poorly permeable kern blocks.

Keywords: kern, non-Newtonian oil, two-phase flow

УДК 004.62, 159.9.07

РАЗРАБОТКА СИСТЕМЫ ДЛЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО ФОРМИРОВАНИЯ ТРЕНИРОВОЧНОЙ КОЛЛЕКЦИИ ДЛЯ ИСКУССТВЕННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ СООТВЕТСТВИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕКСТОВ И УСПЕВАЕМОСТИ В УЧЕБЕ

К.С. Николаев[1]

1 *konnikolaeff@yandex.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий

В статье обсуждается процесс выгрузки и анализа данных для обучения нейронной сети, целью которой является выявление характеристик текста, присущих студентам с разной степенью академической успеваемости (условно, «отличники», «ударники», «троечники»). Текстовые данные выгружаются из социальной сети Вконтакте с открытых для чтения страниц студентов Казанского федерального университета (нынешних и уже закончивших). Все тексты со страниц разделяются на тренировочную и тестовую коллекции.

Ключевые слова: обработка текста, нейронные сети, анализ данных, VK API, социальные сети, прогностика, академическая успешность, психометрия

В настоящее время, в связи с развитием информационных технологий и их повсеместной интеграцией в жизнь людей, всё больше и больше персональной информации о человеке находится в сети интернет. Данные о человеке могут иметь структурированный характер (например, онлайн-профиль человека в электронной библиотеке). Такие данные легко читать и анализировать предпочтения человека в конкретной сфере. Но таких данных мало и, в основном, они хранятся на закрытых серверах для внутреннего пользования частных и государственных организаций.

Объем открытых и неструктурированных данных, в свою очередь, обычно очень большой, но выделить какие-либо сведения о человеке не так просто, так как данные хранятся в виде массивов информации (тексты, изображения, аудио и другие). Такие данные можно найти, например, на персональных страницах пользователей социальных сетей (например, Вконтакте, Facebook, Одноклассники).

В результате анализа данных в свободном доступе, существует возможность установить те или иные личностные характеристики человека, так как в результате периодического обновления своего профиля в социальных сетях, человек невольно формирует свой виртуальный "портрет"(причем

о личностных характеристиках человека могут поведать не только записи, созданные им самим, но и записи, которыми он делится с друзьями и подписчиками). В работах [1] и [2] отображены маркеры, с помощью которых можно предсказать поведение человека на основе данных в его страницах в социальных сетях. Самой популярной социальной сетью в России и ряде зарубежных стран является Вконтакте. На данный момент эту социальную сеть использует около 564 миллионов человек. В отличие от зарубежных исследований, основанных на данных из Facebook, сфера изучения личностных характеристик пользователей Вконтакте пока малоизучена. Данное исследование проводилось в рамках научно-исследовательского проекта по разработке психометрической модель когнитивно-поведенческих предикторов жизненной активности личности на базе социальных сетей.

Основной задачей данной работы является разработка программного обеспечения, выполняющего загрузку записей с персональных страниц пользователей Вконтакте, окончивших Казанский федеральный университет. Также проводится разделение загруженных текстов на подгруппы для последующего обучения нейронной сети по степени успеваемости.

Для загрузки данных был реализован скрипт на языке Python, использующий API Вконтакте и библиотеку pyodbc для подключения к Microsoft SQL Server. Список ID персональных страниц Вконтакте был заранее сформирован Бердниковым А.А и Давлетшиным Н.М. в рамках данного проекта. API ВКонтакте - это интерфейс, который позволяет получать информацию из базы данных vk.com с помощью http-запросов к специальному серверу. Данный способ получения данных имеет ряд ограничений на пакетное скачивание данных, а именно не более 5000 запросов к методу wall.get для одного IP-адреса (данный метод выгружает с указанной страницы ВК до 100 постов). Скрипт учитывает эти ограничения и позволяет вести параллельную загрузку данных с разных устройств (либо с помощью подключения через proxy). Скрипт скачивает первые 5000 записей со страницы пользователя Вконтакте и сохраняет данные в таблицу vk_posts на сервере Microsoft SQL. В Таблице 1 отображена информация, описывающая отдельную запись с персональной страницы Вконтакте.

Таблица 1. Структура данных для описания конкретной записи из Вконтакте

Название поля	**Описание**
ID	Уникальный номер человека в базе данных студентов
VK_ID	Соответствующий ID персональной страницы Вконтакте
post_text	Текстовое наполнение поста
post_type	Тип поста
post_id	Id поста, назначаемый самим Вконтакте
repost_id	Id репоста, если к данному посту прикреплена другая запись
repost_owner_id	Id владельца прикрепленного поста
repost_text	Содержимое прикрепленного поста

В результате обработки персональных страниц более чем 33000 пользователей Вконтакте была подготовлена коллекция из 4168879 текстов, причем для каждого из них можно определить, кто является автором текста.

В рамках нашего проекта также была сформирована таблица со средним значением оценки каждого из студентов. Эта оценка формируется только на основе оценок, выставленных по классическому образцу («отлично», «хорошо», «удовлетворительно»), переведенных в целочисленный формат (от 5 до 3 соответственно). Студенты с оценкой «не удовлетворительно»учитывалась отдельно, так как наличие не закрытой в ходе пересдач «двойки»в ведомостях подразумевает, что студент был отчислен (кроме студентов, все еще проходящих обучение в КФУ). Балло-рейтинговая система (БРС) не использовалась для вычисления средней оценки, так как не все институты вводят баллы во внутреннюю систему БРС КФУ.

В тренировочной коллекции каждому тексту добавляется информация о том, какой именно средний балл имеет его автор и к какой категории студентов он относится. Категории для текстов, в целях лучшей читаемости базы данных, были представлены в виде целых чисел (5,4,3). Пример категоризации записей в тренировочной коллекции приведен в Таблице 2.

Коллекцию с такой информацией уже можно использовать в качестве тренировочной коллекции для нейросети-категоризатора, что и будет реализовано в будущем.

Таблица 2. Примеры соответствия текстов конкретных пользователей и среднего значения успеваемости

ID пользователя	Текст поста	Средний балл пользователя	Категория текста
147561	«Позади Госэкзамены и защита диплома. Осталось получить Диплом.»	4.5	5
153989	«В субботу довелось побывать на фесте в Крутушке. Что я могу сказать, на следующий год поеду обязательно.»	4.1	4
148724	«в жизни лучше ,чем на экране компа=)).»	3.3	3

В результате проведенной работы была достигнута основная цель - создание программного обеспечения для автоматизированной выгрузки текстовых данных с персональных страниц пользователей Вконтакте, обучавшихся в КФУ. Также была сформирована обучающая коллекция для нейронной сети, задачей которой является выявление признаков текста, присущих студентам с разными уровнями успеваемости. Результаты работы являются составным элементом функциональной психометрической модели когнитивно - поведенческих предикторов жизненной активности личности в рамках ее образовательной деятельности.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №19-18-00253, "Нейросетевая психометрическая модель когнитивно-поведенческих предикторов жизненной активности личности на базе социальных сетей")

Литература

1. Kosinski M. *Facial Width-to-Height Ratio Does Not Predict Self-Reported Behavioral Tendencies.* – Psychological Science, 2017. –№28(11) – Pp. 1675–1682.

2. Kosinski M. *Deep neural networks are more accurate than humans at detecting sexual orientation from facial images.* – Journal of Personality and Social Psychology, 2018. –№114(2) – Pp. 246–257.

3. Голодова А. А. *Социальные сети как инструмент профориентационной работы вуза на рынке образовательных услуг* // Проблемы экономики и менеджмента – 2014. – № 5(31).

4. *Документация об использовании API ВКонтакте [В Интернете].* // – 23.10.2019. – https://vk.com/dev/manuals

DEVELOPMENT OF A SYSTEM FOR AUTOMATIC FORMATION OF A TRAINING COLLECTION FOR AN ARTIFICIAL NEURAL NETWORK THAT DETERMINES THE CORRESPONDENCE BETWEEN THE CHARACTERISTICS OF TEXTS AND ACADEMIC PERFORMANCE

K.S. Nikolaev

The article discusses the process of uploading and analyzing data for training a neural network, the purpose of which is to identify the characteristics of the text typical for students with different degrees

of academic performance (students with average grade close to 5,4 and 3). Text data is loaded from the social network Vkontakte from open for reading pages of students of Kazan Federal University (current and already graduated). All texts from the pages are divided into training and test collections.
Keywords: text processing, neural networks, data analysis, VK API, social network, prognostics, academic success, psychometry

УДК 517.958

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ КРУГЛЫМ МИКРОРЕЗОНАТОРОМ С НЕКОНЦЕНТРИЧЕСКОЙ АКТИВНОЙ ЗОНОЙ

А.О. Октябрьская[1]

1 *alina.oktyabrskaya.21@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт Вычислительной Математики и Информационных Технологий

Предлагается метод математического моделирования лазерного излучения активными микрорезонаторами с отверстиями. Соответствующая нелинейная спектральная задача для системы граничных интегральных уравнений решается методом Галеркина с тригонометрическим базисом. Приводятся результаты численных экспериментов, подтаерждающие эффективность метода.

Ключевые слова: Метод Галеркина, спектральная задача для системы граничных интегральных уравнений, лазерное излучение

Лазеры на основе микрорезонаторов широко используются в фотонике. Один из подходов к изучению их характеристик основан на решении так называемой лазерной задачи на собственные значения [1]. В работе [1] задача решалась численно методом квадратур. Если форма резонаторов и отверстий круглая, то предпочтительнее может оказаться метод Галеркина, так как в этом случае матричные элементы записываются в явном виде [2]. В настоящей работе мы развиваем идеи, сформулированные в [2], и приводим результаты численных экспериментов, подтверждающие эффективность предлагаемого алгоритма.

Рассмотрим круглый резонатор с неконцентрическим круглым отверстием (рис. 1). Его форма состоит из двух областей Ω_1 и Ω_2. Эти области ограничены неконцентрическими окружностями Γ_1 и Γ_2 с радиусами a_1 и a_2, соответственно. Внешнюю область обозначим Ω_3. Введем локальные системы координат для областей Ω_1 и Ω_2, как показано на рисунке.

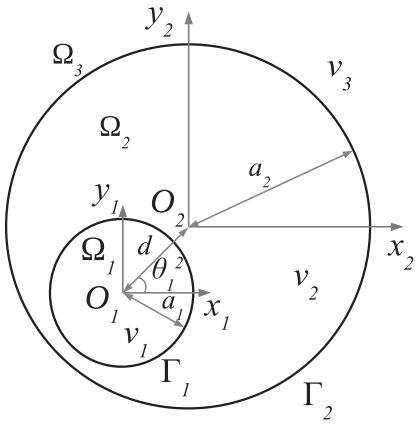


Рис. 1. Геометрия круглого резонатора

Пусть функция u описывает амплитуду собственной моды резонатора (см. [1]). Будем разыскивать такие числа $k > 0$ и $\gamma > 0$, при которых ненулевая функция u является решением уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k_m^2 u = 0, \quad x \in \Omega_m, \quad m = 1,2,3, \tag{1}$$

удовлетворяет условиям сопряжения

$$u^- = u^+, \quad \eta_m \frac{\partial u^-}{\partial r_m} = \eta_{m+1} \frac{\partial u^+}{\partial r_m}, \quad x \in \Gamma_m, \quad m = 1,2, \tag{2}$$

а также условию излучения Зоммерфельда на бесконечности.

В (1), (2) $k_m = k\nu_m$, $m = 1, 2, 3$. Для Н-поляризации $u = H_z$, $\eta_m = \nu_m^{-2}$, для Е-поляризации $u = E_z$ и $\eta_m = 1$. Символом r_m в (2) обозначим единичную нормаль к границе Γ_m, направленную вовне области Ω_m. Будем разыскивать решения задачи (1), (2) в классе комплекснозначных функций, которые непрерывно дифференцируемы в замкнутых областях $\overline{\Omega}_m$ и дважды непрерывно дифференцируемы в Ω_m, $m = 1, 2, 3$.

Используем интегральные представления функции u:

$$u(x) = -\int_{\Gamma_1} u^-(y) \frac{\partial G_1(x,y)}{\partial r_1(y)} dl(y) + \int_{\Gamma_1} G_1(x,y) \frac{\partial u^-(y)}{\partial r_1(y)} dl(y), \quad x \in \Omega_1, \tag{3}$$

$$u(x) = \int_{\Gamma_1} u^+(y) \frac{\partial G_2(x,y)}{\partial r_1(y)} dl(y) - \int_{\Gamma_1} G_2(x,y) \frac{\partial u^+(y)}{\partial r_1(y)} dl(y) - \int_{\Gamma_2} u^-(y) \frac{\partial G_2(x,y)}{\partial r_2(y)} dl(y) + \int_{\Gamma_2} G_2(x,y) \frac{\partial u^-(y)}{\partial r_2(y)} dl(y), \; x \in \Omega_2, \tag{4}$$

$$u(x) = \int_{\Gamma_2} u^+(y) \frac{\partial G_3(x,y)}{\partial r_2(y)} dl(y) - \int_{\Gamma_2} G_3(x,y) \frac{\partial u^+(y)}{\partial r_2(y)} dl(y), \quad x \in \Omega_3. \tag{5}$$

Здесь $G_m(x,y) = i/4\, H_0^{(1)}\left(k_m|x-y|\right)$ - фундаметральное решение уравнения Гельмгольца. Следуя [1], [2], сведем исходную задачу (1), (2) к нелинейной задаче на собственные значения для системы граничных интегральных уравнений Мюллера. Например, второе уравнение системы имеет следующий вид [2]:

$$u_1(x) + \int_{\Gamma_1} u_1(y) K^{1,1}(x,y) + \nu_1(y) K^{1,2}(x,y) dl(y) + \int_{\Gamma_2} u_2(y) K^{1,3}(x,y) + \nu_2(y) K^{1,4}(x,y) dl(y) = 0,$$

где $x \in \Gamma_1$. Собственные функции имеют вид

$$u_m(x) = u^+(x) = u^-(x), \nu_m = \frac{\eta_{m+1} + \eta_m}{2\eta_m} \frac{\partial u^+(x)}{\partial r_m(x)} = \frac{\eta_{m+1} + \eta_m}{2\eta_{m+1}} \frac{\partial u^-(x)}{\partial r_m(x)}, \quad x_m \in \Gamma_m.$$

где $m = 1,2$. Ядра в системе интегральных уравнений Мюллера имеют вид

$$K^{1,1}(x,y) = \frac{\partial\left(G_1(x,y) - G_2(x,y)\right)}{\partial r_1(y)}, \quad K^{1,2}(x,y) = \frac{2\eta_1 G_2(x,y) - 2\eta_2 G_1(x,y)}{\eta_2 + \eta_1},$$

$$K^{1,3}(x,y) = \frac{\partial G_2(x,y)}{\partial r_2(y)}, \quad K^{1,4}(x,y) = -\frac{2\eta_3 G_2(x,y)}{\eta_3 + \eta_2}.$$

Систему интегральных уравнений решим численно, используя метод Галеркина с тригонометрическим базисом. Собственные функции представим в виде:

$$u_m^{(N)}(t) = \frac{1}{a_m} \sum_{k=-N}^{N} \varphi_k^{(m)} e^{ikt}, \quad \nu_m^{(N)}(t) = \frac{1}{a_m} \sum_{k=-N}^{N} \psi_k^{(m)} e^{ikt}, \quad m = 1,2, t \in [0, 2\pi]$$

Следуя [2], [3], вычислим матричные элементы аналитические. Тогда нелинейная алгебраическая задача на собственные значения примет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{(1)} \\ \varphi^{(2)} \\ \psi^{(1)} \\ \psi^{(2)} \end{pmatrix} = 0.$$

Здесь A_{ij} – блочная матрица с элементами $a_{k,l}^{(i,j)}$, $i,j = 1,\ldots,4$, $k,l = -N,\ldots,N$, которые нелинейно зависят от собственных чисел k и γ; собственный вектор имеет вид $\varphi^{(i)} = (\varphi_{-N}^{(i)},\ldots,\varphi_{N}^{(i)})$, $\psi^{(i)} = (\psi_{-N}^{(i)},\ldots,\psi_{N}^{(i)})$. Матрицы A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, A_{33}, A_{34}, A_{43}, A_{44} диагональные. Элементы матрицы A_{ij} запишем в явном виде:

$$a_{l,l}^{(1,1)} = \frac{1}{a_1} + \frac{i\pi}{2} k_1 J_l(k_1 a_1) H_l^{(1)\prime}(k_1 a_1) - \frac{i\pi}{2} k_2 J_l(k_2 a_1) H_l^{(1)\prime}(k_2 a_1),$$

$$a_{l,l}^{(1,2)} = \frac{i\pi\eta_1}{\eta_2+\eta_1} J_l(k_2 a_1) H_l^{(1)}(k_2 a_1) - \frac{i\pi\eta_2}{\eta_2+\eta_1} J_l(k_1 a_1) H_l^{(1)}(k_1 a_1),$$

$$a_{k,l}^{(1,3)} = \frac{i\pi}{2} k_2 H_k^{(1)\prime}(k_2 a_2) J_{k-l}(k_2 d) J_l(k_2 a_1) \times e^{i(k-l)\theta_2^1},$$

$$a_{k,l}^{(1,4)} = -\frac{i\pi\eta_3}{\eta_3+\eta_2} H_k^{(1)}(k_2 a_2) J_{k-l}(k_2 d) J_l(k_2 a_1) \times e^{i(k-l)\theta_2^1},$$

где $k,l = -N,\ldots,N$; и θ_1^2 – угол между осью x_1 и вектором, соединяющим центры локальных систем координат O_1 и O_2, $\theta_2^1 = \pi + \theta_1^2$.

Приведем результаты численных экспериментов. В наших вычислениях $\nu_3 = 1$. Положим отношение радиуса внутренней окружности к внешней $\sigma = 0.2$ и вещественную часть показателя преломления активной среды $\alpha = 2.63$.

Если расстояние между центрами окружностей $d = 0$, т.е. окружности концентрические, мода $H_{10,1}$ имеет нормированную частоту $\kappa = k/a_2 = 5.4082$ и порог генерации лазерного излучения $\gamma = 2.13\,10^{-05}$. Для неконцентрических окружностей при $d = 0.5$ и $\theta_1^2 = 0$, получим $\kappa = 5.4305$ и $\gamma = 2.05\,10^{-03}$.

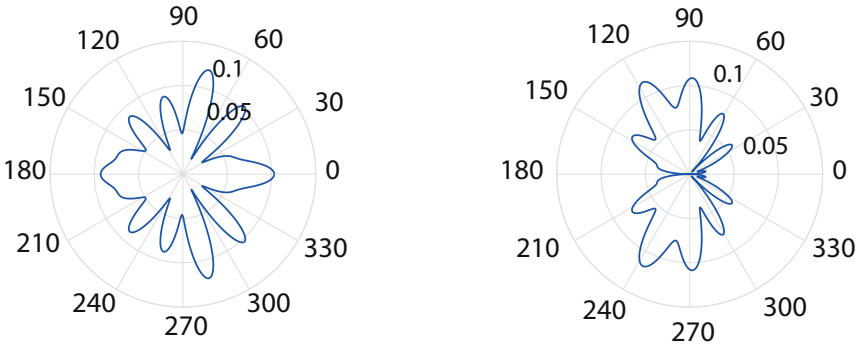


Рис. 2. Направленность излучения в дальней зоне для четной моды $H_{10,1}$ (слева) и нечетной (справа). Расстояние между центрами окружностей $d = 0.5$.

Следуя [1], построим график направленности излучения в дальней зоне (см. рис. 2). Для этого используем интегральное представление функции u в области Ω_3 и ассимптотическую формулу для больших аргумнтов функций Ханкеля. Коэффициент направленности посчитаем, следуя [1]. Его значение для $H_{10,1}$ при $d = 0$ равно $D = 2$, и при и $d = 0.5$ равно $D = 3.13$ для нечетной и $D = 3.29$ четной относительно оси x_1 собственной функции.

Литература

1. Smotrova, E. I., Tsvirkun, V., Gozhyk, I., Lafargue, C., Ulysse, C., Lebental, M., Nosich, A. I., *Spectra, thresholds, and modal fields of a kite-shaped microcavity laser* // Journal of the Optical Society of America B: Optical Physics. – 2013. – Vol.30. – №6. – pp. 1732–1742.

2. Oktyabrskaya A. O., Spiridonov A. O., Karchevskii E. M.,*Numerical modeling of active microcavities with piercing holes using the Muller boundary integral equations and the Galerkin method* // Proceeding of the International Conference Days on Diffraction. – 2019. – in press.

3. Boriskina, S. V., Sewell, P., Benson, T. M., Nosich A. I.,*Accurate simulation of two-dimensional optical microcavities with uniquely solvable boundary integral equations and trigonometric Galerkin discretization* // Journal of the Optical Society of America B: Optical Physics. – 2004. – Vol.21. – №3. – pp. 393–402.

NUMERICAL MODELLING OF LASING IN CIRCULAR MICROCAVITIES WITH NON-CONCENTRIC ACTIVE ZONES

A.O. Oktyabrskaya

A method of mathematical modeling of lasing in active microcavities with piercing holes is proposed. A corresponding nonlinear eigenvalue problem for a set of boundary integral equations is solved numerically by the Galerkin method with the trigonometric basis. Numerical examples which illustrate the effectiveness of the proposed algorithm are presented.
Keywords: Galerkin Method, a spectral boundary integral equations, laser emittion

УДК 532.5.032

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПРОНИЦАЕМОСТИ БЫТОВОГО ФИЛЬТРА

Д.А. Панин[1]

1 *dany.panin99@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Разработан алгоритм решения обратной задачи определения эффективной проницаемости заполнителя картриджа бытового фильтра для очистки воды. Задача состоит в идентификации величины проницаемости, входящей в качестве параметра в постановку прямой задачи о процессе фильтрации. Прямая задача формулируется в рамках математической модели одномерной однофазной фильтрации в поле силы тяжести с динамическими граничными условиями для давления. Модель описывает две стадии процесса: а) фильтрация со свободным истечением воды из фильтра; б) фильтрация с постепенным затоплением выходного сечения фильтра в резервуаре-приемнике. Обратная задача решается путем минимизации функционала отклонения модельной и замеренной динамики снижения свободной поверхности воды в резервуаре-источнике. Показано согласование решений, полученных в период только первой стадии и в период обеих стадий процесса с дополнительным неизвестным параметром – моментом начала второй стадии. Предложен упрощенный алгоритм по двум замерам положения поверхности воды и выполнена оценка его надежности. Достоверность решения оценивалась по лабораторным измерениям проницаемости фильтра.

Ключевые слова: однофазная фильтрация, абсолютная проницаемость, эксперимент, обратная задача, фильтр

Введение

Бытовые фильтры очистки воды характеризуются практически повсеместным использованием. Они предельно просты в эксплуатации, и единственная задача их обслуживания заключается в своевременной замене фильтрующего элемента – картриджа. Производители фильтров указывают ресурс работы картриджа, измеряемый в суммарном объеме очищенной воды. Поскольку данную величину на практике оценить практически невозможно, то рекомендуется некоторый усредненный временной интервал замены картриджей, который, однако, может существенно варьироваться в зависимости от интенсивности использования фильтра или степени загрязнения очищаемой воды. В качестве объективного альтернативного показателя может быть использована степень снижения проницаемости фильтрующего элемента, которая, требует простого метода измерения проницаемости, доступного каждому пользователю. В настоящей работе приводятся результаты оценки применимости подобного алгоритма.

Постановка задачи

Схема фильтра указана на рис. 1. Областью решения прямой задачи о фильтрации воды является область фильтрующего картриджа. Уровени воды в резервуаре-источнике и резервуаре-приемнике (при затоплении выходного сечения фильтра) определяют граничные значения давления в жидкости.

Процесс полагаем одномерным вдоль вертикальной оси y, фильтр однородным с эффективной проницаемостью k, насыщение фильтра водой считаем полным, а течение - однофазным, капиллярными силами пренебрегаем. С учетом закона фильтрации Дарси в поле силы тяжести [1] запишем уравнение неразрывности:

$$\operatorname{div} u = \operatorname{div}\left(-\frac{k}{\mu}\left[\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g\right]\right) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

где u - скорость фильтрации жидкости (м/с), μ - коэффициент динамической вязкости фильтрующейся жидкости (Па с), p-давление (Па), ρ - плотность жидкости (кг/м^2), g - ускорение свободного падения (м/с^2).

Решение уравнения (1) дает линейное распределение давления в фильтре, определяемое граничными условиями $p(y=0) = p_0$ и $p(y=L) = p_L$. Граничные значения давления равны гидростатическому давлению на нижней и верхней границах фильтра, определяемых значениями высоты

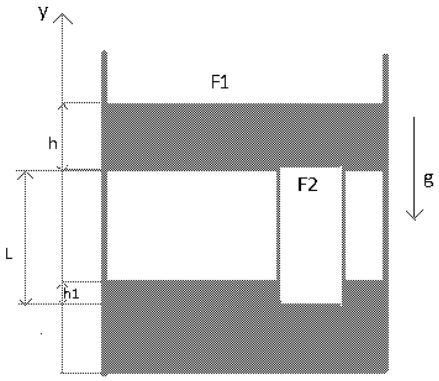


Рис. 1. Схема фильтра

свободной поверхности:

$$p(y) = p_0 + y(p_L - p_0)/L, \quad p_0 = \rho g\, h_1(t), \quad p_L = \rho g\, h(t).$$

Решение прямой задачи

Процесс фильтрации может состоять из двух стадий: а) свободное истечение воды из нижнего сечения фильтра $(0 \le t \le T:\ h_1(t) = 0)$ (соответствующее решение будем обозначать нижним индексом (1)) и б) затопление нижнего сечения фильтра $(t > T:\ h_1(t) > 0)$ (соответствующее решение будем обозначать нижним индексом (2)). Для вычисления скорости фильтрации запишем производную давления по y:

$$0 \le t \le T:\ \frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \frac{h(t)}{L}; \qquad t > T:\ \frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \frac{h(t) - h_1(t)}{L}.$$

Подставляя эти значения в закон Дарси, учитывая, что $u = \frac{F_1}{F_2} h$ и $h(t) + \frac{h_1(t)}{m} = \tilde{h} = const$, получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения от функции $h(t)$

$$\dot{h}_{(1)} = -\frac{k}{\mu}\frac{F_2}{F_1}\left(\frac{h_{(1)}}{L} + 1\right)\rho g, \quad \dot{h}_{(2)} = -\frac{k}{\mu}\frac{F_2}{F_1}\left(\frac{(m+1)h_{(2)} - m\tilde{h}}{L} + 1\right)\rho g,$$

где F_1, F_2 - площади поперечного сечения сосуда-приемника и фильтра, $m = \frac{F_1}{F_1 + F_2}$.

Введем безразмерные переменные путем нормировки на характерные масштабы:

$$\bar{h} = \frac{h}{L}, \quad \bar{u} = \frac{u}{u_0}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \bar{k} = \frac{k}{k_0}, \quad t_0 = \frac{F_1 L}{F_2 u_0}, \quad u_0 = \frac{k_0}{\mu}\rho g, \quad \bar{\tilde{h}} = \frac{\tilde{h}}{L},$$

где $k_0 = 10^{-10}$ м^2 – характерная проницаемость. Тогда последние уравнения примут вид

$$\dot{h}_{(1)} = -k(h_{(1)} + 1), \quad \dot{h}_{(2)} = -k(h_{(2)}(1+m) - m\tilde{h} + 1).$$

Их решения представим в виде обобщенной функции $H(t,k,T)$ (Рис.2):

$$H(t,k,T) = \begin{cases} (h_0 + 1)e^{-kt} - 1, & 0 < t \le T \\ \frac{\tilde{h}+1}{m+1} e^{-k(m+1)(t-T)} + \frac{m\tilde{h}-1}{m+1}, & t > T \end{cases},$$

где T – момент времени, когда нижнее сечение фильтра погружается в жидкость.

Решение обратной задачи

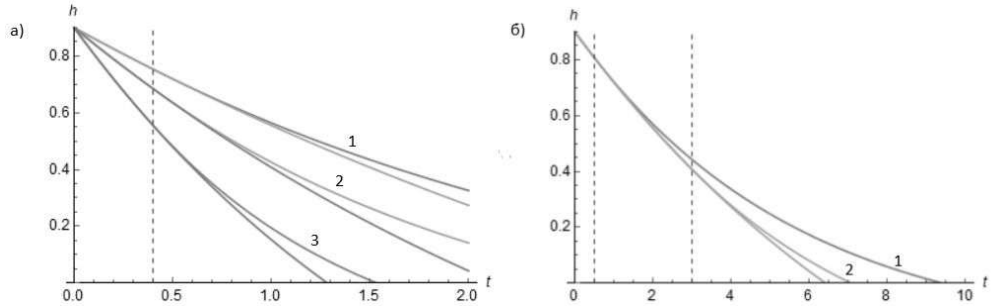


Рис. 2. а)Зависимость функции $H(t,k,H)$ а) от k : 1) $k=0.2$, 2) $k=0.3$, 3) $k=0.5$; б) от T: 1) $T=0.5$ с, 2) $T=3$ с.

Задача идентификации проницаемости k по результатам замеров динамики уровня свободной поверхности $h(t)$ является обратной и при наличии обеих стадий процесса содержит дополнительный неизвестный параметр – момент T начала второй стадии. Такую задачу будем решать путем минимизации функционала отклонения

$$R(k,T)=\Delta t\sum_{i=1}^{N}(H(t_i,k,T)-H_i)^2,$$

где H_i – значения высоты Н, замеренные в момент времени t_i, N – количество замеров. Задача минимизации решалась методом Левенберга-Марквардта [2, 3].

На рис. 3 показан график зависимости погрешности определения проницаемости δ_k от погрешности замеров координат поверхности δ_h в рамках первой стадии. Видно, в частности, что погрешность замеров на уровне 10% приводит примерно к 15% погрешности определения проницаемости.

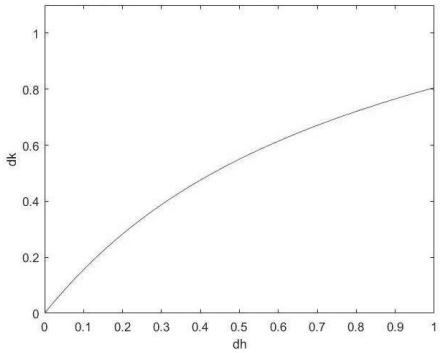


Рис. 3. Чувствительность решения к погрешности замеров на первой садии

Было выполнено сравнение решений, полученных в период только первой стадии и в период обеих стадий процесса. При исследовании устойчивости решения к погрешности исходных данных при различном количестве замеров предложен упрощенный алгоритм идентификации проницаемости по двум замерам положения поверхности воды и выполнена оценка его надежности. Все предложенные алгоритмы протестированы на фактических экспериментах. Достоверность решения оценивалась по результатам специальных лабораторных измерений проницаемости фильтра.

Изложенные алгоритмы могут быть положены в основу простого в использовании доступного способ определения проницаемости и соответственно степени загрязнения сменных картриджей фильтров для их своевременной замены.

Список литературы

1. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. – М.: Недра, 1984, 212 с.

2. Levenberg, K. 1944. A Method for the Solution of Certain Non-Linear Problems in Least Squares // Quarterly of Applied Mathematics 2, P.164–168.

3. Marquardt, D. 1963. An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters // SIAM Journal on Applied Mathematics 11(2), P.431–441.

ALGORITHM OF HOUSEHOLD FILTER PERMEABILITY IDENTIFICATION

D.A. Panin

Algorithm has been developed for solving the inverse problem of determining the effective permeability of the aggregate of a household filter cartridge for water treatment. The task is to identify the value of permeability, which is included as a parameter in the formulation of the direct problem of the filtering process. The direct problem is formulated in the framework of the mathematical model of one-dimensional single-phase flow in the field of gravity with dynamic boundary conditions for pressure. The model describes two stages of the process: a) filtration with free flow of water from the filter; b) filtration with gradual flooding of the output section of the filter in the receiver tank. The inverse problem is solved by minimization the functional deviations of the model and measured dynamics of the decrease in the free surface of the water in the source tank. The coordination of decisions obtained during the period of only the first stage and during the period of both stages of the process with an additional unknown parameter - the moment of the beginning of the second stage, was shown. A simplified algorithm was proposed for two measurements of the position of the surface of the water and an assessment of its reliability was performed. The reliability of the solution was evaluated by laboratory measurements of filter permeability.

Keywords: single - phase flow, absolute permeability, experiment, inverse problem, filter

УДК 519.642.7

О КОРРЕКТНОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ АППРОКСИМАТИВНЫМИ МЕТОДАМИ

С.В. Панина[1], Л.Ч. Мингалеева[2]

1 *svpn.1402@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

2 *minga.minga.m@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В статье приводится пара пространств, являющихся в некотором смысле сужением пространств непрерывных функций, в которых рассматриваемая задача решения сингулярного интегро-дифференциального уравнения первого рода на отрезке вещественной оси корректно поставлена. Установлена однозначная разрешимость вычислительных схем метода моментов и метода коллокаций и сходимость указанных методов в выбранном пространстве, и как следствие, равномерная сходимость.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное сингулярное уравнение, корректность задачи, однозначная разрешимость, сходимость аппроксимативного метода

Рассмотрим сингулярное интегро-дифференциальное уравнение (с.и.д.у.) вида

$$Kx \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x'(\tau)}{t-\tau}d\tau + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}h(t;\tau)x(\tau)d\tau = y(t),\ -1 < t < 1, \tag{1}$$

где $x(\tau)$ - искомая, $y(t)$ и $h(t,\tau)$ - известные функции, при краевых условиях

$$x(-1) = x(1) = 0, \tag{2}$$

а сингулярный интеграл

$$I\varphi \equiv I(\varphi;t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{t-\tau}d\tau$$

понимается в смысле главного значения по Коши.

Согласно классической теории, такие уравнения относятся к некорректно поставленным задачам, и некорректность может быть связана с неединственностью решения, его отсутствием или неустойчивостью. Это означает, что для решения данной задачи нельзя применять обычные приближенные методы. Однако последние исследования, проводимые в Казанском университете ([1], [2], [3]), выявили, что в отдельных случаях можно выделить корректную постановку задачи решения уравнения (1) с последующим применением аппроксимативных методов решения.

В данной статье уравнение (1) рассматривается на паре пространств (X, Y).

Обозначим через X пространство непрерывно дифференцируемых на [-1, 1] функций $x(t)$, удовлетворяющих условию (2), таких, что $\rho I x'$ является непрерывной функцией. Норму определим следующим образом

$$||x||_X = ||\rho x'||_C + ||\rho I x'||_C.$$

Здесь

$$||x||_C = \max_{-1\le t\le 1} |x(t)|,\ \rho(t) = \sqrt{1-t^2}.$$

В качестве пространства правых частей Y выберем пространство непрерывных функций $y(t)$ таких, что $I(\rho y)$ также непрерывная функция, с нормой

$$||y||_Y = ||\rho y||_C + ||I(\rho y)||_C.$$

На этой паре пространств установлена корректность задачи.

Для этого уравнения построены вычислительные схемы метода моментов и метода коллокаций.

Метод моментов. Приближенное решение уравнения (1) ищется в виде

$$x_n(t) = \sqrt{1-t^2}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k U_{k-1}(t) = \sum_{k=1}^{n}\gamma_k \sin k\arccos t, \tag{3}$$

где $U_{k-1}(t)$ - полиномы Чебышева II-го рода. Применяя условие равенства нулю n моментов невязки по полиномам Чебышева II-го рода, найдем неизвестные коэффициенты $\gamma_k,\ k = \overline{1,n}$ из системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$(j+1)\gamma_{j+1} + \sum_{k=1}^{n}\gamma_k\beta_{kj} = y_j,\ j = \overline{0,n-1}, \tag{4}$$

где

$$\beta_{kj} = \frac{2}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\tau^2}\sqrt{1-t^2}h(t;\tau)U_{k-1}(\tau)U_j(t)d\tau dt,$$

$$y_j = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}y(t)U_j(t)dt.$$

Метод коллокаций. Приближенное решение ищется так же, как и в методе моментов, в виде (3). Применяя условие равенства нулю невязки в узлах коллокации, являющихся корнями полинома Чебышева I-го рода, найдем неизвестные коэффициенты $\gamma_k,\ k = \overline{1,n}$ из СЛАУ

$$\sum_{k=1}^{n}\gamma_k[kU_{k-1}(t_j) + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\tau^2}q(t_j;\tau)U_{k-1}(\tau)d\tau] = y(t_j),\quad j = \overline{0,n-1}, \tag{5}$$

$$t_j = \cos\frac{2j+1}{2n}\pi,\quad j = \overline{0,n-1}.$$

Через $W^r H_\alpha$ будем обозначать множество функций, имеющих непрерывную производную r - го порядка, удовлетворяющую условию Гельдера с показателем $\alpha,\ 0 < \alpha \le 1,\ r \ge 0$.

Установлена

Теорема. *Пусть выполнены условия:*

1) функция $y \in W^r H_\alpha$*, ядро* $h(t;\tau) \in W^r H_\alpha$ *по переменной* t *равномерно относительно* τ, $0 < \alpha \leq 1$, $r \geq 0$;

2) с.и.д.у. (1) однозначно разрешимо в пространстве X *при любой правой части* y *из* Y.

Тогда, начиная с некоторого $n \in \mathbb{N}$*, СЛАУ (4), (5) имеют единственное решение* $\{\gamma_k^*\}$, $k = \overline{1,n}$. *Приближенные решения*

$$x_n^*(t) = \sqrt{1-t^2}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k^* U_{k-1}(t)$$

сходятся к точному $x^*(t)$ *в пространстве* X *со скоростью*

$$||x_n^* - x^*||_X = O\Big(\frac{ln\ n}{n^{r+\alpha}}\Big),\ 0 < \alpha \leq 1,\ r \geq 0.$$

Следствие. *В условиях теоремы будет иметь место равномерная сходимость приближенных решений к точному со скоростью*

$$||x_n^* - x^*||_C = O\Big(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\Big),\ 0 < \alpha \leq 1,\ r \geq 0.$$

$$||\rho(x_n^{*\prime} - x^{*\prime})||_C = O\Big(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\Big),\ 0 < \alpha \leq 1,\ r \geq 0.$$

Литература

1. Габдулхаев Б. Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. Численный анализ* // – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. – 288 с.

2. Ожегова А. В. *О равномерной аппроксимации решения сингулярного интегро-дифференциального уравнения I рода* // Вестник СамГУ – Естественнонаучная серия. –2013. –Т. 107. –№ 6. – С. 54-60.

3. Хайруллина Л. Э. *Равномерная сходимость приближенных решений сингулярного уравнения первого рода с ядром Коши* // Дисс. канд. физ.-мат. наук. – Казань, 2011. – 103 с.

ON THE CORRECT SOLUTION OF A SINGULAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION BY APPROXIMATIVE METHODS

S.V. Panina, L.C. Mingaleeva

The article presents a pair of spaces that are, in a sense, the restriction of spaces of continuous functions in which the problem of solving the singular integro-differential equation of the first kind on a segment of the real axis is correctly posed. The unique solvability of the computational schemes of the method of moments and the method of collocation and the convergence of these methods in the selected space, and as a result, uniform convergence, are established.

Keywords: integro-differential singular equation, correctness of the problem, unique solvability, convergence of the approximative method

УДК 519.688, 532.546

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С СОРБИРУЕМОЙ ПРИМЕСЬЮ

К.А. Поташев[1], В.В. Раздобудько[2]

1 *kpotashev@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики имени Н.И. Лобачевского

2 *vlad.razdobudko.95@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики имени Н.И. Лобачевского

Разработана эффективная численная схема для решения уравнения переноса концентрации сорбируемого вещества однофазной жидкостью в пористой среде, проведен анализ ее сходимости по пространственному шагу расчетной сетки. Расчетная схема использует локальное аналитическое интегрирование кинетики обратимой сорбции и позволяет значительно увеличить шаг по времени.

Ключевые слова: однофазная фильтрация, обратимая сорбция, TVD схемы, численно - аналитические схемы

Постановка задачи

Моделирование переноса сорбируемых примесей потоком флюида в пористой среде имеет большое число приложений, среди которых можно отметить процесс закачки меченой трассерным веществом жидкости в трещины многозонного гидроразрыва пласта (МГРП) для последующей диагностики притока к каждой отдельной трещине.(рис. 1).

Система уравнений, описывающих рассматриваемый процесс [1]

- уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ x \in D, \tag{1}$$

- уравнение переноса индикатора

$$\left(m\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial t}\right) + u\frac{\partial c}{\partial x} = 0,\ x \in D, \tag{2}$$

где c – массовая концентрация трассера на единицу объема флюида (кг/м^3), a – массовая концентрация сорбированного трассера на единицу объема флюида (кг/м^3), u – скорость фильтрации жидкости (м/с).

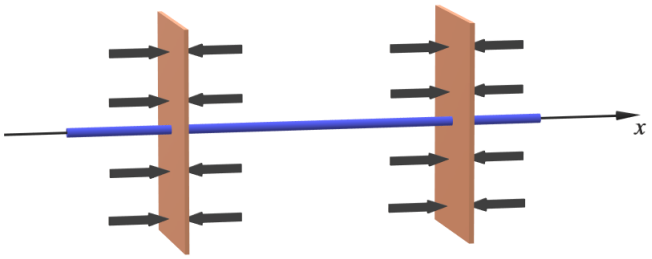


Рис. 1. Схема одномерного потока вблизи трещин МГРП

Решением уравнения (1) является условие постоянства вдоль всей трубки тока скорости фильтрации:

$$u(x,t) = u(t).$$

Запишем уравнение кинетики сорбции, входящей в уравнение (2)

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\alpha(c) - a}{\tau},$$

где τ – характерное время сорбции, а в качестве равновесной величины сорбции α(c) при данной концентрации с будем использовать изотерму сорбции Ленгмюра:

$$\alpha(c) = \frac{Ac}{B + c}.$$

где A – сорбционная емкость (кг/м^3), B – константа полунасыщения (кг/м^3).

Начальные и граничные условия для уравнения (2) имеют вид

$$t = 0,\ x \in [0, L] : a = 0, c = 0, \tag{3}$$

$$u(t) > 0,\ c(x = 0, t) = c_0;\ u(t) < 0,\ c(x = L, t) = 0. \tag{4}$$

Алгоритм численного решения задачи

Будем использовать метод конечных разностей (МКР) — численный метод решения дифференциальных уравнений, основанный на аппроксимации производных разностными схемами. МКР является сеточным методом (рис. 2).

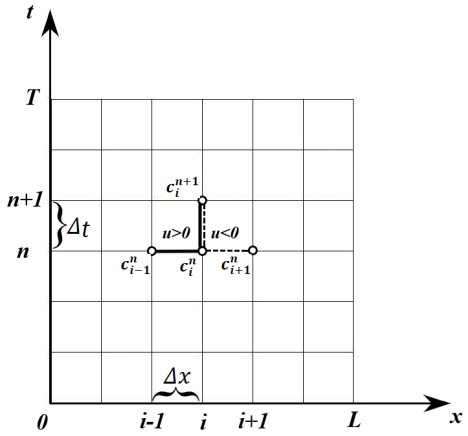


Рис. 2. Шаблон МКР – схемы и расчетной сетки

Запишем явную разностную схему типа «уголок»

$$\frac{c_i^{n+1}-c_i^n}{\Delta t}+u\frac{c_i^n-c_{i-b}^n}{\Delta x}+\frac{\alpha(c_i^n)-a_i^n}{\tau}=0, \tag{5}$$

$$\frac{a_i^{n+1}-a_i^n}{\Delta t}=\frac{\alpha(c_i^n)-a_i^n}{\tau},\ i \quad = \quad \begin{cases}1,\dots,N-1, & u>0\\ N-2,\dots,0, & u<0\end{cases},\ b \quad = \quad \begin{cases}1, & u>0\\ -1 & u<0\end{cases}$$

где $\Delta x = \frac{L}{N-1}$ – расчетный шаг сетки по пространству, Δt – расчетный шаг сетки по времени, N – количество узлов, T – конечное время расчета.

Шаблон указанной съемы приведен на рис. 2.

$$c_i^{n+1}=c_i^n-u\Delta t\frac{c_i^n-c_{i-b}^n}{\Delta x}-\Delta t\frac{\alpha(c_i^n)-a_i^n}{\tau} \tag{6}$$

В отсутствии сорбционного слагаемого схемы (5), устойчивость определяется условием Куранта:

$$\Delta t < C\Delta x.$$

Для снижения схемной вязкости будем использовать метод TVD [2]. Схема TVD для уравнения (6) имеет вид

$$\frac{c_i^{n+1}-c_i^n}{\Delta t}+u\left[\Phi\frac{c_{i+1}^n-c_{i-1}^n}{2\Delta x}+(1-\Phi)\frac{c_i^n-c_{i-b}^n}{\Delta x}\right]+\frac{\alpha(c_i^n)-a_i^n}{\tau}=0,$$

где Φ – функция–ограничитель потока[3].

Рассмотрим следующие варианты функций–ограничителей потока / наклона Φ Superbee, Ospre и Minmod.

Сравнение расчетных кривых выноса трассера (при $A = 0$) задачи (2) по схемам без использования TVD и с различными ограничителями с аналитическим решением (рис.3).

Наложение сорбции оказывает влияние на устойчивость схемы с использованием TVD при достаточно малых значениях τ (рис.4а).

Поэтому будем использовать вспомогательный метод по результатам вычислений которого наблюдается устойчивость при значительно меньшем значении τ (рис.4б):

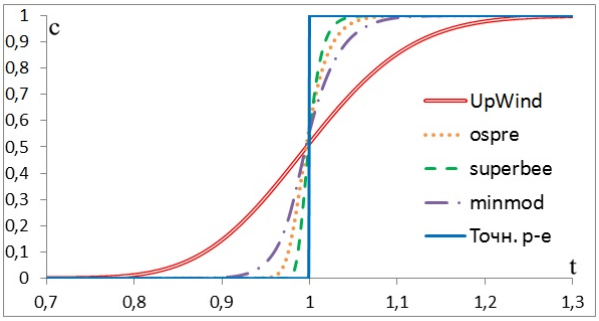
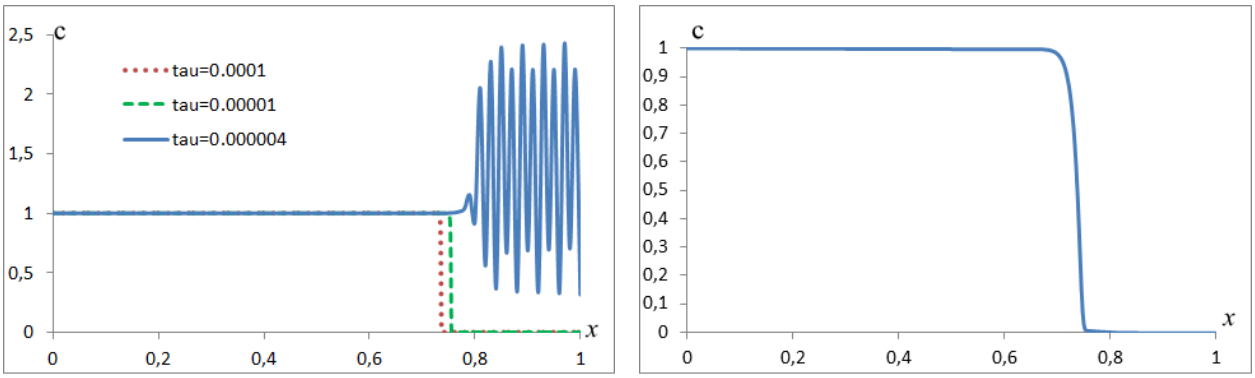


Рис. 3. Расчетные кривые выноса трассера (N=101, C=0.1)



а) б)

Рис. 4. Расчетные профили концентрации (N=10001, t=0.8, A=0.1, B=0.1, C=0.1)

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial a}{\partial t} \Rightarrow \int_c^{\hat{c}} dc = -\int_a^{\hat{a}} da \Rightarrow \hat{c} = c - (\hat{a} - a),$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\alpha(c) - a}{\tau} \Rightarrow \int_a^{\hat{a}} \frac{da}{\alpha(c) - a} = \int_0^T \frac{\partial t}{\tau} \Rightarrow T(\hat{a}) = F(A, B, \tau, c, a, \hat{a}),\ (0 < t < T),$$

Отсюда, при помощи метода половинного деления, можно найти значение $\hat{a}$, а затем и величину $\hat{c}$. При этом время работы программы при вычислениях сокращается на 10 - 15 %.

Предложенная схема может быть эффективно использована для сокращения вычислительных затрат при численном моделировании переноса примесей с учетом их сорбции.

Литература

1. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. *Движение жидкостей и газов в природных пластах.* – М.: Недра, 1984. – С.14-20.

2. Хартен А. *Схемы высокого разрешения для гиперболических законов сохранения* – Ж. Вычисл. Физика., 1983, 49 (2). – С. 357–393

3. Кузьмин Д. *О конструкции универсальных ограничителей потока для неявных МКЭ с согласованной массовой матрицей. I. Скалярная конвекция* – Ж. Вычисл. Физика., 2006, 219 (2). – С. 513-531.

NUMERICAL SIMULATION OF SINGLE-PHASE FLOW IN POROUS MEDIA WITH DISSOLVED SORBED COMPONENT

K.A. Potashev, V.V. Razdobudko

An effective numerical scheme was developed to solve the equation of transfer of the concentration of

the sorbed substance by a single-phase liquid in a porous medium, and the analysis of its convergence by the spatial step of the calculated grid was carried out. The design scheme uses local analytical integration of reversible sorption kinetics and allows a significant increase in time step.
Keywords: single - phase flow, reversible sorption, porous media, TVD schemes, numerical and analytical schemes

УДК 517.958

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ФОТОННО-КРИСТАЛЛИЧЕСКИМ РЕЗОНАТОРОМ

А.И. Репина[1]

1 *annirepina@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт выислительной математики и информационных технологий

В данной работе решается задача на собственные значения для активных микрорезонаторов круглой формы с периодическим набором сквозных отверстий. А именно, предлагается новая удобная для численного решения формулировка задачи для фотонно-кристаллических резонаторов в виде нелинейной задачи на собственные значения для системы граничных интегральных уравнений Мюллера. Предлагается новая компьютерная реализация метода Галеркина и рассчитываются спектральные характеристики фотонно-кристаллических резонаторов, имеющие низкие пороги генерации излучения и разреженность спектра.

Ключевые слова: Микрорезонаторный лазер, задача на собственные значения, активный микрорезонатор, граничные интегральные уравнения, метод Галеркина

Рассмотрим геометрию резонатора с произвольным числом неконцентрических периодических круглых отверстий внутри (см. Рис. 2). Предположим, что области $\Omega_l, l = 2, ..., n,$ на плоскости R^2 ограничены контурами $\Gamma_l, l = 2, ..., n$. Аналогично, область Ω_{n+1} ограничена $n+1$ контуром: $\Gamma_1, ..., \Gamma_n,$ и Γ_{n+1}. В этом случае внешняя область определяется как $\Omega_o = R^2 \setminus \bigcup_{l=1}^{n+1} \overline{\Omega}_{n+1}$. Определим все контуры Γ_l как окружности, а показатель преломления — как кусочно-постоянную функцию. В ядре Ω_{n+1} показатель преломления равен $\nu_{n+1} = \alpha_{n+1} - i\gamma$, в отверстиях и в неограниченной области показатель преломления является действительным числом $\nu_l = \alpha_o, l = 1, 2, ..., n,$ и $\nu_o = \alpha_o$.

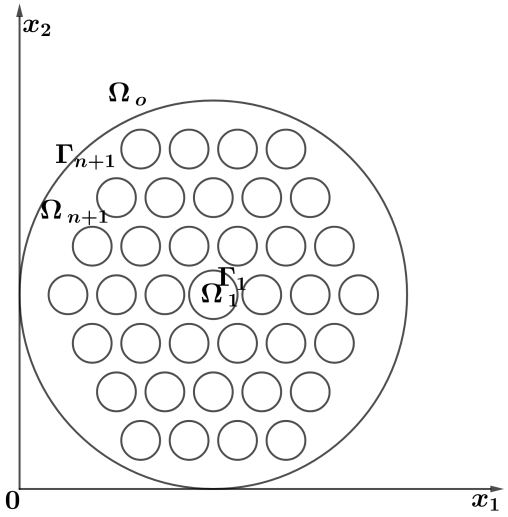


Рис. 1. Геометрия фотонно-кристаллического резонатора

Требуется (см., например, [1]) найти неизвестные пороги генерации лазерного излучения $\gamma > 0$ и значения волнового числа $k > 0$, которые дают нетривиальные решения уравнений Гельмгольца

$$\triangle u + k_l^2 u = 0, \quad x \in \Omega_l, l = 1, ..., n, n+1, o, \tag{1}$$

удовлетворяющих вместе с u условиям сопряжения

$$u^- = u^+, \quad x \in \Gamma_l, l = 1, ..., n, n+1, \tag{2}$$

$$\eta_l \frac{\partial u^-}{\partial r_l} = \eta_{n+1} \frac{\partial u^+}{\partial r_l}, \quad x \in \Gamma_l, l = 1, ..., n, \quad \eta_{n+1} \frac{\partial u^-}{\partial r_{n+1}} = \eta_o \frac{\partial u^+}{\partial r_{n+1}}, \quad x \in \Gamma_{n+1}, \tag{3}$$

и условию излучения Зоммерфельда на бесконечности

$$\frac{\partial u}{\partial r} - ik_o u = o\Big(\frac{1}{\sqrt{r}}\Big), \quad r \to \infty. \tag{4}$$

Здесь u —комплексная функция, описывающая амплитуду собственной моды микрорезонатора, $k_l = k\nu_l, l = 1, ..., n, n+1, o$, в случае H-поляризации $u = H_3$, $\eta_l = \nu_l^{-2}$, $\frac{\partial u}{\partial r_l}$ —это нормальная производная к контуру Γ_l, направленная изнутри области Ω_l.

Фундаментальные решения уравнений Гельмгольца (1) можно представить как $G_l(k, \gamma; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_l|x - y|)$. Мы применяем метод аналитической регуляризации [2], используя представление собственных функций u в области Ω_{n+1} (в остальных областях представления аналогичны):

$$u(x) = \sum_{l=1}^{n} \int_{\Gamma_l} \Big(u^+(y) \frac{\partial G_{n+1}(x,y)}{\partial r_l(y)} - G_{n+1}(x,y) \frac{\partial u^+(y)}{\partial r_l(y)} \Big) dl(y)$$
$$- \int_{\Gamma_{n+1}} \Big(u^-(y) \frac{\partial G_{n+1}(x,y)}{\partial r_{n+1}(y)} - G_{n+1}(x,y) \frac{\partial u^-(y)}{\partial r_{n+1}(y)} \Big) dl(y), \quad x \in \Omega_{n+1},$$

Построим систему граничных интегральных уравнений, которая удовлетворяет собственным функциям задачи (1)-(4). Зададим новые функции, следуя условиям сопряжения (2), (3): $u_l(x) = u^+(x) = u^-(x), \quad x \in \Gamma_l, l = 1, ..., n+1, \quad v_l(x) = \frac{\eta_l + \eta_{n+1}}{2\eta_l} \frac{\partial u^+(x)}{\partial r_l(x)} = \frac{\eta_l + \eta_{n+1}}{2\eta_{n+1}} \frac{\partial u^-(x)}{\partial r_l(x)}, \quad x \in \Gamma_l, l = 1, ..., n, \quad v_{n+1}(x) = \frac{\eta_o + \eta_{n+1}}{2\eta_{n+1}} \frac{\partial u^+(x)}{\partial r_{n+1}(x)} = \frac{\eta_o + \eta_{n+1}}{2\eta_o} \frac{\partial u^-(x)}{\partial r_{n+1}(x)}, \quad x \in \Gamma_{n+1}.$

Применяя условия (2), (3), сведем исходную задачу (1)-(4) к нелинейной спектральной задаче для системы интегральных уравнений Мюллера (см., напр., [2], [3]). Приведем здесь одно уравнение этой системы:

$$u_l(x) + \sum_{k=1}^{l-1} \int_{\Gamma_k} \Big(u_k(y) K^{2l-1,k}(x,y) + v_k(y) K^{2l-1,k+1}(x,y) \Big) dl(y) + \int_{\Gamma_l} u_l(y) K^{2l-1,2l-1}(x,y) dl(y)$$
$$+ \int_{\Gamma_l} v_l(y) K^{2l-1,2l}(x,y) dl(y) + \sum_{k=l+1}^{n} \int_{\Gamma_k} \Big(u_k(y) K^{2l-1,2k-l}(x,y) + v_k(y) K^{2l-1,2k}(x,y) \Big) dl(y)$$
$$+ \int_{\Gamma_{n+1}} \Big(u_{n+1}(y) K^{2l-1,2n+1}(x,y) + v_{n+1}(y) k^{2l-1,2(n+1)}(x,y) \Big) dl(y) = 0, \quad x \in \Gamma_l, l = 1, ..., n, \tag{5}$$

где ядра являются непрерывными или слабосингулярными (см. [2]), например,

$$K^{2l-1,2l-1}(x,y) = \frac{\partial G_l(x,y)}{\partial r_l(y)} - \frac{\partial G_{n+1}(x,y)}{\partial r_l(y)}, \quad K^{2l-1,2l}(x,y) = \frac{2\eta_l}{\eta_l + \eta_{n+1}} G_{n+1}(x,y) - \frac{2\eta_{n+1}}{\eta_l + \eta_{n+1}} G_l(x,y),$$

$$K^{2l,2l-1}(x,y) = \frac{\partial^2 G_l(x,y)}{\partial r_l(x) \partial r_l(y)} - \frac{\partial^2 G_{n+1}(x,y)}{\partial r_l(x) \partial r_l(y)}, \quad K^{2l,2l}(x,y) = \frac{2\eta_l}{\eta_l + \eta_{n+1}} \frac{\partial G_{n+1}(x,y)}{\partial r_l(x)} - \frac{2\eta_{n+1}}{\eta_l + \eta_{n+1}} \frac{\partial G_l(x,y)}{\partial r_l(x)},$$

где $k, l = 1, ..., n$.

Мы используем метод Галеркина для нахождения численных приближений решений задачи (5). Выберем систему линейно независимых тригонометрических функций, чтобы найти приближенные решения в виде $\varphi_l(t_l^l) = \sum_{k=-N}^{N} \varphi_k^{(l)} e^{ikt_l^l}, \quad \psi_l(t_l^l) = \sum_{k=-N}^{N} \psi_k^{(l)} e^{ikt_l^l}, \quad$ где $l = 1, ..., n+1, \quad t_l^l \in [0, 2\pi]$ и $\{e^{ikt_l^l}\}$ — тригонометрический базис.

После представления уравнения (5) и аналогичных ему в локальных системах координат каждой окружности, следуя [3], используем формулы Графа для функций Ханкеля. Наконец, получим нелинейную формулировку задачи на собственные значения в матричной форме

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,2(n+1)} \\ A_{2,1} & \dots & A_{2,2(n+1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{2n+1,1} & \dots & A_{2n+1,2(n+1)} \\ A_{2(n+1),1} & \dots & A_{2(n+1),2(n+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{(1)} \\ \psi^{(1)} \\ \vdots \\ \varphi^{(n+1)} \\ \psi^{(n+1)} \end{pmatrix} = 0.$$

Ниже запишем элементы $a_{k,m}^{q,p}, k,m = -N,\dots,N$, блоков $A_{q,p}, q,p = 1,\dots,n$. Например,

$$a_{m,m}^{2q-1,2q-1} = \frac{1}{a_q} + \frac{i\pi}{2} k_q J_m(k_q a_q) H_m^{(1)'}(k_q a_q) - \frac{i\pi}{2} k_{n+1} J_m(k_{n+1} a_q) H_m^{(1)'}(k_{n+1} a_q),$$

$$a_{m,m}^{2q-1,2q} = \frac{i\pi\eta_q}{\eta_q + \eta_{n+1}} J_m(k_{n+1} a_q) H_m^{(1)}(k_{n+1} a_q) - \frac{i\pi\eta_{n+1}}{\eta_q + \eta_{n+1}} J_m(k_q a_q) H_m^{(1)}(k_q a_q),$$

$$a_{k,m}^{2q-1,p} = a_{k,m}^{2q-1,2p-q} = -\frac{i\pi}{2} k_{n+1} J_k'(k_{n+1} a_p) H_{k-m}^{(1)}(k_{n+1} r) J_m(k_{n+1} a_q) e^{i(k-m)\theta_p^q},$$

где $k,m = -N,\dots,N$, θ_p^q угол между осью x_1 p-ой системы координат и прямой, соединяющей области O_p и O_q. На рисунке 2 мы видим зависимость от волнового числа порогов лазерного излучения при относительном радиусе $\sigma = 0.338$ и расстоянии между центрами окружностей $d = 0.27$.

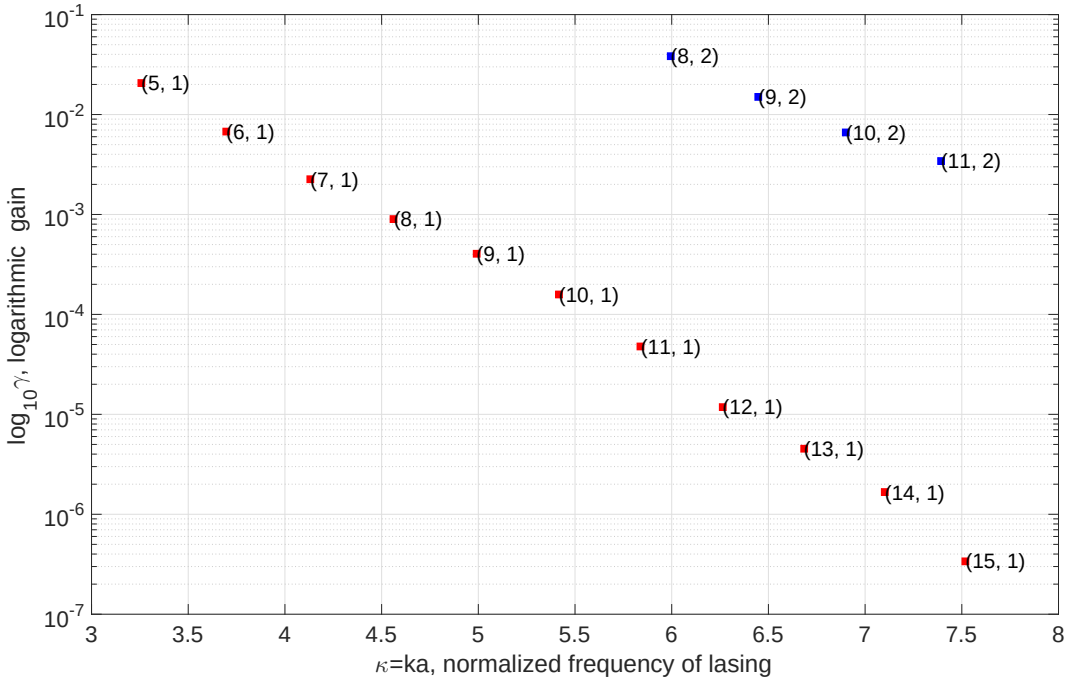


Рис. 2. Зависимость порогов генерации лазерного излучения от волнового числа

Литература

1. Smotrova E. I., Nosich A. I. *Mathematical study of the two-dimensional lasing problem for the whispering-gallery modes in a circular dielectric microcavity*// Optical and Quantum Electronics. – 2004. – Vol. 36. – № 1. – pp. 213–221.

2. Smotrova E. I., Tsvirkun V., Gozhyk I., Lafargue C., et al.*Spectra, thresholds, and modal fields of a kite-shaped microcavity laser*// Journal of the Optical Society of America B: Optical Physics. – 2013. – Vol. 30. – № 6. – pp. 1732–1742.

3. Oktyabrskaya A. O., Spiridinov A. O., Karchevskii E. M. *Numerical modeling of active microcavities with piercing holes using the Muller boundary integral equations and the Galerkin method*// Proceedings of the International Conference Days on Diffraction. – 2019. – in press.

COMPUTER SIMULATION OF LASER RADIATION BY A PHOTONIC CRYSTAL RESONATOR

A.I. Repina

In this paper, we solve the Lasing Eigenvalue Problem of circular active microcavities with a periodic set of piercing holes. We propose a new convenient formulation of Lasing Eigenvalue Problem for photonic crystal resonators as a nonlinear eigenvalue problem, which we reduce to the system of Muller Boundary Integral Equations. We propose a new computer implementation of the Galerkin method and calculate the spectral characteristics of photonic crystal resonators having the low generation thresholds and the sparseness of spectrum.

Keywords: Microcavity laser, eigenvalue problem, active microcavity, boundary integral equations, Galerkin method

УДК 517.95 + 532

О ГРУППОВОМ АНАЛИЗЕ УРАВНЕНИЙ ГИДРОСТАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

А.А. Родионов[1], Д.А. Краснова[2]

1 *aarod54@mail.ru*; Сибирский федеральный университет, Институт математики и фундаментальной информатики

2 *krasnova-d@mail.ru*; Сибирский федеральный университет, Институт математики и фундаментальной информатики

В статье рассматриваются групповые свойства уравнений трёх-мерной гидростатической модели вязкой жидкости. Представлен пример точного решения.

Ключевые слова: групповой анализ, гидростатическая модель, вязкая жидкость, точные решения

Рассматриваются трехмерные уравнения Навье-Стокса движения вязкой несжимаемой жидкости.

Предполагается, что давление в жидкости линейно зависит от глубины, $p_z = -g$. Данное предположение часто используется при описании процессов в океанологии [1]. Тогда $p(x, y, z, t) = -gz + q(x, y, t)$, где $q(x, y, t)$ — новая функция. В этом случае система уравнений Навье-Стокса имеет вид:

$$\begin{gathered} u_t + uu_x + vu_y + wu_z + q_x = \nu(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \\ v_t + uv_x + vv_y + wv_z + q_y = \nu(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}), \\ w_t + uw_x + vw_y + ww_z = \nu(w_{xx} + w_{yy} + w_{zz}), \\ u_x + v_y + w_z = 0, \quad q_z = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь u, v, w — компоненты вектора скорости по направлениям x, y, z, p — давление, t — время, $g = \text{const} > 0$ — ускорение силы тяжести в направлении оси z, ν — коэффициент динамической вязкости, ρ — плотность жидкости (можно считать $\rho = 1$). На свободной границе жидкости $\Gamma : z = \eta(x, y, t)$ выполнены кинематическое и динамическое условия:

$$\eta_t + u(x, y, \eta(x, y, t), t)\eta_x + u(x, y, \eta(x, y, t), t)\eta_y = w(x, y, \eta(x, y, t), t),$$

$$(p_a - p)\vec{n} + 2\nu D \cdot \vec{n} = 2\sigma H \vec{n},$$

где $p_a(x,y,t)$ — атмосферное давление, $p|_\Gamma = -g\eta(x,y,t) + q(x,y,t)$, нормаль к свободной поверхности $\vec{n}$ и средняя кривизна H зависят от положения точки на поверхности, $\sigma = const$ — коэффициент поверхностного натяжения, $D = D(u,v,w)$ — тензор скоростей деформации [2].

Ставится задача группового анализа [3] для уравнений системы (1). Требуется найти алгебру Ли допустимых операторов и построить точные решения. Аналогичное исследование гидростатической модели идеальной жидкости было проведено в работе [4].

В результате группового анализа было доказано, что алгебра Ли для системы уравнений (1) образована операторами

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_z, \quad X_3 = t\partial_z + \partial_w, \\ X_4 = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + 2t\partial_t - u\partial_u - v\partial_v - w\partial_w - 2q\partial_q, \\ X_5 = x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u, \\ X_6 = f(t)\partial_x + f'(t)\partial_u - xf''(t)\partial_q, \\ X_7 = h(t)\partial_y + h'(t)\partial_v - yh''(t)\partial_q, \quad X_8 = \varphi(t)\partial_q. \end{gathered} \tag{2}$$

Первый оператор отвечает за перенос по времени t, второй и третий — за перенос и преобразование Галилея вдоль оси z, четвертый — за преобразования растяжения, пятый — за вращение вокруг оси z. Шестой, седьмой и восьмой операторы содержат произвольные функции $f(t)$, $h(t)$, $\varphi(t)$, зависящие от времени, и определяют бесконечномерную часть алгебры Ли допустимых операторов.

Впервые групповой анализ уравнений системы Навье-Стокса был проведен в работе [5] В.О. Бытевым. Отличие его результата от полученных операторов (2) заключается в том, что в (2) отсутствуют два оператора вращения по осям x, y, а бесконечномерный оператор по оси z, аналогичный X_6, X_7, представлен в виде двух конечномерных операторов X_2, X_3.

Для примера, решение уравнений (1) строим на операторах $<X_3, X_4>$ из базиса (2). Инвариантное решение ищем в виде:

$$(u,v,w,q) = (U(x,t); \frac{y}{t} + V(x,t); \frac{z}{t} + W(x,t); Q(x,t)),$$

где U, V, W, Q — искомые функции двух переменных. Это приводит к фактор-системе

$$\begin{gathered} U_t + UU_x + Q_x = \nu U_{xx}, \quad V_t + UV_x + \frac{1}{t}V = \nu V_{xx}, \\ W_t + UW_x + \frac{1}{t}W = \nu W_{xx}, \quad U_x + \frac{2}{t} = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Решая уравнения (3), с учётом кинематического и динамического условий на Г, получено точное решение системы (1):

$$\begin{gathered} u(x,t) = h_1(t) - \frac{2x}{t}, \\ v(x,y,t) = \frac{1}{t}[y + \alpha(xt^2 - \int t^2 h_1(t)\,dt) + \beta], \\ w(x,z,t) = \frac{1}{t}[z + \varepsilon(xt^2 - \int t^2 h_1(t)\,dt) + \mu], \\ q(x,t) = \frac{2xh_1(t)}{t} - xh_1'(t) - \frac{3x^2}{t^2} + h_2(t), \\ p\big|_\Gamma = -g\eta(x,y,t) + q(x,y,t) = -g[t\Phi(J_1,J_2) - \varepsilon J_1 - \mu] + \frac{2xh_1(t)}{t} - xh_1'(t) - \frac{3x^2}{t^2} + h_2(t), \\ p_a = p\big|_\Gamma + \frac{\nu}{t}[1 + \sqrt{9 + t^4(\alpha^2 + \varepsilon^2)}] + 2\sigma H, \end{gathered}$$

где $h_1(t)$, $h_2(t)$, $\Phi(J_1, J_2)$ — произвольные функции; α, β, ε, μ — константы,

$$J_1 = xt^2 - \int t^2 h_1(t)\,dt, \quad J_2 = \frac{1}{t}(y + \alpha J_1 + \beta).$$

Литература

1. Bowden K.F. [Physical Oceanography of Coastal Waters]. *Ellis Horwood Limited Publish-ers*. New York: Halsted Press, 1983, p. 324.

2. Andreev V.K., Kaptsov O.V., Pukhnachev V.V., Rodionov A.A. [Applications of Group-Theoretical Methods in Hydrodynamics]. *U.S.A, Kluer Academic Publishers.* 1998, p. 450. (In Russian)

3. Ovsjannikov L.V. [Group Properties of Differential Equations]. *SOAN USSR.* 1962, p. 242. (In Russian)

4. Rodionov A.A. [Hydrostatic Model for an Ideal Fluid: Group Properties of Equations and their Solutions]. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics.* 2015, T. 8, №3, p. 320-326 (In Russian)

5. Бытев В.О. [Групповые свойства уравнений Навье-Стокса]. *Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск.* 1972, Т. 3, №3, p. 13-17.

ABOUT GROUP ANALYSIS OF HIDROSTATIC MODEL EQUATIONS FOR A VISCOUS FLUID

A.A. Rodionov, D.A. Krasnova

The group properties of three-dimensional hydrostatic model equations of a viscous fluid are investigated. The examples of several exact solutions are presented.
Keywords: viscous fluid, hydrostatic model, group analysis, exact solutions

УДК 004.89

АВТОМАТИЧЕСКОЕ РАСПОЗНАВАНИЕ ДЕЙСТВИЙ НА ИЗОБРАЖЕНИЯХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГЛУБИННОГО ОБУЧЕНИЯ

Е.С. Рыков[1], Ф.М. Гафаров[2]

1 *elisricov@yandex.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий

2 *fgafarov@yandex.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий

В этой статье рассмотрена задача создания текстового описания из изображения (Image captioning) на основе использования нейронных сетей глубинного обучения. Для решения задачи исследованы возможности использования гибридной нейронной сети, которая содержит свёрточную нейронную сеть, для распознавания объектов на изображениях, и рекуррентную нейронную сеть, для формирования предложений. Эта нейронная сеть применена для анализа содержания фотографий, полученных из профилей студентов в социальной сети ВКонтакте.

Ключевые слова: нейронные сети, глубинное обучение, обработка изображений, социальные сети

Распознавание действия на изображениях является сложной задачей искусственного интеллекта [1]. Впервые задача была решена Андреем Карпати в его докторской работе в Стэнфордском университете – сейчас он является директором по искусственному интеллекту и автопилоту в Tesla.

Цель данной работы – в текстовом формате описать происходящее на изображении. Для различения объектов на изображении в основном используются методы из компьютерного зрения, а для текстового описания – языковые модели из области обработки естественного языка. Модель, которая была применена в нашем исследовании, реализована на языке Python и основывается на библиотеке машинного обучения PyTorch, используется также библиотека линейной алгебры и вычислений NumPy, пакет лингвистических библиотек NLTK и модуль Picle для сериализации сложных объектов.

В данной работе мы использовали нейронную сеть, которая состоит из двух частей: энкодера и декодера. На рисунке 1 изображена модель нейронной сети: входное изображение обрабатывает энкодер, передавая вектор в декодер, который генерирует результат. Энкодер – сверточная нейронная сеть, которая отвечает за распознавание объектов на изображениях. Для этого он использует ResNet152 [1] – остаточную модель нейронной сети для классификации изображений. Вторая часть – декодер – рекуррентная нейронная сеть, которая формирует предложение на основе того вектора, который был передан энкодером. В декодере используется архитектура LSTM [2] – одна из разновидностей архитектур долгой краткосрочной памяти. Такие рекуррентные нейронные сети запоминают информацию на долгое время – это позитивно складывается на процессе обучения. Сверточная

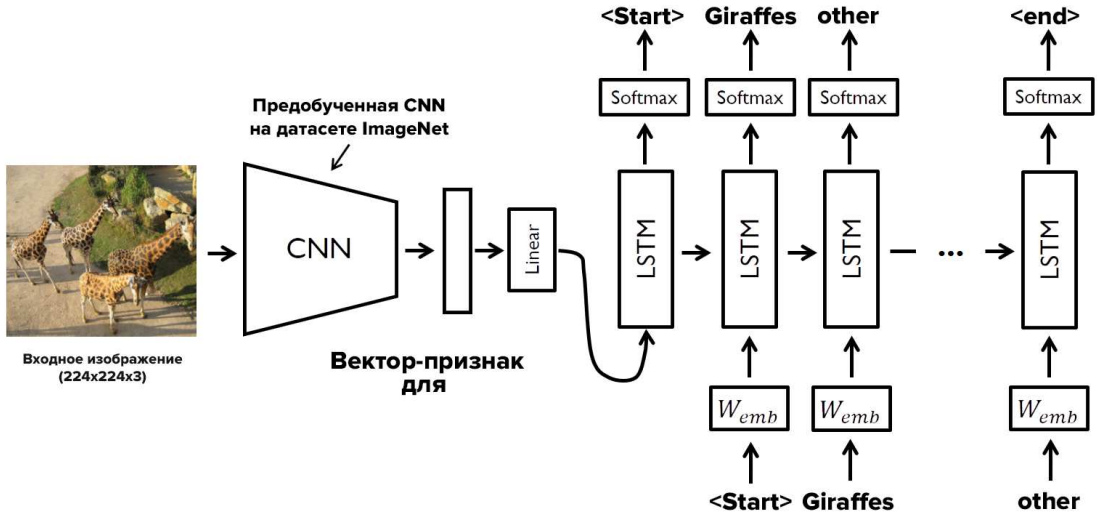


Рис. 1. Модель нейронной сети

нейронная сеть была предобучена на датасете ILSVRC-2012-CLS [3] с 10000000 размеченных изображений. Рекуррентная нейронная сеть заранее была обучена на языковой модели английского языка. Задача рекуррентной нейронной сети – составить осмысленное предложение из полученных векторов с объектами изображения, которые передает свёрточная нейронная сеть. Используя LSTM, модель генерирует полное предложение, поочередно возвращаясь и складывая вместе векторы слов.

Данная гибридная нейросетевая архитектура была применена для содержательного анализа фотографий из социальной сети Вконтакте. Для исследования было получено более 25000 фотографий студентов КФУ из их профилей в социальной сети Вконтакте. Была проанализирована корреляция успеваемости студентов с описанием изображения, полученным с помощью нейронной сети. В рамках междисциплинарного исследования проанализированы фотографии академически неуспешных студентов, у которых средний балл ниже 3.7, и успешных студентов, у которых средний балл выше 4.3. После выполнения работы программы было сгенерировано “облако тегов” – визуализация наиболее повторяющихся слов – для каждой группы. Полученные результаты представлены на рисунке 2 (успешные студенты) и на рисунке 3 (неуспешные студенты)

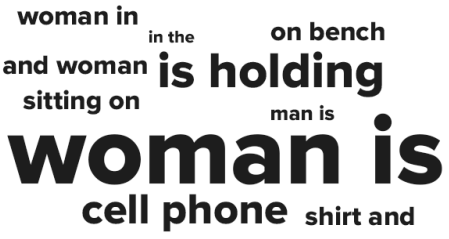


Рис. 2. «Облако тегов» для академически успешных студентов

Рис. 3. «Облако тегов» для академически неуспешных студенов

Заметны некоторые различия в содержании фотографий для успешных и неуспешных студентов. В дальнейшем планируется обучение нейронной сети на фотографиях из социальных сетей, с более точной разметкой максимально приближенной к решаемой задаче для увеличения эффективности классификации изображений.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №19-18-00253, «Нейросетевая психометрическая модель когнитивно-поведенческих предикторов жизненной активности личности на базе социальных сетей»)

Литература

1. Neha S. Vibhor J. Anju M. *An Analysis Of Convolutional Neural Networks For Image Classification* // Procedia Computer Science – 2018. — № 132. — С. 377–384.

2. Литвинов С. *ResNet (34, 50, 101): «остаточные» CNN для классификации изображений* // NeuroHive – 2019.

3. Faizan S. *Automatic Image Captioning using Deep Learning (CNN and LSTM) in PyTorch* // Analytics Vidhya – 2018.

4. Pranoy R. *Image Captioning in Deep Learning* // Towards Data Science – 2017.

AUTOMATIC IMAGE CAPTIONING USING DEEP LEARNING

E.S. Rykov, F.M. Gafarov

This article discusses the task of image captioning based by using deep learning neural networks. The possibilities of using a hybrid neural network, which contains a convolutional neural network, to recognize objects in images, and a recurrent neural network to generate a sentences, was investigated to solving this problem. The neural network is used to analyze the content of photos obtained from the profiles of students on the social network VKontakte.
Keywords: neural networks, deep learning, image processing, social networks

УДК 378.016

ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ СТЕРЕОМЕТРИИ

М.Р. Сагедиева[1], Е.Р. Садыкова[2], О.В. Разумова[3]

1 *sagedievamilyausha@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, института психологии и образования

2 *sadikova_er@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики имени Н.И.Лобачевского

3 *miraolga@rambler.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики имени Н.И.Лобачевского

В статье рассмотрены методические особенности изучения геометрических построений в пространстве, приведены решения позиционных задач и показано применение информационных технологий при обучении решению задач на построение.

Ключевые слова: стереометрия, полнота изображения, позиционные задачи, информационные технологии

Задачи на построение, как на плоскости, так и в пространстве, являются важным и необходимым элементом изучения курса математики в средней школе. Они способствуют формированию конструктивных умений, развитию логического мышления, пространственного воображения. Но для значительной части учащихся такие задачи остаются трудными. Поэтому возникает необходимость совершенствования методики изучения данных вопросов. Анализ научной, учебно-методической литературы показал, что при изучении вопросов, связанных с геометрическими построениями в пространстве, необходимо учитывать следующие методические особенности[3].

На первых уроках изучения темы большое внимание уделяется проекционному чертежу и его свойствам, системе изображения точек пространства. Учащиеся должны понять, что изображения точек пространства с указанием их «оснований», то есть проекций на основную плоскость, обладают свойством «полноты». Это означает, что при условии, когда на чертеже будут показаны кроме самих точек и их основания, то на таком чертеже можно строить любые «инциденции» элементов пространства[2].

Учащиеся должны убедиться, что все точки чертежа являются «вполне заданными», то есть, заданы также и основания точек. А для этого в начале работы необходимо проверить свойство полноты на каждом чертеже. Например, при решении следующей задачи, учащимся предлагается определить основание заданной точки.

Задача. Дана плоскость, определяемая точками $A(A_1), B(B_1), C(C_1)$, на которой отмечена точка N. Для точки N найти основание.

Для решения задачи учащиеся проводят прямую AN до ее встречи с прямой BC в точке P, находят основание P_1 точки P, затем на прямой A_1P_1 находят основание N_1 точки N (Рис.1).

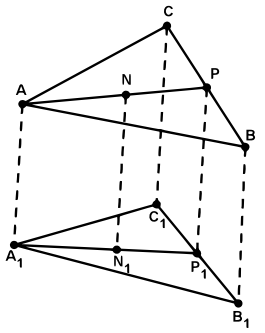


Рис. 1.

При решении задачи учащиеся убеждаются в том, что принадлежащая заданной прямой или плоскости любая точка является также заданной. И ее основание может быть построено на чертеже. Таким образом, у учащихся формируется убеждение в том, что применение проекций точек на основную плоскость («оснований» точек) является простым способом решения разнообразных задач на построение сечений тел. На фигурах, например, призме, пирамиде, которые получаются движением прямолинейной образующей, параллельной данному направлению. Последнее выбирается за направление проектирования точки на основную плоскость.

У других тел, например, пирамиды и конуса образующая проходит через постоянную точку – вершину пирамиды или конуса. В таких задачах применяется центральное проектирование точек на основную плоскость, что требует от учащихся определенных усилий для построения изображений с центральной системой «внутреннего» проектирования.

При изучении позиционных задач на построение для прохождения раздела о параллельных прямых рекомендуется одновременно выполнить три действия: показать способы изображения точек пространства; ввести необходимые терминологии, такие как, основная плоскость, проектирующие прямые и плоскости, основные точки; рассмотреть основные позиционные задачи, являющиеся базовыми при работе с позиционными чертежами школьного курса стереометрии.

Решение задачи на проекционном чертеже возможно только тогда, когда она построена по определенным законам геометрии, и учащиеся это должны отчетливо сознавать. При параллельном проектировании эти свойства чертежа сводятся к следующим положениям: проекция прямой линии есть прямая; сохранение инцидентности (точка, принадлежащая прямой, проектируется точкой, принадлежащей проекции прямой); сохранение параллельности прямых; сохранение отношения отрезков, лежащих на прямой оригинала и в проекции.

Другой особенностью при изучении геометрических построений в пространстве является методика решения задач на проекционном чертеже [4].

Задача. Дано изображение куба и точки Ð на его грани BCB_1C_1. Требуется опустить из точки Ð перпендикуляр на диагональную плоскость AA_1C_1C (Рис.2).

Для решения задачи учащимся предлагается: найти направление искомого перпендикуляра; построить точки его пересечения с диагональной плоскостью AA_1C_1C.

Так как все перпендикуляры к одной и той же плоскости между собой параллельны, то на проекционном чертеже, по свойству таких чертежей, они также окажутся параллельными. Учащиеся приходят к выводу, что для выяснения направления перпендикуляра достаточно построить любой из перпендикуляров к плоскости AA_1C_1C. Однако диагональ BD в оригинале перпендикулярна к этой плоскости, а также прямая BD перпендикулярна к прямой ÀÑ, так как эти прямые в оригинале являются диагоналями квадратной грани куба. Помимо этого, прямая BD перпендикулярна к ребру AA_1 куба, так как лежит в перпендикулярной к этому ребру плоскости. Так прямая BD перпендикулярна к

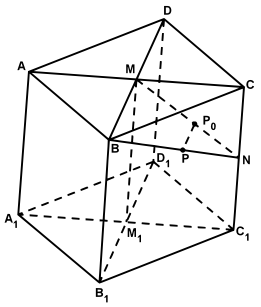


Рис. 2.

двум прямым, лежащим в плоскости AA_1C_1C, значит, она перпендикулярна и к самой плоскости. На основании этого, учащиеся заключают, что прямая BD дает искомое направление перпендикуляра, опущенного из точки P на плоскость AA_1C_1C.

Для дальнейшего решения необходимо построить точки пересечения перпендикуляра с плоскостью AA_1C_1C, т. е. основания перпендикуляра P_0.

Для этого учащимся предлагается провести плоскость через точку Ð и перпендикуляр BM к плоскости AA_1C_1C. Эта вспомогательная плоскость содержит искомый перпендикуляр PP_0, так как PP_0 параллельна BM (на чертеже и в оригинале). Соединяя точки B и P, получается след BP вспомогательной плоскости на грани BCC_1B_1 куба. След BP пересекает ребро CC_1 в точке N. Точки N и M принадлежат вспомогательной плоскости, поэтому прямая MN является следом ее на диагональной плоскости AA_1C_1C. Перпендикуляр PP_0 лежит во вспомогательной плоскости и, следовательно, пересекает линию MN в точке P_0. Эта точка является общей точкой перпендикуляра PP_0, и диагональной плоскости AA_1C_1C, т.е. основанием перпендикуляра.

Другой, не менее важной особенностью, является использование информационных технологий в обучении задач на построение в пространстве. Использование Интернет ресурсов, электронных библиотек, различных энциклопедий, презентаций, видеофрагментов повышает эффективность уроков, познавательный интерес, качество знаний учащихся и их мотивацию к обучению.

Проведение уроков с компьютерной поддержкой позволяет показать изображения в различных положениях. Это облегчает процесс восприятия чертежа и развивает у учащихся пространственное воображение. На современных уроках математики применяются различные динамические математические программы: «Визуальная стереометрия», «Живая математика», «GeoGebra», «Blender», «Grand 3D», «Stereo», использование которых преследует одну цель - реализацию наглядности. Их можно использовать на всех этапах урока при объяснении нового материала, закреплении знаний и умений, организации контроля учебных достижений учащихся. За счет наглядности представленного материала это значительно повысит производительность труда, как учителя, так и учащихся [1].

Данные программы позволяют на уроках математики: строить отрезки, прямые по двум точкам; проводить параллельные и перпендикулярные прямые; провести прямые параллельные и перпендикулярные к плоскости строить параллельные, перпендикулярные и пересекающиеся плоскости; строить точки, принадлежащие фигурам; находить точки пересечения фигур; строить сечения многогранников и т. д.

На рисунке 3 рассмотрен пример построения в пространстве в математической программе «Geogebra».

Динамичные чертежи можно исследовать, вращать вокруг своей оси, показать с разных сторон, двигать и масштабировать, а это особенно важно для формирования пространственных образов изучаемых геометрических фигур.

Уроки с использованием математических программ делают геометрический материал для учащихся более доступным и понятным.

Литература

1. Безумова О. *Обучение геометрии с использованием возможностей Geogebra.* – А.: КИРА, 2011. – 5 с.

2. Дадаян А. *Геометрические построения на плоскости и в пространстве. Задачи и решения* . – М.: Инфра-М, 2014. – 312 с.

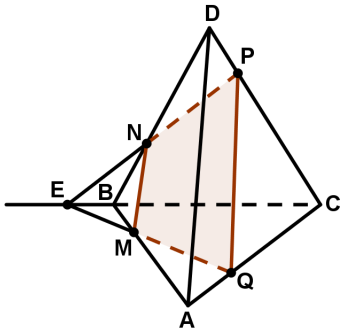


Рис. 3.

3. Кондрушенко Е. *Задачи на построение в пространстве и методика обучения их решению* . – МАОУ ПКС: «ИОМКР», 2016. – 5 с.

4. Четверухин Н. *Стереометрические задачи на проекционном чертеже* . – М.: Учпедгиз, 1952. – 16 с.

FEATURES OF THE STUDY OF GEOMETRIC CONSTRUCTIONS IN THE SCHOOL COURSE OF STEREOMETRY

M.R. Sagedieva, E.R. Sadykova, O.V. Razumova

The article discusses the methodological features of the study of geometric constructions in space, provides solutions to positional problems, and shows the use of information technology in learning how to solve building problems.
Keywords: stereometry, image completeness, positional tasks, information technology

УДК 532

РАСЧЕТ ВИХРЕВОГО ДВИЖЕНИЯ ПОЛИДИСПЕРСНЫХ ИСПАРЯЮЩИХСЯ ИНЕРЦИОННЫХ КАПЕЛЬ НА ОСНОВЕ МЕТОДА МОМЕНТОВ

Р.Р. Салахов[1]

1 *ramms_92@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Решена задача движения полидисперсного аэрозоля с испаряющимися каплями в поле скоростей вихря Капланского: модель струйного вихревого течения. Реализован эйлеров метод моментов для логарифмически нормальной функции распределения частиц по площадям поверхности. Для различных чисел Стокса рассчитаны характеристики испаряющейся жидкой фазы.

Ключевые слова: метод моментов, испарение, инерционные капли, полидисперсный аэрозоль

Математическое моделирование течений газовзвеси с испаряющимися каплями необходимо для прогнозирования процессов в двигателях внутреннего сгорания или при движении капель лекарственных аэрозолей в дыхательных путях. Обзор моделей испарения одиночных капель приводится, в работах [1, 2]. Испаряющиеся капли в таких задачах представляют собой полидисперсную систему. Для моделирования динамики полидисперсных капель применяются лагранжев метод расчета траекторий отдельных частиц и эйлеров метод решения уравнения переноса для дисперсной фазы [2]. В последнее время активно развиваются эйлеровы методы моментов [3, 4].

Постановка задачи. Рассмотрим аксиально-симметричный вихревой поток газовзвеси в цилиндрической системе координат рис.1. Вихревое кольцо распространяется вдоль оси z (оси симметрии), в начальный момент времени предполагается, что вихревое кольцо ограничено плоскостью z, R_0 - начальный радиус вихревого кольца (рис.1).

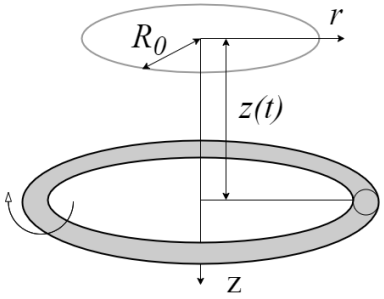


Рис. 1. Схема вихревого кольца Капланского [5, 6]

Аналитическая модель поля течения вихревого кольца предложена в работе Капланского [6]. Введем безразмерные параметры:

$$\mathbf{r}_{(d)} = \frac{\mathbf{r}^*_{(d)}}{R_0}, \mathbf{v}_{(d)} = \frac{R_0}{\Gamma_0}\mathbf{v}^*, t = \frac{\Gamma_0}{R_0^2}t^*;$$

где $\mathbf{r} = (r, z)$, $\mathbf{v} = (u, v)$, Γ_0 - начальная циркуляция вихревого кольца. Выражения для функции потока ψ согласно [6] записываются в виде

$$\psi = -\frac{r\sqrt{Re}}{4\sqrt{2t}}\int_0^\infty F\left(x, \sqrt{Re}\frac{z - z_{vc}}{\sqrt{2t}}\right) J_1\left(\sqrt{Re}\frac{x}{2t}\right) J_1\left(\sqrt{Re}\frac{rx}{\sqrt{2t}}\right)$$

где J_1- функция Бесселя первого рода.

Поведение системы частиц с учетом осевой симметрии в двумерном физическом пространстве описывается функцией плотности распределения $f(t, x, y, a, v_1, v_2)$, где a – площадь поверхности частицы. Динамика функции распределения описывается кинетическим уравнением Больцмана-Вильямса:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial (v_1 f)}{\partial x} + \frac{\partial (v_2 f)}{\partial y} + \frac{\partial (Rf)}{\partial a} + \frac{\partial A_1 f}{v_1} + \frac{\partial A_2 f}{v_2} = 0 \tag{1}$$

где R– закон испарения, A_1 и A_2 – закон аэродинамического сопротивления Стокса. Рассмотрим логарифмически-нормальную функцию плотности распределения $f(t, a)$ в некоторой точке (x, y)

$$f(a) = \frac{M_0}{2\sqrt{2\pi}a\ln\sigma_g} exp\left(-\frac{\ln^2(a/a_g)}{8\ln^2\sigma_g}\right)$$

где a_g – среднее геометрическое площади поверхности, σ – стандартное геометрическое отклонение. Умножая (1) на размер a и интегрируя, получим уравнения переноса моментов:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial M_0}{\partial t} + \frac{\partial (v_x M_0)}{\partial x} + \frac{\partial (v_y M_0)}{\partial y} = Rn(s = 0),\\
&\frac{\partial M_1}{\partial t} + \frac{\partial (v_x M_1)}{\partial x} + \frac{\partial (v_y M_1)}{\partial y} = -RM_0,\\
&\frac{\partial M_2}{\partial t} + \frac{\partial (v_x M_2)}{\partial x} + \frac{\partial (v_y M_2)}{\partial y} = -2RM_1.
\end{aligned} \tag{2}$$

где $M_i(t) = \int_0^\infty a^i f(a, t)da$.

Введем обозначение количества движения системы частиц:

$$M_x = v_x M_1, M_y = v_y M_1$$

Умножая (1) на размер a и компоненты скорости v_1 и v_2, и интегрируя, получим уравнения переноса импульсов M_x, M_y.

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_x}{\partial t}+\frac{\partial (v_x M_x)}{\partial x}+\frac{\partial (v_y M_x)}{\partial y}&=\frac{M_1 u_g - M_x}{St}-RM_0 v_x,\\ \frac{\partial M_y}{\partial t}+\frac{\partial (v_x M_y)}{\partial x}+\frac{\partial (v_y M_y)}{\partial y}&=\frac{M_1 v_g - M_y}{St}-RM_0 v_y,\end{aligned} \tag{3}$$

Система уравнений (2), (3) решалась численно с использованием схемы TVD с функцией ограничителем minmod. На рис.2 представлены распределения концентрации инерционных частиц в раз-личные моменты времени, стартующих с прямоугольной области без учета и с учетом испарения капель. В начальный момент времени скорость капель равняется нулю. Видно, что для инерционных частиц область расширяется по сравнению с областью вихря. Учет испарения уменьшает влияние инерции на движение частиц.

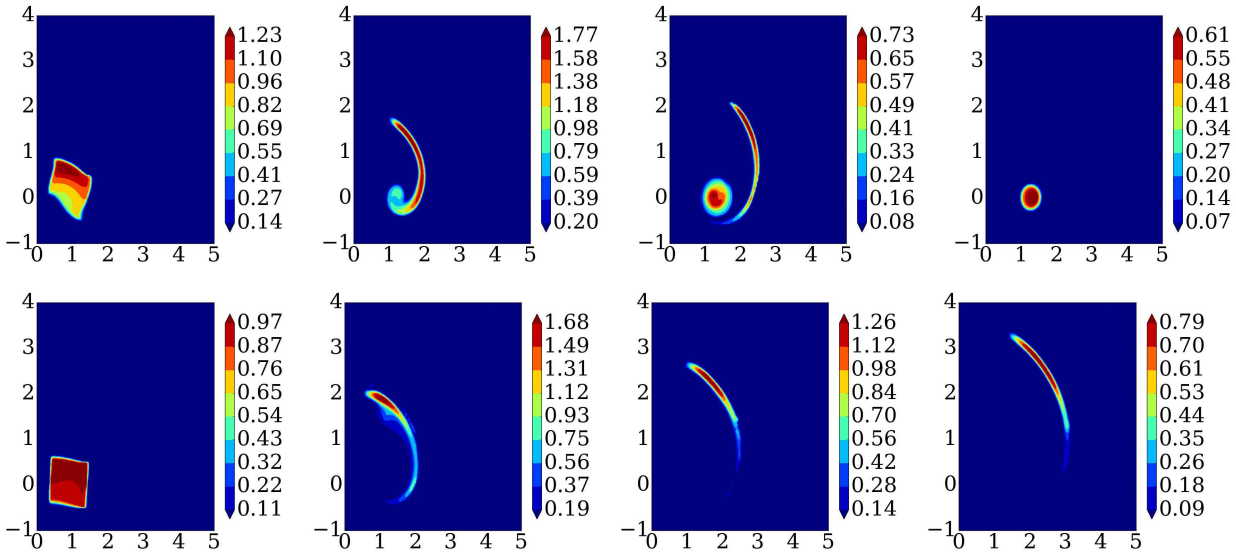


Рис. 2. Распределения концентрации частиц при St=0.1 (сверху) и при St=3 (снизу) в моменты времени t=1.5, 14.25, 42, 102.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта (№ 18-31-00387).

Литература

1. Sazhin S. *Droplets and Sprays.* – Springer-Verlag London, 2014. – 178 с.

2. Терехов ВИ., Пахомов МА. // Тепломассоперенос и гидродинамика в газокапельных потоках. Новосибирск, 2009.

3. McGraw R0. *Description of Aerosol Dynamics by the Quadrature Method of Moments* // Aerosol Sci.Techn. – 1997. – Т. 27. – № 2. – С. 255–265.

4. Massot M., Laurent F., Kah D., De Chaisemartin S. *High order moment method for polydisperse evaporating sprays with mesh movement: application to internal combustion engines* // SIAM J.Applied Math. – 2010. – Т. 70. – № 8. – С. 3203–3234.

5. Rybdylova O., Sazhin SS., Osiptsov AN., Kaplanski FB., Begg S., Heikal M. //Aplied Mathematics and Computation 2018, – № 326, С. 159—169.

6. Kaplanski FB., Rudi YA. // Phys. Fluids 2005. –Т. 17. –8, 087101–1–087101–7.

CALCULATION OF THE VORTEX MOTION OF POLYDISPERSE EVAPORATING INERTIAL DROPLETS BASED ON THE METHOD OF MOMENTS

R.R. Salakhov

The problem of the motion of a polydisperse aerosol with inertial evaporating drops in the velocity field of a Kaplansky vortex was solved: a model of a aerosol jet flow. The Euler method of moments for the log-normal size distribution function of particles over surface areas is im-plemented. For various Stokes numbers, the characteristics of the evaporating liquid phase are calculated.
Keywords: method of moment, evaporation, inertial particles, polydisperse aerosol

УДК 519.233.22

D-РИСКИ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ БЕРНУЛЛИ ПРИ АПРИОРНОМ БЕТА-РАСПРЕДЕЛЕНИИ

Р.Ф. Салимов[1]

1 *rustem.salimov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий

В статье для параметра распределения Бернулли строятся байесовская и с равномерно минимальным d-риском оценки при квадратичной функции потерь и априорном бета-распределении. Вычисляются d-риски этих оценок и решаются задачи планирования объёма испытаний.

Ключевые слова: оценка параметра распределения Бернулли, байесовская оценка, оценка с равномерно минимальным d-риском, квадратичная функция потерь, априорное бета-распределение, необходимый объём выборки

Оценка вероятности θ осуществления некоторого события по данным наблюдений в схеме Бернулли — классическая задача математической статистики. В ряде прикладных исследований, например, при аттестации продукции, выпускаемой предприятием, по качественному признаку, значение вероятности θ является реализацией случайной величины. В таком случае более естественно решать задачу оценки θ в рамках байесовской парадигмы. В данном сообщении строится байесовская и с равномерно минимальным d-риском (см. [1]–[3]) оценки параметра θ при квадратичной функции потерь (определение функции d-риска процедуры статистического вывода см. [4]) . В качестве априорного распределения выбирается бета-распределение [5], обладающее большим разнообразием форм функции плотности. Данное распределение стандартно используется при построении статистических процедур приёмочного контроля. Вычисляются d-риски этих оценок, развиваются методы минимального объёма выборки, гарантирующие заданные ограничения на d-риск оценки. Представленные в сообщении результаты являются продолжением исследований по аналогичным оценкам среднего значения нормального распределения (см. [6], [7]).

Пусть $(X_1,\dots,X_n)$ — случайная выборка объёма n из двухточечного распределения (Бернулли) и $\theta = P(X_1 = 1)$. Предполагается, что θ есть реализация случайной величины ϑ с априорным бета-распределением, функция плотности которого

$$g(\theta) = \frac{1}{\mathrm{B}(p,q)}\theta^{p-1}(1-\theta)^{q-1}, \qquad \theta \in [0;1],\ p,q>0.$$

В схеме испытаний Бернулли существует достаточная статистика $T = \sum_1^n X_i$, имеющая биномиальное распределение с параметрам θ и n так, что апостериорное распределение ϑ зависит только от значения этой статистики. Априорное бета-распределение является сопряжённым, и, как известно, апостериорное распределение является также бета с параметрами $T+p$ и $n-T+p+q$.

При квадратичной функции потерь апостериорный риск равен сумме дисперсии апостериорного распределения и квадрата отклонения апостериорного среднего от принятого решения:

$$\mathbb{R}(d\,|\,t) = \frac{(t+p)(n-t+q)}{(n+p+q)^2(n+1+p+q)} + \left(d - \frac{t+p}{n+p+q}\right)^2. \tag{1}$$

Таким образом, байесовская оценка, которая минимизирует (1) по d, равна

$$\theta_B(T) = \frac{T+p}{n+p+q}.$$

D-риск этой оценки можно найти, если подставить точку $t = d(n+p+q) - p$, в которой достигается равенство $\theta_B(t) = d$, в уравнение (1) для апостериорного риска. После несложных преобразований получаем d-риск байесовской оценки

$$\mathfrak{R}(d\,|\,\theta_B) = \frac{d(1-d)}{n+1+p+q},$$

причём значения d принадлежат носителю байесовской оценки

$$\Theta_B = \left\{ d:\ d = \frac{t+p}{n+p+q},\ t = 0,1,\ldots,n \right\}.$$

Если $1/2 \in \Theta_B$, то максимум d-риска равен $1/4(n+1+p+q)$. Таким образом, целая часть (с округлением вверх)

$$\tilde{n} = \tilde{n}(\mathrm{r}) = \frac{1}{4\mathrm{r}} - 1 - p - q$$

есть минимальный объём выборки, обеспечивающий заданное ограничение r на d-риск байесовской оценки: $\mathfrak{R}(d\,|\,\theta_B) \leqslant \mathrm{r}$.

Чтобы найти оценку с равномерно минимальным d-риском представим (1) в виде квадратичной функции t:

$$\mathbb{R}(d\,|\,t) = \frac{1}{(n+p+q)(n+1+p+q)}\,t^2 + \frac{1+2p-2d(n+1+p+q)}{(n+p+q)(n+1+p+q)}\,t + \\ + \frac{p(1+p)}{(n+p+q)(1+n+p+q)} - \frac{2pd}{n+p+q} + d^2.$$

Минимум по t этой функции достигается в точке

$$t^* = d(n+1+p+q) - p - \frac{1}{2}.$$

Так как T может принимать только целые числа от 0 до n, то минимум апостериорного риска будет достигаться в ближайшей к t^* точке от 0 до n:

$$\tilde{t} = \begin{cases} 0, & \text{для любых } d \leqslant \frac{p+1}{n+1+p+q}, \\ n, & \text{для любых } d \geqslant \frac{p+n}{n+1+p+q}, \\ k, & \text{для любых } \frac{p+k}{n+1+p+q} \leqslant d \leqslant \frac{p+k+1}{n+1+p+q},\ \ k = 1,\ldots,n-1. \end{cases}$$

Таким образом, любая оценка, удовлетворяющая условию

$$\tilde{\theta} \in \begin{cases} \left[0; \frac{p+1}{n+1+p+q}\right), & \text{если } t = 0, \\ \left[\frac{p+n}{n+1+p+q}; n\right], & \text{если } t = n, \\ \left[\frac{p+k}{n+1+p+q}; \frac{p+k+1}{n+1+p+q}\right), & \text{если } 1 \leqslant t \leqslant n-1, \end{cases}$$

будет иметь d-риск, который нельзя уменьшить ни в одной точке, которые эта оценка принимает.

Легко видеть, что байесовская оценка θ_B удовлетворяет этому требованию, и её можно было бы назвать оценкой с равномерно минимальным d-риском (U-оценкой). Однако такое название претенциозно, поскольку относится только к оценкам, которые принимают все свои значения внутри носителя байесовской оценки. Понятно, что из «нормальных» оценок этому свойству удовлетворяет только байесовская оценка.

Другая оценка, претендующая на звание U-оценки, получается из выражения для t^*:

$$\theta_U = \frac{T + p + \frac{1}{2}}{n + 1 + p + q}.$$

D-риск этой оценки

$$\mathfrak{R}(d\,|\,\theta_U) = \frac{d(1-d)}{n+p+q} - \frac{1}{4(n+p+q)(n+1+p+q)}$$

при d, принадлежащих носителю θ_U.

Сравнивать θ_B, θ_U по d-риску в каждой точке d не имеет смысла, но их можно сравнить по максимальным значениям d-рисков. Интересно, что если не обращать внимание на возможные значения d, а считать $d \in [0;1]$, то, как и у байесовской оценки, максимум d-риска оценки θ_U достигается при $d = 1/2$ и равен тому же значению $1/4(n+1+p+q)$. Следовательно, минимальный требуемые объём наблюдений для гарантийной оценки θ_U не превосходит целой части (с округлением вверх) числа $\tilde{n}$, то есть совпадает с минимальным требуемым объёмом гарантийности баейсовской оценки.

Оценка с равномерно минимальным d-риском является минимальной в классе всех оценок, d-риск которых имеет носитель, совпадающий с d-риском оценки θ_U, следовательно (см. [8]) $\tilde{n}$ является *необходимым объёмом выборки*, то есть наименьшим объёмом наблюдений, при котором существует d-гарантийная оценка θ.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00094.

Литература

1. Simushkin S. V., Volodin I. N. *Statistical inference with a minimal d-risk* // Lecture Notes in Math. –1983. – Vol. 1021 – P. 629–636.

2. Simushkin S. V., Volodin I. N. *Statistical inference with minimum d-risk* // J. Soviet. Math. –1988. – Vol. 42 – P. 1464–1472.

3. Заикин А. А. *Оценки с асимптотически равномерно минимальным d-риском* // Теория вероятностей и ее применения. –2018.. – Т. 63. – № 3. – С. 609–618.

4. Volodin I. N. *Guarantied procedures of statistical inference (sample size determination)* // J.Soviet Math. – 1989. – Vol. 44. – P. 568–600.

5. Gupta A. K., Nadarajah S. *Handbook of Beta Distribution and Applications.* – Marcel Dekker, New York, 2004. – 600 p.

6. Salimov R. F., Turilova E. A., Volodin I.N. *Sequential procedures for assessing the percentage of harmful impurietes with the given limitations on the accuracy and reliability of statistical inference* // 16^{th} Intern. Multidiscip. Sci. Geoconf., Vienna, Austria, 2-5 November, 2016 book 1, Sci. and Techn. In Geology, Explaration and Minig, Conf. Proc. 2016 – Vol. 4 – P. 175-180.

7. Volodin I. N, Salimov R.F., Turilova E.A., Yang S.-F, *Estimation of the mean value for the normal distribution with constrains on d-risk* // Lobachevskii J. Math. – 2018. – Vol. 39. – P. 377-387.

8. Volodin I.N. *Optimum sample size in statistical inference procedures* // Soviet Math. (Iz. VUZ). – 1980. – Vol.22. – P. 68-78.

D-RISKS OF THE BERNOULLI DISTRIBUTION PARAMETER ESTIMATES WITH PRIOR BETA

R.F. Salimov

In the article for the Bernoulli distribution parameter Bayesian estimate and estimate with uniformly minimal d-risk are constructed for a quadratic loss function with prior beta distribution. The d-risks of these estimates are found and the tasks of planning of the tests volume are solved.

Keywords: Bernoulli distribution parameter estimate, Bayesian estimate, estimate with uniformly minimal d-risk, quadratic loss function, prior beta distribution, necessary sample size

УДК 519.62

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ СВОЙСТВ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЯ С ГРУЗОМ

А.А. Самсонов[1], С.И. Соловьёв[2], Д.М. Коростелева[3]

1 *anton.samsonov.kpfu@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *sergei.solovyev@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
3 *diana.korosteleva.kpfu@mail.ru*; Казанский государственный энергетический университет

Изучается обыкновенная дифференциальная задача на собственные значения второго порядка, моделирующая собственные колебания упругого стержня с присоединённым к торцу грузом. Задача имеет возрастающую последовательность положительных простых собственных значений с предельной точкой на бесконечности. Последовательности собственных значений соответствует полная ортонормированная система собственных функций. В работе исследуется поведение решений в зависимости от величины массы присоединённого груза. Исходная дифференциальная задача на собственные значения аппроксимируется сеточной схемой метода конечных элементов произвольного порядка на равномерной сетке. Устанавливаются оценки погрешности приближённых собственных значений и собственных функций в зависимости от шага сетки. Результаты работы могут быть обобщены для случаев более сложных и важных прикладных задач расчёта собственных колебаний балок, пластин и оболочек с присоединёнными грузами.

Ключевые слова: собственное колебание стержня, собственное значение, собственная функция, задача на собственные значения, сеточная аппроксимация, метод конечных элементов

Сформулируем дифференциальную задачу на собственные значения, описывающую продольные собственные колебания системы стержень–груз. Подобные задачи можно найти в [1, 2, 3]. Предположим, что ось упругого стержня занимает в состоянии покоя отрезок $[0, l]$ оси Ox. Изучаются малые продольные колебания стержня в предположении, что поперечные сечения стержня во время смещения остаются плоскими и ортогональными оси Ox. Обозначим через $\rho(x)$ объёмную плотность, через $E(x)$ — модуль упругости Юнга, через $S(x)$ — площадь поперечного сечения стержня. Предположим, что торец стержня с координатой $x = 0$ закреплен, к торцу $x = l$ присоединён груз массой M. Тогда продольные смещения $w(x, t)$ сечений стержня с координатой x в момент времени t удовлетворяют следующим уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\,\frac{\partial}{\partial x}\,w(x,t)\right) = r(x)\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,w(x,t), \quad x \in (0,l), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$w(0,t) = 0, \quad t > 0, \tag{2}$$

$$-p(l)\,\frac{\partial}{\partial x}\,w(l,t) = M\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,w(l,t), \quad t > 0, \tag{3}$$

где $p(x) = E(x)S(x)$, $r(x) = \rho(x)S(x)$, $x \in [0, l]$.

Собственные колебания системы стержень–груз определяются функцией $w(x, t)$ следующего вида: $w(x, t) = u(x)v(t)$, $x \in [0, l]$, $t > 0$, где $v(t) = a_0 \cos\sqrt{\lambda}\,t + b_0 \sin\sqrt{\lambda}\,t$, $t > 0$; a_0, b_0 и λ — постоянные величины. Тогда уравнения (1)–(3) приводят к дифференциальной задаче на собственные значения второго порядка: найти числа λ и ненулевые функции $u(x)$, $x \in [0, l]$, такие, что

$$-(p(x)u'(x))' = \lambda r(x)u(x), \quad x \in (0,l), \tag{4}$$

$$u(0) = 0, \quad p(l)u'(l) = \lambda M u(l). \tag{5}$$

Задача (4), (5) имеет возрастающую последовательность положительных простых собственных значений с предельной точкой на бесконечности. Последовательности собственных значений соответствует полная ортонормированная система собственных функций. В работе исследуются предельные свойства при $M \to \infty$ и при $M \to 0$ собственных значений и собственных функций параметрической задачи (4), (5) с параметром M. Исходная дифференциальная задача на собственные значения аппроксимируется сеточной схемой метода конечных элементов на равномерной сетке с конечными элементами произвольного порядка. Устанавливаются оценки погрешности приближённых собственных значений и собственных функций в зависимости от шага сетки.

Задачи на собственные значения с параметром применяются для исследования и решения нелинейных задач на собственные значения. Задачи на собственные значения с нелинейным вхождением спектрального параметра возникают, например, в физике плазмы [1, 2, 3, 4], в механике конструкций [5, 6, 7, 8, 9], при построении вычислительных методов решения сеточных уравнений [10, 11, 12]. Численные методы решения нелинейных самосопряжённых матричных задач на собственные значения исследовались в работах [13, 14]. Метод конечных разностей для решения обыкновенных дифференциальных задач на собственные значения с линейной и нелинейной зависимостью от спектрального параметра изучался в работах [7, 8, 9]. Метод конечных элементов для одномерных и многомерных нелинейных дифференциальных спектральных задач исследовался в [1, 4, 5], а эффект приближённого вычисления интегралов с помощью квадратурных формул в сеточных схемах метода конечных элементов изучался в [15, 16, 17]. Теоретическое исследование погрешности приближённых методов решения спектральных задач в гильбертовом пространстве проведено в работах [15, 16].

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90063.

Литература

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1977. – 736 с.

2. Стрелков С. П. *Введение в теорию колебаний.* – Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2005. – 440 с.

3. Андреев Л. В., Дышко А. Л., Павленко И. Д. *Динамика пластин и оболочек с сосредоточенными массами.* – М.: Машиностроение, 1988. – 200 с.

4. Zheltukhin V. S., Solov'ev S. I., Solov'ev P. S., Chebakova V. Yu. *Computation of the minimum eigenvalue for a nonlinear Sturm–Liouville problem* // Lobachevskii J. Math. – 2014. – V. 35. – No 4. – P. 416–426.

5. Zheltukhin V. S., Solov'ev S. I., Solov'ev P. S., Chebakova V. Yu. *Existence of solutions for electron balance problem in the stationary radio-frequency induction discharges* // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Engin. – 2016. – V. 158. – No 1. – Art. 012103. – P. 1–6.

6. Zheltukhin V. S., Solov'ev S. I., Solov'ev P. S., Chebakova V. Yu., Sidorov A. M. *Third type boundary conditions for steady state ambipolar diffusion equation* // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Engin. – 2016. – V. 158. – No 1. – Art. 012102. – P. 1–4.

7. Solov'ev S.I., Solov'ev P.S. *Finite element approximation of the minimal eigenvalue of a nonlinear eigenvalue problem* // Lobachevskii J. Math. – 2018. – V. 39. – No 7. – P. 949–956.

8. Solov'ev S. I. *Eigenvibrations of a bar with elastically attached load* // Differ. Equations. – 2017. – V. 53. – No 3. – P. 409–423.

9. Samsonov A. A., Solov'ev S. I. *Eigenvibrations of a beam with load* // Lobachevskii J. Math. – 2017. – V. 38. – No 5. – P. 849–855.

10. Samsonov A.,A., Solov'ev S. I., Solov'ev P. S. *Eigenvibrations of a bar with load* // MATEC Web Conf. – 2017. – V. 129. – Art. 06013. – P. 1–4.

11. Samsonov A. A., Korosteleva D. M., Solov'ev S. I. *Approximation of the eigenvalue problem on eigenvibration of a loaded bar* // J. Phys.: Conf. Ser. – 2019. – V. 1158. – No 4. – Art. 042009. – P. 1–5.

12. Samsonov A. A., Korosteleva D. M., Solov'ev S. I. *Investigation of the eigenvalue problem on eigenvibration of a loaded string* // J. Phys.: Conf. Ser. – 2019. – V. 1158. – No 4. – Art. 042010. – P. 1–5.

13. Lyashko A. D., Solov'ev S. I. *Fourier method of solution of FE systems with Hermite elements for Poisson equation* // Rus. J. Numer. Anal. Math. Model. – 1991. – V. 6. – No 2. – P. 121–130.

14. Solov'ev S. I. *Fast direct methods of solving finite-element grid schemes with bicubic elements for the Poisson equation* // J. Math. Sci. – 1994. – V. 71 – No 6. – P. 2799–2804.

15. Solov'ev S. I. *A fast direct method of solving Hermitian fourth-order finite-element schemes for the Poisson equation* // J. Math. Sci. – 1995. – V. 74. – No 6. – P. 1371–1376.

16. Samsonov A.,A., Solov'ev P. S., Solov'ev S. I. *The bisection method for solving the nonlinear bar eigenvalue problem* // J. Phys.: Conf. Ser. – 2019. – V. 1158. – No 4. – Art. 042011. – P. 1–5.

17. Samsonov A.,A., Solov'ev P. S., Solov'ev S. I. *Spectrum division for eigenvalue problems with nonlinear dependence on the parameter* // J. Phys.: Conf. Ser. – 2019. – V. 1158. – No 4. – Art. 042012. – P. 1–5.

18. Solov'ev S. I. *The error of the Bubnov–Galerkin method with perturbations for symmetric spectral problems with a non-linearly occurring parameter* // Comput. Math. Math. Phys. – 1992. – V. 32. – No 5. – P. 579–593.

19. Solov'ev S. I. *Approximation of operator eigenvalue problems in a Hilbert space* // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Engin. – 2016. – V. 158. – No 1. – Art. 012087. – P. 1–6.

20. Solov'ev S. I. *Quadrature finite element method for elliptic eigenvalue problems* // Lobachevskii J. Math. – 2017. – V. 38. – No 5. – P. 856–863.

INVESTIGATING LIMIT PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF THE PROBLEM ON EIGENVIBRATIONS OF THE BAR WITH A LOAD

A.A. Samsonov, S.I. Solov'ev, D.M. Korosteleva

The ordinary second-order differential eigenvalue problem modeling eigenvibrations of an elastic bar with a load attached to the bar end is studied. The problem has an increasing sequence of positive simple eigenvalues with limit point at infinity. To the sequence of eigenvalues, there corresponds a complete orthonormal system of eigenfunctions. In the paper, the behavior of the solutions in dependence on the load mass is investigated. The original differential eigenvalue problem is approximated by the mesh scheme of the finite element method of arbitrary order on a uniform grid. Error estimates for approximate eigenvalues and eigenfunctions are established. Investigations of this paper can be generalized for the cases of more complicated and important applied problems on eigenvibrations of beams, plates and shells with attached loads.

Keywords: eigenvibration of the bar, eigenvalue, eigenfunction, eigenvalue problem, mesh approximation, finite element method

УДК 517.373

НЕРАВЕНСТВА ТИПА РЕЛЛИХА НА ТРУБЧАТЫХ МНОЖЕСТВАХ

Н.А. Сарамбаев[1]

1 *sarambaev@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В статье представлены неравенства типа Реллиха, в котором интегралы берутся по 3-х мерным множествам, состоящим из трубчатых элементов. Трубчатый элемент – множество, построенное вращением произвольной двухмерной ограниченной области вокруг прямой, причем прямая может быть бесконечно удаленной от области. Неравенство типа Реллиха может найти применение, например, при оценке функций, на которые действует магнитный потенциал.

Ключевые слова: неравенство Реллиха, трубчатый элемент, трубчатое множество

Целью работы является исследование неравенств типа Харди и Реллиха (см., например, [1] и [2]). Мы рассматриваем эти неравенства в трубчатых областях. Нам потребуется следующее определение эквивалентности областей.

Определение 1. *Пусть в $\mathbb{R}^2$ задана ортонормированная система координат yz, и ограниченная область Ω. Область Ω_1 эквивалентна Ω, если существует система координат y_1z_1 такая, что все точки из Ω_1 имеют те же численные координаты в системе координат y_1z_1, что и точки из Ω в системе координат y_2z_2. Точки и их окрестности, которые имеют те же численные координаты в найденных системах координат, тоже будем называть эквивалентными.*

Пусть $K(\Omega)$ – класс эквивалентных областей, заданных по
определению 1. Пусть $t \in \mathbb{R}$. Пусть $\Omega(t) \subset K(\Omega)$ и при фиксированном
$t = t_1, \Omega(t_1) \equiv \Omega$. Мы можем построить такой подкласс $\Omega(t)$: достаточно лишь двигать множество Ω параллельно некоторой прямой на вектор длиной t.

Представим множество $\mathbb{R}$ таким образом: $\mathbb{R} = (-\infty, t_0] \cup (t_1, t_2] \cup \dots (t_{n-1}, t_n] \cup (t_n, \infty)$.

Построение трехмерной области:

1)Пусть $\Omega_0 = \Omega \times (-\infty, t_0]$, $\Omega(t_0) = \Omega$.

2)Пусть область $\Omega(t_0)$ лежит в плоскости π_0, и прямая $a_0 \subset \pi_0$, но
$a_0 \cap \pi_0 = \emptyset$ (a_0 так можно построить в силу ограниченности Ω). Отметим ось z_0 на прямой a_0. И введем систему координат в $\mathbb{R}^2 : z_0, r_0$, где
r_0 – это расстояние от прямой a_0 до точки.

Введем множество Ω_1 :

$$\Omega_1 = \left\{ (z, r, \phi) : \begin{cases} z = z_0 \\ r = r_0 \\ \phi(t) = \phi_0(t), t \in [t_0, t_1] \end{cases}, (z_0, r_0) \in \Omega(t_0) \right\},$$

где $\phi_0(t) : [t_0, t_1] \to [0, \phi_0]$, $\phi_0 < 2\pi$ – гладкая, возрастающая функция угла поворота относительно полуплоскости плоскости π_0, в которой лежит область $\Omega(t_0)$.

Пусть множество $\Omega(t_1)$ – это подмножество Ω_1 при фиксированном
$t = t_1$. Множество $\Omega(t_1) \equiv \Omega(t_0)$ по построению, следовательно $\Omega(t_1)$ – область.

Построим множество Ω_2, заменив в пункте 2 построения множества Ω_1 обозначения: $\Omega(t_1) \mapsto \Omega(t_2), \pi_0 \mapsto \pi_1, a_0 \mapsto a_1, z_0 \mapsto z_1, r_0 \mapsto r_1, \phi_0(t) \mapsto \phi_1(t)$.

Таким же образом построим множества $\Omega_i, i = \overline{3, n}$. Отметим, что функция $\phi(t)$ – гладкая, для каждого из промежутков $[t_i, t_{i+1}]$.

3) Пусть $\Omega_{n+1} = \Omega(t_n) \times [t_n, +\infty)$.

Определение 2. *Множество Ω_i, построенное в пункте 2 построения называется трубчатым элементом, а множество $\overline{\Omega} = \cup_{i=0}^{n+1} \Omega_i$ трубчатым.*

Предположение. *Будем предполагать, что множества $\Omega_i, i = \overline{0, n+1}$ взаимно не пересекаются, любой шар с центром на $\Omega(t_i)$ и лежащий внутри $\overline{\Omega} = \cup_{i=0}^{n+1} \Omega_i$ не пересекает области $\Omega(t_{i-1}), \Omega(t_{i+1})$.*

Рассмотрим множество $\overline{\Omega} = \cup_{i=0}^{n+1} \Omega_i$.

Следующие леммы и **теорема 1** нужны для описания нужных нам свойств множества $\overline{\Omega}$.

Лемма 1 была получена в работе [3], нам пригодилась в доказательстве **леммы 3**. В этой лемме область Ω_1– круг, а Ω – тор с толщиной равной диаметру круга Ω_1. r_1– минимальное расстояние от оси вращения тора Ω до тора Ω, а R_1 – максимальное.

Лемма 1. *Пусть Ω_1 и Ω множества, введенные выше, δ_1 и δ соответствующие им функции расстояния до границы, тогда $\delta_1 = \delta$ для всех точек $x \in \Omega$.*

Лемма 2. *Множество $\overline{\Omega} = \cup_{i=0}^{n+1} \Omega_i$ – связное.*

Лемма 3. *Пусть $\overline{\Omega}$, $\Omega(t^*)$ множества, введеные выше, δ и δ_1 соответствующие им функции расстояния до границы, тогда $\delta(x) = \delta_1(x)$ для всех точек $x \in \Omega(t^*)$, где $\delta_1(x)$ – расстояние до границы множества $\Omega(t^*)$.*

Теорема 1. *Множество $\overline{\Omega} = \cup_{i=0}^{n+1} \Omega_i$ – область.*

Следующие теоремы посвящены неравенствам типа Харди и Реллиха на областях $\overline{\Omega}$, полученных объединением трубчатых элементов.

Теорема 2. *Пусть $\delta_1(x)$ – функция расстояния до границы области Ω, ϕ и ψ – некоторые весовые функции. Пусть для всех функций f из класса $C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\int_\Omega \phi(\delta_1)|f|^p dx \le c_1 \int_\Omega \psi(\delta_1)|\nabla f|^p dx.$$

Тогда для $\overline{\Omega}$ справедливо следующее неравенство

$$\int_{\overline{\Omega}} \phi(\delta)|f|^p \le C(\Omega) \int_{\overline{\Omega}} \psi(\delta)|\nabla f|^p dx,$$

где $\delta(x)$ – функция расстояния до границы области $\overline{\Omega}$ и константа $C(\Omega)$ определяется как

$$C(\Omega) = \max_i c_1 \frac{R_i}{r_i}, i = 0, 1, \ldots, m.$$

Теорема 3. *Если выполнены все предположения **теоремы 2**, если кроме того $f \in C_0^2(\overline{\Omega})$, то*

$$\int_{\overline{\Omega}} |\Delta f|^2 dx \geq c \int_{\overline{\Omega}} \psi(\delta(M, \partial\overline{\Omega}))|\Delta f|^2 dx,$$

где $c = c_1 c_2$ – константа Реллиха, $c_1 = c_1(\Omega)$, $c_2 = c_2(\Omega)$ – константы Харди.

В доказательстве **теоремы 3** используется тождество Ладыженской [4].

Литература

1. Avkhadiev F. G. *Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants*// Lobachevskii Journal. Math. — 2006. — V. 21. – PP. 3–31.

2. Rellich F. *Perturbation Theory of Eigenvalue Problems* – Gordon and Breach.: New York, London, Paris, 1969. – 127 p.

3. Авхадиев Ф. Г., Шафигуллин И. К., *Оценки констант Харди при трубчатом расширении множеств и в областях с конечными граничными моментами* // Математические труды. – 2013. – Т. 16. – № 2. – с. 3–12.

4. Ладыженская О. А. *Краевые задачи математической физики* — М.: Наука, 1973. — 408 с.

RELLICH TYPE INEQUALITY ON TUBULAR SETS

N.A. Sarambaev

There are Rellich type inequalities in 3-dimensional tubular domains in this paper. Tubular element is the set, which was built by rotation of 2-dimensional bounding domain around a straight line. Thia line may be infinitely far from a domain. Rellich type inequality may be used to estimate magnetic potential.

Keywords: Rellich type inequality, tubular element, tubular set

УДК 004.912

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ ОЦЕНКЕ СЛОЖНОСТИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕКСТОВ

А.С. Саховский[1], В.Д. Соловьев[2]

1 *and2900@inbox.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Высшая школа информационных технологий и интеллектуальных систем

2 *maki.solovyev@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт филологии и межкультурной коммуникации

В данной работе производится исследование сложности образовательных текстов на русском языке с использованием тематического моделирования. В ходе работы была произведена оценка качества тематических моделей, полученных с использованием разных подходов к тематическому моделированию. В результате исследования были обнаружены зависимости между сложностью книг и свойствами тем, которым они посвящены.

Ключевые слова: тематическое моделирование, латентное размещение Дирихле, аддитивная регуляризация тематических моделей, сложность текста

Введение

Проблема выбора учебных материалов, наилучшим образом соответствующих целевой аудитории становится все более острой в условиях расширения списка учебников, рекомендованных к использованию при реализации образовательных программ. С другой стороны, с развитием современных методов автоматической обработки естественного языка, появляется все больше возможностей решения данной проблемы. В данной работе рассматривается использование различных тематических моделей при анализе сложности учебников по обществознанию.

Модели и Данные

Для исследования были отобраны две коллекции учебников по обществознанию. Первая коллекция состоит из книг авторства Л.Н. Боголюбова, соответствующих годам обучения с 6 по 11. Вторая коллекция состоит из книг авторства А.Ф. Никитина, соответствующих годам обучения с 5 по 11. Количество книг в каждой из коллекций составляет 7.

Перед построением тематических моделей были применены следующие методы предобработки текстовой коллекции: (i) разделение текстов на предложения, (ii) лемматизация слов, (iii) определение частей речи слов. При применении методов (ii) и (iii) была использована библиотека UDPipe. При построении тематических моделей рассматривались как (i) корпус полных текстов книг (full texts), так и корпуса, полученные разбиением книг на документы меньшего размера: (ii) корпус сегментов (segments) и (iii) корпус абзацев (paragraphs).

Обозначим за D множество документов текстовой коллекции, содержащих слова из множества W (словаря), связанные с темами T. Тогда каждый документ $d \in D$ может быть представлен как дискретное распределение $\theta^{(d)}$ на множестве тем: $p(z_w = t) = \theta_{td}$, где z_w — дискретная переменная, характеризующая тему слова $w \in D$. Каждая тема представляет собой мультиномиальное распределение слов: $p(w \mid z_j = t) = \phi_{wt}$ (причем w является некоторым словом из словаря, а z_j соответствует конкретному словоупотреблению в документе. Разные словоупотребления могут относиться к одному и тому же слову из словаря).

Пусть n_{dw} — количество употреблений слова w в документе d, n_d — количество слов в документе. Тогда частота слова в документе имеет вид: $\hat{p}(w \mid d) = \frac{n_{dw}}{n_d}$. Задача тематического моделирования состоит в нахождении приближенного представления матрицы частот слов в документах: $P = (\hat{p}(w \mid d))_{W \times D}$ в виде произведения матрицы терминов тем $\Phi = (\phi_{wt})_{W \times T}$ и матрицы тем документов $\Theta = (\theta_{td})_{T \times D}$: $P = \Theta \times \Phi$.

В рамках данной работы были использованы следующие тематические модели: (i) Latent Dirichlet Allocation (LDA) [1], (ii) Online LDA [2], (iii) Additive Regularization of Topic Models (ARTM) [3]. Особенностью моделей (i) и (ii) является использование предположения о том, что столбцы θ_d и ϕ_t являются стохастическими векторами, порожденными распределениями Дирихле. Параметры распределений Дирихле являются гиперпараметрами модели. Модель ARTM позволяет накладывать на тематические модели дополнительные ограничения, выраженные в виде линейной комбинации произвольного числа регуляризаторов.

Эксперименты

При оценке качества тематических моделей были рассмотрены метрики качества как отдельных тем, так и всего множества тем в совокупности. В рамках данной работы были использованы следующие метрики оценки качества:

1) Метрика, основанная на распределенных представлениях слов word2vec [4];

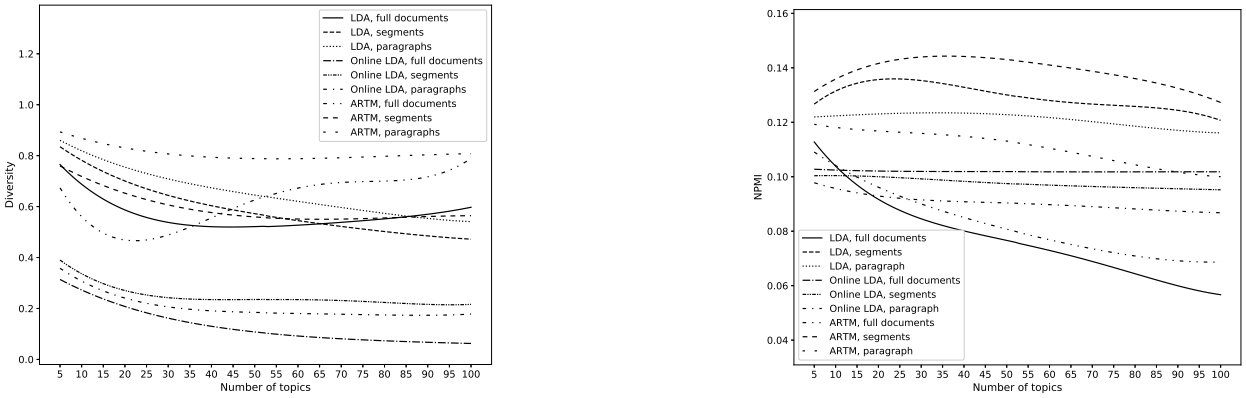
2) Метрика когерентности тем Normalized pairwise mutual information (NPMI) [5];

3) Diversity [6].

При использовании первых двух из перечисленных метрик оценивалось качество отдельных тем. За оценку модели принималась средняя оценка ее тем.

В рамках подхода к оценке, основанного на векторных представлениях слов word2vec для темы t рассматривалось множество ее наиболее вероятных слов W_t. Пусть w — некоторое слово из этого множества. Тогда $v_w \in R_d$ — векторное представление слова w, где d — размерность используемого векторного пространства слов. Тогда оценка темы имеет вид:

$$Q_t = \frac{1}{|W_t|(|W_t| - 1)} \sum_{w_1 \neq w_2 \in W_t} d_{cos}(v_{w_1}, v_{w_2}), \quad (1)$$



(a). **(b).**

Рис. 1. Оценки качества (a) diversity, (b) NPMI тематических моделей с различным числом тем. Большие оценки соответствуют лучшим моделям.

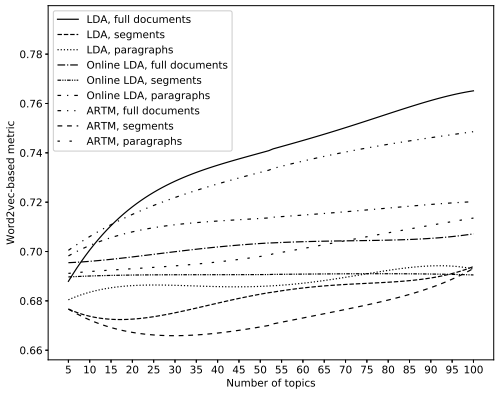


Рис. 2. Оценки качества word2vec тематических моделей с различным числом тем. Меньшие оценки соответствуют лучшим моделям.

где $d_{cos}(v_{w_1}, v_{w_2})$ — косинусное расстояние между векторами слов w_1 и w_2. В данной работе были использованы skip-gram модели Rusvectores [7], обученные на национальном корпусе русского языка (НКРЯ) с размерностью векторов $d = 300$.

Метрики когерентности тем оценивают, насколько часто наиболее вероятные слова темы совместно встречаются в документах. В данной работе была использована метрика Normalized pairwise mutual information (NPMI):

$$NPMI_t = \sum_{i<j} \frac{\log \frac{p(w_i, w_j)}{p(w_i)p(w_j)}}{-\log p(w_i, w_j)}, \tag{2}$$

где $p(w_i)$, $p(w_j)$ — частоты слов w_i и w_j, $p(w_i, w_j)$ — частота совместной встречаемости слов w_i и w_j. Соответствующие частоты подсчитывались на основе НКРЯ.

Оценка diversity представляет собой долю уникальных слов среди фиксированного числа наиболее вероятных слов всех тем рассматриваемой модели.

В ходе экспериментов были построены тематические модели с числом тем от 5 до 100 и шагом 1. На рисунках 1 и 2 представлены оценки качества построенных тематических моделей. На основании полученных графиков можно сделать следующие основные наблюдения. Во-первых, наилучшими значениями метрик word2vec и NPMI обладают модели ARTM и LDA, построенные на корпусе сегментов. Причем наилучшие значения качества достигаются в диапазоне числа тем от до до 35. Во-вторых, доля уникальных слов выше в темах тематических моделей LDA и ARTM, построенных на абзацах.

Заключение

В данной работе было проведено исследование учебников с использованием различных тематических моделей. Была произведена оценка построенных тематических моделей и определение числа тем, для которых достигаются наилучшие оценки качества. Результаты тематического моделирования позволили произвести ряд корреляционных тестов, в результате которых были найдены зависимости, объясняющие соответствие учебников своему классу. Полученные результаты позволяют сделать вывод о возможности использования тематических моделей при анализе сложности учебников и классификации учебников по уровню их сложности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 18-18-00436)

Литература

1. Blei D. M., Ng A. Y., Jordan M. I. *Latent dirichlet allocation* // Journal of machine Learning research. – 2003. – Т. 3. – №. Jan. – С. 993–1022.

2. Hoffman M., Bach F. R., Blei D. M. *Online learning for latent dirichlet allocation* // advances in neural information processing systems. – 2010. – С. 856–864.

3. Vorontsov K., Potapenko A. *Additive regularization of topic models* // Machine Learning. – 2015. – Т. 101. – №. 1-3. – С. 303–323.

4. Nikolenko S. I. *Topic quality metrics based on distributed word representations* // Proceedings of the 39th international ACM SIGIR conference on research and development in information retrieval. – ACM, 2016. – С. 1029–1032.

5. Bouma G. Normalized *(pointwise) mutual information in collocation extraction* // Proceedings of GSCL. – 2009. – С. 31–40.

6. Dieng A. B., Ruiz F. J. R., Blei D. M. Topic modeling in embedding spaces // arXiv preprint arXiv:1907.04907. – 2019.

7. Kutuzov A., Kuzmenko E. *WebVectors: a toolkit for building web interfaces for vector semantic models* // International Conference on Analysis of Images, Social Networks and Texts. – Springer, Cham, 2016. – С. 155–161.

TOPIC MODELING FOR COMPLEXITY ASSESSMENT OF EDUCATIONAL TEXTS

A.S. Sakhovskiy, V.D. Solovyev

This article explores the problem of assessing the complexity of Russian educational texts. In this paper, we focus on exploration of quality assesment of different topic models. The most significant findings of the research include identification of statistically significant correlations of the properties of topic models with the complexity of educational texts.

Keywords: topic modeling, latent Dirichlet allocation, additive regularization of topic models, text complexity

УДК 004.9

РАЗРАБОТКА ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ПО ОЦЕНКЕ СВЯЗИ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ В СОЦИАЛЬНОЙ СЕТИ

П.Д. Семенов[1], Г.З. Вахитов[2]

1 *lerck1444@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *gzvahitov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Данная работа посвящена анализу социальных сетей. В наше время это является актуальным, чтобы проводить таргетированную рекламу, рекрутинг или делать вывод по определенному профилю.

Ключевые слова: информационная система, анализ данных, социальные сети, профили социальных сетей

Социальные сети используются повсеместно и содержат в свободном доступе огромный массив информации, который можно использовать для различных нужд: анализ потребительских предпочтений, анализ эффективности рекламы, анализ профилей для первичной оценки соискателя на вакантную должность, потенциального заемщика банка или клиента страховой компании и др.

В ряде практических задач необходимо исследовать степень схожести личностей, являющихся пользователями социальной сети. К примеру, прогнозирование потребительского поведения одного лица на основе данных о потребительском поведении другого лица или группы пользователей социальной сети [2, с.23-25].

Цель работы состоит в разработке приложения по определению подобия профилей пользователей социальной сети. Данная цель может быть достигнута при решении следующих задач:

1. сбор информации о пользователях;
2. разработка модуля по статистической обработке данных;
3. разработка модуля по аналитической обработке данных.

Работа проводилась на материалах, доступных в сети ВКонтакте с помощью встроенных методов API VK. Приложение было разработано на языке Java. Базой для сбора статистических данных послужили 316 открытых профилей социальной сети ВКонтакте.

Приложение было построено на языке Java, собрано с помощью Maven. Структура приложения такова: есть REST-сервер, построенный с помощью библиотеки Spring; сервер принимает наши запросы, обрабатывает и выдает соответствующий ответ. Имеются следующие варианты обрабатываемых запросов: извлечь данные профиля из социальной сети (на вход подается id), провести статистический метод, провести аналитический метод (подается 1 или 2 id, в зависимости от метода).

В качестве базы данных использован PostgreSQL, это обусловлено его доступностью и широким набором функций. Информация хранится в базе данных, для каждой таблицы предусмотрены следующие операции: получить по id, получить все, добавить, удалить.

У каждого пользователя социальной сети сформирован профиль, который содержит базовую информацию. У многих пользователей профиль скрыт; нас интересуют только открытые профили.

Наибольший интерес представляет информация, которая позволяет идентифицировать пользователя в качестве потребителя какой-либо продукции, возможного заемщика в банке, работника для организации, поэтому встает проблема исследования его интересов, круга знакомств, и др. Для этого мы можем анализировать аудиозаписи, группы, список друзей и так далее.

Приложение позволяет извлекать всех друзей изучаемого пользователя социальной сети, а также список групп, к которым прилагаются теги и названия. Группы – это то, чем хотя бы немного увлечены даже те люди, которые в социальных сетях проводят мало времени, по ним можно судить об активности пользователя в социальной сети.

Анализ данных осуществлен нами в следующих направлениях:

1. Статистика по одному профилю;
2. Статистическое сравнение двух профилей;
3. Статистическое сравнение N профилей;
4. Аналитическое сравнение двух профилей;

Первой является статистика по одному профилю. Тут все очень просто – мы просто объединяем всю информацию по определенному профилю, что у нас есть, и возвращаем её, не проводя никаких преобразований [1, с. 214].

Статистика по двум профилям куда интереснее. Перед проведением данной операции нам необходимо собрать статистику по данным профилей по отдельности (то есть, собрать статистику по одному профилю). Затем, если критерий содержится в единственном числе (родной город), то мы сравниваем значения и определяем подобие (true или false). Если речь идет о группах, то берется процент общих групп от числа всех уникальных групп, в которых состоят оба профиля.

Параметры нужно сложить, чтобы при максимуме сумма была равна 100% (или 1,0). Для этого каждому критерию мы ставим коэффициент, определяющий значимость подобия. Например, одинаковые имена являются совпадением, но они слабо влияют на подобие двух профилей, поэтому для них коэффициент равен 0,02. Родной город объединяет людей куда больше, - коэффициент равен 0.05. А для групп соблюдается совсем большой множитель – 0,5.

Статистика по N профилей ведется следующим образом. Допустим, мы имеем N профилей. Мы берем данные по i-ому и i+1-ому профилям, а потом полученные данные сравниваем с каждым следующим профилем, и так до конца. Впрочем, небольшие изменения все же есть – вместо того, чтобы хранить единичную информацию в булевских переменных, мы будем вести ту же статистику, что и при анализе групп. Коэффициенты остаются теми же. В итоге мы получим приблизительный общий образ группы профилей и формульный ответ, насколько много общего у этой группы. Процент сходства здесь будет довольно низкий. Верхней границей являются 10-12%, если речь идет об одноклассниках, которые живут в одном городе, учатся в одной школе и, скорее всего, подписаны на какую-то одну-две группы, связанные с конкретным учебным заведением.

Тестирование показало, что все профили так или иначе связаны друг с другом на 5% и более. Минимальный процент соответствия дает пол, почти у всех профилей есть хотя бы одна общая группа (как правило, популярные паблики). Гипотетически можно получить нулевое подобие, но на выборке в 316 профилей подобное не встретилось.

Аналитический метод разработан для того, чтобы намеренно понизить небольшой процент сходства, а высокие значения, - увеличить. Таким образом можно ослабить влияние вышеупомянутых факторов. Логично, что, если в социальной сети будут люди, у которых сходство будет около 50-60%, то на деле это очень похожие профиля, так как получить значение выше в реальных условиях практически невозможно. Исключением являются копии страниц [3, с.221].

Аналитический метод проводится только между двумя профилями. Для начала мы берем результат статистического метода и проводим следующее преобразование $\int(\sqrt[100]{2})^{y-100}$, где в качестве «y» мы используем значение статистического метода. Данная функция имеет область значений [0,5; 1] при значениях параметра от 0 до 100, поэтому после этого нам необходимо умножить результат на 2 и вычесть единицу.

Результат тестирований данного метода вывел интересную закономерность. Две странички одного человека обладают очень большим сходством, потому что, даже если человек использует разные имена и даты, его легко обнаружить по подпискам и общей информации по друзьям, увлечениям и так далее. При этом, даже "лучшие"друзья не набирают сходство выше 40-50%, и их подобие данный метод точно также ослабляет.

При этом можно было наблюдать следующее. Например, было взято два человека, которые учатся в одном университете, но не имеют практически ничего общего (кроме университета) и не общаются. Статистический метод вывел сходство почти в 7%, но аналитический свел его к 4%, что выглядит достаточно правдоподобно. Итог: помимо основной функции (уменьшить влияние случайных связей), данный метод также позволяет вычислять профили одного и того же человека. К сожалению, этим методом тяжело вычислить так называемых ботов, так как зачастую у них вписываются совершенно случайные данные, но наша разработка не призвана решать данную проблему.

Литература

1. Гусарова Н.Ф. *Анализ социальных сетей. Основные понятия и метрики.* – СПб: Университет ИТМО, 2016. – 67 с.

2. Ермолова Н. М.: Альпина Паблишер, 2013. 357 с. *Продвижение бизнеса в социальных сетях Facebook, Twitter, Google* - СПб: Университет ИТМО, 2016. – 67 с.

3. Верченов Л.Н., Ефременко Д.В., Тищенко В.И. *Социальные сети и виртуальные сетевые сообщества* - М: ИНИОН РАН, 2013. 360 с.

DEVELOPMENT OF AN INFORMATION SYSTEM FOR EVALUATING USER CONNECTION IN SOCIAL NETWORK

P.D. Semyonov, G.Z. Vakhitov

This work is devoted to the analysis of social networks. Nowadays, it is relevant to conduct targeted advertising, recruiting or make a conclusion on a specific profile.
Keywords: information system, data analysis, social networks, profiles of social networks

УДК 531/534

ОПИСАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ С УЧЕТОМ СТРУКТУРНЫХ СВОЙСТВ

Е.В. Семенова[1], Д.А. Мухин[2]

1 *elena.semionova2011@rambler.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *dimonchik.2342@yandex.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В работе рассмотрен метод описания поведения сплошных сред, учитывая структурные особенности. В качестве примера рассмотрена компьютерная томография диафиза бедренной кости крысы.

Ключевые слова: тензор структуры, трабекулярная (губчатая) костная ткань, эллипсоид структуры

В настоящее время существует множество материалов, имеющих сложную внутреннюю архитектуру и представляющих интерес для исследования. Для количественного описания структуры таких материалов используют тензор структуры, это положительно определенный тензор второго ранга, который позволяет учесть особенности материала [1, 2].

Для построения тензора структуры нашел применение метод среднего расстояния (МСР) между порами [2-4]. Для его применения в работе были реализованы два метода обработки данных, полученных с помощью КТ: пороговая бинаризация и бинаризация с линейным участком. В первом случае порог бинаризации, разделяющий две условные среды, выбирается из анализа гистограммы образца методом Оцу. Этот алгоритм позволяет выделить из всего массива так называемые «полезные» и «фоновые» значения, которые в бинаризированном массиве соответствуют значениям «1» и «0». Во втором случае порог бинаризации представляет собой интервал, определяемый задаваемым параметром и линейно соединяющий «0» и «1». Элементы из этого интервала соответствуют области костной ткани, где поры малы и разрешение томографа не позволяет их выявить, но при этом их концентрация значительно меняет свойства материала.

МСР-метод позволяет получить облако точек, которое описывает распределение одной среды в другой. В работе был реализован метод регуляризации, позволяющий скорректировать МСР-распределение. Его применение обусловлено в основном двумя факторами: особенностями томографа (его разрешением и настройками) и чувствительностью к выбору порога бинаризации.

В работе в качестве исходных данных была рассмотрена компьютерная томография диафиза бедренной кости крысы. Используя рассмотренную методику была описана структура образца. Полученные данные – векторное поле собственных векторов. Аналогичным образом были найдены векторные поля для случая бинаризации с порогом и для применения регуляризации для последнего.

Полученные данные позволяют произвести оценки осей ортотропии для изучаемого образца. А также оценивая поле собственных значений можно получить информацию о направлениях, соответствующих большей жесткости. Для такого вида набора данных могут быть применены стандартные статистические методы, например, сингулярная декомпозиция матрицы корреляций или иные факторные методы.

Литература

1. Shertzer R. H. *Fabric tensors and effective properties of granular materials with application to snow.* – Montana State University, –2011. – pp. 24-29.

2. Souzanchi M. F., Palacio-Mancheno P. E., Borisov Yu. A., Cardoso L., Cowin S. *Microarchitecture and Bone Quality in the Human Calcaneus: Local Variations of Fabric Anisotropy* // Journal of bone and mineral research: the official journal of the American Society for Bone and Mineral Research. – 2012. –pp. 2562-2572.

3. Киченко А. А., Тверье В. М, Няшин Ю. И. *Экспериментальное определение тензора структуры трабекулярной костной ткани* // Российский журнал биомеханики. –2011. – Т. 15. –№ 4. –С. 78–93. 1987. – 430 с.

4. Фурман Я. А., Юрьев А. Н., Яншин В. В. *Цифровые методы обработки и распознавания бинарных изображений* . – Красноярск: Изд-во Краснояр. ун-та, 1992. –248 с.

DESCRIPTION OF THE BEHAVIOR OF THE CONTINUOUS MEDIA TAKING INTO ACCOUNT OF STRUCTURAL PROPERTIES

E.V. Semenova, D.A. Mukhin

The paper describes a method for describing the behavior of continuous media, taking into account structural features. Computed tomography of rat diaphysis of the femur was considered as an example.
Keywords: fabric tensor, trabecular bone tissue, ellipsoid of structure

УДК 519.62

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

П.С. Соловьёв[1], С.И. Соловьёв[2], Д.М. Коростелева[3], А.А. Самсонов[4]

1 *pavel.solovev.kpfu@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *sergei.solovyev@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
3 *diana.korosteleva.kpfu@mail.ru*; Казанский государственный энергетический университет
4 *anton.samsonov.kpfu@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Исследуется задача нахождения минимального собственного значения, отвечающего положительной собственной функции, задачи на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с коэффициентами нелинейно зависящими от спектрального параметра. Установлено необходимое и достаточное условие существования решений задачи. Исходная дифференциальная задача на собственные значения аппроксимируется сеточной схемой метода конечных элементов с численным интегрированием на неравномерной сетке с конечными элементами произвольного порядка. Устанавливаются оценки погрешности приближённых собственных значений и собственных функций в зависимости от шага сетки и точности применяемой квадратурной формулы.

Ключевые слова: собственное значение, положительная собственная функция, нелинейная задача на собственные значения, обыкновенное дифференциальное уравнение, метод конечных элементов, численное интегрирование, квадратурная формула

Исследуется задача определения минимального собственного значения $\lambda \in \Lambda$, $\Lambda = [0, \infty)$, и отвечающей положительной собственной функции $u(x)$, $x \in \Omega$, $\Omega = (0, \pi)$, $\overline{\Omega} = [0, \pi]$, удовлетворяющих

уравнениям в обобщённом смысле

$$-(p(\lambda s(x))u')' = r(\lambda s(x))u, \quad x \in \Omega,$$

$$u(0) = u(\pi) = 0.$$

Пусть функции $p(\mu)$, $r(\mu)$, $\mu \in \Lambda$, $s(x)$, $x \in \overline{\Omega}$ являются непрерывными положительными, функция $p(\mu)$, $\mu \in \Lambda$ – ограниченная, а функция $r(\mu)$, $\mu \in \Lambda$ – неограниченная. Задача такого вида возникает при моделировании плазмы высокочастотного разряда пониженного давления [1, 2, 3, 4].

Пусть $\gamma(\mu)$ для фиксированного $\mu \in \Lambda$ обозначает минимальное собственное значение параметрической линейной задачи на собственные значения

$$-(p(\mu s(x))u')' = \gamma(\mu)r(\mu s(x))u, \quad x \in \Omega,$$

$$u(0) = u(\pi) = 0.$$

Установлено, что для существования минимального простого собственного значения исходной задачи, отвечающего положительной собственной функции, необходимо и достаточно, чтобы $\gamma(\xi) > 1$ для некоторого $\xi \in \Lambda$.

Исходная дифференциальная задача на собственные значения аппроксимируется сеточной схемой метода конечных элементов с численным интегрированием на неравномерной сетке с конечными элементами произвольного порядка. Устанавливаются оценки погрешности приближённого минимального собственного значения и отвечающей приближённой положительной собственной функции в зависимости от шага сетки и точности применяемой квадратурной формулы.

Нелинейные задачи на собственные значения возникают также в механике конструкций [5, 6, 7, 8, 9], при построении численных алгоритмов решения сеточных уравнений [10, 11, 12]. Вычислительные методы решения нелинейных самосопряжённых матричных задач на собственные значения исследовались в работах [13, 14]. Метод конечных разностей для решения обыкновенных дифференциальных задач на собственные значения с линейной и нелинейной зависимостью от спектрального параметра изучался в работах [7, 8, 9]. Метод конечных элементов для одномерных и многомерных нелинейных дифференциальных спектральных задач исследовался в [1, 4, 5], а эффект приближённого вычисления интегралов с помощью квадратурных формул в сеточных схемах метода конечных элементов изучался в [15, 16, 17]. Теоретическое исследование погрешности приближённых методов решения спектральных задач в гильбертовом пространстве проведено в работах [15, 16].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 18-41-160029. Работа поддержана РФФИ (проект № 19-31-90063).

Литература

1. Zheltukhin V. S., Solov'ev S. I., Solov'ev P. S., Chebakova V. Yu. *Computation of the minimum eigenvalue for a nonlinear Sturm–Liouville problem* // Lobachevskii J. Math. – 2014. – V. 35. – No 4. – P. 416–426.

2. Zheltukhin V. S., Solov'ev S. I., Solov'ev P. S., Chebakova V. Yu. *Existence of solutions for electron balance problem in the stationary radio-frequency induction discharges* // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Engin. – 2016. – V. 158. – No 1. – Art. 012103. – P. 1–6.

3. Zheltukhin V. S., Solov'ev S. I., Solov'ev P. S., Chebakova V. Yu., Sidorov A. M. *Third type boundary conditions for steady state ambipolar diffusion equation* // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Engin. – 2016. – V. 158. – No 1. – Art. 012102. – P. 1–4.

4. Solov'ev S.I., Solov'ev P.S. *Finite element approximation of the minimal eigenvalue of a nonlinear eigenvalue problem* // Lobachevskii J. Math. – 2018. – V. 39. – No 7. – P. 949–956.

5. Solov'ev S. I. *Eigenvibrations of a bar with elastically attached load* // Differ. Equations. – 2017. – V. 53. – No 3. – P. 409–423.

6. Samsonov A. A., Solov'ev S. I. *Eigenvibrations of a beam with load* // Lobachevskii J. Math. – 2017. – V. 38. – No 5. – P. 849–855.

7. Samsonov A.,A., Solov'ev S. I., Solov'ev P. S. *Eigenvibrations of a bar with load* // MATEC Web Conf. – 2017. – V. 129. – Art. 06013. – P. 1–4.

8. Samsonov A. A., Korosteleva D. M., Solov'ev S. I. *Approximation of the eigenvalue problem on eigenvibration of a loaded bar* // J. Phys.: Conf. Ser. – 2019. – V. 1158. – No 4. – Art. 042009. – P. 1–5.

9. Samsonov A. A., Korosteleva D. M., Solov'ev S. I. *Investigation of the eigenvalue problem on eigenvibration of a loaded string* // J. Phys.: Conf. Ser. – 2019. – V. 1158. – No 4. – Art. 042010. – P. 1–5.

10. Lyashko A. D., Solov'ev S. I. *Fourier method of solution of FE systems with Hermite elements for Poisson equation* // Rus. J. Numer. Anal. Math. Model. – 1991. – V. 6. – No 2. – P. 121–130.

11. Solov'ev S. I. *Fast direct methods of solving finite-element grid schemes with bicubic elements for the Poisson equation* // J. Math. Sci. – 1994. – V. 71 – No 6. – P. 2799–2804.

12. Solov'ev S. I. *A fast direct method of solving Hermitian fourth-order finite-element schemes for the Poisson equation* // J. Math. Sci. – 1995. – V. 74. – No 6. – P. 1371–1376.

13. Samsonov A.,A., Solov'ev P. S., Solov'ev S. I. *The bisection method for solving the nonlinear bar eigenvalue problem* // J. Phys.: Conf. Ser. – 2019. – V. 1158. – No 4. – Art. 042011. – P. 1–5.

14. Samsonov A.,A., Solov'ev P. S., Solov'ev S. I. *Spectrum division for eigenvalue problems with nonlinear dependence on the parameter* // J. Phys.: Conf. Ser. – 2019. – V. 1158. – No 4. – Art. 042012. – P. 1–5.

15. Solov'ev S. I. *The error of the Bubnov–Galerkin method with perturbations for symmetric spectral problems with a non-linearly occurring parameter* // Comput. Math. Math. Phys. – 1992. – V. 32. – No 5. – P. 579–593.

16. Solov'ev S. I. *Approximation of operator eigenvalue problems in a Hilbert space* // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Engin. – 2016. – V. 158. – No 1. – Art. 012087. – P. 1–6.

17. Solov'ev S. I. *Quadrature finite element method for elliptic eigenvalue problems* // Lobachevskii J. Math. – 2017. – V. 38. – No 5. – P. 856–863.

INVESTIGATION OF THE FINITE ELEMENT METHOD FOR SOLVING A NONLINEAR EIGENVALUE PROBLEM

P.S. Solov'ev, S.I. Solov'ev, D.M. Korosteleva, A.A. Samsonov

The problem of finding the minimal eigenvalue corresponding to a positive eigenfunction of the nonlinear eigenvalue problem for the ordinary differential equation with coefficients depending on a spectral parameter is investigated. A necessary and sufficient condition for the existence of solutions of the problem is established. The original differential eigenvalue problem is approximated by the mesh scheme of the finite element method with numerical integration on a nonuniform grid and with finite elements of arbitrary order. Error estimates for approximate eigenvalues and eigenfunctions in dependence on the mesh size and the accuracy of the applied quadrature formula are established.
Keywords: eigenvalue, positive eigenfunction, nonlinear eigenvalue problem, ordinary differential equation, finite element method, numerical integration, quadrature formula

УДК 372.851

ФОРМИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ ВИЗУАЛЬНЫХ ОБРАЗОВ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ОСНОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

К.И. Сулейманова[1], Э.В. Чеботарева[2]

1 *kamilanexus@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

2 *elvchb@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В работе приводятся результаты проведенного авторами исследования системы ассоциативных образов базовых понятий математического анализа у обучающихся. Выдвигается гипотеза о зависимости

наличия сформированного ряда ассоциативных образов базового понятия математического анализа от степени сформированности данного понятия.

Ключевые слова: математическое образование, визуальное мышление, когнитивно-визуальный подход, методика изучения математического анализа

В настоящее время в современной педагогической практике большое внимание уделяется роли визуального мышления в познавательной деятельности. Использование возможностей визуального мышления лежит в основе когнитивно-визуального подхода к преподаванию математических дисциплин [1, 2, 3]. Интерес к роли визуальных образов в обучении математике в научной литературе возник достаточно давно [4], однако данный вопрос не теряет своей актуальности и в настоящее время. Так, появление образовательных систем компьютерной математики, обладающих широкими возможностями для динамической визуализации, потребовало переосмысления подхода к визуализации в обучении математическим дисциплинам [5].

Дисциплины математического цикла традиционно считаются одними из наиболее сложных для изучения дисциплин не только в школе, но и в вузе. Причина такой сложности во многом обусловлена абстрактностью изучаемых понятий. Как правило, математическая теория оперирует абстрактными классами объектов, изучая их общие свойства и закономерности. При этом ключевые понятия могут быть неопределяемыми, либо их определение может ссылаться на другие абстрактные объекты. Ярким примером математической дисциплины, при изучении которой студенты испытывают трудности с наглядным представлением изучаемых понятий, является математический анализ. Недостаток ставшей привычной для обучающихся визуальной наглядности при изучении нового материала способен оказывать существенное негативное влияние на успешность освоения данной дисциплины. В связи с этим интерес представляет исследование процесса формирования у обучающихся визуальных образов абстрактных математических понятий при изучении новых разделов математики.

Целью настоящей работы является исследование системы образов базовых понятий математического анализа у студентов, изучающих данную дисциплину. В исследовании приняли участие 32 студента, ранее изучавшие основы математического анализа в вузе. Каждому студенту было предложено изобразить на бумаге по-крайней мере два образа, ассоциирующихся у него с каждым из следующих понятий: “функция”, “окрестность”, “последовательность”, “предел последовательности”, “сходимость”, “непрерывность”, “асимптота”, “производная”, “дифференциал”, “определенный интеграл”, “сумма ряда”, “градиент”.

В ходе обработки ответов респондентов были получены следующие результаты.

1. В преобладающем большинстве ответов (за исключением 13 ответов) в качестве одного из образов указывается формула, символ или набор символов.

2. Ни у одного респондента не вызвало затруднений изображение образов, ассоциирующихся с понятием “функция”. Большинство респондентов (за исключением двух) указали в качестве одного из образов график функции, а в качестве второго образа набор символов, так или иначе содержащий символы “$f(x)$”. Также у большинства респондентов не вызвало затруднений изображение образов понятий “окрестность”, “последовательность”, “асимптота”, “определенный интеграл”.

3. В качестве одного из образов, ассоциирующихся с понятием “непрерывность” в ответах 26 из 32 респондентов присутствовало изображение сплошной линии.

4. Все респонденты указали в качестве одного из образов понятия “предел” набор символов, содержащий символ “lim”. При этом 14 респондентов не смогли указать еще один образ, кроме символьного. Все респонденты указали в качестве одного из образов понятия “производная” формулу, содержащую символ штриха. При этом лишь два респондента представили еще один графический образ, 23 респондента в качестве второго образа указали формулу, 7 респондентов не предоставили второй образ.

5. Наибольшие затруднения у респондентов вызвало изображение образов, ассоциирующихся с понятиями “сходимость”, “дифференциал”, “сумма ряда”, “градиент”. В образах, представленных респондентами преобладают формулы и символьные записи (лишь 6 респондентов указали в качестве образа рисунок), более половины ответов содержат лишь один образ.

Полученные результаты позволяют выдвинуть для дальнейшего исследования гипотезу о зависимости наличия сформированного образного ассоциативного ряда, привязанного к конкретному понятию математического анализа, от степени сформированности данного понятия у обучающегося. В этом случае обоснованным является уделение особого внимания формированию некоего набора визуальных образов, связанного с понятиями, относящимися к разделам, вызывающим наибольшие затруднения у обучающихся. С помощью визуальных объектов, таких как графики, схемы, рисунки, анимации и т.п., возможно сформировать визуальный образ, посредством которого у обучающихся формируется ассоциативная связь с абстрактным математическим понятием. Ярким примером такой ассоциативной связи является связь “уравнение функции” - “график функции”, наличие которой у респондентов было выявлено в ходе исследования.

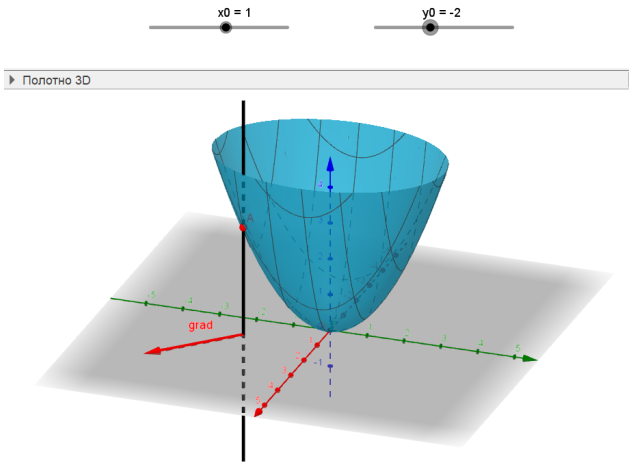


Рис. 1. Пример, интерактивного чертежа, илюстрирующего понятие “градиент”, построенный обучающимся

Появление и широкое распространение образовательных систем компьютерной математики позволило пересмотреть подход к применению визуализационных педагогических технологий в преподавании математических дисциплин. Современные системы компьютерной математики имеют разнообразные наборы инструментов визуализации математических объектов. Благодаря таким инструментам процесс формирования визуальных образов становится намного более эффективным.

Использование систем компьютерной математики в качестве вспомогательного инструмента в случае появления затруднений при решении задач также способствует формированию опорных визуальных образов сложных для освоения понятий. В качестве примера приведем процесс изучения понятия “градиент”. Выполнение небольшого задания на построение градиента с помощью системы GeoGebra [6] поможет обучающимся лучше усвоить данное понятие. Работа с собственноручно построенным интерактивным чертежом (рис. 1) также способствует формированию визуального образа понятия “градиент”, на который в дальнейшем обучающиеся смогут опираться при решении задач и изучении связанного теоретического материала.

Литература

1. Далингер В. А. *Когнитивно-визуальный подход, его сущность и методические особенности в обучении математике* // Wschodnioeuropejskie Czasopismo Naukowe (East European Scientific Journal) | Pedagogika. – 2015. – Т. 3. – № 2. – С. 28–32.

2. Далингер В. А. *Когнитивно-визуальная технология обучения – основа успешности ученика в учебном процессе* // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 11-1. – С. 53–56.

3. Вакульчик В. С., Мателенок А. П.*Методические средства и приемы реализации когнитивно-визуального подхода при обучении математике студентов технических специальностей* // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия Е, Педагогические науки. – 2013. – № 15. – С. 40–47.

4. Lean G, Clements M. A. *Visual Imagery, and Mathematical Performance* // Educational Studies in Mathematics. – 1981. – Vol. 12 – № 3. – P. 267–299.

5. Presmeg N. *Visualization and Learning in Mathematics Education* // Encyclopedia of Mathematics Education. – Dordrecht: Springer, 2014.

6. GeoGebra Math Apps [Электронный ресурс]. URL: https://www.geogebra.org/ (дата обращения: 28.10.2019).

THE FORMATION OF THE MATHEMATICAL CONCEPTS VISUAL IMAGES SYSTEM IN THE MATHEMATICAL ANALYSIS BASICS STUDYING

K.I. Suleimanova, E.V. Chebotareva

The paper presents the study of the visual images system of the basic mathematical analysis concepts in students. We putting forward the hypothesis about the relationship between the presence of the associative image and understanding the specific mathematical concept.
Keywords: mathematical education, visual thinking, cognitive-visual approach, methodics of studying mathematical analysis

УДК 519.63

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЭНЕРГИИ В СМАЗОЧНОМ СЛОЕ УПОРНОГО ПОДШИПНИКА

П.Е. Федотов[1]

1 *paulfedotov@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт Вычислительной Математики и Информационных Технологий

Целью настоящей работы является построение и численное исследование сеточной схемы для трёхмерного уравнения теплопроводности с доминирующей конвекцией, возникающего при моделировании задач гидродинамической теории смазки упорных подшипников. При построении схемы был использован вариант разрывного метода Галёркина. Проведены численные эксперименты, демонстрирующие сходимость сеточной схемы на последовательности сгущающихся сеток.

Ключевые слова: разрывный метод Галёркина, краевая задача, подшипник, уравнение теплопроводности

Методам построения сеточных схем для краевых задач для уравнений теплопроводности/диффузии с доминирующей конвекцией и их решению уделяется большое внимание. К задачам такого типа относится рассматриваемая здесь краевая задача о распространении тепла в смазочном слое упорного подшипника, которая является составляющей частью уравнения энергии, описывающего распространение тепла в диске и подушках упорного подшипника. Упорные подшипники, используемые в компрессорах, имеют неподвижные подушки и вращающийся диск, между которыми протекает смазка [1]. Поверхность подушки является профилированной. Поэтому толщина зазора h смазочного слоя является переменной. Между подушками расположены межподушечные каналы, через которые подается смазка. Упорный подшипник имеет периодическую структуру, поэтому можно рассматривать лишь элемент периодичности. Под областью Ω далее будем понимать область смазочного слоя элемента периодичности. При моделировании динамики подшипника воспользуемся цилиндрической системой координат. Через r, φ, y обозначим координатные оси, соответствующие радиусу, угловой координате и толщине смазочного слоя.

Стационарное уравнение теплопроводности в дивергентной форме, имеет следующий вид

$$div(Vt - K\nabla t) = f, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

где вектор скорости и коэффициент теплопроводности имеют вид

$$V = \begin{pmatrix} V_r \\ V_\varphi \\ V_y \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{\varphi\varphi} & K_{\varphi y} \\ 0 & K_{y\varphi} & K_{yy} \end{pmatrix}.$$

Дополним уравнение (1) краевыми условиями. По координате φ предполагается выполненным условие периодичности. По направлению y в пределах межподушечного канала, на условной границе $y = h(r,\varphi)$ ставится условие непротекания смазки.

На границе Γ_y упорного диска и подушки ставится условие третьего рода

$$(Vt - K\nabla t)\cdot\nu + \omega_\alpha t = g, \quad x \in \Gamma_y. \tag{2}$$

Выбор такого условия обусловлен тем, что решение уравнения энергии для системы диск — подушка — смазочный слой требует использования методов декомпозиции расчётной области [2, с. 59].

Уравнение имеет следующую особенность. По переменной r присутствует только конвективное слагаемое. Предполагается, что скорость V_r определяет истекающие потоки на внешних и внутренних радиусах области [1]. Поэтому граничные условия там не ставятся.

Толщина смазочного слоя h является переменной величиной в связи с профилированием подушки, а также возможными температурными деформациями. Поэтому предварительно произведём замену переменных $r = \bar{r}, \varphi = \bar{\varphi}, y = h(r,\varphi)\bar{y}$, переводящую исходную расчётную область в прямоугольную. При этом важно, чтобы после замены переменных полученное уравнение сохранило дивергентный вид. Матрица Якоби такого преобразования приведена ниже

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{h'_r\bar{y}}{h} & -\dfrac{h'_\varphi\bar{y}}{h} & \dfrac{1}{h} \end{pmatrix}.$$

Вариационное представление исходной задачи, позволяет получать выполнять замену переменных в уравнении, которое сохраняет дивергентную форму его записи:

$$div\left(\bar{V}t - \bar{K}\bar{\nabla}t\right) = \bar{f}, \quad x \in \bar{\Omega}, \tag{3}$$

здесь $\bar{V} = JV|J^{-1}|$, $\bar{K} = JKJ^T|J^{-1}|$, $\bar{f} = f|J^{-1}|$.

Граничное условие (2) приобретёт вид

$$\left(Vt - KJ^T\bar{\nabla}t\right)\cdot\nu + \omega_\alpha t = g, \quad x \in \Gamma_y.$$

Для численного решения задачи (3), была построена схема разрывного метода Галёркина (DGM) с прямоугольными элементами. Выбор противопотоковых DGM для аппроксимации исходного уравнения обусловлен локальной консервативностью построенных на его основе сеточных схем, малой схемной вязкостью, а также их устойчивостью для широкого класса задач с доминирующей конвекцией в широком диапазоне сеточных параметров. При построеннии схемы были использованы кусочно-постоянные внутри расчётной области $\bar{\Omega}_h$ и кусочно-линейные вблизи границы Γ_y пространства аппроксимирующих функций. Способ построения схем такого вида приведён в [3]. Сеточная схема позволяет свести задачу (3) к сеточному уравнению, которое в операторной форме записи имеет вид

$$\left(A_\nu + A_q + A_\gamma\right)u_h = F + F_g. \tag{4}$$

Здесь u_h является сеточной аппроксимации функции температуры t.

Операторы в уравнении (3) определяются следующими формами

$$A_\nu u_h \cdot w_h = \sum_{K\in\Im_h}\int_K \left(-u_h\bar{V}\cdot\bar{\nabla}w_h\right)dx + \sum_{\gamma\setminus\Gamma_y}\int_\gamma \left[u_{h,+p}\left(\bar{V}\cdot p\right)^- - u_{h,-p}\left(\bar{V}\cdot p\right)^+\right]\left(w_{h,+p} - w_{h,-p}\right)dx,$$

$$A_q u_h \cdot w_h = \sum_{K\in\Im_h}\int_K q_h\cdot\bar{\nabla}w_h dx + \sum_{\gamma\setminus\Gamma_y}\int_\gamma \left(w_{h,+p} - w_{h,-p}\right)q_{h,+p}\cdot p dx,$$

$$A_\gamma u_h \cdot w_h = \sum_{\gamma\in\Gamma_y}\int_\gamma \omega_\alpha u_h w_h dx,$$

$$F\cdot w_h = \sum_{K\in\Im_h}\int_K \bar{f}w_h dx, \quad F_g\cdot w_h = \sum_{\gamma\in\Gamma_y}\int_\gamma g w_h dx,$$

при любых из пространства аппроксимирующих функций. Здесь $\Im_h$ — множество элементов разбиения области $\bar{\Omega}$; $K \in \Im_h$ — элемент разбиения; p — единичная нормаль к границам элементов разбиения области, ориентированная так, что $e \cdot p > 0$, $e = (1,1,1)/\sqrt{(3)}$; $(w)^{\pm}$ — положительная или отрицательная часть функции w. Пространства аппроксимирующих функций содержат, вообще говоря, разрывные функции. Символами $w_{\pm p}$ здесь обозначаются предельные значения функций прилежащих к границе элементов разбиения со стороны $\pm p$.

Для решения построенной сеточной схемы создан комплекс программ, с помощью которых проведены численное исследование устойчивости и точности построенной сеточной схемы на последовательности сгущающихся сеток. В качестве модельной задачи берётся уравнение энергии в смазочном слое постоянной толщины с известным точным решением $t = \left(\bar{r} - R_{cp}\right)\cos(\bar{\varphi})\sin(\bar{y})/l_r$ при заданных параметрах дифференциальной задачи, где $R_{cp} = (R_1 + R_2)/2$, $l_r = R_2 - R_1$, R_1, R_2 — внутренний и внешний радиусы подшипника. При проведении численных экспериментов приближенное решение u_h сравнивалось с точным решением t модельной задачи. Критерием точности выбиралась равномерная норма погрешности $\max\limits_{(r,\varphi,y)} |t - u_h|$.

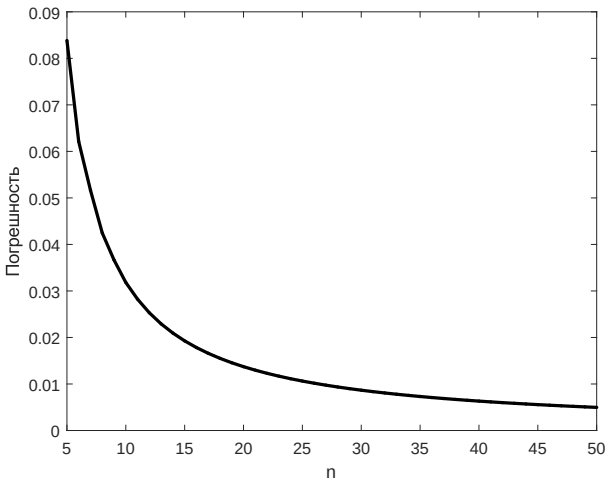


Рис. 1. График зависимости погрешности от шага сетки

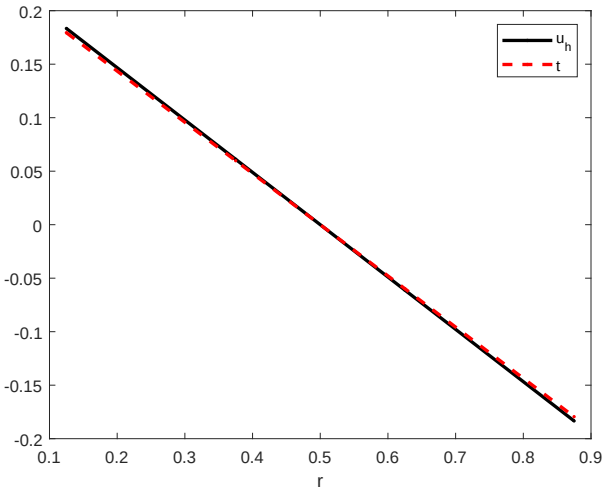


Рис. 2. Приближенное решение в направлении r

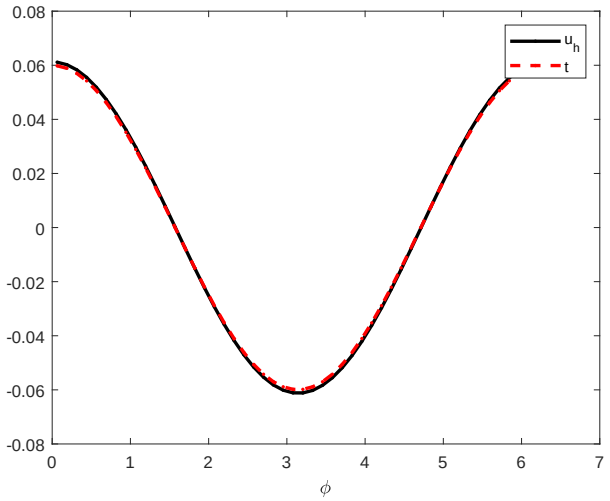


Рис. 3. Приближенное решение в направлении φ

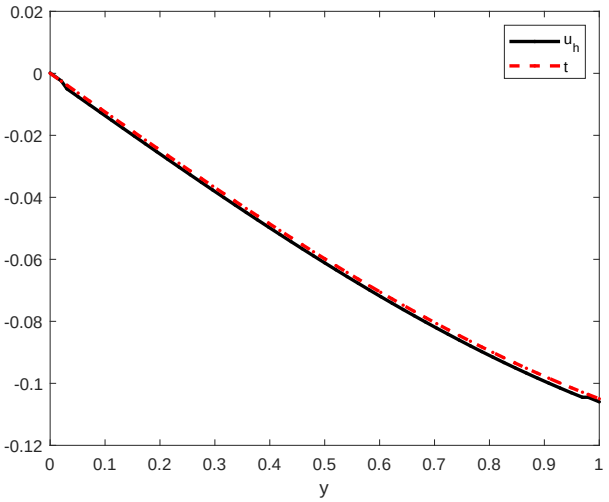


Рис. 4. Приближенное решение в направлении y

На рисунках 2 – 4 представлены графики погрешности и приближенного решения. На рисунке 2 представлен график зависимости погрешности решения числа точек разбиения n по направлениям r, φ и y. Рисунок показывает, что имеет место сходимость построенного метода со скоростью выше линейной с ростом n. На рисунке 2 представлен график приближенного решения при фиксированных r и φ в центре расчётной области. На рисунках 3 и 4 приведены аналогичные графики приближенного решения при фиксированных r, y и φ, y, соответственно.

Литература

1. Sokolov N. V., Khadiev M. B., Maksimov T. V., Fedotov E. M., Fedotov P. E. *Mathematical modeling of dynamic processes of lubricating layers thrust bearing turbocharger* // Journal of Physics: Conference Series, – 2019. – Vol. 1158 – № 4. – P.1 – 9.

2. Dolean V., Jolivet P., Nataf F. *An Introduction to Domain Decomposition Methods: algorithms, theory and parallel implementation* – France: Master, – 2015.

3. Федотов Е. М. *Предельные схемы Галеркина-Петрова для нелинейного уравнения конвекции-диффузии* // Дифференц. уравнения. – 2010 г. – Т. 46. – С. 1033-1043.

SOLUTION OF THE ENERGY EQUATION IN THE LUBRICANT LAYER OF A THRUST BEARING

P.E. Fedotov

The purpose of this work is to construct and numerically study a grid scheme for a three-dimensional heat conduc-tion equation with dominating convection, which arises when modeling problems of the hydrodynamic theory of lubri-cation of thrust bearings. In constructing the scheme, a variant of the discontinuous Galerkin method was used. Numer-ical experiments have been carried out, demonstrating the convergence of the grid scheme on a sequence of condensed grids.
Keywords: discontinuous Galerkin method, boundary-value problem, bearing, heat equation

УДК 517.928

АНАЛИЗ ПОРОГОВЫХ ЯВЛЕНИЙ В МОДЕЛИ ЭЛЕКТОРОХИМИЧЕСКОГО РЕАКТОРА

Н.М. Фирстова[1]

1 *firstova.natalia@yandex.ru*; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева

В работе ставится вопрос сравнения значений управляющего параметра для траектории-утки, полученного для динамической системы, и значений, при которых решение рассматриваемой стохастической системы становится неустойчивым, то есть в системе наблюдаются большеамплитудные колебания. Построена динамика изменения значений управляющего параметра стохастической системы при изменении интенсивности шума.

Ключевые слова: траектории-утки, устойчивость, стабильность системы, случайные возмущения

В работе рассматривается модифицированная двумерная модель электрохимической реакции Копера-Слайтера [1, 2] с точки зрения учета влияния флуктуаций среды на протекание химической реакции. Так как эти флуктуации носят случайных характер, то их учет в рамках предполагаемой модификации должен приводить к тому, что новая модель будет считаться стохастической. Естественно, что такое возмущение нужно вводить посредством аддитивной добавки в параметры стационарного процесса. Предположим, что в системе присутствует белый шум малой интенсивности:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -k_a e^{\gamma\theta/2} u(1-\theta) + k_d e^{-\gamma\theta/2}\theta + 1 - u + \epsilon\dot{\xi}_1 = p(u,\theta), \\ \beta\frac{d\theta}{dt} = k_a e^{\gamma\theta/2} u(1-\theta) - k_d e^{-\gamma\theta/2}\theta - k_e e^{\alpha_0 fE}\theta + \epsilon\dot{\xi}_2 = q(u,\theta). \end{cases} \quad (1)$$

Переменная u — это безразмерная концентрация вещества по поверхности (поверхностная концентрация), β — безразмерная объемная концентрация вещества. Безразмерная переменная

θ отражает количество адсорбированного на поверхности электрода вещества, E — потенциал электрода, β — коэффициент покрытия адсорбата, α_0 — коэффициент симметрии для переноса электронов. Плотность тока задается в безразмерной форме посредством уравнения $J = k_e e^{\alpha_0 fE}\theta$; $f = F/(RT)$, где R — универсальная газовая постоянная, F — постоянная Фарадея, T — температура, ξ_1 и ξ_2 — скалярные стандартные независимые Винеровские процессы; ϵ — интенсивность случайной помехи. Так как параметр β является малым, то система является сингулярно возмущенной.

В работах [3, 4, 5] был проведен детальный анализ детерминированной модели с помощью методов теории сингулярных возмущений и численными методами. Было показано, что критический режим моделируется траекторией-уткой и что именно этот режим играет роль своеобразного водораздела между двумя основными типами режимов протекания реакции: устойчивым циклом и колебаниями с самоускорением. Траектория-утка и значение управляющего параметра k_e^* были представлены в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра β:

$$u_0(\theta) = \frac{(k_d e^{-\gamma\theta/2} + \chi_0 e^{\alpha_0 fE})\theta}{k_a e^{\gamma\theta/2}(1-\theta)}, \tag{2}$$

$$u_1(\theta) = \frac{-k_a u_0(\theta)(1-\theta)e^{\gamma\theta/2} + k_d e^{-\gamma\theta/2}\theta + 1 - u_0(\theta) + \chi_1 e^{\alpha_0 fE}\theta u_0'(\theta)}{k_a e^{\gamma\theta/2} u_0'(\theta)},$$

$$\chi_0 = \frac{k_a(1-\bar\theta)e^{\gamma\bar\theta/2} - k_d e^{-\gamma\bar\theta/2}\bar\theta}{(k_a(1-\bar\theta)e^{\gamma\bar\theta/2} - 1)e^{\alpha_0 fE}\bar\theta}, \tag{3}$$

$$\chi_1 = -\frac{k_a u_1(\bar\theta)(1-\bar\theta)e^{\gamma\bar\theta/2} + u_1(\bar\theta) + k_a u_1(\bar\theta) u_1'(\bar\theta)(1-\bar\theta)e^{\gamma\bar\theta/2}}{e^{\alpha_0\zeta E}\bar\theta u_1'(\bar\theta)}.$$

Здесь $\theta = \bar\theta$ — значение в точке срыва, полученное из уравнения нерегулярных точек:

$$k_a u(1-\theta)\frac{\gamma}{2}e^{\gamma\theta/2} - k_a u e^{\gamma\theta/2} - k_d e^{-\gamma\theta/2} + k_d e^{-\gamma\theta/2}\theta\frac{\gamma}{2} - k_e e^{\alpha_0 fE} = 0. \tag{4}$$

Уравнения (2) и (4) определяют точки срыва.

Для исследуемой стохастической системы найдем особую точку, а так же значение управляющего параметра k_e^{**}, при котором происходит смена её типа. Для этого запишем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -k_a e^{\gamma\theta/2} u(1-\theta) + k_d e^{-\gamma\theta/2}\theta + 1 - u + \epsilon\dot\xi_1 = 0, \\ k_a e^{\gamma\theta/2} u(1-\theta) - k_d e^{-\gamma\theta/2}\theta - k_e e^{\alpha_o fE}\theta + \epsilon\dot\xi_2 = 0. \end{cases}$$

Из которой получим уравнения для нахождения u^{**}:

$$u^{**} = 1 - k_e e^{\alpha_o fE}\theta^{**} + \epsilon(\dot\xi_1 + \dot\xi_2), \tag{5}$$

и уравнение, определяющее значение $\theta = \theta^{**}$:

$$k_a e^{\gamma\theta/2}(1 - k_e e^{\alpha_o fE}\theta)(1-\theta) - k_d e^{-\gamma\theta/2}\theta - k_e e^{\alpha_o fE}\theta + \dot\xi_2 = 0. \tag{6}$$

Уравнение является трансцендентным и не имеет общего решения, конкретное значение параметра θ^{**} может быть найдено численно для различных наборов параметров системы.

Таким образом, получаем особую точку

$$A\left(\theta^{**}, 1 - k_e e^{\alpha_o fE}\theta^{**}\right).$$

Для матрицы линеаризации системы (1) найдем собственные значения в этой точке. Для этого решим следующее уравнение: $|J - \lambda E| = 0$:

$$\left| \begin{matrix} \frac{\partial f(u,\theta)}{\partial u} - \lambda & \frac{\partial f(u,\theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g(u,\theta)}{\partial u} & \frac{\partial g(u,\theta)}{\partial \theta} - \lambda \end{matrix} \right|_A = 0,$$

что можно записать в виде

$$\lambda^2 + \lambda W_1 + W_2 = 0,$$

с дискриминантом

$$D = W_1^2 - 4W_2, \tag{7}$$

где

$$W_1 = k_a e^{\gamma\theta^{**}/2}(1-\theta^*) + k_a e^{\gamma\theta^{**}/2} u^{**}(1-\frac{\gamma}{2}(1-\theta^{**}))+ \\ + k_d e^{-\gamma\theta^{**}/2}(1-\frac{\gamma\theta^{**}}{2}) + k_e e^{\alpha_0 fE} + 1, \tag{8}$$

$$W_2 = k_a e^{\gamma\theta^{**}/2}(1-\theta^{**}) k_e e^{\alpha_0 fE} + k_a e^{\gamma\theta^{**}/2} u^{**}(1-\frac{\gamma}{2}(1-\theta^{**}))+ \\ + k_d e^{-\gamma\theta^{**}/2}(1-\frac{\gamma\theta^{**}}{2}) + k_e e^{\alpha_0 fE}.$$

Исходя из анализа типа особых точек, проведенного в работах [3, 4, 5], можно сделать вывод, что тип особой точки зависит только от знака W_1, то есть потеря устойчивости происходит при $W_1 = 0$. Приравняем выражение (8) к 0 и найдем значение управдяющего параметра k_e^{**}, при котором система теряет устойчивость.

$$k_e^{**} = \frac{k_a e^{\gamma\theta^{**}/2}(1-\theta^{**} + (1-\frac{\gamma}{2}(1-\theta^{**}))(1+\epsilon(\dot{\xi_1}+\dot{\xi_2}))) + k_d e^{-\gamma\theta^{**}/2}(1-\frac{\gamma\theta^{**}}{2}) + 1}{(k_a e^{\gamma\theta^{**}/2}\theta^{**}(1-\frac{\gamma}{2}(1-\theta^{**})) - 1) e^{\alpha_0 fE}} \tag{8}$$

Для исследования влияния внешнего шума на поведение системы были зафиксированы следующие значения параметров $\gamma = 8.99$, $k_a = 10$, $k_d = 100, \alpha_0 = 0{,}5, f = 38{,}7, E = 0{,}207$ [2].

Для вычисления значений параметров был использован комплекс программ, написанный на языке *Python*.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках программы повышения конкурентоспособности Самарского университета (2013 – 2020 годы).

Литература

1. Koper M. T. M., Sluyters J. H. *Instabilities and oscillations in simple models of electrocatalytic surface reactions* // Journal of Electroanalytical Chemistry. –1994. –Vol. 371(1). –PP. 149–159.

2. Berthier F, Diard J. P., Nugues S. *On the nature of the spontaneous oscillations observed for the Koper-Sluyters electrocatalitic reaction* // Journal of Electroanalytical Chemistry. –1997. –Vol.436(1). –PP.35–42.

3. Firstova N. M., Schepakina E. A. *Modelling of Critical Conditions for an Electrochemical Reactor Model* // Procedia Engineering. – 2017. – Vol. 201. – PP. 495.

4. Firstova N. M. *Conditions for the critical phenomena in a dynamic model of an electrocatalytic reaction* // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – Vol. 811. – PP. 151–175. DOI: 10.1088/1742-6596/811/1/012002

5. Firstova N. M., Schepakina E. A. *Study of oscillatory processes in the one model of electrochemical reactor* // CEUR Workshop Proceedings. – 2016. – Vol. 1638. – PP. 731–741. DOI: 10.18287/1613-0073-2016- 1638-731-741.

ANALYSIS OF THRESHOLD PHENOMENA IN THE MODEL OF AN ELECTROCHEMICAL REACTOR

N.M. Firstova

The question of comparing the values of the control parameter for the canard obtained for the

dynamical system and the values at which the solution of the stochastic system under consideration becomes unstable, i.e., larger-amplitude oscillations are observed in the system, is posed. The dynamics of changes in the values of the control parameter of the stochastic system with a change in the noise intensity is constructed.
Keywords: canards, random perturbations, system stability, sustainability

УДК 004.42

СИСТЕМА АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ФОРМИРОВАНИЯ ВЫПУСКОВ НАУЧНЫХ ЖУРНАЛОВ

Ш.М. Хайдаров[1]

1 *15jkeee@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Предложен метод автоматизированного формирования выпусков научных журналов. Метод основан на исследовании структуры документов и используемых в них структурных, стилевых и шрифтовых особенностей. Метод реализован в виде программного модуля открытой издательской системы Open Journal Systems (OJS). Приведены результаты апробации метода в электронном журнале «Russian Digital Library Journal».

Ключевые слова: анализ структуры документа, издательские системы, выделение метаданных, методы текстового анализа, Open Journal Systems

В работе [1] отмечена необходимость создания программных инструментов, позволяющих в автоматизированном режиме справиться с большими объемами научных документов и сформировать новые виды документов (сборников статей, выпусков журналов, файлов импорта в международные базы цитирований и др.). Также в [2] описан методы обработки больших коллекций математических документов, использующий онтологии описания структуры документов (DoCO, SPAR и т.д.) [3].

Метод автоматизированного формирования выпусков научных журналов основан на исследовании структуры документов и используемых в них структурных, стилевых и шрифтовых особенностей. В качестве примера приведём такие особенности, как шрифты, используемые при оформлении заголовка статьи, списка авторов, аффилиации и основного текста. Также учитываются размеры шрифта, их начертание и видоизменение. Для каждого блока метаданных составляется список специальных слов, которые характеризуют данный блок и показывают, что строка или ее часть вероятно принадлежит искомому блоку метаинформации. В группу таких слов для аннотации статьи, например, входит 'Аннотация', 'Abstract' и т.п. Для извлечения заголовка рассматриваемым методом также используется информация о том, что он может располагаться в начале статьи, выравниваться по центру, а также имеет более крупный и полужирный шрифт. В случае поиска авторов учитывается тот факт, что обычно указание на них расположено после заголовка статьи, по центру и удовлетворяет одному из регулярных выражений, описывающих возможное представление списка имен авторов. Например, имя автора может содержать либо имя и фамилию, либо инициалы и фамилию. Предполагается, что в списке авторов не могут содержаться никакие другие символы, кроме букв, запятых, точек и дефисов.

Метод реализован в виде программного модуля открытой издательской системы Open Journal Systems (OJS) [5, 6]. Метод апробирован в электронном журнале «Russian Digital Library Journal». Отметим, что качество выделения метаданных зависит от расхождения от правил заданного формата журнала.

Работа частично содержит результаты проекта «Мониторинг и стандартизация развития и использования технологий хранения и анализа больших данных в цифровой экономике Российской Федерации», выполняемого в рамках реализации Программы Центра компетенций Национальной технологической инициативы «Центр хранения и анализа больших данных», поддерживаемого Министерством науки и высшего образования Российской Федерации по Договору МГУ имени М. В. Ломоносова с Фондом поддержки проектов Национальной технологической инициативы от 15.08.2019 № 7/1251/2019. Работа выполнялась также при частичной поддержке РФФИ (проекты 18-29-03086, 18-47-160012).

Литература

1. Elizarov A. M., Khaydarov S. M., Lipachev E. K. *Automated Processing Service System of Large Collections of Scientific Documents* // 18th International Conference on Data Analytics and Management in Data Intensive Domains (DAMDID/RCDL 2016). – CEUR Workshop Proceedings. – 2016. – Vol. 1752. – P. 58–64. – Режим доступа: URL: http://ceur-ws.org/Vol-1752/paper10.pdf.

2. Elizarov A. M., Khaydarov S. M., Lipachev E. K. *Scientific documents ontologies for semantic representation of digital libraries* // Proceedings of the 2nd Russia and Pacific Conference on Computer Technology and Applications (RPC 2017). – IEEE. – 2017. – P. 1–5. – Режим доступа: DOI: https://doi.org/10.1109/RPC.2017.8168064. – URL: http://ieeexplore.ieee.org/document/8168064/.

3. Peroni S. *Semantic Web Technologies and Legal Scholarly Publishing.* – Springer International Publishing. – 2014. – 304 p. – Режим доступа: DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-04777-5.

4. MacGregor J., Stranack K., Willinsky J. *The Public Knowledge Project: Open Source Tools for Open Access to Scholarly Communication.* // In: Bartling S., Friesike S. (eds) Opening Science. Springer, Cham. – 2014. – P. 165–175. – Режим доступа: DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-00026-8_11.

5. Open Journal Systems. Public Knowledge Project. – Режим доступа: URL: http://pkp.sfu.ca/ojs/

6. Elizarov A. M., Lipachev E. K., Zuev D. S. *Electronic Scientific Journal Management Systems* // Scientific and Technical Information Processing. – 2014. – Vol. 41. – No. 1, – pp. 66–72.

THE SYSTEM OF AUTOMATED FORMATION OF SCIENTIFIC JOURNALS ISSUES

S.M. Khaydarov

A method for the automated formation of issues of scientific journals is proposed. The method is based on the study of the structure of documents and the structural, style and font features used in them. The method is implemented as a software module of the open publishing system Open Journal Systems (OJS). The results of testing the method in the electronic journal «Russian Digital Library Journal» are presented.

Keywords: document structure analysis, publishing systems, metadata extraction, text analysis methods, Open Journal Systems

УДК 514.763

О СВОЙСТВАХ ПЯТИМЕРНЫХ ЖЕСТКИХ H-ПРОСТРАНСТВ

Д.Р. Хакимов[1]

1 *dzhamoliddink@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Исследуется кривизна 5-мерных жестких h-пространств типа {32}*, находятся необходимые и достаточные условия, при которых эти пространства имеют постоянную кривизну K. Устанавливаются необходимые и достаточные условия существования негомотетического проективного движения в названных h-пространствах непостоянной кривизны и как следствие определяется структура негомотетической проективной алгебры Ли в таких пространствах.*

Ключевые слова: пятимерное псевдориманово многообразие, уравнение Эйзенхарта, проективная алгебра Ли, h-пространство типа {32}.

ON THE PROPERTIES OF FIVE-DIMENSIONAL RIGID H-SPACES

D.R. Khakimov

The curvature of 5-dimensional rigid h-spaces of the type {32} *is investigated, and the necessary and*

sufficient conditions are found under which these spaces have constant curvature K. Necessary and sufficient conditions for the existence of a non-homothetical projective motion in the named h -spaces of a non-constant curvature are installed. As a consequence, the structure of the non-homothetical projective Lie algebra in such spaces is described.
Keywords: five-dimensional pseudo-Riemannian manifold, the Eisenhart equation, projective Lie algebra, h-space of the type {32}.

УДК 004.852

КЛАССИФИКАЦИЯ ДАННЫХ СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЕЙ МЕТОДАМИ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

В.А. Чепарин[1], З.А. Еникеева[2], Г.З. Вахитов[3]

1 *cheparin.vladislav@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий
2 *zaenikeeva@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий
3 *gzvahitov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий

В статье проанализированы алгоритмы и подходы к классификации данных социальных сетей. Применены классификаторы и представленно их сравнение. Обозначены направления для дальнейших исследований.

Ключевые слова: социальные сети, классификация, машинное обучени

Исследования социальных сетей и классификация профилей пользователей весьма популярная задача на данный момент. Многие пользователи выкладывают о себе различную информацию, благодаря которой можно узнать интересы человека, его круг общения и прочие факт из его жизни. В данной работе мы предположили, что с помощью данных профиля студента можно предсказать его успеваемость в университете.

В нашей работе используются данные социальной сети ВКонтакте, так как она является наиболее популярной, особенно среди студенческого сообщества, более 100 миллионов уникальных посетителей в месяц.

Задача деления пользователей на два класса по успеваемости вызвала интерес к построению произвольных классификаторов по данным профиля с последующим анализом полученных классов. Было предложено построить классификатор, в работе которого используется Евклидово расстояние между точками метрического пространства. Реализованный классификатор является упрощенным вариантом карты Кохонена, который можно назвать вырожденной картой Кохонена. Ниже будет привиденно описание алгоритма формирования классификатора.

Для обучения использовались только количественные признаки профиля социальной сети, которые были предварительно нормализованны. В обучающей выборка было около трех тысяч записей. Для тренировочной выборки использовали 80% от общей выборки и 20% для тестирования классификатора.

Алгоритм 1: Вырожденная карта Кохонена

Вход: количество классов K; X - выборка данных о пользователях
Результат: Вектор весов для каждого класса $\omega^k = (\omega_1^k, \omega_2^k, ..., \omega_N^k)$, где $0 < k \leqslant K$

1 Для каждого класса задаем вектор весов случайным образом

$$\omega^k = (\omega_1^k, \omega_2^k, ..., \omega_N^k)$$

2 Задаем скорость обучения λ и ее изменение δ

$$0 < \lambda < 1,$$

$$0 < \delta < \lambda/2$$

3 **до тех пор, пока** $\lambda > 0$ **выполнять**
4 Для каждого $x^m \in X$ находим ближайшее в Евклидовой метрике ω^k
5 Пересчитываем веса класса

$$\omega_i^k = \omega_i^k + \lambda(x^m - \omega_i^k)$$

6 Уменьшаем скорость обучения

$$\lambda = \lambda - \delta$$

7 **конец**

Реализованный классификатор позволил получить профиль типичного представителя класса, психометрический анализ которого подлежит более глубокому исследованию. Стоит заметить, что полученное разбиение не совпадает с делением на "успешных"и "неуспешных а порождает новые классы пользователей. Несколько иной результат кластеризации получен при использовании алгоритма k-средних.

В дальнейшем предполагается сопоставление и обобщение работы алгоритмов с целью поиска оптимального количества классов, характерных для различных групп пользователей.

Литература

1. *Нестандартная кластеризация 4: Self-Organizing Maps, тонкости, улучшения, сравнение с t-SNE* [Электронный ресурс]. — Режим доступа: URL: https://habr.com/ru/post/338868

2. Бротиковская Д., Зобнин Д. *Алгоритм k средних (k-means)* [Электронный ресурс]. — Режим доступа: URL: https://algowiki-project.org/ru/Алгоритм_k_средних_(k-means)

3. *Clustering With K-Means in Python* [Электронный ресурс]. — Режим доступа: URL: https://datasciencelab.wordpress.com/2013/12/12/clustering-with-k-means-in-python

CLASSIFICATION OF SOCIAL NETWORK DATA BY THE METHODS OF MACHINE LEARNING

V.A. Cheparin, Z.A. Enikeeva, G.Z. Vahitov

This paper describes analyzing the algorithms and approaches to the classification of social network's data. Classifiers were apply and their comparison is presented. Directions for further researches are indicated.
Keywords: social networks, classification, machine learning

УДК 517.952

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ

О.В. Чернова[1]

1 *chernova_olga@bsu.edu.ru*; Белгородский государственный исследовательский университет, институт инженерных и цифровых технологий

В статье рассмотрен частный случай задачи линейного сопряжения для общей эллиптической системы с комплексными коэффициентами. Показано, что выбор удачной обратимой линейной подстановки позволяет свести общую эллиптическую систему к эквивалентной канонической системе, при этом исходное краевое условие выразится через элементы некоторых вспомогательных матриц. Применяя результаты классической теории сингулярных операторов и ряд вспомогательных утверждений установлена фредгольмова разрешимость поставленной задачи.

Ключевые слова: Весовое пространство Гельдера, задача линейного сопряжения, индекс, эллиптическая система

Пусть открытое множество $D = \mathbb{C}\backslash\Gamma$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ состоит из объединения конечной области D_1 и бесконечной области D_2. Контур Γ предполагается простым ориентируемым, принадлежащим классу $C^{1,\nu}$ с показателем $0 < \nu < 1$. Рассмотрим в D систему l линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$A_1\frac{\partial U(z)}{\partial x} + A_2\frac{\partial U(z)}{\partial y} + a(z)U(z) + b(z)\overline{U(z)} = F(z), \quad z \in D,$$

где коэффициенты при старших членах – постоянные матрицы $A_1, A_2 \in \mathbb{C}^{l\times l}$, $a(z), b(z)$ матричные $l \times l$ коэффициенты класса $C(D)$ и $F(z)$ есть l–вектор-функция.

Введем матрицу $A \in \mathbb{C}^{l\times l}$, которая не имеет вещественных собственных значений и обозначим l_1 и l_2 число ее собственных значений (с учетом кратности), лежащих, соответственно, в верхней и нижней полуплоскостях, при чем $l = l_1 + l_2$. Множество всех собственных значений матрицы A запишем в удобном для нас виде $\widetilde{\sigma} = \sigma_1 \cup \overline{\sigma}_2, \sigma_j \subseteq \{\lambda,\ \mathrm{Im}\,\lambda > 0\}$. Здесь черта означает комплексное сопряжение.

Как показано в [4] предыдущая система всегда может быть представлена в следующем эквивалентном виде

$$\frac{\partial U(z)}{\partial y} - A\frac{\partial U(z)}{\partial x} + a(z)U(z) + b(z)\overline{U(z)} = F(z). \tag{1}$$

Для системы (1) рассмотрим задачу линейного сопряжения, заданную условием

$$C_{11}U^+(t) - C_{12}U^-(t) = f(t), \quad t \in \Gamma, \tag{2}$$

где $l \times l$–матричные коэффициенты C_{11} и C_{12} принадлежат классу $C^{\nu}(\Gamma)$.

Покажем, что система (1) редуцируется к эквивалентной эллиптической системе, записанной в каноническом виде. Согласно [4] существует такая обратимая $l \times l$ матрица B блочной структуры

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & \overline{B_{12}} \\ B_{21} & \overline{B_{22}} \end{pmatrix} = (B_1, \overline{B}_2), \quad B_{ij} \in \mathbb{C}^{l_i\times l_j}, \tag{3}$$

что выполняется равенство $B^{-1}AB = \widetilde{J}$, где матрица J имеет следующий блочный вид

$$\widetilde{J} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & \overline{J_2} \end{pmatrix},$$

где в свою очередь матрицы $J_i \in \mathbb{C}^{l_i\times l_i}$ записаны в жордановой форме, при этом их диагональные элементы составляют множество σ_i. Отметим, что в формуле (3) через $B_j, j = 1,2$ обозначена прямоугольная матрица-столбец $B_j = \downarrow (B_{1j}, B_{2j}) \in \mathbb{C}^{l\times l_j}$, $j = 1,2$.

Введем в рассмотрение l–компонентную комплекснозначную функцию $\widetilde{\phi} = (\phi_1, \overline{\phi}_2)$, через ϕ_1 обозначены первые l_1 компонент функции $\widetilde{\phi}$, а через ϕ_1 следующие l_2 компонент и применим к системе (1) замену

$$\widetilde{\phi} = B^{-1}U. \tag{4}$$

Тогда, переобозначая $\widetilde{F} = B^{-1}F = (F_1, \overline{F}_2)$, получим

$$\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial y} - \widetilde{J}\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial x} + (B^{-1}aB)\widetilde{\phi}(z) + (B^{-1}b\overline{B})\overline{\widetilde{\phi}(z)} = \widetilde{F}(z).$$

Введя следующие обозначения для блочных матриц

$$(B^{-1}aB) = \begin{pmatrix} \widetilde{c}_{11} & \widetilde{c}_{12} \\ \widetilde{c}_{21} & \widetilde{c}_{22} \end{pmatrix}, \quad (B^{-1}b\overline{B}) = \begin{pmatrix} \widetilde{d}_{11} & \widetilde{d}_{12} \\ \widetilde{d}_{21} & \widetilde{d}_{22} \end{pmatrix}$$

последнее уравнение можно записать в соответствующей блочной записи:

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial y} - J_1\frac{\partial\phi_1}{\partial x} + \widetilde{c}_{11}(z)\phi_1(z) + \widetilde{c}_{12}(z)\overline{\phi_2(z)} + \widetilde{d}_{11}(z)\overline{\phi_1(z)} + \widetilde{d}_{12}(z)\phi_2(z) = F_1(z),$$

$$\frac{\partial\overline{\phi}_2}{\partial y} - \overline{J}_2\frac{\partial\overline{\phi}_2}{\partial x} + \widetilde{c}_{21}(z)\phi_1(z) + \widetilde{c}_{22}(z)\overline{\phi_2(z)} + \widetilde{d}_{21}(z)\overline{\phi_1(z)} + \widetilde{d}_{22}(z)\phi_2(z) = \overline{F_2(z)}.$$

Заменяя второе уравнение этой блочной системы комплексно сопряженным получим эллиптическую систему в каноническом виде

$$\frac{\partial\phi(z)}{\partial y} - J\frac{\partial\phi(z)}{\partial x} + c\phi(z) + d\overline{\phi(z)} = F_0(z), \tag{5}$$

коэффициенты которой выражены формулами

$$c = \begin{pmatrix} \widetilde{c}_{11} & \widetilde{d}_{12} \\ \overline{\widetilde{d}_{21}} & \overline{\widetilde{c}_{22}} \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} \widetilde{d}_{11} & \widetilde{c}_{12} \\ \overline{\widetilde{c}_{21}} & \overline{\widetilde{d}_{22}} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что матрица J системы (4) составлена из клеток Жордана с диагональными элементами из множеств σ_1 и σ_2.

Для случая $c(z) = d(z) = F(z)$ система (5) была изучена Дуглисом [1] в рамках так называемых гиперкомплексных чисел. Эта система играет важную роль при исследовании эллиптических систем второго и более высоких порядков [2], [3].

Подставим (4) в краевое условие (2), тогда с учетом обозначений (3) имеем

$$C_{11}(B_1\phi_1^+ + \overline{B_2\phi_2^+}) - C_{12}(B_1\phi_1^- + \overline{B_2\phi_2^-}) = f.$$

Далее введем в рассмотрение блочную $2l \times 2l$ матрицу

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & \overline{T}_{22} \\ T_{21} & \overline{T}_{12} \end{pmatrix},$$

где $l \times l$–матрицы–функции $T_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2$, в обозначении (3) имеют явный вид

$$\begin{aligned} T_{11} &= \begin{pmatrix} C_{11}B_1 & O \end{pmatrix}, \quad T_{12} = \begin{pmatrix} C_{12}B_1 & O \end{pmatrix}, \\ T_{21} &= \begin{pmatrix} O & \overline{C}_{11}B_2 \end{pmatrix}, \quad T_{22} = \begin{pmatrix} O & \overline{C}_{12}B_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{6}$$

здесь через O обозначена нулевая матрица соответствующего порядка.

Перегруппируем слагаемые по отношению к функции ϕ и тогда, с учетом (6), получим краевое условие в виде

$$T_{11}\phi^+(t) - T_{12}\phi^-(t) + \overline{T_{21}\phi^+(t)} - \overline{T_{22}\phi^-(t)} = f_0(t), \quad t \in \Gamma. \tag{7}$$

Таким образом, исходная задача (1)–(2) свелась к эквивалентной задаче (5)–(7).

Решение задачи (1)–(2) ищем в классе $C_\delta^\mu(\hat{D}, \infty)$, который введен в [5]. Предполагая, что для матричных коэффициентов и правой части системы (1) выполнены условия принадлежности соответствующим весовым пространствам

$$a(z),\, b(z) \in C_{\delta_0}^\mu(\hat{D}, \infty),\, \delta_0 < -1, \tag{8}$$

$$f(t) \in C^{\mu}(\Gamma), \quad F(z) \in C^{\mu}_{\delta-1}(\hat{D},\infty), \quad -1 < \delta < 0, \tag{9}$$

опираясь на теорему представления 2 из [6], примененную к двум областям $D_1(D_2)$ и повторяя рассуждения из [5] приходим к следующему результату.

Теорема. *Пусть открытое множество D есть объединение конечной области D_1 и бесконечной области D_2, контур Γ–простой гладкий контур класса $C^{1,\nu}$, $l \times l$–матрицы–функции $C_{ij}(t) \in C^{\nu}(\Gamma)$, $i, j = 1,2$, и для матричных коэффициентов $a(z)$, $b(z)$ и правых частей $f(t)$, $F(z)$ выполнены, соответственно, (8), (9). Тогда условие*

$$\det T(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma,$$

необходимо и достаточно для фредгольмовости задачи (1)–(2) в классе $C^{\mu}_{\delta}(\hat{D},\infty)$ и ее индекс дается формулой

$$\varkappa = -\frac{1}{\pi}[\arg \det T(t)]_{\Gamma},$$

где приращение $[\,]_{\Gamma}$ вдоль Γ берется в направлении, оставляющем область D_1 слева.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.7311.2017/8.9).

Литература

1. Douglis A. *A function theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables.*// Comm. Pure Appl. Math. – 1953. – Т. 6. –P. 259–289.

2. Ковалева Л. А., Солдатов А. П. *Об одной нелокальной задаче теореии функций* // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46. – № 3. – С. 396–409.

3. Солдатов А. П. *Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. I. Гладкий случай* // Изв. АН СССР (сер.матем.). – 1991. – Т. 55. – № 5. – С. 1070–1100.

4. Чернова О. В. *Эллиптические системы первого порядка на плоскости с постоянными старшими коэффициентами* // Материалы III Международной научно-практической конференции «Современные проблемы физико-математических наук». –Орел, 2017. –С. 109–112.

5. Чернова О. В. *Задача линейного сопряжения для эллиптической системы первого порядка на плоскости* // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2018. – Т. 56. – С. 311–315.

6. Чернова О. В. *Интегральное представление решений эллиптической системы* // Вестник РАЕН. – 2019. – Т. 19. – № 2. – С. 179–181.

SPECIAL CASE OF THE LINEAR CONJUGATION PROBLEM

O.V. Chernova

The special case of the linear conjugation problem for a general elliptic system with complex coefficients is considered. It is shown that the choice of a successful invertible linear substitution allows to reduce the general elliptic system to an equivalent canonical system, while the initial boundary condition is expressed in terms of elements of some auxiliary matrices. Applying the results of the classical theory of singular operators and a number of auxiliary statements, the Fredholm solvability of the problem is established.

Keywords: Gölder weight space, linear conjugation problem, index, elliptic system

УДК 514.75

ТЕОРЕМА БОННЕ И ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ ПОСТОЯННОЙ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ

М.А. Чешкова[1]

1 *cma41@yandex.ru*; Алтайский государственный университет

Используя теорему Бонне, для поверхности вращения постоянной положительной гауссовой кривизны строятся поверхности постоянной средней кривизны. Поверхности постоянной средней кривизны описаны с помощью эллиптических интегралов.

Ключевые слова: поверхности вращения, средняя кривизна, эллиптические интегралы

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим поверхность вращения M, полученную вращением плоской кривой вокруг оси. Обозначим через $k = (0,0,1)$ – орт оси, а через $e = (cos(v), sin(v), 0)$ – радиус-вектор единичной окружности, расположенной в плоскости, ортогональной оси.

Тогда поверхность вращения M можно задать в виде $r = ue(v) + f(u)k$, где $f = f(u)$ – дифференцируемая функция, u, v – параметры.

Обозначим через n – орт нормали к поверхности M. Тогда $n = \frac{f(u)'e(v)-k}{\sqrt{(f(u)')^2+1}}$.

Главные кривизны k_1, k_2 поверхности M имеют вид

$$k_1 = -\frac{f(u)''}{\sqrt{(f(u)')^2+1}^3}, k_2 = -\frac{f(u)'}{u\sqrt{(f(u)')^2+1}}. \quad (1)$$

Имеем дифференциальное уравнение поверхности вращения постоянной гауссовой кривизны (ПГК) K

$$\frac{f(u)'f(u)''}{u(f(u)')^2+1)^2} = K. \quad (2)$$

Требуя $K = const$, получим решения

$$f(u) = \pm\int_0^u \sqrt{\frac{Kt^2-(c-1)}{c-Kt^2}}dt. f(u) = \pm\int_0^u \sqrt{\frac{Kt^2-(c-1)}{c-Kt^2}}dt, K, c = const. \quad (3)$$

В [1, с. 97] форма меридиана исследована, не прибегая к вычислению эллиптического интеграла. Имеем

$$f(u) = \mp\frac{I\sqrt{c-1}EllipticE(\frac{u\sqrt{Kc}}{c}, \frac{\sqrt{(c-1)c}}{c-1})}{\sqrt{K}} + c_1, K, c, c_1 = const. \quad (4)$$

Полагаем $K = 1$. Имеем

$$f(u) = \pm\int_0^u \sqrt{\frac{t^2-(c-1)}{c-t^2}}dt, f(u) = \mp I\sqrt{c-1}EllipticE(\frac{u}{\sqrt{c}}, \frac{\sqrt{(c-1)c}}{c-1}) + c_1, \quad (5)$$

$$n = \pm\sqrt{u^2-c+1}e(v) - \sqrt{c-u^2}k. \quad (6)$$

Для построения поверхности постоянной средней кривизны используем теорему Бонне [2, с. 110]: *для любой поверхности, имеющей постоянную положительную гауссову кривизну, существует параллельная ей поверхность с постоянной средней кривизной.*

Поверхность постоянной средней кривизны (ПСК), параллельная поверхности вращения (ПГК), определяется уравнением [1, с. 307] $\bar{r} = r + hn, h = \pm\sqrt{K} = \pm 1$. Поверхности (ПСК) есть поверхности вращения.

2. Примеры поверхностей вращения (ПСК)

Построим сначала поверхности вращения (ПГК). Поверхности вращения (ПГК) исследуются трех типов [1, с. 97]. Параллельные им поверхности вращения (ПСК) имеют также три типа.

2.1. Первый тип поверхности вращения (ПСК). Положим в (5) $c = 1$, $f(u) = \pm\sqrt{1-u^2}$. Меридиан – окружность поверхность вращения (ПГК) – сфера. Соответствующая ей поверхность вращения (ПСК) также сфера.

2.2. Второй тип поверхности вращения (ПСК). Из (5) замечаем, что функция $f(u)$ определена при $0 < c < 1$. Полагая $c = 1/4$, получим

$$f(u) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}EllipticE(2u, 1/\sqrt{3}I) + c_1, n = \pm\sqrt{u^2+3/4}e(v) - \sqrt{1/4-u^2}k. \quad (7)$$

Рассмотрим поверхности вращения постоянной гауссовой кривизны M_1, M_2, M_3, M_4 . Обозначим

$$F(u) = -\frac{\sqrt{3}}{2} EllipticE(2u, 1/\sqrt{3}I), a = F(\sqrt{c}) = -\sqrt{3}/2 EllipticE(1/\sqrt{3}I).$$

Положим

$$M_1 : r(u,v) = (ucos(v), usin(v), -F(u)), M_2 : r(u,v) = (ucos(v), usin(v), F(u) - 2a),$$

$$M_3 : r(u,v) = (ucos(v), usin(v), -F(u) + 2a), M_4 : r(u,v) = (ucos(v), usin(v), F(u)),$$

$u \in [0, \sqrt{1/4}], v \in [-\pi, \pi]$.

Построим эти поверхности (рис. 1).

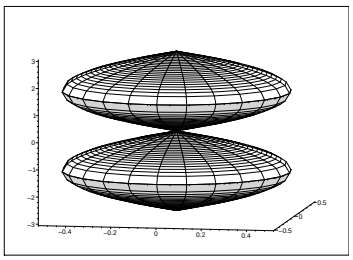


Рис. 1. Модели поверхностей ПГК $M_1, M_2, M_3, M_4, c = 1/4$

Для данных поверхностей построим поверхности постоянной средней кривизны $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3, \bar{M}_4$. Определим нормали n_1, n_2, n_3, n_4 для этих поверхностей.

$$n_1 = n_3 = -\sqrt{u^2 + 3/4} e(v) - \sqrt{1/4 - u^2} k, n_2 = n_4 = \sqrt{u^2 + 3/4} e(v) - \sqrt{1/4 - u^2} k.$$

Полагаем $h = 1$. Уравнения поверхностей $\bar{M}_1, \bar{M}_4$ имеют вид

$$\bar{M}_1 : r(u,v) = (u - \sqrt{u^2 + 3/4}) e(v) + (-F(u) - \sqrt{1/4 - u^2}) k,$$

$$\bar{M}_4 : r(u,v) = (u + \sqrt{u^2 + 3/4}) e(v) + (F(u) - \sqrt{1/4 - u^2}) k.$$

Построим эти поверхности (рис. 2).

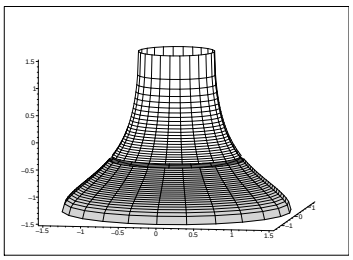


Рис. 2. Модели поверхностей (ПСК) $\bar{M}_1, \bar{M}_4, c = 1/4, h = 1$

Построим еще один вид поверхностей вращения (ПСК) $\bar{M}_1^*, \bar{M}_4^*$(рис. 3), где $h = -1$.

2.3. Третий тип поверхности вращения (ПСК).

Исследуем случай при $c > 1, u \in [\sqrt{c-1}, \sqrt{c}]$ [1, с.99]. Сделаем замену переменной $u = \sqrt{c} sin(t)$. Имеем $du = \sqrt{c} cos(t) dt, cos(t)^2 < 1/c, df = \pm\sqrt{c}\sqrt{\frac{1}{c} - cos(t)^2} dt$. При $c = 4$ получаем

$$df = \pm\sqrt{1 - 4cos(t)^2} dt, f(t) = \mp EllipticE(cos(t), 2) + c_1,$$

$u = 2sin(t), t \in [\pi/3, \pi/2], cos(t)^2 < 1/4$.

Рассмотрим поверхности вращения постоянной гауссовой кривизны P_1, P_2

$$P_1 : r(t,v) = 2sin(t) e(v) - EllipticE(cos(t), 2) k, P_2 : r(t,v) = 2sin(t) e(v) + EllipticE(cos(t), 2) k,$$

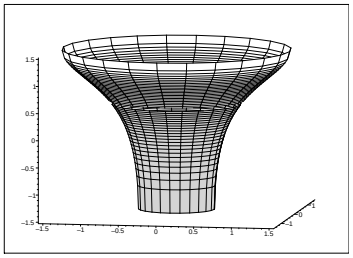


Рис. 3. Модель поверхности (ПСК) $\bar{M}_1^*, \bar{M}_4^*, c = 1/4, h = -1$

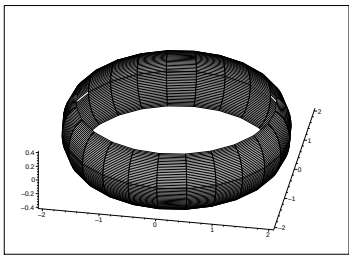


Рис. 4. Модели поверхностей (ПГК) $P_1, P_2, c = 4$

$t \in [\pi/3, \pi/2], v \in [-\pi, \pi]$.

Построим поверхности P_1, P_2 (рис. 4).

Для данных поверхностей построим поверхности постоянной средней кривизны $\bar{P}_1, \bar{P}_2$.

Определим нормали n_1, n_2 для этих поверхностей, соответственно.

Имеем

$$n_1 = \sqrt{1-4cos(t)^2}e(v) - 2cos(t)k, n_2 = \sqrt{1-4cos(t)^2}e(v) + 2cos(t)k.$$

Уравнения поверхностей $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ при $h = 1$ примут вид

$$\bar{P}_1 : r(t,v) = (2sin(t) + \sqrt{1-4cos(t)^2})e(v) + (-EllipticE(cos(t),2) - 2cos(t))k,$$

$$\bar{P}_2 : r(t,v) = (2sin(t) + \sqrt{1-4cos(t)^2})e(v) + (EllipticE(cos(t),2) + 2cos(t))k.$$

Построим поверхности (ПСК) $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ при $h = 1$ (рис. 5).

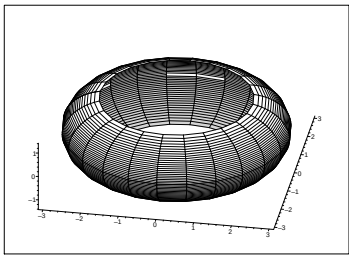


Рис. 5. Модели поверхностей (ПСК) $\bar{P}_1, \bar{P}_2, c = 4, h = 1$

Построим также поверхности (ПСК) $\bar{P}_1^*, \bar{P}_2^*$ при $h = -1$. (рис. 6).

Литература

1. Каган В. Ф. *Основы теории поверхностей в тензорном изложении.* – т. 2. – М.Л.: 1947. –407 с.

2. Каган В. Ф. *Основы теории поверхностей в тензорном изложении.* – т. 1. – М.Л.: 1947. –448 с.

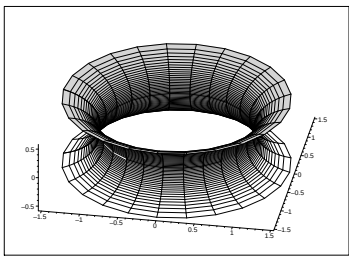


Рис. 6. Модели поверхностей (ПСК) $\bar{P}_1^*, \bar{P}_2^*$, $c = 4, h = -1$

THEOREM BONNET AND SURFACES OF REVOLUTION OF CONSTANT MEAN CURVATURE

M.A. Cheshkova

Using the Bonnet theorem, surfaces of constant mean curvature are constructed for the surface of revolution of a constant positive Gaussian curvature. Surfaces of constant mean curvature are described using elliptic integrals.

Keywords: surfaces of revolution, mean curvature, elliptic integrals

УДК 004.8

ФОРМИРОВАНИЕ ОБУЧАЮЩЕЙ ВЫБОРКИ ДЛЯ АНАЛИЗА ПРОФИЛЯ ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ СОЦИАЛЬНОЙ СЕТИ

Д.Р. Шагеева[1], Г.З. Вахитов[2], З.А. Еникеева[3]

1 *drshageeva@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий

2 *gzvahitov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий

3 *zaenikeeva@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий

В статье обсуждается формирование обучающих выборок для ансамбля нейронных сетей, анализирующих профили пользователей социальной сети. Основная задача нашего нейросетевого моделирования состоит в делении студентов на классы, характеризующие их академическую успешность. В ходе исследования статистических данных было выявлено, что средний балл по успеваемости зависит от направления и формы обучения, пола студента. Поэтому для обучения классификатора было принято решение использовать ансамбль нейросетей, учитывающий различия входных совокупностей данных.

Ключевые слова: обучающая выборка, анализ данных, социальные сети

Для формирования выборки были взяты данные студентов Казанского приволжского федерального университета (далее – К(П)ФУ). В качестве параметра, определяющего успеваемость, был выбран средний балл студента. Для обеспечения репрезентативности выборки были выбраны студенты, обучающиеся как на технических, так и на гуманитарных направлениях. Итак, из студентов, поступивших в 2016-2018 годах, было выделено 10000 студентов.

В качестве рассматриваемой социальной сети была выбрана ВКонтакте. По фамилии, имени, отчеству был осуществлен поиск одногруппников в друзьях данного студента. Также были получены ID в социальной сети ВКонтакте. Около 11 процентов студентов не были найдены в социальной сети, около 16 процентов студентов имели закрытые профили, что приводило к исключению их из списка. В конечном списке осталось 7317 студентов.

С помощью методов API, которые предоставляются ВКонтакте, были получены количественные данные о студентах (количество друзей, последователей, фото, видео, интересных страниц, аудиозаписей, подарков, записей на стене). Так как даже при открытом профиле пользователя выбранной социальной сети аудиозаписи, подарки, записи на стене могут быть скрыты, эти параметры были исключены из списка.

В итоге была сформирована база данных со следующими атрибутами: пол, институт, форма обучения (бюджет/контракт/гослиния), средний балл успеваемости, количество друзей в социальной сети, количество подписчиков в социальной сети, количество опубликованных в социальной сети фотографий, количество опубликованных в социальной сети видео, количество страниц, на которые подписан пользователь.

Следующим шагом стало исследование зависимостей между переменными.

Из графика зависимости пола от среднего балла (рисунок 1) следует вывод, что студенты женского пола имеют более высокий средний балл, нежели студенты мужского пола.

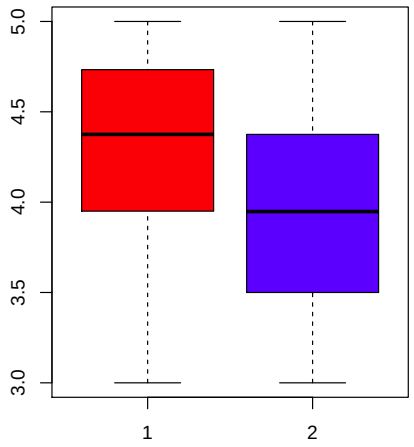


Рис. 1. Зависимость пола от среднего балла

На графике зависимости института от среднего балла (рисунок 2) видно, что средний балл успеваемости обучающихся разнится в зависимости от института.

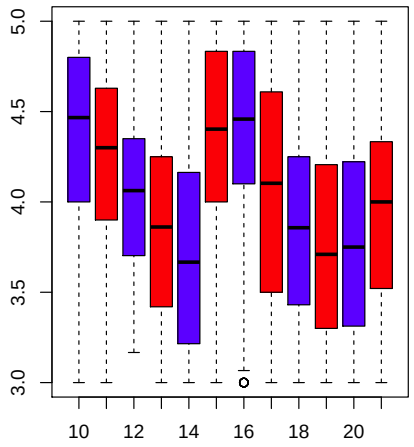


Рис. 2. Зависимость института от среднего балла

Из графика зависимости формы обучения от среднего балла (рисунок 3) можно заключить, что

средний балл студентов, обучающихся на контрактной форме обучения, незначительно ниже среднего балла студентов, обучающихся на бюджетной форме обучения и обучающихся по государственной линии.

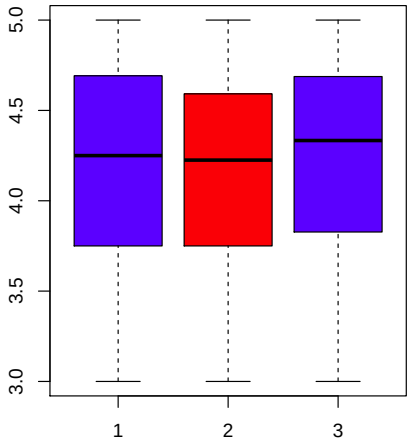


Рис. 3. Зависимость формы обучения от среднего балла

Для улучшения сходимости нейросетей мы предлагаем рассматривать веса, как случайные величины, и коррелировать их изменения с учётом значений выше описанных факторов. Таким образом, изменения весов зависят от выбора определённой нейросети из ансамбля, и для каждой сети веса рассматриваются как случайные величины, для которых строятся законы распределений их значений:

$$w_{ij} = f_{ij}(t \mid \sum_{k}^{N} I_k * Y_k)$$

,

здесь $[f_{ij}]$ - функции, зависящие от номера выбранной нейросети, также от влияния совокупности исследованных факторов $[Y_1, ..., Y_N]$, индикатор $[I_k]$ показывает наличие или отсутствие влияния величины $[Y_k]$ для данного массива входных данных.

Литература

1. Popov L. M, Ustin P. N) *Psychological alienation problem in moral and ethical psychology of personality. Mathematics Education.* – Vol.11. -№ 4. P.787-797 https://www.iejme.com/article/psychological-alienation-problem-in-moral-and-ethical-psychology-of-personality.

2. Tumakov D., Godovykh C., Valeeva A. *Mathematical model of socio-psychological adaptation through a person's interaction with the environment* // Herald National Academy of Managerial Staff of Culture and Arts, 2018, No. 3, P. 310-318.

3. Vakhitov G., Enikeeva Z. Enikeeva S.,*Algorithm for the Formation of a Training Set for a Neural Network on the Recognition of Chart Patterns* // Conference: 2018 IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS) September 2018 DOI: 10.1109/EWDTS.2018.8524747

4. Вахитов Г. З., Еникеева З. А.*Использование нейросетей для прогнозирования динамики фондового рынка* // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2017): Материалы XVI Международной конференции имени А.Ф. Терпугова (29 сентября - 3 октября 2017 г.). - Томск: Изд-во НТЛ, 2017. - Ч.2. - с.264-267.

CREATING A TRAINING SET TO ANALYZE SOCIAL NETWORK PROFILE

D.R. Shageeva, G.Z. Vahitov, Z.A. Enikeeva

The article discusses the formation of training samples for an ensemble of neural networks that analyze the social network profiles. The main task of our neural network modeling is to divide students into classes by their academic success. In the course of the study of statistical data, it was revealed that the average score for academic performance depends on the direction and form of training, the sex of the student. Therefore, to train the classifier, it was decided to use an ensemble of neural networks that takes into account the differences in the input data sets.
Keywords: training set, data analysis, social networks

УДК 517.9

ОБ ОДНОЙ ПЕРЕДОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Ф.М. Шамсудинов[1], Х. Сайфулло[2]

1 *faizullo100@yahoo.com*; Бохтарский государственный университет им. Н. Хусрава, Таджикистан
2 *smpk1992@mail.ru*; Бохтарский государственный университет им. Н. Хусрава, Таджикистан

В работе для одной переопределенной системы дифференциальных уравнений второго порядка получено представление многообразия решений в явном виде, когда коэффициенты первого уравнения связанный между собой определенным образом. Изучены свойства полученных решений, а также рассмотрена задача с начальными
данными K_1.

Ключевые слова: переопределенная система, многообразия решений, прямоугольник, сингулярный коэффициент, свойства решений

Пусть D прямоугольник $D = \{(x, y) : 0 < x < \delta_1, \quad 0 < y < \delta_2\}$.

Далее обозначим

$$\Gamma_1 = \{y = 0,\ 0 < x < \delta_1\}, \quad \Gamma_2 = \{x = 0,\ 0 < y < \delta_2\}.$$

В области D рассмотрим систему следующего вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{a_1(x,y)}{r^\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{b_1(x,y)}{r^\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{c_1(x,y)}{r^{\alpha+\beta}}u = \dfrac{f_1(x,y)}{r^{\alpha+\beta}}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{a_2(x,y)}{x^\gamma}u = \dfrac{f_2(x,y)}{x^\gamma}, \end{cases} \tag{1}$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, $a_1(x,y)$, $b_1(x,y)$, $c_1(x,y)$, $f_1(x,y)$, – заданные функции в области D, $\alpha > 2, \beta > 2, \gamma = 1 (\alpha, \beta$ - целые положительные числа).

Дифференциальные уравнения и переопределенные системы с регулярными, сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами исследовались в работах [1]-[10].

В настоящей заметке на основе способа разработанного в [3] получено представление многообразия решений системы уравнений (1) при помощи одной произвольной постоянной.

Через $C_2(D)$ в дальнейшем обозначим класс функций, которые имеют непрерывные производные первого порядка в D и такие, что $u_{xy} \in C(D)$.

Итак, доказана

Теорема 1. *Пусть в системе уравнений (1) $\alpha > 2, \beta > 2, \gamma = 1$ (α, β – целые положительные числа) коэффициенты и правые части удовлетворяют следующим условиям:*

1) $a_1(x,y) \in C_x^1(\overline{D}), a_2(x,y), f_2(x,y) \in C_y^1(\overline{D})$,
$b_1(x,y), c_2(x,y), f_1(x,y) \in C(\overline{D})$;

2) $c_1(x,y) = r^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{a_1(x,y)}{r}\right) + a_1(x,y) b_1(x,y)$;

3) $|a_2(x,y) - a_2(0,0)| \le H_1 r^{\alpha_1},\ H_1 = const,\ \alpha_1 > \alpha - 1$,
$|b_1(x,y) - b_1(0,0)| \le H_2 r^{\beta_1},\ H_2 = const, \beta_1 > \beta - 1$,
$|a_2(x,0) - a_2(0,0)| \le H_3 x^{\gamma_1},\ H_3 = const, 0 < \gamma_1 < 1$;

4) $a_1(0,0) < 0, b_1(0,0) > 0,\ a_2(0,0) > 0$;

5) *a)* $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{a_1(x,y)}{r^\alpha}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{a_2(x,y)}{x}\right)$ в D,

b) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{f_2(x,y)}{x}\right) + \dfrac{a_1(x,y) f_2(x,y)}{x r^\alpha} = \left(\dfrac{a_2(x,y)}{x} - \dfrac{b_1(x,y)}{r^\beta}\right) \times$
$\times \exp\left[-W_{b_1}^{\beta}(x,y) - b_1(0,0) W_{\frac{\beta}{2}-1}^{(2)}(x,y)\right]\left(\psi_1(y) + \int_0^x \dfrac{f_1(t,y)}{(t^2+y^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \times\right.$
$\left. \times \exp\left[W_{b_1}^{\beta}(t,y) + b_1(0,0) W_{\frac{\beta}{2}-1}^{(2)}(t,y)\right] dt\right) + \dfrac{f_1(x,y)}{r^{\alpha+\beta}}$ в D;

6) Требуем существование пределов
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a_2(x,y)}{x} = a_2^1(y),\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f_2(x,y)}{x} = f_2^1(y)$;

7) $f_1(x,y) = o\left(r^\nu\right),\ \nu > \alpha + \beta - 1$.

Тогда любое решение системы уравнений (1) из класса $C_2(D)$ представимо в виде

$$u(x,y) = \exp\left[-W_a^{\alpha}(x,y) - a_1(0,0) W_{\frac{\alpha}{2}-1}^{(1)}(x,y)\right]\left\{\varphi_1(x) + \int_0^y \exp\left[W_{a_1}^{\alpha}(x,s) + \right.\right.$$
$$\left. + a_1(0,0) W_{\frac{\alpha}{2}-1}^{(1)}(x,s) - W_{b_1}^{\beta}(x,s) - b_1(0,0) W_{\frac{\beta}{2}-1}^{(2)}(x,s)\right] \times$$
$$\left. \times \left(\psi_1(s) + \int_0^x \frac{f_1(t,s)}{(t^2+s^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \exp\left[W_{b_1}^{\beta}(t,s) + b_1(0,0) W_{\frac{\beta}{2}-1}^{(2)}(t,s)\right] dt\right) ds\right\} \equiv$$
$$\equiv \chi_1(\varphi_1(x), \psi_1(y), f_1 x, y)), \quad (2)$$

где

$$\varphi_1(x) = x^{-a_2(0,0)} \exp\left[-W_{a_2}^1(x,0)\right]\left(c_1 + \int_0^x \frac{f_2(t,0)}{t^{1-a_2(0,0)}} \exp\left[W_{a_2}^1(t,0)\right] dt\right) \equiv N_1(c_1, f_2(x,0)), \quad (3)$$

$$\psi_1(y) = \left(a_2^1(y) - y^{-\beta} b_1(0,y)\right)^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_2(x,y)}{x}\right)\Big|_{x=0} + \frac{a_1(0,y) f_2^1(y)}{y^\alpha} - \frac{f_1(0.y)}{y^{\alpha+\beta}}\right], \quad (4)$$

где

$$W_{a_1}^{\alpha}(x,y) = \int_0^y \frac{a_1(x,s) - a_1(0,0)}{(x^2+s^2)^{\frac{\alpha}{2}}} ds,$$
$$W_{\frac{\alpha}{2}-1}^{(1)}(x,y) = \frac{y}{x^2(\alpha-2) r^{\alpha-2}} + \frac{1}{x^2}\frac{\alpha-3}{\alpha-2} J_{\frac{\alpha}{2}-1}^{(1)}(x,y), \quad J_{\frac{\alpha}{2}-1}^{(1)}(x,y) = \int_0^y (x^2+s^2)^{1-\frac{\alpha}{2}} ds,$$
$$W_{b_1}^{\beta}(x,y) = \int_0^x \frac{b_1(t,y) - b_1(0,0)}{(t^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}} dt, \quad W_{a_2}^1(x,y) = \int_0^x \frac{a_2(t,0) - a_2(0,0)}{t} dt,$$

$$W_{\frac{\beta}{2}-1}^{(2)}(x,y) = \frac{x}{y^2(\beta-2) r^{\beta-2}} + \frac{1}{y^2}\frac{\beta-3}{\beta-2} J_{\frac{\beta}{2}-1}^{(2)}(x,y),$$
$$J_{\frac{\beta}{2}-1}^{(2)}(x,y) = \int_0^x (t^2+y^2)^{1-\frac{\beta}{2}} dt, \quad W_{a_2}^1(x,0) = \int_0^x \frac{a_2(t,0) - a_2(0,0)}{t} dt,$$

c_1 – *произвольная постоянная.*

Полученное решение имеет свойства

1^0. Если $y \to 0$

$$\lim_{y\to 0} u(x,y) = \varphi_1(x).$$

2^0. Если $y \to 0$ и $x \to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0} u(x,y)\right\} = \lim_{x\to 0}\varphi_1(x) = O\left(x^{-a_2(0,0)}\right).$$

3^0.

$$\lim_{x\to 0}\left\{x^{a_2(0,0)}\lim_{y\to 0} u(x,y)\right\} = c_1.$$

4^0. Если $x \to 0$, то

$$u(x,y) = O\left(\exp\left[-a_1(0,0)W^{(1)}_{\frac{\alpha}{2}-1}(x,y)\right]\right).$$

На основе полученного интегрального представления решений поставлена и решена следующая задача с начальными данными.

Задача K_1. Требуется найти решение системы уравнений (1) из класса $C_2(D)$ по начальному условию

$$\lim_{x\to 0}\left\{x^{a_2(0,0)}\lim_{y\to 0} u(x,y)\right\} = p_1,$$

где p_1 - заданная постоянная.

Итак, доказана следующая теорема

Теорема 2. Пусть выполнены все условий теоремы 1. Тогда единственное решение, задачи K_1 выражается формулами (2),(3),(4), где $c_1 = p_1$.

Литература

1. Wilczynski E.J. *Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces / E.J. Wilczynski. - Zeip. Zig;* Leubner, 1906. – 120 p.

2. Гайшун, И. В. *Линейные уравнения в полных производных /И. В. Гайшун - Минск:* Наука и техника, 1983. – 273 с.

3. Раджабов Н. *Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами/ Н.Раджабов.* – Душанбе .изд. ТГУ, 1992. – 236с.

4. Раджабов Н. *Интегральные уравнения типов Вольтерра с фиксированными граничными и внутренными сингулярными и сверхсингулярными ядрами и их приложения/ Н. Раджабов* . – Душанбе:изд. Деваштич 2007 . – 221с.

5. Раджабов Н., Махамед Эльсаед Абдель Аал. *Переопределеная линейная система второго порядка с сингулярными и сверхсингулярными линиями/Н.Р. Раджабов, Махамед Эльсаед Абдель Аал.*- Lap Lambert Academic Publishing,Germany, 2011. – 234с.

6. Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения /Ф. Хартман* . – М.: Мир, 1970. – 720 с.

7. Тасмамбетов Ж.Н. *О развитии исследований специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка / Ж.Н.Тасмамбетов // Материалы международной научно-практической конференции "Информационные технологии: инновации в науке и образовании";* г.Актобе 20-21 февраля 2015г. – С. 6-17.

8. Тасмамбетов Ж. Н. *Построение нормальных и нормально - регулярных решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка /Ж. Н. Тасмамбетов.* – Актобе: 2015. – 463 с.

9. Шамсуддинов Ф. М. *Об одной переопределенной системе дифференциальных уравнений второго порядка с сильной особенностью/Ф.М Шамсудинов* // Доклады Адыгской (Черкеской) Международной академии наук.2014. – Т.16. – № 1. – С. 40-46.

10. Шамсуддинов Ф. М. *Об одной переопределенной системе дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярной точкой /Ф.М Шамсудинов* // Вестн.Волгогр.гос.ун-та.Сер.Мат.Физ.2016., № 6(37). – С. 99-107.

ABOUT ONE OVERDETERMINED SYSTEM OF SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SINGULARITY COEFFICIENTS

F.M. Shamsudinov, H. Sayfullo

In the paper, for one second-order overdetermined system of differential equations, we obtain an explicit representation of the variety of solutions when the coefficients of the first equation are interconnected in a certain way. The properties of the obtained solutions are studied, and the problem with the initial data K_1 is also considered.

Keywords: overdetermined system, manifold of solutions, rectangle, singular coefficient, properties of solutions

УДК 531/534

МОДЕЛИРОВАНИЕ АДАПТАЦИИ КОСТНОЙ ТКАНИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО НАГРУЖЕНИЯ

В.В. Яикова[1], Д.А. Мухин[2]

1 *yaikovavictoriya@mail.ru*; Кафедра теоретической механики института математики и механики им Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета

2 *dimonchik.2342@yandex.ru*; Кафедра теоретической механики института математики и механики им Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета

В ходе работы было произведено ознакомление с методами описания структуры костной ткани и моделями физических и эволюционных соотношений, на основе выбранной математической модели реализован алгоритм решения поставленной задачи о перестройке костной структуры под действием давления, произведен численный эксперимент и получены результаты.

Ключевые слова: математическое моделирование, негомогенные среды, компьютерная томография

При решении задач биомеханики в разделе опорно-двигательной системы человека необходимо описать напряженно-деформированное состояние(НДС) костной ткани, учитывая изменение её структуры со временем [1-3]. Поэтому появляется необходимость получения метода, благодаря которому будет количественно описываться изменение структуры костной ткани под воздействием постоянной нагрузки.

Закон Вольфа - это закон, описывающий поведение костной ткани под влиянием различных факторов, в частности нагрузки. Вследствие изменения нагрузки начинается перестройка костной ткани. Закон Вольфа гласит: кость приспосабливает свою структуру к тем нагрузкам, которые она должна выдержать [4]. В равновесном состоянии главные оси тензора деформаций должны совпадать с главными осями девиатора тензора структуры. Главные оси тензоров совпадают, если их скалярное произведение коммутативно.

При построении модели подразумевалось, что материал изотропный и негомогенный. Из предположения наличия связи между физической плотностью и механическими характеристиками оптическая плотность использовалась для расчета модуля Юнга и предельных напряжений. Основная идея заключается в построении взаимосвязи между конечно-элементной сеткой и данными КТ. Для этого необходимо определить коэффициенты ослабления в узлах на дискретизированном множестве, которое представляет набор данных узлов и элементов. Далее проводится осреднение

механических характеристик для каждого элемента, что позволяет, находясь в упругой постановке, использовать классические конечные элементы.

Из литературы известны эволюционные соотношения [4], описывающие изменения в строении губчатой кости под воздействием различных нагрузок. Модель Коэна позволяет выразить девять компонент тензора ортотропии через нормированные собственные значения тензора структуры, второй инвариант тензора структуры и девять функций плотности костного матрикса [1,3].

Построение геометрии и расчет производились в универсальной программной системе конечно-элементного анализа ANSYS. При расчетах использовался тип конечного элемента SOLID185 с линейной аппроксимацией. На нижней поверхности модели ограничим перемещение по всем направлениям, на верхней поверхности приложим давление. Был реализован итерационный процесс пошагового определения неизвестных на каждом временном слое. Для определения качества перестройки костной структуры была реализована визуализация НДС и распределение пористости в фиксированные моменты времени. При решении использовалось 320 итераций и шаг по времени , шаг составляет около 1,2 часа.

В первом расчетном случае картины распределения изменения доли твердого материала говорят о том, что в состоянии гомеостатического равновесия максимальное изменение пористости будет наблюдаться ближе к верхней поверхности. После 122 итерации наблюдается постепенное уменьшение значения невязки, что говорит о том, что тензор структуры и тензор деформации стремятся к соосности и о сходимости математической модели. Во втором расчетном случае напряжения по Мизезу достигают асимптотического значения уже на 80-й итерации. На первой итерации локализации максимальных напряжений и максимального изменения пористости совпадают.

Рассматривая полученную картину распределения напряжений можно заключить, что максимальные нормальные напряжения при достижении состояния гомеостатического равновесия концентрируются на нижней поверхности модели ближе к углам. Основываясь на полученных результатах, можно сделать вывод, что костная структура приходит в состояние гомеостатического равновесия приблизительно через 5 суток.

Литература

1. Gupta S., Dan P., *Bone geometry and mechanical properties of the human scapula using computed tomography data.* – Trends Biomater. Artif. Organs., 2004. –Vol.17(2). – pp. 61-70.

2. Акулич Ю. В. Акулич А. Ю., Денисов А. С., Шайманов П. С., Шулятьев А. Ф. *Уточнение индивидуальной зависимости модуля упругости трабекулярной костной ткани от объемного содержания матрикса* // Российский журнал биомеханики – 2014. – Т. 18. – № 2. – С. 158–167.

3. Rho J. Y., Hobatho M. C., Ashman R. B., *Relations of mechanical properties to density and CT numbers in human bone* // Med. Eng. Phys. – 1995. – Vol. 17(5). – pp. –347-551.

4. Саченков О. А. Хасанов Р. Ф., Андреев П. С., Коноплев Ю. Г., *Численное исследование напряженно-деформированного состояния тазобедренного сустава при ротационной остеотомии проксимального участка бедренной кости* // Российский журнал биомеханики – 2016. – Т. 20. – № 3. – С. 257–251.

MODELLING OF ADAPTATION OF THE BONE TISSUE UNDER THE ACTION OF EXTERNAL LOADING

V.V. Yaikova, D.A. Mukhin

In the course of the work, familiarization with the methods of describing the structure of bone tissue and models of physical and evolutionary relationships was made. On the basis of the chosen mathematical model, an algorithm for solving the problem of restructuring the bone structure under pressure was implemented, a numerical experiment was performed and the results obtained.
Keywords: mathematical modeling, inhomogeneous environment, computed tomography

UDC 004.85

BD97 PLACES : DEEP CONVOLUTIONAL NETWORKS FOR PLACES DETECTION

F.P.B. Dossou[1]

1 *femipancrace.dossou@gmail.com*; Kazan Federal Unirersity

The geolocation services thanks to the precious tool called GPS, are nowadays very present and important in our daily life activities: taxi ordering, place tagging, address finding etc. However, this identification is not always easy because it strongly depends on the activation of this GPS services on the user's phone settings and also a good internet connection to ensure high efficiency and accuracy in determining the geographical location coordinates of the user. In recent years, with the dazzling advance of Artificial Intelligence, the human being has been able to achieve excellent and unimaginable progresses. This research paper introduces BD97 Places, an ongoing research project to develop a powerful artificial intelligence system for places detection and GPS Services helper using deep convolutional neural networks.

Keywords: Places Detection, Convolutional Neural Networks, Artificial Intelligence, Deep Learning

Introduction to BD97 Places

Our current task is a computer vision task because we have to teach our Artificial Neural Network how to analyze a picture and how to be able to identify probable places where the picture has been taken as we, humans could simply do by using our memory and our eyes. For that, Convolutional Neural Networks architecture has been preferred and used since they are able to successfully establish dependencies between patterns in the image through the use of appropriate filters. The proposed model is called BD-97 Places and at the currently is made of two convolutional layers with precised numbers of filters.

BD97 Places Architecture

The input to BD-97 Places is a picture. In order to get good results from our model, we applied some preliminary transformations to the input data. Firstly, we resized the picture at the input, because we needed to get it shaped so that the model could efficiently extract very important properties from them. We get another array that contains numbers, each of which respectively characterizes each pixel of the input. This last array that we got is a matrix, where height is the number of rows and width is the number of columns. Along the input image, we have a third axis called the channel axis, which corresponds to the RGB (red-green-blue) values of the image. While performing transformations on the input data, the data along that third axis can be easily compressed in quality and as a result we could most likely get very poor data quality. In order to maintain good data quality as in the input data, we performed the zero-padding operation: it consists in adding the maximum possible number of zeros along all axes of our input data matrix. After the zero-padding, the input data is sent to convolutional layers, where the model start filtering the input data. The filtration is performed by taking each of the submatrices with a predetermined size and multiply by the filter matrix to obtain a convoluted matrix of features. These submatrices are called kernels, and their size is called kernel's size. However instead of multiplying each elementary single submatrix by the filter matrices, we can specifically decide which submatrices we need. This is possible thanks to the stride: the stride is the distance between each linear pattern along the axes. For example, stride 2 means that we must go from 2 rows and 2 columns along the axes of our pixel array, moving from one kernel to another. By default, its value is 1. The convoluted matrix of features is the result of the input through the filter obtained after performing multiplication between the kernel and the filter matrix taking into account the value of the stride parameter. If W is the width of the input image, the number of columns of the array of our input image, H is the height of the input image, the number of lines of the array of our input image, D is the input depth that determines the size of the axes of the channels (here the size is 3, since we are working on the RGB system), F - kernel size, S - stride, K - number of filters, P - size of the zero-padding.

Then the output size will be $W' * H' * D$, where:

$$W' = (W - F + 2 * P)/S + 1;$$

$$H' = (H - F + 2 * P)/S + 1.$$

The convoluted matrix of features needs to be passed through an activation function, which gives an array essentially characterizing abstract patterns of the input data with pixels. There are many activation functions but in the structure of our model we used reLu and softmax as activation functions. By definition reLu function is a semi-linear function with saturation which has been proven to give very good experimental results. ReLU is simply defined as $f(x) = max(0, x)$ and the Softmax function, also known as the normalized exponential function, calculates the probability distribution of an event over "n" different events. In this case, the events here are the different classes we trained our model on. Between the convolution layers there are pooling layers. Their role is to gradually reduce the spatial size of the representation, in order to reduce the number of parameters and calculations in the network, while performing the conversion of our input data. The main operation performed by the pooling layers is what we call maximum pooling. The maximum pooling's goal is to reduce the selection of the input representation (image, output matrix of the hidden layer, etc.), reducing its dimension and making assumptions about the properties contained in the selected subregions. How does it work and why? This is done in order to partially help with the adaptation, providing an abstract form of presentation. In addition, it minimizes computational costs by reducing the number of parameters studied and provides basic translation immutability for internal representation. Maximum pooling is accomplished by applying the max filter to the (usually) non-overlapping subregions of the original view. Pooling layers accept a volume of size $W * H * D$, requiring two parameters: stride S and kernel size F.

This will produce an output of size $W' * H' * D$, where:

$$W' * = (W - F)/S + 1;$$

$$H' * = (H - F)/S + 1.$$

Experiments and results

Experiments

Dataset Creation: For our task, there were no dataset of images that we could have used to directly start training our model, therefore we wrote a helping function in python, which uses the google-images-download built-in python library to load many pictures from the internet matching up with specifics keywords. BD-97 Places is currently able to recognize in total eight (08) places : five (05) popular touristic places in various cities of the world [the Eiffel Tower (Paris, France), the Statue of Liberty (New York, USA), the Colosseum (Rome, Italy), the Statue of Christ the Redeemer (Rio, Brazil) and Taj Mahal (New Delhi, India)] and three (03) countries in Africa : Madagascar, Rwanda and Ivory Coast. Although, we have written a function to collect data (pictures) from the internet; after the their cleaning (removing non-valid pictures from the dataset of each category) and their processing, the whole dataset size was still not enough and we had to apply the data-augmentation technique by taking pictures of the training set and applying them: a 30-degree angle rotation, width-height range shifting, zooming and horizontally flipping.

Network training section: We first trained our network for 200 epochs with a learning rate of 0.001 and a batch size of 64. We started with only two classes: the Eiffel Tower and the Statue of Liberty. The result was good enough and then we proceeded to add more classes: The Colosseum (Roma, Italy) and Christ the Redeemer (Rio de Janeiro, Brazil), Taj Mahal(India). After a series of hyperparameter tuning and data augmentation, we finally achieved an accuracy of over 98% on the test data set.

Conclusion and perspectives

In conclusion, our current task was a computer vision problem. Our main focus was to suggest a solution using artificial intelligence and deep neural networks to reinforce or bypass GPS services while trying to identity the probable places where a given picture has been taken. To solve this problem, we used a special type of architecture of neural networks called Convolutional Neural Networks. To train our network, it was necessary first of all to write a python script that helped to automatically download images from Google with the given keywords because we couldn't find any ready dataset, we had to create our own. After the data collection, cleaning and processing, the data were still not enough and then we had to apply the data-augmentation technique. After the data-augmentation, the data increased and we could then train our network. We made two convolutional neural network models and we established a voting classifier: this

Fig. 1. Accuracy and loss plot for BD97 Places training.

made and helped us to obtain great results. For future references, in order to get a more general and better performing network for recognizing more places, we will need to collect more data and train the network with very fined-tuned parameters and look for an effective way to use the models that we would get.

References

1. Chollet, F., Deep Learning with Python / F. Chollet. — Manning Shelter Island, 2018. — 362p

2. Cornelisse D. - Apr 24: An intuitive guide to Convolutional Neural Networks 2018

3. Abdellatif Abdelfattah - 2017, Jul 28: Image Classification using Deep Neural Network – A beginner friendly approach using TensorFlow

UDC 004.85

SEEGAAI : DEEP REINFORCEMENT LEARNING IN SEEGA

C.C. Emezue[1], F.P.B. Dossou[2]

1 *chris.emezue@gmail.com*; Kazan Federal University
2 *femipancrace.dossou@gmail.com*; Kazan Federal University

This research paper introduces SeegaAI, a research project to develop a powerful artificial intelligence bot for the game of Seega using deep reinforcement learning. Researchers have long been working on embedding human-like behavior in computers: a field of research popularly called artificial intelligence (hereafter called AI). With the advent of personal, faster and more efficient computers in our present generation, it has become easy to create powerful AIs that can play (and beat humans) at various games like checkers, backgammon, chess, and Go[1]. As a result, several resources concerning the implementation of AI in these games- research papers, python libraries, game bots online, project codes, etc. – are available and easily accessible online. On the contrary, only few resources from African indigenous games (Ayo, Seega, Abula) can be found because little research has been made on them. These games are however unique because they involve a complex combination of strategy, psychology, and quick decision making. For example, playing Seega involves two stages: placing the players and moving the players, which both need strategy to win, unlike chess (which only requires strategy in moving the players as they have a fixed position) and Go (which involves only placing the player). It is for this complex gaming structure of Seega that we chose it for our AI project. We hope to achieve two things with this project:

successfully implement deep reinforcement learning in Seega and provide research materials for implementing machine learning in African indigenous board games.

Keywords: seega, reinforcement learning, artificial intelligence

Introduction

Seega is a board battle game played in Egypt, Ethiopia and especially in Somalia. It became popular in the 19th century. The aim of the game is to capture as many of the opponent's pieces as possible. The winner is the player with the most captured pieces. Seega is a game with complete and perfect information[3]. In November 2018, Seega was selected for the annual MIFY Artificial Intelligence contest[2]. This was the first (as far as we know) approach to designing a sophisticated AI for Seega

Previous research done and what makes SeegaAI unique

The contestants designed their AI using various methods: from coding of complex logical decision making processes, minimax, to implementing alpha-beta pruning and other advanced gaming optimization methods. All their AI algorithms had one common feature: the game decisions were hard-coded into the AI (through gaming optimization techniques and perhaps expert knowledge of the game of Seega). SeegaAI explores a different approach: where the AI learns, through trial and error, about the game: the strategy of the game, how to make winning moves. This approach, called Reinforcement learning (hereafter called RL), is akin to the way a child learns to walk in its environment, by trying many times, failing and learning from experience. Over the years, using reinforcement learning to train computers to play games has produced far better results. DeepMind's AlphaZero, which is considered unbeatable in chess, shogi and Go, taught itself to play these games from scratch through reinforcement learning. AlphaZero beat all the then powerful computer AIs in these games: it beat Elmo in a shogi match, Stockfish in a chess match and AlphaGo in a Go match. That is why we are exploring using reinforcement learning to teach SeegaAI to play Seega.

Work Objective and Process

Although computer programs have been trained to play Seega in the past, SeegaAI is the first ever attempt to implement deep reinforcement learning in Seega.
The stages involved in this project can be summarized as follows[4]:

Defining the environment: This involves encoding the game state: encoding the board for each move. This is a very important stage in implementing RL in any game, because the way you present the game environment (the game state and everything going on in the game) to the neural network will affect how it learns and performs. Seega is unique because it has two stages which are both strategic and paramount to winning the game: placing the players on the board and moving the players on the board. Numerous encoding strategies are possible, depending on the game and objective. We have explored a 9-layer encoding system of the form:

Table 1. Feature planes used in SeegaAI

Feature Name	No of planes	Description
Player color	3	Three feature planes indicating the player color - one each for the current player, the opponent and the empty points on the board
Player's turn	1	This one layer gets 1 if it's black player's turn and 0 if it's white's turn.
Step	1	One layer to encode the step of the game - 0 if step is zero and 1 if step is one
Number Can capture	1	This encodes the possible number of pieces that can be captured by the player
Number Captured	1	A one-layer encoding that computes the number of opponent's captured pieces for all possible moves
Legal move	1	If it's a legal move, that plane gets 1, and 0 otherwise.
isPiece	1	This checks if the particular point on the board has a player piece. 1 if True and 0 if False.

Then, we get a tensor of shape $(x, 5, 5, 9)$, where x is the number of game moves made in a game played from the beginning to the end. We are also working on another idea: recording all the moves made in the game by taking pictures of them. This method, although requiring much computation, could help SeegaAI get more information about the game, thereby improving its performance.

Choosing the action space The action space, X, is a set of all possible actions that can be made in the game. The model learns to take in an encoded board state and produce a probability space, P, for the different actions in the action space.

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ..., x_n\},$$
$$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, \dots p_n\}$$
where $\forall i,\ p_i$ is the probability of choosing the action x_i

In our first experiment, we developed two models for the action space, A, in a 5x5 board:

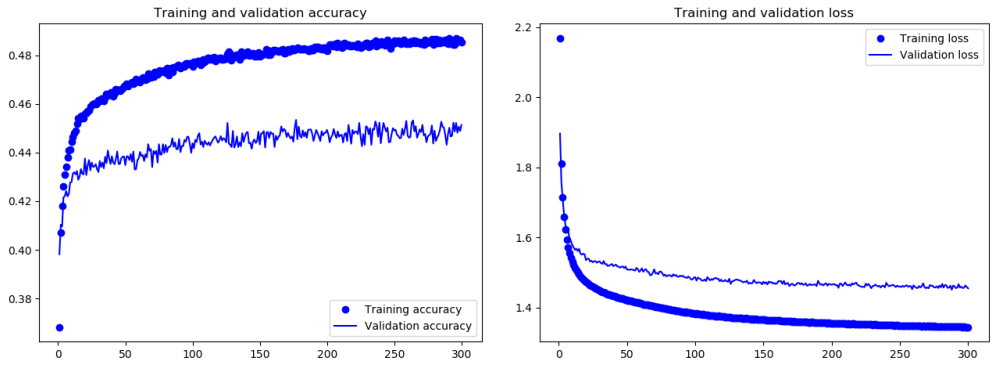
$A = bHt * bWh$
where bHt = height of the board,
bWh = width of the board
$len(A) = 25$

$A = (i, j) \cup (k, l, m, n)$
where (i, j) is the index of the board and
$\forall (k, l)$, (k, l, m, n) = all possible destinations for (k, l)
$len(A) = 105$

Choosing the policy and algorithm to train the model: A policy is a function to choose the action to take at each game state, from the action space and their probabilities. The RL model learns this function during training. There are different algorithms for training an RL model: from policy optimization methods, like policy gradient, $A2C / A3C$, PPO, $TRPO$, to Q-learning methods like DQN[5]. Deep Q-learning involves using deep learning methods in Q-learning algorithm. Due to the constraint on the number of pages for this paper, we cannot go on to discuss these learning algorithms in detail.
Choosing the right algorithm involves making extensive research on the mathematical modelling of the game of Seega: the strategies and psychology in winning or losing the game, how each learning algorithm influences SeegaAI's understanding of the game, as well as carrying out numerous experiments: training SeegaAI on the different algorithms and comparing the performance.

Conclusion and results of first experiment

As of writing this paper, SeegaAI is still being trained on thousands of gameplays. In the beginning, we created a database from about 80,000 gameplays of a random Seega-playing computer program. Then we trained a normal convolution neural network on this data with 300 epochs. Fig $1(a)$ and $1(b)$ show the training and loss accuracy respectively. This gave us an idea on what we need to improve SeegaAI, which we are currently working on. Such improvements include improving the board encoding, implementing RL algorithms to SeegaAI and training SeegaAI on millions of gameplay. Considering the intricacies involved



(a). Accuracy of training and validation data

(b). Loss of training and validation data

Fig. 1. Accuracy and loss plot for SeegaAI pre-training.

in developing SeegaAI, including our currently available computing power (the CPU/GPU power we have), we estimate that SeegaAI will be ready for launching on or before January, 2020.

References

1. Max Pumperia, Kevin Ferguson. Deep learning and the game of Go.

2. Seega: The MAIC 2018 Game: `https://maic.mify-ai.com/maic2018`

3. All about the game of Seega: `http://www.cyningstan.com/game/120/seega`

4. Sterling Osborne, Reinforcement Learning from Scratch: Designing and Solving a Task All Within a Python Notebook, December, 2018.

5. SmartLab AI Reinforcement Learning algorithms — an intuitive overview

УДК 004.93’12

РАСПОЗНАВАНИЕ ОБЪЕКТОВ НА ФОТОГРАФИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АРХИТЕКТУРЫ НЕЙРОННОЙ СЕТИ YOLO V3

А.А. Бердников[1], Н.М. Давлетшин[2]

1 *andreyberdnikov1998@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий

2 *davlet-9@ya.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий

Статья посвящена созданию системы обноружения объектов на фотографиях из социалной сети Вконтакте, для последуючего анализа содержимых объектов. Приведен разбор одной из передовой системы, обнаружения объектов в реальном времени - YOLO.

Ключевые слова: YOLO, нейронные сети, глубокое обучение, обнаружение объектов на фотографиях, распознавание объектов на фотографиях

Обнаружение объектов на фотографиях с помощью нейросетей находит свое применение в многочисленных проектах. Существуют различные методы для нахождения объектов на фотографиях, такие как: R-CNN, Fast-RCNN, Faster-RCNN, RetinaNet, SSD и YOLO.

Данные для обработки нейросетью получены со страниц пользователей социальной сети Вконтакте.

Для получения данных выполняется запрос к методу users.get API Вконтакте.

Пример запроса (студент Давлетшин Нагим):

```
r = requests.get("https://api.vk.com/method/users.get",
params={"user_ids": 444599814,"fields":"crop_photo",
"access_token": access_token,"v": 5.101})
```

В ответе на запрос приходит ссылка на фотографию:url:

$https://sun9-27.u...44c/-2GHYSn4kQ.jpg$

API ВКонтакте — это интерфейс, который позволяет получать информацию из базы данных vk.com с помощью http-запросов к специальному серверу.[5]

Основной целью исследования являлась разработка системы для анализа содержимого главной фотографии с личных страниц социальной сети ВКонтакте пользователей.

Глубокое обучение — Deep learning — это набор алгоритмов машинного обучения, которые моделируют высокоуровневые абстракции в данных, используя архитектуры, состоящие из множества нелинейных преобразований.[1]

YOLO - это алгоритм, который использует глубокие сверточные нейронные сети для обнаружения объектов.

Самое большое преимущество модели YOLO, отражено в названии — You Only Look Once. Эта модель накладывает на изображение сетку, разделяя его на ячейки. Каждая ячейка пытается предсказать координаты зоны обнаружения с оценкой уверенности для этих полей и вероятностью классов. Затем оценка уверенности для каждой зоны обнаружения умножается на вероятность класса, чтобы получить окончательную оценку. Пример работы модели YOLO проиллюстрирован на Рис.1.

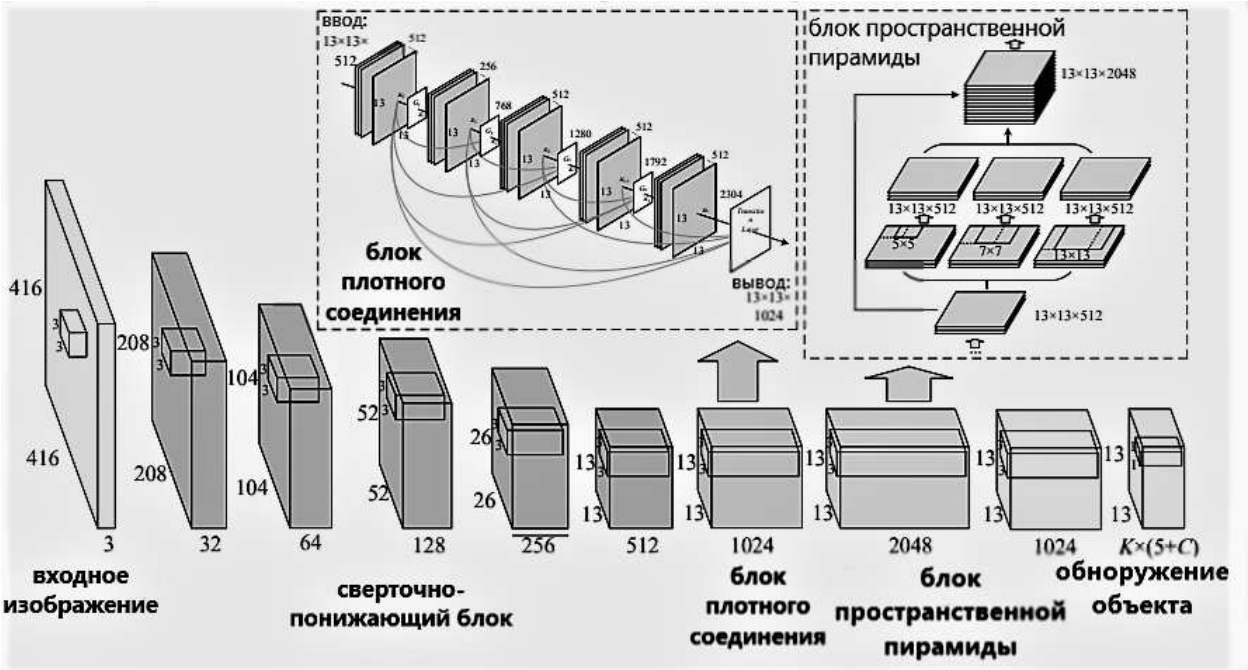


Рис. 1. Архитектура работы YOLO v3

В рамках данного исследования были использованы язык программирования Python 3.6 (библиотеки: numpy, time, cv2).

Решение поставленной задачи производилось по следующему алгоритму.

Для начала загружаются метки классов и устанавливаются случайные цвета для каждого.

Указываются пути к файлам весов и конфигурации YOLO с последующей загрузкой YOLO с диска.

Для загрузки YOLO, используется функция cv2.dnn.readNetFromDarknet (OpenCV) которая обязательно должна принимать параметры configPath и weightsPath:

Далее изображение загружается в нейросеть и извлекаются его размеры. Определяются имена выходных слоев из модели YOLO. Строится blob с картинки (функция cv2.dnn.blobFromImage) и выполняется прямой проход через сеть YOLO.

В дальнейшем проходясь по слоям изображения, выделяются объекты слоя и для каждого определяется его классовое название и вероятность. Если найденная вероятность объекта не меньше заданного минимума, то у данного объекта извлекаются начальные координаты x, y, а также ширина и высота. После применяется «подавление не максимума»(детектор границ Кэнни).

Полученные объекты на фотографии выделяются цветной (для каждого объекта изначально был задан свой цвет) прямоугольной рамкой. Также для дальнейшего анализа данные об объектах записывались в csv файл в виде: название файла, имя объекта и вероятность.

Пример найденных объектов после обработки изображения на YOLO приведен на Рис.2.

Рис. 2. Обнаруженные объекты на изображении

В заключении результата нашего исследования была достигнута основная цель — разработка системы для анализа содержимого главной фотографии с личных страниц социальной сети ВКонтакте пользователей.

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №19-18-00253, «Нейросетевая психометрическая модель когнитивно-поведенческих предикторов жизненной активности личности на базе социальных сетей»)

Литература

1. Франсуа Ш. *Глубокое обучение на Python* – СПб.: Питер, 2018. — 400 с.

2. Тархов Д. А. *Нейросетевые модели и алгоритмы. Справочник / Д.А. Тархов.* // М.: Радиотехника, 2014. - 6191 с.

3. Хайкин С. *Нейронные сети. Полный курс / Саймон Хайкин.* – М.: Вильямс, 2016. - 807 с.

4. Kosinski M. *Deep neural networks are more accurate than humans at detecting sexual orientation from facial images / M. Kosinski, Y. Wang* // Journal of Personality and Social Psychology, 2018. - №114(2). - Pp. 246-257.

5. Документация об использовании API ВКонтакте[Электронный ресурс] /Mail.ru Group// *Документация API ВКонтакте* URL: https://vk.com/dev/manuals.

RECOGNIZING OBJECTS IN A PHOTOGRAPH USING THE NEURAL NETWORK ARCHITECTURE YOLO V3

A.A. Berdnikov, N.M. Davletshin

The article is devoted to the creation of a system for detecting objects in photographs from the social network Vkontakte, for the subsequent analysis of the contents of objects. The analysis of one of the advanced systems, real-time object detection - YOLO.

Keywords: YOLO, neural networks, deep learning, detection of objects in photographs, recognition of objects in photographs

УДК 004.421

МЕТОДЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО СБОРА ИНФОРМАЦИИ ОБ АКТИВНОСТИ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ СОЦИАЛЬНОЙ СЕТИ ВКОНТАКТЕ

Н.М. Давлетшин[1], А.А. Бердников[2], П.Н. Устин[3]

1 *davlet-9@ya.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий

2 *andreyberdnikov1998@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий

3 *pavust@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт психологии и образования

Целью данной работы является исследование методов, позволяющих производить автоматизированный сбор данных об активности пользователей в социальной сети «ВКонтакте». На языке Python с использованием методов API VK разработаны высокопроизводительные алгоритмы, которые позволяют отслеживать время нахождения пользователя в социальной сети, а также алгоритмы, позволяющие получать информацию о "лайках проставленных пользователем на интересных страницах и страницах друзей.

Ключевые слова: ВКонтакте, социальная сеть, сбор данных, активность пользователей, API, запрос API, API ВКонтакте, прогностика, психометрия

На сегодняшний день в жизни современного человека социальные сети играют важную роль. При помощи социальных сетей миллионы людей общаются и делятся информацие по всему миру. Пользователи ежедневно пополняют свой профиль огромным количеством данных, которые отражают разнообразные аспекты их «виртуального Я», дают возможность как диагностировать их личностные особенности, так и прогнозировать вероятное поведение в реальной жизни. В связи с этим отмечается значительный интерес исследователей к проектам, посвященным проблеме предсказания поведения пользователей социальных сетей на основе психометрических данных, отраженных в их персональных профилях. Наиболее известными здесь выступают работы, выполненные в рамках проекта «Моя личность». Данный проект объединяет более 200 ученых со всего мира, которые занимаются проблемой психометрических показателей поведения личности в социальных сетях (прежде всего, «Фейсбук»). К настоящему времени ими уже выделены различные маркеры, которые позволяют прогнозировать поведение человека на основе его виртуальных следов в социальных сетях [2, 3].

Самой популярной социальной сетью в Росии является социальная сеть ВКонтакте. Этим онлайн сервисом пользуются не только в России, но и по всему миру. На данный момент количество пользователей Вконтакте составляет около 565 миллионов. Однако на сегодняшний день, несмотря на актуализацию российских исследовательских проектов, связанных с прогностическими возможностями социальной сети ВКонтакте (например, для проведения профориентационной работы образовательных учреждениях [1]), данная область в России остается малоизученной.

Основной целью представленной работы являлась разработка системы для автоматизированного сбора данных об активности пользователей в социальной сети «ВКонтакте» с использованием API VK. Данная система выступает одним из компонентов функциональной психометрической модели когнитивно - поведенческих предикторов жизненной активности личности в рамках ее образовательной деятельности. API ВКонтакте — это интерфейс, который позволяет получать информацию

из базы данных vk.com с помощью http-запросов к специальному серверу[5]. Для получения необходимой информации из социальной сети «ВКонтакте» не требуется знать как устроена база данных, из каких таблиц и полей каких типов она состоит, а достаточно знать и выполнять API-запросы. Синтаксис запросов и тип возвращаемых ими данных строго определены на стороне самого сервиса.

У API ВКонтакте имеется ряд ограничений, которые лимитируют возможности автоматизированного скачивания. Эти ограничения можно разделить на количественные и частотные. При обращении к методам API ВКонтакте можно выполнить не более 3 запросов в секунду.

В рамках данного исследования были использованы язык программирования Python 3.7 (библиотеки: requests, pypyodbc), а скачанные данные записывались в базу данных под управленим СУБД Microsoft SQL Server 2012.

В основе данного исследования использовалась база данных студентов КФУ, содержащая id их страниц Вконтакте. Решение задачи по сбору данных об активности пользователей выполнялось по двум алгоритмам:

1. Просмотр последнего посещения пользователя Вконтакте(статус онлайн);

2. Сбор лайков пользователя по интересным страницам и по страницам друзей.

Первый алгоритм отслеживал активность (присуствие в социальной сети) в течение недели. Из базы данных выбираются vk id студентов. Далее каждые 15 минут выполняется запрос к методу users.get, который возвращает расширенную информацию о пользователях в соответствии с заданными критериями. Возвращенный список содержит дополнительные поля профиля, которые были указаны в параметре fields. Пример запроса (студент Давлетшин Нагим):

```
r = requests.get('https://api.vk.com/method/users.get',
params={'user_ids': 444599814', 'fields':'last_seen',
'access_token': 'access_token','v': 5.102})
```

Ответ на запрос:

```
{"response": [{"id": 444599814,"first_name": "          ","last_name":
"                  ","is_closed": false,"can_access_closed": true,
"last_seen": {"time": 1572296628,"platform": 7}}]}
```

В ответе на запрос время последнего посещения приходит в формате Unix. Далее время конвертируется в фомат RFC для дальнейшего удобства работы и записывается в базу данных.

Сбор лайков производился следующим образом. Из базы данных выбираются vk id студентов и выполняется два запроса. Первый запрос для получения списка интересных страниц выполняется к методу users.getSubscriptions. Второй запрос для прохода по интересным страницам выполняется к методу wall.get. После получения ответа на запрос, проводится проверка на наличие лайка. Если пользователь лайкнул пост, то данные о посте с идентификатором пользователя записываются в базу данных для последующего анализа.

В результате нашего исследования была разработана автоматизированная система для сбора данных об активности впользователей социальной сети Вконтакте. Полученные данные в дальнейшем будут обработаны с помощью методов математической статистики для проведения психометрических исследований, и для выявления корреляций между активностью студентов в социальных сетях и их успеваемостью.

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №19-18-00253, «Нейросетевая психометрическая модель когнитивно-поведенческих предикторов жизненной активности личности на базе социальных сетей»)

Литература

1. Голодова А.А. *Социальные сети как инструмент профориентационной работы вуза на рынке образовательных услуг / А.А. Голодова* // Проблемы экономики и менеджмента. – 2014. – №3. – С. 31-34.

2. Kosinski M. *Facial Width-to-Height Ratio Does Not Predict Self-Reported Behavioral Tendencies / M. Kosinski* // Psychological Science. –2017. –№28(11). –Pp. 1682.

3. 6. Kosinski M. *Deep neural networks are more accurate than humans at detect-ing sexual orientation from facial images / M. Kosinski, Y. Wang //* Journal of Per-sonality and Social Psychology. –2018. –№114(2). – Pp. 257.

4. Kenneth R *Requests: HTTP for Humans™[Электронный ресурс] / Кеннет Рейц //* Запросы-это элегантная и простая библиотека HTTP для Python. –2019. –URL: https://requests.kennethreitz.org/en/master.

5. Документация об использовании API ВКонтакте[Электронный ресурс] /Mail.ru Group// *Документация API ВКонтакте* URL: https://vk.com/dev/manuals.

METHODS FOR AUTOMATICALLY COLLECTING INFORMATION ABOUT THE ACTIVITY OF USERS OF THE SOCIAL NETWORK VKONTAKTE

N.M. Davletshin, A.A. Berdnikov, P.N. Ustin

The aim of this work is to study the methods that allows automated data collection abount user activity on the VKontakte social network. By using Python and API VK methods we developed high-performance algorithms that allows to track the time spent by a user on a social network, as well as algorithms that allows to get information about likes posted by a user on interesting pages and friends' pages.

Keywords: VKontakte, social network, data collection, user activity, API, request API, API VKontakte, forecasting, psychometry

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЦЕНТРА ИМЕНИ Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО.

Т.58

«ЛОБАЧЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ - 2019»

Материалы XVIII Всероссийской молодежной школы-конференции

(Казань, 25 – 30 ноября 2019 г.)

Разработка авторского LaTeX-стиля оформления - *А.А. Агафонов*
Техническая редакция, набор и верстка: *Д.М. Хамматова, А.А. Агафонов, А.А. Попов*

Подписано в печать 20.11.2019
Бумага офсетная. Печать ризографическая.
Формат 60×84 1/16. Усл. печ. л. 11.
Тираж 150 экз. Заказ 246/11

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии Академии наук Республики Татарстан

420111, г. Казань, ул. Баумана, 20
e-mail: izdat.anrt@yandex.ru