Известия вузов. Математика
2019, №6, с. 48–57

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Л.Б. МИРОНОВА

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РИМАНА К ОДНОЙ СИСТЕМЕ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Аннотация. Для системы трех уравнений второго порядка доказаны существование и единственность решений задачи Коши и задачи с условиями на характеристиках и свободной поверхности, построены решения указанных задач в терминах матрицы Римана.

Ключевые слова: гиперболическая система, метод Римана, матрица Римана, задача Коши, характеристики.

УДК: 517.956

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-6-48-57

Введение. Система уравнений первого порядка

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x_1, \dots, x_n) u_k + f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

исследовалась многими авторами (например, [1]–[3] и литература при этих статьях). Система (1) представляет интерес, в частности, с точки зрения применения получаемых результатов к изучению важных в теоретическом и практическом отношении дифференциальных уравнений смешанного типа. Наибольшее число публикаций относится к случаю, когда в (1) $n = 2$.

В работе [4] предложен вариант метода Римана для системы дифференциальных уравнений с кратными характеристиками, в терминах матрицы Римана построены решения задач Коши и Гурса. В статье [5] метод Римана применяется для исследования задач для одной системы уравнений с двумя независимыми переменными с кратными характеристиками. Системы гиперболических дифференциальных уравнений в последнее время исследовались рядом авторов в различных направлениях [6]–[10].

В ряде работ В.И. Жегалова и его учеников был разработан метод Римана для класса уравнений с доминирующими частными производными

$$(D_1 + D_2)u = f(x_1, \dots, x_n), \tag{2}$$

где

$$D_1 \equiv \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}},$$

а D_2 — линейный дифференциальный оператор с переменными коэффициентами, содержащий лишь производные, получаемые из D_1 отбрасыванием по крайней мере одного дифференцирования [11]–[16]. Уравнение (2) имеет приложения в теориях фильтрации жидкости в

Поступила в редакцию 24.04.2018, после доработки 24.04.2018. Принята к публикации 26.09.2018

трещиноватых средах, поглощения влаги корнями растений, колебаний стержней с учетом эффектов поперечной инерции, распространения волн в диспергирующих средах.

Отметим также работы Р.К. Романовского, Е.В. Воробьевой, М.В. Мендзив, Ю.А. Медведева, в которых исследованы начально-краевые задачи и задачи оптимального управления для гиперболических систем (в том числе с использованием определенных В.К. Романовским матриц Римана), устойчивость и экспоненциальная дихотомия решений [17]–[21].

В данной статье метод Римана применяется для исследования задачи Коши и задачи с условиями на характеристической и свободной части границы (смешанная задача) для системы уравнений с тремя независимыми переменными

$$\begin{aligned} u_{xx} &= a_1(x,y,z)v_x + b_1(x,y,z)w_x + c_1(x,y,z)u + d_1(x,y,z)v + e_1(x,y,z)w + f_1(x,y,z),\\ v_{yy} &= a_2(x,y,z)u_y + b_2(x,y,z)w_y + c_2(x,y,z)u + d_2(x,y,z)v + e_2(x,y,z)w + f_2(x,y,z),\\ w_{zz} &= a_3(x,y,z)u_z + b_3(x,y,z)v_z + c_3(x,y,z)u + d_3(x,y,z)v + e_3(x,y,z)w + f_3(x,y,z). \end{aligned} \tag{3}$$

Считаем, что в замыкании рассматриваемой области D пространства (x,y,z) выполняются включения a_i, $b_i \in C^2$, c_i, d_i, e_i, $f_i \in C^1$, $i=\overline{1,n}$. Решение (3) класса u, v, $w \in C^1(D)$, u_{xx}, v_{yy}, $w_{zz} \in C(D)$ назовем регулярным в D.

К системе (3) подстановками

$$u^* = \exp\Big(\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} a_1^*(\alpha,y,z)\,d\alpha\Big)u, \quad v^* = \exp\Big(\frac{1}{2}\int_{y_0}^{y} b_2^*(x,\beta,z)\,d\beta\Big)v,$$

$$w^* = \exp\Big(\frac{1}{2}\int\limits_{z_0}^{z} c_3^*(x,y,\gamma)\,d\gamma\Big)w$$

сводится система со старшими производными вида

$$\begin{aligned} u_{xx}^* = a_1^*(x,y,z)u_x^* + b_1^*(x,y,z)v_x^* + c_1^*(x,y,z)w_x^* + d_1^*(x,y,z)u^* +\\ +e_1^*(x,y,z)v^* + f_1^*(x,y,z)w^* + g_1^*(x,y,z),\\ v_{yy}^* = a_2^*(x,y,z)u_y^* + b_2^*(x,y,z)v_y^* + c_2^*(x,y,z)w_y^* + d_2^*(x,y,z)u^* +\\ +e_2^*(x,y,z)v^* + f_2^*(x,y,z)w^* + g_2^*(x,y,z),\\ w_{zz}^* = a_3^*(x,y,z)u_z^* + b_3^*(x,y,z)v_z^* + c_3^*(x,y,z)w_z^* + d_3^*(x,y,z)u^* +\\ +e_3^*(x,y,z)v^* + f_3^*(x,y,z)w^* + g_3^*(x,y,z). \end{aligned}$$

1. Задача Коши. Пусть $S : z = \sigma(x,y)$ — поверхность класса C^2 в пространстве (x,y,z), причем S в каждой своей точке имеет касательную плоскость, не параллельную ни одной из координатных осей. Пусть для определенности $\sigma'_x < 0$, $\sigma'_y < 0$. Проведем через точку $P(x_0,y_0,z_0)$ плоскости $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$, которые пересекают поверхность S по кривым BC, CA и AB соответственно. Плоскости $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ и поверхность S определяют область D, граница которой состоит из двумерных многообразий APC, BCP, BPA и ACB. Ориентацию D считаем положительной.

Задача Коши: *найти регулярное в D решение системы* (3), *удовлетворяющее на поверхности S условиям*

$$\begin{aligned} u\big|_S = u_0(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial n}\big|_S = u_{10}(x,y), \quad v\big|_S = v_0(x,y),\\ \frac{\partial v}{\partial n}\big|_S = v_{10}(x,y), \quad w\big|_S = w_0(x,y), \quad \frac{\partial w}{\partial n}\big|_S = w_{10}(x,y). \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $\vec{n} = (n_1,n_2,n_3)$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S, u_0, v_0, $w_0 \in C^2$, u_{10}, v_{10}, $w_{10} \in C^1$.

Отметим, что поверхность S можно задать уравнениями $y=\sigma^*(x,z)$, $x=\sigma^{**}(y,z)$. Очевидно, условия (4) могут быть записаны в следующих формах:

$$\begin{gathered}
u\big|_S=u_0^*(x,z),\quad \frac{\partial u}{\partial n}\big|_S=u_{10}^*(x,z),\quad v\big|_S=v_0^*(x,z),\\
\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_S=v_{10}^*(x,z),\quad w\big|_S=w_0^*(x,z),\quad \frac{\partial w}{\partial n}\big|_S=w_{10}^*(x,z);
\end{gathered}\tag{5}$$

$$\begin{gathered}
u\big|_S=u_0^{**}(y,z),\quad \frac{\partial u}{\partial n}\big|_S=u_{10}^{**}(y,z),\quad v\big|_S=v_0^{**}(y,z),\\
\frac{\partial v}{\partial n}\big|_S=v_{10}^{**}(y,z),\quad w\big|_S=w_0^{**}(y,z),\quad \frac{\partial w}{\partial n}\big|_S=w_{10}^{**}(y,z).
\end{gathered}\tag{6}$$

Обозначим $w_1(x,y,\sigma(x,y))=\overline{w}_1(x,y)$, $v_1(x,\sigma^*(x,z),z)=\overline{v}_1^*(x,z)$, $u_1(\sigma^{**}(y,z),y,z)=\overline{u}_1^{**}(y,z)$.

Условия (4) (или эквивалентные им (5), (6)) позволяют определить значения частных производных первого порядка функций u, v, w на S. Действительно, например, для w имеем на поверхности S равенства

$$w_x+w_z\sigma_x=w_{0x},\quad w_y+w_z\sigma_y=w_{0y},\quad w_xn_1+w_yn_2+w_zn_3=w_{10}.\tag{7}$$

Определитель системы (7)

$$\begin{vmatrix}1&0&\sigma_x\\0&1&\sigma_y\\n_1&n_2&n_3\end{vmatrix}\neq 0,$$

так как первые две строки определителя образуют координаты векторов, касательных к S, а третья образована координатами $\vec{n}$. Поэтому величина $\overline{w}_1(x,y)$ известна в силу (4). Аналогично, будут известными величины $\overline{v}_1^*(x,z)$, $\overline{u}_1^{**}(y,z)$.

Докажем существование и единственность решения задачи Коши (3), (4). Преобразуем (3) к виду

$$\begin{aligned}
u_x&=u_1+a_1v+b_1w,\quad u_{1x}=c_1u+(d_1-a_{1x})v+(e_1-b_{1x})w+f_1,\\
v_y&=a_2u+v_1+b_2w,\quad v_{1y}=(c_2-a_{2y})u+d_2v+(e_2-b_{2y})w+f_2,\\
w_z&=a_3u+b_3v+w_1,\quad w_{1z}=(c_3-a_{3z})u+(d_3-b_{3z})v+e_3w+f_3.
\end{aligned}\tag{8}$$

Обозначим $d_{10}=d_1-a_{1x}$, $e_{10}=e_1-b_{1x}$, $c_{20}=c_2-a_{2y}$, $e_{20}=e_2-b_{2y}$, $c_{30}=c_3-a_{3z}$, $d_{30}=d_3-b_{3z}$. Сведем систему (8) с учетом условий (4)–(6) к системе интегральных уравнений

$$u(x,y,z)=u_0^{**}(y,z)+\int\limits_{\sigma^{**}(y,z)}^{x}(u_1+a_1v+b_1w)(\alpha,y,z)d\alpha,$$

$$u_1(x,y,z)=\overline{u}_1^{**}(y,z)+\int\limits_{\sigma^{**}(y,z)}^{x}(c_1u+d_{10}v+e_{10}w+f_1)(\alpha,y,z)d\alpha,$$

$$v(x,y,z)=v_0^{*}(x,z)+\int\limits_{\sigma^{*}(x,z)}^{y}(v_1+a_2u+b_2w)(x,\beta,z)d\beta,$$

$$v_1(x,y,z) = \overline{v}_1^*(x,z) + \int\limits_{\sigma^*(x,z)}^{y} (c_{20}u + d_2v + e_{20}w + f_2)(x,\beta,z)d\beta,$$

$$w(x,y,z) = w_0(x,y) + \int\limits_{\sigma(x,y)}^{z} (w_1 + a_3u + b_3v)(x,y,\gamma)d\gamma, \tag{9}$$

$$w_1(x,y,z) = \overline{w}_1(x,y) + \int\limits_{\sigma(x,y)}^{z} (c_{30}u + d_{30}v + e_3w + f_3)(x,y,\gamma)d\gamma.$$

Решение системы интегральных уравнений Вольтерра (9) существует и единственно в классе непрерывных функций.

Докажем эквивалентность задачи Коши (3), (4) и системы (9). Очевидно, система (9) — следствие (3), (4). Обратно, дифференцируя первое уравнение системы (9), получаем $u_x = u_1$. Кроме того, $u|_S = u_0^{**}(y,z)$, что эквивалентно выполнению условия $u|_S = u_0(x,y)$. Дифференцируем теперь второе уравнение системы (9) по x, в результате получаем первое уравнение (3). При этом $u_1|_S = \overline{u}_1^{**}(y,z)$. Аналогично получаем оставшиеся два уравнения системы (3) и граничные условия $v|_S = v_0^*(x,z)$, $w|_S = w_0(x,y)$, $v_1|_S = \overline{v}_1^*(x,z)$, $w_1|_S = \overline{w}_1(x,y)$. По известным значениям $u_1|_S$, $v|_S$, $w|_S$ определяется $u_x|_S$. На S справедливы соотношения

$$u_y + u_x\sigma_y^{**} = u_{0y}^{**}, \quad u_z + u_x\sigma_z^{**} = u_{0z}^{**}, \quad u_xn_1 + u_yn_2 + u_zn_3 = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S,$$

из которых по известным $u|_S$, $u_x|_S$ определяются u_y, u_z на S, а следовательно, и

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = u_{10}.$$

Аналогично получаем предписанные (4) значения $\partial v/\partial n|_S$, $\partial w/\partial n|_S$. Эквивалентность задачи Коши и системы (9) доказана.

Теорема 1. *Если в замыкании области D выполняются включения a_i, $b_i \in C^2$, c_i, d_i, e_i, $f_i \in C^1$, $i = \overline{1,3}$, то решение задачи Коши* (3), (4) *существует и единственно.*

2. Смешанная задача. Пусть область $D_0 = \{x_0 < x < x_1,\ y_0 < y < y_1,\ z_0 < z < z_1\}$ представляет собой характеристический параллелепипед в пространстве (x,y,z) с отсеченным нехарактеристической поверхностью S: $z = \sigma(x,y)$ класса C^2 трехгранным углом с вершиной в точке (x_0,y_0,z_0) (рис. 1). Для определенности полагаем $x_0 \geqslant 0$, $y_0 \geqslant 0$, $z_0 \geqslant 0$, $\sigma'_x < 0$, $\sigma'_y < 0$. Обозначим через X, Y, Z грани D_0 при $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ соответственно.

Требуется найти регулярное в D_0 решение (3), удовлетворяющее условиям

$$\begin{gathered} u|_{S\cup\overline{X}} = u_0(y,z), \quad v|_{S\cup\overline{Y}} = v_0(x,z), \quad w|_{S\cup\overline{Z}} = w_0(x,y), \\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = u_{10}(y,z), \quad \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_S = v_{10}(x,z), \quad \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_S = w_{10}(x,y), \\ (u_x - a_1v - b_1w)|_{\overline{X}} = \varphi_1(y,z), \quad (v_y - a_2u - b_2w)|_{\overline{Y}} = \varphi_2(x,z), \\ (w_z - a_3u - b_3v)|_{\overline{Z}} = \varphi_3(x,y), \end{gathered} \tag{10}$$

$\vec{n}$ — внешняя нормаль к S, $u_0 \in C^1(S\cup\overline{X})$, $u_{10} \in C^2(S\cup\overline{X})$, $\varphi_1 \in C^1(\overline{X})$, $v_0 \in C^1(S\cup\overline{Y})$, $v_{10} \in C^2(S\cup\overline{Y})$, $\varphi_2 \in C^1(\overline{Y})$, $w_0 \in C^1(S\cup\overline{Z})$, $w_{10} \in C^2(S\cup\overline{Z})$, $\varphi_3 \in C^1(\overline{Z})$. Кроме того, должны выполняться условия согласования $u_x \in C(S\cup\overline{X})$, $v_y \in C(S\cup\overline{Y})$, $w_z \in C(S\cup\overline{Z})$.

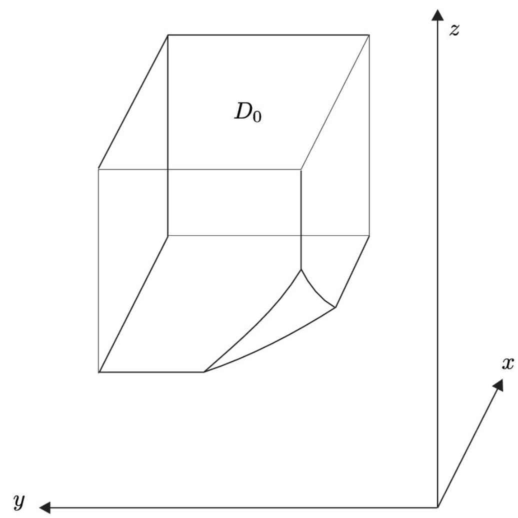

Рис. 1.

Пусть многообразия $S \cup \overline{X}$, $S \cup \overline{Y}$, $S \cup \overline{Z}$ имеют соответственно уравнения $x = \sigma_1(y,z)$, $y = \sigma_2(x,z)$, $z = \sigma_3(x,y)$. Обозначим

$$\chi_1(y,z) = \begin{cases} \varphi_1(y,z) \text{ на } \overline{X}; \\ (u_x - a_1 v - b_1 w)(\sigma_1(y,z), y, z) \text{ на } S, \end{cases}$$

$$\chi_2(x,z) = \begin{cases} \varphi_2(x,z) \text{ на } \overline{Y}; \\ (v_y - a_2 u - b_2 w)(x, \sigma_2(x,z), z) \text{ на } S, \end{cases}$$

$$\chi_3(x,y) = \begin{cases} \varphi_3(x,y) \text{ на } \overline{Z}; \\ (w_z - a_3 u - b_3 v)(x, y, \sigma_3(x,y)) \text{ на } S. \end{cases}$$

Докажем существование и единственность решения смешанной задачи (3), (10). Сведем систему (8) с условиями (10) к системе интегральных уравнений

$$u(x,y,z) = u_0(y,z) + \int\limits_{\sigma_1(y,z)}^{x} (u_1 + a_1 v + b_1 w)(\alpha, y, z) d\alpha,$$

$$u_1(x,y,z) = \chi_1(y,z) + \int\limits_{\sigma_1(y,z)}^{x} (c_1 u + d_{10} v + e_{10} w + f_1)(\alpha, y, z) d\alpha,$$

$$v(x,y,z) = v_0(x,z) + \int\limits_{\sigma_2(x,z)}^{y} (v_1 + a_2 u + b_2 w)(x, \beta, z) d\beta,$$

$$v_1(x,y,z) = \chi_2(x,z) + \int\limits_{\sigma_2(x,z)}^{y} (c_{20} u + d_2 v + e_{20} w + f_2)(x, \beta, z) d\beta,$$

$$
\begin{aligned}
w(x,y,z) &= w_0(x,y) + \int\limits_{\sigma_3(x,y)}^{z} (w_1 + a_3 u + b_3 v)(x,y,\gamma)d\gamma,\\
w_1(x,y,z) &= \chi_3(x,y) + \int\limits_{\sigma_3(x,y)}^{z} (c_{30}u + d_{30}v + e_3 w + f_3)(x,y,\gamma)d\gamma.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Решение системы (11) существует и единственно в классе непрерывных функций. Эквивалентность смешанной задачи и системы (11) доказывается так же, как и в случае задачи Коши.

Теорема 2. *Если в замыкании области D_0 выполняются включения a_i, $b_i \in C^2$, c_i, d_i, e_i, $f_i \in C^1$, $i = \overline{1,3}$, то решение смешанной задачи* (3), (10) *существует и единственно.*

3. Построение решений задач в терминах матрицы Римана. Перейдем к выводу формул для решений задачи Коши и смешанной задачи в терминах матрицы Римана. Перепишем (8) в векторно-матричной форме

$$
\begin{gathered}
L(\mathbf{U}) = \mathbf{F}, \quad L(\mathbf{U}) \equiv \mathbf{A}_1\mathbf{U}_x + \mathbf{A}_2\mathbf{U}_y + \mathbf{A}_3\mathbf{U}_z - \mathbf{B}\mathbf{U},\\
\mathbf{U} = \operatorname{colon}(u, u_1, v, v_1, w, w_1),
\end{gathered} \tag{12}
$$

$$
\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad
\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix},
$$

$$
\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \quad
\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0&1&a_1&0&b_1&0\\ c_1&0&d_{10}&0&e_{10}&0\\ a_2&0&0&1&b_2&0\\ c_{20}&0&d_2&0&e_{20}&0\\ a_3&0&b_3&0&0&1\\ c_{30}&0&d_{30}&0&e_3&0 \end{pmatrix},
$$

$$
\mathbf{F} = \operatorname{colon}(0, f_1, 0, f_2, 0, f_3).
$$

Введем матрицу Римана $\mathbf{R} = \operatorname{colon}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4, \mathbf{R}_5, \mathbf{R}_6)$, где $\mathbf{R}_i(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = (r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}, r_{i4}, r_{i5}, r_{i6})$, $i = \overline{1,6}$, являются решениями систем

$$
r_{i1}(x,y,z) = \delta_{i1} - \int\limits_{\xi}^{x} (c_1 r_{i2} + a_2 r_{i3} + c_{20} r_{i4} + a_3 r_{i5} + c_{30} r_{i6})(\alpha,y,z)d\alpha,
$$

$$
r_{i2}(x,y,z) = \delta_{i2} - \int\limits_{\xi}^{x} r_{i1}(\alpha,y,z)d\alpha,
$$

$$
r_{i3}(x,y,z) = \delta_{i3} - \int\limits_{\eta}^{y} (a_1 r_{i1} + d_{10} r_{i2} + d_2 r_{i4} + b_3 r_{i5} + d_{30} r_{i6})(x,\beta,z)d\beta,
$$

$$r_{i4}(x,y,z)=\delta_{i4}-\int\limits_{\eta}^{y} r_{i3}(x,\beta,z)d\beta,$$

$$r_{i5}(x,y,z)=\delta_{i5}-\int\limits_{\zeta}^{z}(b_1r_{i1}+e_{10}r_{i2}+b_2r_{i3}+e_{20}r_{i4}+e_3r_{i6})(x,y,\gamma)d\gamma, \quad (13)$$

$$r_{i6}(x,y,z)=\delta_{i6}-\int\limits_{\zeta}^{z} r_{i5}(x,y,\gamma)d\gamma,$$

δ_{ij} — символ Кронекера. Решения систем (13) при каждом i существуют и единственны в классе непрерывных функций. По первой тройке аргументов (x,y,z) матрица $\mathbf{R}$ удовлетворяет сопряженной к (12) системе $L^*(\mathbf{V})=0,\quad L^*(\mathbf{V})\equiv-(\mathbf{VA}_1)_x-(\mathbf{VA}_2)_y-(\mathbf{VA}_3)_z-\mathbf{VB}$.

Справедливо тождество

$$\mathbf{R}L(\mathbf{U})=(\mathbf{RA}_1\mathbf{U})_x+(\mathbf{RA}_2\mathbf{U})_y+(\mathbf{RA}_3\mathbf{U})_z, \quad (14)$$

которое может быть проверено непосредственно. Интегрированием (14) получим решения задачи Коши и смешанной задачи.

Построим решение задачи Коши. Рассмотрим точку $M(\xi,\eta,\zeta)\in D$. Пусть для определенности $\xi>0$, $\eta>0$, $\zeta>0$, $\sigma_x(x,y)<0$, $\sigma_y(x,y)<0$. Проведем через M плоскости $x=\xi$, $y=\eta$, $z=\zeta$, пересекающие поверхность S по кривым B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1 соответственно. Плоскости $x=\xi$, $y=\eta$, $z=\zeta$ и поверхность S определяют область $D_1\subset D$, граница которой состоит из двумерных многообразий A_1MC_1, B_1C_1M, B_1MA_1 и $A_1C_1B_1$.

Первая строка (14) дает

$$r_{12}f_1+r_{14}f_2+r_{16}f_3=(r_{11}u+r_{12}u_1)_x+(r_{13}v+r_{14}v_1)_y+(r_{15}w+r_{16}w_1)_z, \quad (15)$$

где $r_{1j}=r_{1j}(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$, остальные функции зависят от (x,y,z). В силу (13)

$$r_{11}(\xi,\beta,\gamma,\xi,\eta,\zeta)\equiv1,\quad r_{12}(\xi,\beta,\gamma,\xi,\eta,\zeta)=r_{13}(\alpha,\eta,\gamma,\xi,\eta,\zeta)=$$
$$=r_{14}(\alpha,\eta,\gamma,\xi,\eta,\zeta)=r_{15}(\alpha,\beta,\zeta,\xi,\eta,\zeta)=r_{16}(\alpha,\beta,\zeta,\xi,\eta,\zeta)\equiv0. \quad (16)$$

Интегрируем (15) по области D_1

$$\iint_{MB_1C_1}(r_{11}u+r_{12}u_1)(\xi,\beta,\gamma,\xi,\eta,\zeta)d\beta\wedge d\gamma+\iint_{C_1A_1M}(r_{13}v+r_{14}v_1)(\alpha,\eta,\gamma,\xi,\eta,\zeta)d\gamma\wedge d\alpha+$$
$$+\iint_{MA_1B_1}(r_{15}w+r_{16}w_1)(\alpha,\beta,\zeta,\xi,\eta,\zeta)d\alpha\wedge d\beta+\iint_{B_1A_1C_1}(r_{11}u+r_{12}u_1)(x,\beta,\gamma,\xi,\eta,\zeta)d\beta\wedge d\gamma+$$
$$+(r_{13}v+r_{14}v_1)(\alpha,y,\gamma,\xi,\eta,\zeta)d\gamma\wedge d\alpha+(r_{15}w+r_{16}w_1)(\alpha,\beta,z,\xi,\eta,\zeta)d\alpha\wedge d\beta=$$
$$=\iiint_{D_1}(r_{12}f_1+r_{14}f_2+r_{16}f_3)(\alpha,\beta,\gamma,\xi,\eta,\zeta)d\alpha\,d\beta\,d\gamma.$$

С учетом (16) получаем

$$\iint_{MB_1C_1}u(\xi,\beta,\gamma)d\beta\wedge d\gamma=h_1(\xi,\eta,\zeta), \quad (17)$$

$h_1(\xi,\eta,\zeta)$ выражается через $\mathbf{R}$ и данные Коши (4). Дифференцирование (17) в рассматриваемом случае дает

$$u(\xi,\eta,\zeta)=\frac{\partial^2h_1(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\eta\partial\zeta}. \quad (18)$$

Аналогично, используя третью и пятую строки (14), получаем выражения для $v(\xi,\eta,\zeta)$ и $w(\xi,\eta,\zeta)$:

$$v(\xi,\eta,\zeta)=\frac{\partial^2 h_2(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi\partial\zeta},\quad w(\xi,\eta,\zeta)=\frac{\partial^2 h_3(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi\partial\eta}. \tag{19}$$

При этом надо в (18) заменить r_{1j} на r_{3j} и r_{5j} соответственно. Используя вторую, четвертую и шестую строки (14) можно определить u_1, v_1, w_1.

Заметим, что значения $u|_S$, $u_1|_S$, $v|_S$, $v_1|_S$, $w|_S$, $w_1|_S$, требуемые для получения $u(\xi,\eta,\zeta)$, $v(\xi,\eta,\zeta)$, $w(\xi,\eta,\zeta)$ по формулам (18), (19), определяются из (4). Обратно, функции u, v, w, определяемые по (18), (19), и, определяемые из аналогичных формул, функции u_1, v_1, w_1 удовлетворяют на S условиям

$$\begin{gathered}u|_S=u_0(x,y),\quad v|_S=v_0(x,y),\quad w|_S=w_0(x,y),\\ u_1|_S=u_x(x,y,\sigma(x,y))-a_1(x,y,\sigma(x,y))v_0(x,y)-b_1(x,y,\sigma(x,y))w_0(x,y),\\ v_1|_S=v_y(x,y,\sigma(x,y))-a_2(x,y,\sigma(x,y))u_0(x,y)-b_2(x,y,\sigma(x,y))w_0(x,y),\\ w_1|_S=w_z(x,y,\sigma(x,y))-a_3(x,y,\sigma(x,y))u_0(x,y)-b_3(x,y,\sigma(x,y))v_0(x,y).\end{gathered} \tag{20}$$

Чтобы доказать, что найденные функции u, v, w удовлетворяют (4), осталось показать, что по (20) могут быть восстановлены значения $\partial u/\partial n|_S$, $\partial v/\partial n|_S$, $\partial w/\partial n|_S$. Знание $v|_S$, $w|_S$ и $u_1|_S$ позволяет определить из (20) $u_x(x,y,\sigma(x,y))$. На S справедливы соотношения

$$u_x+u_z\sigma_x=u_{0x},\qquad u_y+u_z\sigma_y=u_{0y},\qquad u_xn_1+u_yn_2+u_zn_3=\frac{\partial u}{\partial n}. \tag{21}$$

Первые два уравнения (21) позволяют выразить u_y и u_z на S через u_{0x},u_{0y} и $u_x(x,y,\sigma(x,y))=u_x|_S$, а третье может восстановить значение $\partial u/\partial n|_S=u_{10}(x,y)$. Аналогично рассуждаем и относительно функций v и w.

Таким образом, формулы (18), (19) действительно определяют решение задачи Коши.

Перейдем к построению решения смешанной задачи. Рассмотрим точку $M(\xi,\eta,\zeta)\in D_0$. Проведем через M плоскости $x=\xi$, $y=\eta$, $z=\zeta$. Эти плоскости определяют область $D_1\subset D$, граница которой состоит из двумерных многообразий $S=ABC$, $AEPFB\subset\overline{X}$, $ACGQE\subset\overline{Y}$, $CBFTG\subset\overline{Z}$, $GTMQ\subset\{(x,y,z)|x=\xi\}$, $PMTF\subset\{(x,y,z)|y=\eta\}$, $EQMP\subset\{(x,y,z)|z=\zeta\}$.

Интегрируем (15) по области D_1

$$\begin{gathered}\iint_{GTMQ}(r_{11}u+r_{12}u_1)(\xi,\beta,\gamma,\xi,\eta,\zeta)d\beta\wedge d\gamma+\iint_{TFPM}(r_{13}v+r_{14}v_1)(\alpha,\eta,\gamma,\xi,\eta,\zeta)d\gamma\wedge d\alpha+\\ +\iint_{EQMP}(r_{15}w+r_{16}w_1)(\alpha,\beta,\zeta,\xi,\eta,\zeta)d\alpha\wedge d\beta+\iint_{AEPFB}(r_{11}u+r_{12}u_1)(x,\beta,\gamma,\xi,\eta,\zeta)d\beta\wedge d\gamma+\\ +\iint_{ACGQE}(r_{13}v+r_{14}v_1)(\alpha,y,\gamma,\xi,\eta,\zeta)d\gamma\wedge d\alpha+\iint_{BFTGC}(r_{15}w+r_{16}w_1)(\alpha,\beta,z,\xi,\eta,\zeta)d\alpha\wedge d\beta+\\ +\iint_{ABC}(r_{11}u+r_{12}u_1)(x,\beta,\gamma,\xi,\eta,\zeta)d\beta\wedge d\gamma+(r_{13}v+r_{14}v_1)(\alpha,y,\gamma,\xi,\eta,\zeta)d\gamma\wedge d\alpha+\\ +(r_{15}w+r_{16}w_1)(\alpha,\beta,z,\xi,\eta,\zeta)d\alpha\wedge d\beta=\iiint_{D_1}(r_{12}f_1+r_{14}f_2+r_{16}f_3)(\alpha,\beta,\gamma,\xi,\eta,\zeta)d\alpha\,d\beta\,d\gamma.\end{gathered}$$

С учетом (16) получаем

$$\iint_{GTMQ}u(\xi,\beta,\gamma)d\beta\wedge d\gamma=p_1(\xi,\eta,\zeta), \tag{22}$$

где $p_1(\xi,\eta,\zeta)$ выражается через $\mathbf{R}$ и граничные условия (10). Очевидно,

$$\iint_{GTMQ} u(\xi,\beta,\gamma)d\beta\wedge d\gamma = \int\limits_{y_0}^{\eta}\int\limits_{z_0}^{\zeta} u(\xi,\beta,\gamma)d\gamma d\beta.$$

Дифференцирование (22) дает

$$u(\xi,\eta,\zeta) = \frac{\partial^2 p_1(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\eta\partial\zeta}. \tag{23}$$

Аналогично, используя третью и пятую строки (14), получаем

$$v(\xi,\eta,\zeta) = \frac{\partial^2 p_2(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi\partial\zeta}, \quad w(\xi,\eta,\zeta) = \frac{\partial^2 p_3(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi\partial\eta}. \tag{24}$$

При этом в (18) r_{1j} заменяются на r_{3j} и r_{5j} соответственно. То, что формулы (23)–(24) дают решение смешанной задачи, проверяется точно так же, как и в случае задачи Коши.

Литература

[1] Бицадзе А.В. *О структурных свойствах решений гиперболических систем уравнений с частными производными*, Матем. моделирование **6** (6), 22–31 (1994).

[2] Чекмарев Т.В. *Формулы решения задачи Гурса для одной линейной системы уравнений с частными производными*, Дифференц. уравнения **18** (9), 1614–1622 (1982).

[3] Плещинская И.Е. *Об эквивалентности некоторых классов эллиптических и гиперболических систем первого порядка и уравнений второго порядка с частными производными*, Дифференц. уравнения **23** (9), 1634–1637 (1987).

[4] Миронова Л.Б. *О методе Римана в R^n для одной системы с кратными характеристиками*, Изв. вузов. Матем., №1, 34–39 (2006).

[5] Жегалов В.И., Миронова Л.Б. *Об одной системе уравнений с двукратными старшими частными производными*, Изв. вузов. Матем., №3, 12–21 (2007).

[6] Жегалов В.И. *Задача с нормальными производными в граничных условиях для системы дифференциальных уравнений*, Изв. вузов. Матем., №8, 70–72 (2008).

[7] Воронова Ю.Г. *О задаче Коши для линейных гиперболических систем уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа*, Уфимский матем. журн. **2** (2), 20–26 (2010).

[8] Жибер А.В., Костригина О.С. *Задача Гурса для нелинейных гиперболических систем уравнений с интегралами первого и второго порядка*, Уфимский матем. журн. **3** (3), 67–79 (2011).

[9] Созонтова Е.А. *О характеристических задачах с нормальными производными для системы гиперболического типа*, Изв. вузов. Матем., №10, 43–54 (2013).

[10] Андреев А.А., Яковлева Ю.О. *Задача Коши для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа порядка n с некратными характеристиками*, Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки **21** (4), 752–759 (2017).

[11] Жегалов В.И. *Трехмерный аналог задачи Гурса*, Неклассические задачи и уравнения смешанного типа, Новосибирск, 94–98 (1990).

[12] Жегалов В.И., Севастьянов В.А. *Задача Гурса в четырехмерном пространстве*, Дифференц. уравнения **32** (10), 1429–1430 (1996).

[13] Жегалов В.И. *О трехмерной функции Римана*, Сиб. матем. журн. **38** (5), 1074–1079 (1997).

[14] Миронов А.Н. *О построении функции Римана для одного уравнения четвертого порядка*, Дифференц. уравнения **37** (12), 1698–1701 (2001).

[15] Уткина Е.А. *К общему случаю задачи Гурса*, Изв. вузов. Матем., №8, 57–62 (2005).

[16] Миронов А.Н. *Метод Римана для уравнений со старшей частной производной в R^n*, Сиб. матем. журн. **47** (3), 584–594 (2006).

[17] Романовский Р.К. *О матрицах Римана первого и второго рода*, Матем. сб. **127** (4), 494–501 (1985).

[18] Романовский Р.К. *Экспоненциально расщепляемые гиперболические системы с двумя независимыми переменными*, Матем. сб. **133** (3), 341–355 (1987).

[19] Воробьева Е.В., Романовский Р.К. *Метод характеристик для гиперболических краевых задач на плоскости*, Сиб. матем. журн. **41** (3), 531–540 (2000).

[20] Романовский Р.К., Мендзив М.В. *Устойчивость решений задачи Коши для гиперболической системы на плоскости с периодическими по времени коэффициентами*, Сиб. матем. журн. **48** (5), 1134–1141 (2007).

[21] Романовский Р.К., Медведев Ю.А. *Оптимальное двустороннее граничное управление теплопереносом в стержне. Гиперболическая модель*, Изв. вузов. Матем., № 6, 54–60 (2016).

Любовь Борисовна Миронова

Елабужский институт (филиал) Казанского федерального университета,
ул. Казанская, д. 89, г. Елабуга, 423604, Россия,

e-mail: lbmironova@yandex.ru

L.B. Mironova

Application of Riemann method to one system in three-dimensional space

Abstract. For a system of three equations of the second order we prove existence and uniqueness of solutions to the Cauchy problem and to problem with conditions on characteristics and a free surface. We construct solutions to these problems in terms of the Riemann matrix.

Keywords: hyperbolic system, Riemann method, Cauchy problem, characteristics.

Lyubov' Borisovna Mironova

Elabuga Institute of Kazan Federal University,
89 Kazanskaya str., Elabuga, 423600 Russia,

e-mail: lbmironova@yandex.ru