5 класс

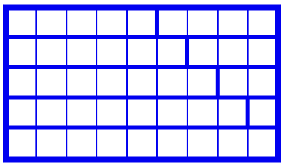
1. Две лестницы имеют одинаковую высоту, но разное число ступеней: у первой — 20 ступеней, у второй — 30 ступеней. У каждой лестницы ступеньки одинаковой высоты, но у первой лестницы каждая ступенька на 5 *см* выше каждой ступеньки второй лестницы. Найдите высоту лестниц.

Ответ: 3 *метра*.
Решение. 20 ступенек первой лестницы выше 20 ступенек второй на $20 \cdot 5 = 100$ *см*. Поскольку высота лестниц одна и та же, остальные 10 ступенек второй лестницы должны иметь высоту 100 *см*, и значит, высота каждой ступеньки второй лестницы $100 : 10 = 10$ *см*. Отсюда высота лестниц $30 \cdot 10 = 300$ *см*.
Критерии. Только ответ — 0 баллов.

2. В записи $4 * 5 * 6 * 7 * 34 * 35 * 36 * 37$ на месте каждой звездочки поставили знак + или – (по своему усмотрению) и подсчитали результат. Какое *наименьшее* натуральное число могло получиться в результате вычисления?

Ответ: 2.
Решение. Искомая сумма состоит из 4-х нечётных чисел 5, 7, 35, 37 и 4-х чётных. Поскольку сумма или разность *двух* нечётных чисел всегда чётна, при любой расстановке знаков у 4-х нечётных слагаемых получится чётная сумма. Таким образом, сумма S всех 8 чисел всегда будет чётной, и значит, не может быть равна 1, поэтому $S \geq 2$. Значение $S = 2$ получается, например, так: $(4 - 5 - 6 + 7) - 34 + 35 - 36 + 37 = 2$.
Критерии. Ответ без объяснений и примера — 0 баллов, только пример — 3 балла.

3. Можно ли разрезать клетчатый прямоугольник 5×9 по клеточкам на 9 прямоугольников *различной* площади? В ответе укажите все возможные значения этих площадей.



Ответ: *можно* (*см. рисунок*).
Решение. В прямоугольнике $5 \times 9 = 45$ клеток. Сумма 9 различных *наименьших* чисел $1 + 2 + 3 + \ldots + 9$ равна 45, поэтому разрезать можно только на прямоугольники с такими площадями.
Критерии. Ответ без объяснений и примера — 0 баллов, только пример — 4 балла.

4. Вася записал трёхзначное число. Петя прибавил к первой слева цифре этого числа 2, ко второй цифре — 3, к третьей — 4, а затем перемножил полученные суммы. У Пети получилось число 273. Какое число могло быть записано Васей? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 149 *или* 509.
Решение. Разложим 273 в произведение простых чисел: $273 = 3 \cdot 7 \cdot 13$. Наибольший сомножитель 13 можно получить только из 9 после операция добавления 4, значит, цифра единиц числа Васи равна 9. Сомножитель 3 можно получить только в двух случаях: $1 + 2$ или $0 + 3$. И значит, у Васи было число 149 или 509.
Критерии. За каждый правильный ответ без объяснений — 2 балла. Доказано, что последняя цифра только 9 — ещё 1 балл. Полное объяснение с упущенным вариантом — 5 баллов.

5. У Миши есть 16 гирек с массами 1, 2, 3, … , 16, и он хочет разложить их на несколько кучек разной массы так, чтобы выполнялось условие: чем тяжелее кучка, тем меньше в ней гирь. Сможет ли Миша разложить все гирьки *а*) на 3 кучки? *б*) на 4 кучки?

Ответ: *а) сможет*; *б) не сможет*.

Решение. *а*) Это можно сделать, например, так. Составим первую кучку из 7 гирек с общей массой $1 + 2 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 = 37$, вторую кучку — из 5 гирек с общей массой $3 + 10 + 11 + 12 + 13 = 49$, и, наконец, третью кучку — из 4 гирь с общей массой $5 + 14 + 15 + 16 = 50$.

б) Предположим, что можно разложить гирьки требуемым образом. Общая масса всех гирек равна $1 + 2 + \ldots + 16 = 136$. Значит, масса самой тяжёлой кучки будет не меньше $136 : 4 = 34$. Масса двух самых тяжёлых гирек $15 + 16 < 34$, поэтому в тяжёлой кучке не меньше трёх гирек. Тогда в следующей, более лёгкой, кучке не меньше 4 гирек, в следующей — не меньше 5 гирек, и так далее. Тогда общее количество гирек не меньше $3 + 4 + 5 + 6 > 16$, противоречие.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Правильный пример в пункте *а*) — 2 балла. В пункте *б*) отмечено, что масса самой тяжёлой кучки не меньше 34, — 2 балла. Доказано, что в самой тяжёлой кучке не менее трёх гирек, — ещё 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

6 класс

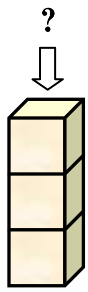
1. В записи $3 * 4 * 5 * 6 * 13 * 14 * 15 * 16$ на месте каждой звездочки поставили знак + или – (по своему усмотрению) и подсчитали результат. Какое *наименьшее* натуральное число могло получиться в результате вычисления?

Ответ: 2.
Решение. Искомая сумма состоит из 4-х нечётных чисел 3, 5, 13, 15 и 4-х чётных. Поскольку сумма или разность *двух* нечётных чисел всегда чётна, при любой расстановке знаков у 4-х нечётных слагаемых получится чётная сумма. Таким образом, сумма S всех 8 чисел всегда будет чётной, и значит, не может быть равна 1, поэтому $S \geq 2$. Значение $S = 2$ получается, например, так: $(3 - 4 - 5 + 6) - 13 + 14 - 15 + 16 = 2$.
Критерии. Ответ без объяснений и примера — 0 баллов, только пример — 3 балла.

2. Однажды мышки подружились с кошками, и каждая мышка послала по открытке каждой кошке, так что все кошки вместе получили 80 открыток. Сколько было кошек и мышек вместе, если известно, что их было не больше 25? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 18, 21 *или* 24.
Решение. Пусть мышек было m, а кошек — k. Каждая мышка послала всем кошкам k открыток, поэтому общее число открыток равно $m \cdot k = 80$, и значит, m и k — делители числа 80, причём $m + k \leq 25$. Выпишем все разложения числа 80 на два множителя: $10 \cdot 8 = 16 \cdot 5 = 20 \cdot 4 = 40 \cdot 2 = 80 \cdot 1$, и оставим из них первые три, для которых сумма делителей не более 25. Значит, кошек и мышек вместе было $10 + 8 = 18$, $16 + 5 = 21$ или $20 + 4 = 24$.
Критерии. Приведены (без объяснений) все варианты — 4 балла. Доказано, что других вариантов нет — ещё 3 балла.

3. У Пети есть несколько одинаковых игральных кубиков, у каждого кубика на каждой грани записано натуральное число, сумма чисел на противоположных гранях равна 7. Петя хочет склеить из них башню (см. рисунок) так, чтобы сумма чисел на каждой паре *склеенных* граней равнялась 8. Какой высоты башня у него может получиться? В ответе запишите количество кубиков в самой высокой башне и объясните, почему нельзя склеить более высокую башню.



Ответ: 6 *кубиков*.
Решение. Пусть x — число на нижней грани нижнего кубика. Тогда на противоположной (верхней) грани этого кубика будет число $7 - x$. Сумма чисел на склеенных гранях равна 8, поэтому число на нижней грани второго снизу кубика равно $x + 1$. Тогда на противоположной (верхней) грани этого кубика будет число $6 - x$. Рассуждая таким образом, получим следующее распределение чисел на нижних и верхних гранях кубиков, считая от основания башни:

$$(x;\ 7 - x),\ (x + 1,\ 6 - x),\ (x + 2,\ 5 - x),\ (x + 3,\ 4 - x),\ (x + 4,\ 3 - x),\ (x + 5,\ 2 - x),\ \ldots\ .$$

Все выписанные числа положительны, поэтому $2 - x \geq 1$, то есть $x \leq 1$. Если в башне есть ещё 7-й кубик, то на его верхней грани будет число $1 - x \leq 0$, противоречие. Для самой высокой башни из 6 кубиков получаем: (1; 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1).
Критерии. Ответ без объяснений и примера — 0 баллов. Пример башни из 6 кубиков — 3 балла. Доказано, что в башне не может быть больше, чем 6 кубиков, — ещё 4 балла.

4. Найдите наибольшее четырёхзначное число, в записи которого нет троек и нулей и которое делится на трёхзначное число, полученное стиранием его первой слева цифры.

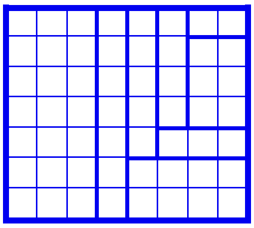
Ответ: 9225.

Решение. Если четырёхзначное число $\overline{abcd}$ делится на $\overline{bcd}$, полученное стиранием первой цифры a, то на $\overline{bcd}$ делится и число $\overline{abcd}-\overline{bcd} = 1000a$. Ясно, что исходное число будет наибольшим, если его первая цифра равна $a = 9$. Значит, число $\overline{bcd}$ следует искать среди трёхзначных делителей числа $1000a = 9 \cdot 2^3 \cdot 5^3$. Если $\overline{bcd}$ не содержит пятёрок в своём разложении, то $\overline{bcd} \leq 9 \cdot 2^3$, что невозможно. Если же в его разложении есть пятёрки, то не должно быть двоек; иначе $\overline{bcd}$ делится на 10, и значит, в записи числа $\overline{abcd}$ есть нули. Итак, $\overline{bcd}$ — наибольший трёхзначный делитель числа $9 \cdot 5^3$, не содержащий троек, то есть $\overline{bcd} = 225$.

Критерии. Примеры чисел, удовлетворяющих условию — 0 баллов. Доказано, что искомые числа обязательно будут делителями числа 9000, но неверно указан ответ — 3 балла. Правильный ответ без обоснования — 3 балла. Доказано, что это число наибольшее — 4 балла.

5. Можно ли разрезать клетчатый прямоугольник 7×8 по клеточкам на восемь прямоугольников *различной* площади, среди которых нет ни одного квадрата? А на девять таких прямоугольников?

Ответ: *на* 8 *можно* (*см. рисунок*); *на* 9 *нельзя*.



Решение. На рисунке приведён пример разрезания прямоугольника 7×8 на 8 прямоугольников с площадями 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 21, среди которых нет квадратов. Докажем, что такое разрезание на 9 прямоугольников невозможно. Отметим, что в разрезании не могут участвовать прямоугольники площади 9 и 11. В первом случае такой прямоугольник должен иметь размеры 1×9, 9×1 или 3×3, а во втором — 1×11 или 11×1, что невозможно в квадрате 7×7 и по условию задачи. Кроме того, в разрезании не может быть прямоугольника площади 1.

Рассмотрим сумму 9 различных *наименьших* натуральных слагаемых, среди которых нет слагаемых 1, 9 и 11: $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 10 + 12 = 57$. Это больше площади прямоугольника 7×8, поэтому разрезать на 9 частей не удастся.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Пример для 8 прямоугольников — 3 балла.

7 класс

1. Однажды мышки подружились с кошками, и каждая мышка послала по открытке каждой кошке, так что все кошки вместе получили 80 открыток. Сколько было кошек и мышек вместе, если известно, что их было не больше 30? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 18, 21 *или* 24.
Решение. Пусть мышек было m, а кошек — k. Каждая мышка послала всем кошкам k открыток, поэтому общее число открыток равно $m \cdot k = 80$, и значит, m и k — делители числа 80, причём $m + k \leq 30$. Выпишем все разложения числа 80 на два множителя: $10 \cdot 8 = 16 \cdot 5 = 20 \cdot 4 = 40 \cdot 2 = 80 \cdot 1$, и оставим из них первые три, для которых сумма делителей не более 30. Значит, кошек и мышек вместе было $10 + 8 = 18$, $16 + 5 = 21$ или $20 + 4 = 24$.
Критерии. Приведены (без объяснений) все варианты — 4 балла. Доказано, что других вариантов нет — ещё 3 балла.

2. Можно ли разрезать клетчатый прямоугольник 4×9 по клеточкам на шесть прямоугольников, площади которых выражаются различными *нечётными* числами?

Ответ: *нельзя*.
Решение. Если разрезание возможно, общая площадь всех шести прямоугольников равна $4 \times 9 = 36$ и не меньше суммы первых шести нечётных чисел $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$. Значит, эти площади равны 1, 3, 5, 7, 9, 11. Среди них есть прямоугольник площади 11, стороны которого могут выражаться *только* целыми числами 1 и 11. Сторона длины 11 больше стороны исходного квадрата, противоречие.
Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что площади выражаются шестью нечётными числами от 1 до 11, — 3 балла.

3. В таблице 7×8 расставлены натуральные числа так, что числа в *соседних* клетках (имеющих общую сторону или общую вершину) различны. Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 132.
Решение. (*Оценка.*) В каждом квадрате 2×2 стоят *различные* натуральные числа, поэтому сумма чисел в квадрате 2×2 не меньше $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. В прямоугольнике 6×8 есть 12 таких квадратов 2×2. Значит, сумма чисел в прямоугольнике 6×8 не меньше $12 \cdot 10 = 120$. Оставшиеся 8 клеток прямоугольника 1×8 можно разбить на 4 прямоугольника 1×2 («доминошки»), в каждом из них сумма чисел не меньше, чем $1 + 2 = 3$, поэтому сумма чисел во всей таблице не меньше $120 + 4 \cdot 3 = 132$.

1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2

На рисунке приведён *пример* таблицы, в которой сумма чисел равна 132.

Критерии. Приведён правильный пример без объяснений — 3 балла. Доказано, что в любом квадрате 2×2 сумма чисел не меньше 10, — 2 балла. Баллы не снижаются, если отмечено без объяснений, что в оставшиеся клетки надо расставить чередующиеся пары чисел 1 и 2.

4. Малыш и Карлсон обожают конфеты. Каждый день Малыш съедает на одну конфету больше, чем в предыдущий день, а Карлсон — на две конфеты больше, чем в предыдущий день. В первый день Малыш съел не менее одной конфеты, причём Карлсон в этот день съел на одну конфету больше, чем Малыш. Известно, что оба съели одинаковое число конфет, причём Карлсон съел свои конфеты за 10 дней. Сколько конфет съел Малыш? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 270 *или* 550.

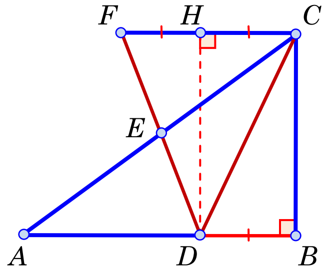
Решение. Пусть Малыш съел в первый день x конфет, а Карлсон — $(x + 1)$ конфет. Во второй день они съели $x + 1$ и $x + 3$ конфет соответственно, и значит, за эти два дня Карлсон съел на $1 + 2 = 3$ конфеты больше, чем Малыш. Рассуждая таким образом, получим, что за 10 дней Карлсон съел на $1 + 2 + \ldots + 10 = 55$ конфет больше. Поскольку обжоры съели конфет поровну, в следующие дни Малыш съел ровно 55 конфет, причём за 11-ый день он съедает $x + 10 \geq 11$ конфет, за 12-ый день — не менее 12 конфет, и так далее. Число 55 можно представить в виде суммы последовательных слагаемых (из которых первое не меньше 11) только двумя способами: $27 + 28$ и 55. Другими словами, Малыш съел свои конфеты за 12 или 11 дней. В первом случае, $x + 10 = 27$, $x = 17$, и он всего съел $17 + 18 + \ldots + 27 + 28 = 270$ конфет. Во втором случае, $x + 10 = 55$, $x = 45$, и значит, он съел $45 + 46 + \ldots + 55 = 550$ конфет.

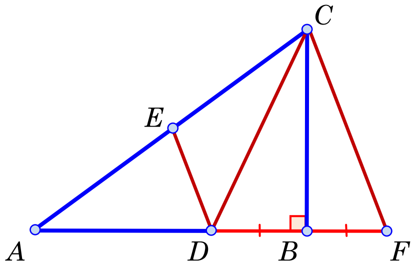
Критерии. За правильный пример без объяснений — 3 балла. Указаны все примеры без объяснения, что других вариантов нет, — 5 баллов.

5. В треугольнике ABC угол ABC равен 90°, и на катете AB отмечена точка D так, что $AD = 2DB$, точка E — середина гипотенузы AC. Известно, что $CD = 2$. Найдите DE.

Ответ: 1.

Первое решение. Продолжим отрезок DE за точку E и отложим $EF = DE$. Треугольники AED и CEF равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $FC = AD$. В треугольнике CDF проведём высоту DH. В четырёхугольнике $CBDH$ все углы прямые, поэтому $CBDH$ — прямоугольник. Тогда $HC = DB = AD / 2 = FC / 2$, то есть высота DH будет и медианой. Значит, треугольник CDF — равнобедренный, и $DF = CD = 2$. Отсюда $DE = DF / 2 = 1$.





Второе решение. Продолжим отрезок AB за точку B и отложим отрезок $BF = BD$. В треугольнике CDF высота BC будет медианой, поэтому CDF — равнобедренный, и значит, $CF = CD = 2$. Поскольку $AD = 2DB = DF$ и $AE = EC$, отрезок DE является средней линией треугольника ACF, и значит, $DE = CF / 2 = 1$.