

УДК 514.16

ФУНКТОРЫ ТИПА ВЕЙЛЯ НА КАТЕГОРИИ МНОГООБРАЗИЙ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРОВ

Г.Н. Бушуева

Аннотация

Функтор Вейля $T^{\mathbb{A}} : \mathcal{M}f \rightarrow \mathcal{F}\mathcal{M}$, определяемый локальной алгеброй Вейля \mathbb{A} , ставит в соответствие объекту $M \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ категории $\mathcal{M}f^N$ многообразий, зависящих от N параметров, расслоение $T^{\mathbb{A}}(M \times \mathbb{R}^N) \rightarrow T^{\mathbb{A}}\mathbb{R}^N$. В этой статье нами показано, что каждое сечение $\mathbb{R}^N \rightarrow T^{\mathbb{A}}\mathbb{R}^N$ определяет функтор, сохраняющий произведение, на категории $\mathcal{M}f^N$. Получены условия эквивалентности этих функторов.

1. Введение

Конечномерная коммутативная ассоциативная \mathbb{R} -алгебра \mathbb{A} с единицей называется локальной алгеброй Вейля или, кратко, алгеброй Вейля [1–3], если она обладает единственным максимальным идеалом $\overset{\circ}{\mathbb{A}}$, состоящим из всех ее нильпотентных элементов, а факторалгебра $\mathbb{A}/\overset{\circ}{\mathbb{A}}$ изоморфна \mathbb{R} . Имеет место разложение алгебры \mathbb{A} в прямую сумму

$$\mathbb{A} = \mathbb{R} \oplus \overset{\circ}{\mathbb{A}}. \quad (1)$$

Размерность N факторалгебры $\overset{\circ}{\mathbb{A}}/\overset{\circ}{\mathbb{A}}^2$ называется шириной алгебры \mathbb{A} . Натуральное число q , определяемое соотношениями $\overset{\circ}{\mathbb{A}}^q \neq 0$, $\overset{\circ}{\mathbb{A}}^{q+1} = 0$, называется высотой или порядком алгебры \mathbb{A} . Идеал $\overset{\circ}{\mathbb{A}}$ порождается всяkim набором элементов $\{\varepsilon^a\}$, $a = 1, \dots, N$, таким, что набор классов $\{\varepsilon^a + \overset{\circ}{\mathbb{A}}^2\}$ является базисом факторалгебры $\overset{\circ}{\mathbb{A}}/\overset{\circ}{\mathbb{A}}^2$. Следуя работе [5], такой набор $\{\varepsilon^a\}$, $a = 1, \dots, N$, будем называть псевдабазисом идеала $\overset{\circ}{\mathbb{A}}$ (и алгебры \mathbb{A}). Всякий элемент X алгебры \mathbb{A} может быть представлен в виде линейной комбинации произведений степеней элементов псевдабазиса $X = \sum_{|p|=0}^q X_p \varepsilon^p$, где $p = (p_1, \dots, p_N)$ – мультииндекс длины N , $|p| = p_1 + \dots + p_N$, $\varepsilon^p = (\varepsilon^1)^{p_1} \dots (\varepsilon^N)^{p_N}$, $\varepsilon^0 = 1_{\mathbb{A}}$.

Алгебра Вейля ширины N и высоты q изоморфна некоторой факторалгебре алгебры $\mathbb{R}[[N]]$ формальных степенных рядов от N переменных t^a , $a = 1, \dots, N$, по некоторому идеалу \mathbb{I} [1–3].

Функтор Вейля $T^{\mathbb{A}} : \mathcal{M}f \rightarrow \mathcal{F}\mathcal{M}$ [1], определяемый локальной алгеброй \mathbb{A} , относит гладкому многообразию M расслоение $T^{\mathbb{A}}M$ \mathbb{A} -скоростей [2] (\mathbb{A} -блзких точек [1], \mathbb{A} -струй [4]). Расслоение \mathbb{A} -скоростей Вейля $T^{\mathbb{A}}M \rightarrow M$ над гладким многообразием M определяется как множество классов эквивалентности ростков $(\mathbb{R}^N, 0) \xrightarrow{f} M$ по следующему отношению эквивалентности: ростки f и g эквивалентны, если ряды Тейлора отображений $h \circ f$ и $h \circ g$, где h – некоторая карта на M , совпадают по модулю идеала \mathbb{I} .

Атлас, задающий на многообразии M его гладкую структуру, индуцирует атлас на расслоении $T^{\mathbb{A}}M$, задающий на $T^{\mathbb{A}}M$ структуру \mathbb{A} -гладкого многообразия,

моделируемого \mathbb{A} -модулем \mathbb{A}^n [3]. В случае многообразий \mathbb{R} и \mathbb{R}^n это приводит к естественным отождествлениям [3, 4]

$$T^{\mathbb{A}}\mathbb{R} \equiv \mathbb{A}, T^{\mathbb{A}}\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{A}^n.$$

По теореме об \mathbb{A} -гладких отображениях [3] преобразования координат на $T^{\mathbb{A}}M$, индуцируемые преобразованиями координат $x^{i'} = \varphi^{i'}(x^i)$ на M , имеют вид

$$X^{i'} = x^{i'} + \overset{\circ}{X}{}^{i'} = \sum_{|p|=0}^q \frac{1}{p!} \frac{\partial^{|p|} \varphi^{i'}}{\partial x^p} \overset{\circ}{X}{}^p, \quad (2)$$

где $X^i = x^i + \overset{\circ}{X}{}^i$ – разложение в соответствии с (1), $\varphi^{i'}(x^i)$ – \mathbb{A} -значные гладкие функции.

Расслоение Вейля $T^{\mathbb{A}}M$ над диффеоморфизмом многообразия M , определяемое локальной алгеброй Вейля \mathbb{A} высоты q [1, 2, 6], ассоциировано с расслоением q -реперов $B^q M$, структурной группой которого является дифференциальная группа G_n^q . Структура \mathbb{A} -гладкого многообразия на $T^{\mathbb{A}}M$ [4, 6] приводит к появлению еще одного главного расслоения, ассоциированного с $T^{\mathbb{A}}M$, а именно, расслоения \mathbb{A} -аффинных реперов $B(\mathbb{A})M$, структурной группой которого является так называемая \mathbb{A} -аффинная группа $D_n(\mathbb{A})$ [3].

Геометрия расслоений Вейля и лифты полей различных дифференциально-геометрических объектов с многообразия M на расслоение Вейля $T^{\mathbb{A}}M$ изучались в работах В.В. Шурыгина [3], А.П. Широкова [6], А.Я. Султанова [7], А. Моримото [8], Л.-Н. Паттерсона [9], П. Юэня [10] и других исследователей (см., например, обзор [6]).

В работе [11] рассматривалась категория $\mathcal{M}f^N$ многообразий, зависящих от N параметров, объектами которой являются тривиальные расслоения $p : M \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, где M – гладкое многообразие, а морфизмы – коммутативные диаграммы вида

$$\begin{array}{ccc} M \times \mathbb{R}^N & \xrightarrow{f} & M' \times \mathbb{R}^N \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ \mathbb{R}^N & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{R}^N. \end{array}$$

В локальных координатах (x^i, t^a) на $M \times \mathbb{R}^N$ и (x'^i, t^a) на $M' \times \mathbb{R}^N$ морфизм f задается уравнениями вида $x'^i = f^{i'}(x^i, t^a)$. В указанной работе было построено обобщение функтора Вейля $T^{\mathbb{A}}$ на категорию $\mathcal{M}f^N$ многообразий, зависящих от N параметров, где N – ширина алгебры \mathbb{A} . Обобщенный функтор Вейля $\widehat{T}^{\mathbb{A}} : \mathcal{M}f^N \rightarrow \mathcal{FM}^N$ относит многообразию $M \times \mathbb{R}^N$ расслоение $\widehat{T}^{\mathbb{A}}(M \times \mathbb{R}^N) \rightarrow M \times \mathbb{R}^N$, образованное \mathbb{A} -струями ростков сечений $s : \mathbb{R}^N \rightarrow M \times \mathbb{R}^N$. Естественной структурной группой расслоения $\widehat{T}^{\mathbb{A}}(M \times \mathbb{R}^N)$ является группа $D_n(\mathbb{A})$ [3].

Детальное изложение теории функторов, сохраняющих произведение на категории гладких многообразий $\mathcal{M}f$, можно найти в монографии [2]. В работах [12–14] получена классификация функторов, сохраняющих произведение на категориях расслоенных многообразий, и их естественных преобразований.

В данной работе построен класс функторов, сохраняющих произведение, в категории $\mathcal{M}f^N$ и исследованы условия их эквивалентности.

2. Функторы на категории $\mathcal{M}f^N$

Объектами категории $\mathcal{F}\mathcal{M}^N$ являются расслоенные многообразия, зависящие от параметров, являются коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} E \times \mathbb{R}^N & \xrightarrow{p_H} & \mathbb{R}^N \\ \pi \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ M \times \mathbb{R}^N & \xrightarrow{p_M} & \mathbb{R}^N, \end{array}$$

а морфизмами – коммутативные диаграммы над \mathbb{R}^N

$$\begin{array}{ccc} E \times \mathbb{R}^N & \xrightarrow{f} & E' \times \mathbb{R}^N \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ M \times \mathbb{R}^N & \xrightarrow{\bar{f}} & M' \times \mathbb{R}^N. \end{array}$$

В работе [11] было построено обобщение функтора Вейля T^A на категорию $\mathcal{M}f^N$ многообразий, зависящих от N параметров, где N – ширина алгебры A . Обобщенный функтор Вейля $\widehat{T}^A : \mathcal{M}f^N \rightarrow \mathcal{F}\mathcal{M}^N$ ставит в соответствие объекту $p : M \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ расслоение

$$\begin{array}{ccc} \widehat{T}^A(M \times \mathbb{R}^N) & \xrightarrow{\widehat{T}^A p} & \mathbb{R}^N \\ \pi \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ M \times \mathbb{R}^N & \xrightarrow{p} & \mathbb{R}^N, \end{array}$$

образованное A -струями ростков сечений $s : \mathbb{R}^N \rightarrow M \times \mathbb{R}^N$. По определению, два ростка сечений $s, s' : (\mathbb{R}^N, t_0) \rightarrow M \times \mathbb{R}^N$ определяют одну A -струю $j^A s$, если $j^A(s \circ \text{tr}_{t_0}) = j^A(s' \circ \text{tr}_{t_0})$, где $\text{tr}_{t_0} : \mathbb{R}^N \ni t \mapsto t + t_0 \in \mathbb{R}^N$ – сдвиг на вектор $t_0 \in \mathbb{R}^N$. В силу этого для всех $M \in \mathcal{M}f$ определено отображение

$$\begin{aligned} \delta_M : \widehat{T}^A(M \times \mathbb{R}^N) &\rightarrow T^A(M \times \mathbb{R}^N) \\ j^A s &\mapsto j^A(s \circ \text{tr}_{t_0}), \end{aligned}$$

являющееся вложением.

Объект $p : M \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ категории $\mathcal{M}f^N$ является морфизмом категории $\mathcal{M}f$. Действие функтора Вейля $T^A : \mathcal{M}f \rightarrow \mathcal{F}\mathcal{M}$ [2] на нем определяет расслоение $T^A(p) : T^A(M \times \mathbb{R}^N) \rightarrow T^A(\mathbb{R}^N) \simeq A^N$. Тогда, поскольку $T^A(p)(j^A(s \circ \text{tr}_{t_0})) = j^A(p \circ s \circ \text{tr}_{t_0}) = j^A(\text{tr}_{t_0})$, получаем следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \widehat{T}^A(M \times \mathbb{R}^N) & \xrightarrow{\delta_M} & T^A(M \times \mathbb{R}^N) \\ \widehat{T}^A(p) \downarrow & & \downarrow T^A(p) \\ \mathbb{R}^N & \xrightarrow{\sigma} & T^A(\mathbb{R}^N), \end{array} \tag{3}$$

где $\sigma(t) = j^A(\text{tr}_t)$ – сечение расслоения $T^A \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, а $A^N = T^A(\mathbb{R}^N)$ – A -модуль. Для σ можно записать координатное выражение $\sigma^a(t) = t^a + \varepsilon^a$ где $\{\varepsilon^a\}$ – псевдобазис [5] в локальной алгебре $A = T^A(\mathbb{R})$.

Для каждой точки $X \in T^A(M \times \mathbb{R}^N)$, удовлетворяющей условию $T^A(p)(X) = j^A(\text{tr}_t)$, существует единственная точка $Y \in \widehat{T}^A(M \times \mathbb{R}^N)$, такая, что $\delta_M(Y) =$

$= X$. Поэтому диаграмма (3) является диаграммой обратного образа в категории гладких многообразий \mathcal{M}^f .

Морфизм $\widehat{T}^{\mathbb{A}}(f)$ в локальных координатах задается уравнениями вида

$$Y^i = f^i(x, t) + \sum_{p+s=1}^q \frac{1}{p!s!} \frac{\partial^{|p+s|} f^i}{\partial x^p \partial t^s} \overset{\circ}{X}{}^p \varepsilon^s.$$

Дополнив диаграмму (3) проекциями расслоений Вейля на базовые многообразия, получаем диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & M \times \mathbb{R}^N & \xrightarrow{\text{id}} & M \times \mathbb{R}^N & \\ \widehat{\pi}_M \nearrow & \downarrow & & \searrow \pi_M & \\ \widehat{T}^{\mathbb{A}}(M \times \mathbb{R}^N) & \xrightarrow{\delta_M} & T^{\mathbb{A}}(M \times \mathbb{R}^N) & & \\ \downarrow \widehat{T}^{\mathbb{A}}(p) & & \downarrow T^{\mathbb{A}}(p) & & \downarrow \\ \mathbb{R}^N & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{R}^N & \xrightarrow{\pi_{\text{pt}}} & \mathbb{R}^N \\ \text{id} \nearrow & & & \searrow & \\ \mathbb{R}^N & \xrightarrow{\sigma} & T^{\mathbb{A}}(\mathbb{R}^N). & & \end{array} \quad (4)$$

Конструкцию расслоения $\widehat{T}^{\mathbb{A}}(M \times \mathbb{R}^N)$ можно обобщить, заменив сечение $\sigma(t) = j^{\mathbb{A}}(\text{tr}_t)$ на произвольное сечение расслоения $T^{\mathbb{A}}\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$. Итак, пусть теперь $\sigma : \mathbb{R}^N \rightarrow T^{\mathbb{A}}\mathbb{R}^N$ – произвольное сечение. Обозначим $\widehat{T}_{\sigma}^{\mathbb{A}}(M \times \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}^N$ расслоение, являющееся обратным образом [18] относительно этого сечения. Из конструкции обратного образа следует, что при переходе от расслоения $T^{\mathbb{A}}(M \times \mathbb{R}^N) \rightarrow T^{\mathbb{A}}\mathbb{R}^N$ к расслоению $\widehat{T}_{\sigma}^{\mathbb{A}}(M \times \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}^N$ сохраняется проекция на $M \times \mathbb{R}^N$. Таким образом, получаем коммутативную диаграмму, аналогичную диаграмме (4),

$$\begin{array}{ccccc} & M \times \mathbb{R}^N & \xrightarrow{\text{id}} & M \times \mathbb{R}^N & \\ \widehat{\pi}_M \nearrow & \downarrow \sigma_M^* & & \searrow \pi_M & \\ \widehat{T}_{\sigma}^{\mathbb{A}}(M \times \mathbb{R}^N) & \xrightarrow{\delta_M} & T^{\mathbb{A}}(M \times \mathbb{R}^N) & & \\ \downarrow \widehat{T}_{\sigma}^{\mathbb{A}}(p) & & \downarrow T^{\mathbb{A}}(p) & & \downarrow \\ \mathbb{R}^N & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{R}^N & \xrightarrow{\pi_{\text{pt}}} & \mathbb{R}^N \\ \text{id} \nearrow & & & \searrow & \\ \mathbb{R}^N & \xrightarrow{\sigma} & T^{\mathbb{A}}(\mathbb{R}^N). & & \end{array} \quad (5)$$

Левая «стенка» диаграммы (5) представляет собой объект категории \mathcal{FM}^N

$$\begin{array}{ccc} \widehat{T}_{\sigma}^{\mathbb{A}}(M \times \mathbb{R}^N) & \longrightarrow & M \times \mathbb{R}^N \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R}^N. \end{array} \quad (6)$$

Из конструкции обратного образа следует, что продолжение

$$\begin{array}{ccc} T^{\mathbb{A}}(W \times \mathbb{R}^N) & \xrightarrow{T^{\mathbb{A}}f} & T^{\mathbb{A}}(M \times \mathbb{R}^N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^{\mathbb{A}}\mathbb{R}^N & \xrightarrow{\text{id}} & T^{\mathbb{A}}\mathbb{R}^N \end{array}$$

морфизма

$$\begin{array}{ccc} W \times \mathbb{R}^N & \xrightarrow{f} & M \times \mathbb{R}^N \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^N & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{R}^N \end{array} \quad (7)$$

порождает морфизм

$$\begin{array}{ccccc} & W \times \mathbb{R}^N & \xrightarrow{f} & M \times \mathbb{R}^N & \\ \pi_W \nearrow & \downarrow \widehat{T}_\sigma^\mathbb{A}(f) & & \pi_M \nearrow & \\ \widehat{T}_\sigma^\mathbb{A}(W \times \mathbb{R}^N) & \xrightarrow{\quad} & \widehat{T}_\sigma^\mathbb{A}(M \times \mathbb{R}^N) & \xrightarrow{\quad} & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^N & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{R}^N & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{R}^N \\ \text{id} \nearrow & \text{id} & \text{id} & \text{id} & \text{id} \nearrow \end{array} \quad (8)$$

Очевидно, что при этом композиция $f \circ g$ морфизмов g и f переходит в композицию $\widehat{T}_\sigma^\mathbb{A}(f) \circ \widehat{T}_\sigma^\mathbb{A}(g)$ и $\widehat{T}_\sigma^\mathbb{A}(\text{id}) = \text{id}$.

Поскольку функтор Вейля $T^\mathbb{A}$ сохраняет произведение, имеет место изоморфизм $T^\mathbb{A}(M \times \mathbb{R}^N) = T^\mathbb{A}M \times T^\mathbb{A}\mathbb{R}^N$. Поэтому вложение $\sigma_M^* : \widehat{T}_\sigma^\mathbb{A}(M \times \mathbb{R}^N) \rightarrow T^\mathbb{A}(M \times \mathbb{R}^N)$, индуцируемое операцией обратного образа, при фиксированном $t \in \mathbb{R}^N$ определяет подмногообразие $T^\mathbb{A}M \times \{\sigma(t)\}$ в $T^\mathbb{A}(M \times \mathbb{R}^N)$, диффеоморфное $T^\mathbb{A}M$. Поэтому $\widehat{T}_\sigma^\mathbb{A}(M \times \mathbb{R}^N)$ диффеоморфно $T^\mathbb{A}M \times \mathbb{R}^N$ в категории \mathcal{FM}^N .

Опишем атлас на многообразии $\widehat{T}_\sigma^\mathbb{A}(M \times \mathbb{R}^N)$, индуцируемый вложением σ . Пусть $\{(W_\alpha, h_\alpha)\}$ – атлас на $M \times \mathbb{R}^N$. Он порождает на $T^\mathbb{A}(M \times \mathbb{R}^N)$ \mathbb{A}^{n+N} -атлас $\{(W_\alpha^\mathbb{A}, h_\alpha^\mathbb{A})\}$, где $W_\alpha^\mathbb{A} = \pi_M^{-1}(W_\alpha)$, а $h_\alpha^\mathbb{A}$ – естественные продолжения отображений h_α в алгебру \mathbb{A} . Тогда семейство областей $\tilde{W}_\alpha^\mathbb{A}$, являющихся прообразами областей $W_\alpha^\mathbb{A}$ относительно σ_M^* , и карт $\tilde{h}_\alpha^\mathbb{A} = h_\alpha^\mathbb{A} \circ \sigma_M^*$ задают на $\widehat{T}_\sigma^\mathbb{A}(M \times \mathbb{R}^N)$ атлас. Элемент из $T^\mathbb{A}(M \times \mathbb{R}^N)$ определяется координатами $X_\alpha^i = x_\alpha^i + \overset{\circ}{X}_\alpha^i$, $S_\alpha^a = s_\alpha^a + \overset{\circ}{S}_\alpha^a$, где $x_\alpha^i, s_\alpha^a \in \mathbb{R}$, $\overset{\circ}{X}_\alpha^i, \overset{\circ}{S}_\alpha^a \in \overset{\circ}{\mathbb{A}}$, а $\overset{\circ}{\mathbb{A}}$ – максимальный идеал локальной алгебры \mathbb{A} . Тогда прообраз этого элемента в $\widehat{T}_\sigma^\mathbb{A}(M \times \mathbb{R}^N)$ имеет координаты $(X_\alpha^i, t_\alpha^a = s_\alpha^a)$. Таким образом, карта $(W_\alpha^\mathbb{A}, h_\alpha^\mathbb{A})$ на $T^\mathbb{A}(M \times \mathbb{R}^N)$ индуцирует карту $(\tilde{W}_\alpha^\mathbb{A}, \tilde{h}_\alpha^\mathbb{A}) = (\tilde{W}_\alpha^\mathbb{A}(\sigma), \tilde{h}_\alpha^\mathbb{A}(\sigma))$ на $\widehat{T}_\sigma^\mathbb{A}(M \times \mathbb{R}^N)$. Преобразования координат между двумя \mathbb{A}^{n+N} -картами $(W_\alpha^\mathbb{A}, h_\alpha^\mathbb{A})$ и $(W_\beta^\mathbb{A}, h_\beta^\mathbb{A})$ на $T^\mathbb{A}(M \times \mathbb{R}^N)$ имеют вид (см. [4]):

$$X_\beta^i = \sum_{|r|+|p|=0}^q \frac{1}{r!p!} \frac{\partial^{|r+p|}(h_\beta^i \circ h_\alpha^{-1})}{\partial x^r \partial s^p} \overset{\circ}{X}_\alpha^r \overset{\circ}{S}_\alpha^p, \quad \overset{\circ}{S}_\beta^a = \overset{\circ}{S}_\alpha^a, \quad (9)$$

где (x^i, s^a) – локальные координаты в карте (W_α, h_α) , (X_α^i, S_α^a) – локальные координаты в карте $(W_\alpha^\mathbb{A}, h_\alpha^\mathbb{A})$, r и p – мультииндексы. Вложение σ_M^* локально задается уравнениями $S_\alpha^a = \sigma^a(t)$. Здесь $\sigma^a(t) = t^a + \sum_{|p|=1}^q \sigma_p^a(t) \varepsilon^p$ – координатные выражения для сечения σ , σ_p^a – вещественные функции от параметров t , $\sum_{|p|=1}^q \sigma_p^a(t) \varepsilon^p$ – разложение по базису алгебры \mathbb{A} , $a = 1, \dots, N$ и $p = (p_1, \dots, p_N)$. Подстановка этого соотношения в уравнения преобразования (9) определяет преобразования координат между картами $(\tilde{W}_\alpha^\mathbb{A}, \tilde{h}_\alpha^\mathbb{A})$ и $(\tilde{W}_\beta^\mathbb{A}, \tilde{h}_\beta^\mathbb{A})$ на $\widehat{T}_\sigma^\mathbb{A}(M \times \mathbb{R}^N)$:

$$X_\beta^i = \sum_{|r+p|=0}^q \frac{1}{r!p!} \frac{\partial^{|r+p|}(h_\beta^i \circ h_\alpha^{-1})}{\partial x^r \partial t^p} \overset{\circ}{X}_\alpha^r \overset{\circ}{\sigma}^p(t). \quad (10)$$

Группируя слагаемые этой суммы, получаем выражение

$$\overset{\circ}{X}{}^{i'} = \sum_{|r|=0}^q A_r^{i'}(x^i, t^a) \overset{\circ}{X}{}^r, \quad (11)$$

где

$$A_r^{i'}(x^i, t^a) = \frac{1}{r!} \frac{\partial^{|r|}}{\partial x^r} \left(\sum_{|p|=0}^q \frac{1}{p!} \frac{\partial^{|p|}(h_\beta^{i'} \circ h_\alpha^{-1})}{\partial t^p} \overset{\circ}{\sigma}{}^p(t) \right). \quad (12)$$

Пользуясь теоремой об \mathbb{A} -гладких отображениях [4], заключаем, что выражениями (11), (12) на каждом слое $T^\mathbb{A}M \times \{t_0\}$ определяются \mathbb{A} -гладкие функции склейки $\tilde{\varphi}_{\beta\alpha}^\mathbb{A} = \tilde{h}_\beta^\mathbb{A} \circ (\tilde{h}_\alpha^\mathbb{A})^{-1}$. Координатные выражения для \mathcal{FM}^N -морфизмов $\widehat{T}_\sigma^\mathbb{A}(f)$ в этом атласе имеют аналогичный вид

$$Y^i(X^j, t^a) = f^i(x, t) + \sum_{r+p=1}^q \frac{1}{r!p!} \frac{\partial^{|r+p|} f^i}{\partial x^r \partial t^p} \overset{\circ}{X}{}^r \overset{\circ}{\sigma}{}^p(t). \quad (13)$$

В результате получаем следующее

Предложение 1. Соответствие $\widehat{T}_\sigma^\mathbb{A}$, относящее расслоению $M \times \mathbb{R}^N$ объект (6), а морфизму (7) – морфизму (8), является функтором из категории $\mathcal{M}f^N$ в категорию \mathcal{FM}^N .

Пример 1. Вертикальный функтор Вейля $V^\mathbb{A} : \mathcal{FM}_m \rightarrow \mathcal{FM}$, рассматривающий в работах [2, 12, 13], каждому расслоенному многообразию $q : E \rightarrow M$ ставит в соответствие расслоение $V^\mathbb{A}E \rightarrow E$, totальное пространство которого есть множество \mathbb{A} -струй ростков $g : (\mathbb{R}^N, 0) \rightarrow q^{-1}(x)$, где $q^{-1}(x)$ – слой над точкой $x \in M$. Действие этого функтора на расслоениях из категории $\mathcal{M}f^N$ соответствует в описанной конструкции нулевому сечению $\sigma(t) = j^\mathbb{A}(\text{pt}_t)$, где $\text{pt}_t : \mathbb{R}^N \rightarrow t \in \mathbb{R}^N$ – постоянное отображение, поскольку $T^\mathbb{A}(p)(j^\mathbb{A}g) = j^\mathbb{A}(p \circ g) = j^\mathbb{A}(\text{pt}_t)$. В локальных координатах нулевое сечение задается уравнениями $\sigma^a(t) = t^a$. Морфизм $V^\mathbb{A}(f)$ имеет вид

$$Y^i(X^j, t^a) = f^i(x, t) + \sum_{r=1}^q \frac{1}{r!} \frac{\partial^{|r|} f^i}{\partial x^r} \overset{\circ}{X}{}^r.$$

Понятие произведения в произвольной категории формулируется следующим образом [16].

Пусть \mathcal{C} – произвольная категория и C_1, C_2 – объекты из \mathcal{C} . Под произведением объектов C_1 и C_2 в \mathcal{C} понимается тройка (P, pr_1, pr_2) , состоящая из объекта P в \mathcal{C} и двух морфизмов и удовлетворяющая следующему условию. Для любого объекта D и любых двух морфизмов

$$f_1 : D \rightarrow C_1 \quad \text{и} \quad f_2 : D \rightarrow C_2$$

существует единственный морфизм $f : D \rightarrow P$, для которого $f_1 = pr_1 \circ f$ и $f_2 = pr_2 \circ f$, то есть диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} C_1 & \xleftarrow{pr_1} & P & \xrightarrow{pr_2} & C_2 \\ & \searrow f_1 & \downarrow & \nearrow f_2 & \\ & D & & & \end{array}$$

коммутативна.

Функтор $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ называется функтором, сохраняющим произведение [2], если для всякого \mathcal{C} -произведения (A, pr_1, pr_2) тройка $(F(A), F(pr_1), F(pr_2))$ является произведением в категории \mathcal{D} .

Сконструированные функторы обладают следующим свойством.

Предложение 2. *Функтор Вейля $\widehat{T}_\sigma^{\mathbb{A}} : \mathcal{M}f^N \rightarrow \mathcal{F}\mathcal{M}^N$ сохраняет произведение.*

Доказательство. Рассмотрим диаграмму произведения

$$M_1 \times \mathbb{R}^N \xleftarrow{pr_1} M_1 \times M_2 \times \mathbb{R}^N \xrightarrow{pr_2} M_2 \times \mathbb{R}^N$$

двух $\mathcal{M}f^N$ -объектов $p_1 : M_1 \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ и $p_2 : M_2 \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ в категории $\mathcal{M}f^N$. Пусть

$$\begin{array}{ccc} E \times \mathbb{R}^N & \xrightarrow{f_\alpha} & \widehat{T}_\sigma^{\mathbb{A}}(M_\alpha \times \mathbb{R}^N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M \times \mathbb{R}^N & \xrightarrow{\bar{f}_\alpha} & M_\alpha \times \mathbb{R}^N \end{array}$$

суть произвольные $\mathcal{F}\mathcal{M}^N$ -морфизмы, где $\alpha = 1, 2$. Покажем, что существует единственный $\mathcal{F}\mathcal{M}^N$ -морфизм

$$\begin{array}{ccc} E \times \mathbb{R}^N & \xrightarrow{f} & \widehat{T}_\sigma^{\mathbb{A}}(M_1 \times M_2 \times \mathbb{R}^N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M \times \mathbb{R}^N & \xrightarrow{\bar{f}} & M_1 \times M_2 \times \mathbb{R}^N, \end{array}$$

такой, что $f_1 = \widehat{T}_\sigma^{\mathbb{A}}(pr_1) \circ f$ и $f_2 = \widehat{T}_\sigma^{\mathbb{A}}(pr_2) \circ f$.

Рассмотрим следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & E \times \mathbb{R}^N & & \\ & \swarrow f_2 & \downarrow f & \searrow f_1 & \\ & & \widehat{T}_\sigma^{\mathbb{A}}(M_1 \times M_2 \times \mathbb{R}^N) & & \\ & \swarrow \widehat{T}_\sigma^{\mathbb{A}}(pr_2) & \downarrow \widehat{T}_\sigma^{\mathbb{A}}(p_2) & \searrow \widehat{T}_\sigma^{\mathbb{A}}(p_1) & \\ \widehat{T}_\sigma^{\mathbb{A}}(M_2 \times \mathbb{R}^N) & \xrightarrow{\widehat{T}_\sigma^{\mathbb{A}}(p_2)} & T^{\mathbb{A}}(M_1 \times M_2 \times \mathbb{R}^N) & \xrightarrow{T^{\mathbb{A}}(p_1)} & T^{\mathbb{A}}(M_1 \times \mathbb{R}^N) \\ \downarrow & & \downarrow \sigma & & \downarrow \\ T^{\mathbb{A}}(M_2 \times \mathbb{R}^N) & \xrightarrow{T^{\mathbb{A}}(p_2)} & T^{\mathbb{A}}(M_1 \times M_2 \times \mathbb{R}^N) & \xrightarrow{T^{\mathbb{A}}(p_1)} & T^{\mathbb{A}}(\mathbb{R}^N) \end{array}.$$

В силу того, что функтор Вейля $T^{\mathbb{A}} : \mathcal{M}f \rightarrow \mathcal{F}\mathcal{M}$ сохраняет произведение [2], для $\mathcal{M}f^N$ -морфизмов f_1 и f_2 существует единственный $\mathcal{M}f$ -морфизм $h : E \times \mathbb{R}^N \rightarrow$

$\rightarrow T^{\mathbb{A}}(M_1 \times M_2 \times \mathbb{R}^N)$, такой, что все диаграммы со стрелками в нижнее основание диаграммы, изображенной на рисунке, коммутативны.

Поскольку диагональный вертикальный квадрат этой диаграммы является диаграммой обратного образа, для двух $\mathcal{M}f$ -морфизмов $h : E \times \mathbb{R}^N \rightarrow T^{\mathbb{A}}(M_1 \times M_2 \times \mathbb{R}^N)$ и $\tilde{h} = \hat{T}_{\sigma}^{\mathbb{A}}(p_1) \circ f_1 = \hat{T}_{\sigma}^{\mathbb{A}}(p_2) \circ f_2 : M \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ существует единственный $\mathcal{M}f$ -морфизм $f : M \times \mathbb{R}^N \rightarrow \hat{T}_{\sigma}^{\mathbb{A}}(M_1 \times M_2 \times \mathbb{R}^N)$, такой, что все диаграммы со стрелками в верхнее основание коммутативны. Из коммутативности всей этой диаграммы, а также из коммутативности диаграмм

$$\begin{array}{ccc} E \times \mathbb{R}^N & \xrightarrow{\delta_{\alpha} \circ f_{\alpha}} & T^{\mathbb{A}}(M_{\alpha} \times \mathbb{R}^N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M \times \mathbb{R}^N & \xrightarrow{\bar{f}_{\alpha}} & M_{\alpha} \times \mathbb{R}^N \end{array}$$

следует, что f является \mathcal{FM}^N -морфизмом.

Таким образом, мы получили, что для любых \mathcal{FM}^N -морфизмов f_1 и f_2 существует единственный \mathcal{FM}^N -морфизм f , такой, что $\hat{T}_{\sigma}^{\mathbb{A}}(pr_1) \circ f = f_1$ и $\hat{T}_{\sigma}^{\mathbb{A}}(pr_2) \circ f = f_2$. Следовательно, функтор Вейля $\hat{T}_{\sigma}^{\mathbb{A}}$ сохраняет произведение. \square

3. Эквивалентные функторы на категории $\mathcal{M}f^N$

Исследуем следующую проблему: при каких условиях два функтора $\hat{T}_{\sigma_1}^{\mathbb{A}}$ и $\hat{T}_{\sigma_2}^{\mathbb{A}}$, определяемые различными сечениями $\sigma_1, \sigma_2 : \mathbb{R}^N \rightarrow T^{\mathbb{A}}\mathbb{R}^N$, эквивалентны. При этом эквивалентность понимается нами в следующим смысле [17].

Естественным преобразованием между двумя функторами $F_1, F_2 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ называется семейство \mathcal{D} -морфизмов $\Phi = \{\Phi_A : F_1(A) \rightarrow F_2(A)\}_{A \in \mathcal{C}}$, индексированное семейством объектов из \mathcal{C} и удовлетворяющее следующему условию: для любого $f : A \rightarrow B \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F_1(A) & \xrightarrow{F_1 f} & F_1(B) \\ \Phi_A \downarrow & & \downarrow \Phi_B \\ F_2(A) & \xrightarrow{F_2 f} & F_2(B) \end{array}$$

коммутативна в категории \mathcal{D} . Морфизм Φ_A называют компонентой естественного преобразования $\Phi : F_1 \rightarrow F_2$.

Если все компоненты Φ_A естественного преобразования $\Phi : F_1 \rightarrow F_2$ являются изоморфизмами, то Φ называется естественной эквивалентностью или изоморфилизмом функторов $\Phi : F_1 \cong F_2$.

Рассмотрим функтор $\hat{T}_{\sigma}^{\mathbb{A}} : \mathcal{M}f^N \rightarrow \mathcal{FM}^N$. Сечение $\sigma : \mathbb{R}^N \rightarrow T^{\mathbb{A}}\mathbb{R}^N$ определяет семейство подалгебр $\{\mathbb{B}_{\sigma}(t) \subset \mathbb{A}\}_{t \in \mathbb{R}^N}$ следующим образом.

Пусть q – высота алгебры \mathbb{A} . Рассмотрим алгебру срезанных многочленов $\mathbb{R}(N, q)$ с набором образующих $\{\tau^1, \dots, \tau^N\}$. Соответствие $(\tau^a \mapsto \dot{\sigma}^a(t), a = 1, \dots, N)$ определяет гомоморфизм локальных алгебр $\xi_{\sigma}(t) : \mathbb{R}(N, q) \rightarrow \mathbb{A}$ при любом фиксированном $t \in \mathbb{R}^N$, образом которого является некоторая подалгебра $\mathbb{B}_{\sigma}(t)$. Пусть

$$\xi_{\sigma} : \mathbb{R}(N, q) \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{A} \times \mathbb{R}^N \tag{14}$$

есть отображение, определенное соотношениями $\xi_{\sigma}(\alpha, t) = (\xi_{\sigma}(t)(\alpha), t)$.

Теорема 1. Пусть $\sigma_1, \sigma_2 : \mathbb{R}^N \rightarrow T^{\mathbb{A}}\mathbb{R}^N$ – два сечения, а ξ_{σ_1} и ξ_{σ_2} – соответствующие отображения (14). Функторы $\widehat{T}_{\sigma_1}^{\mathbb{A}}$ и $\widehat{T}_{\sigma_2}^{\mathbb{A}}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда существует $\mathcal{M}f^N$ -морфизм $\eta : \mathbb{A} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{A} \times \mathbb{R}^N$, удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) ограничение $\eta_t : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ морфизма η на слой $t = \text{const}$, является автоморфизмом алгебры \mathbb{A} при каждом $t \in \mathbb{R}^N$;
- 2) $\eta \circ \xi_{\sigma_1} = \xi_{\sigma_2}$.

Доказательство. 1) Предположим, что функторы $\widehat{T}_{\sigma_1}^{\mathbb{A}}$ и $\widehat{T}_{\sigma_2}^{\mathbb{A}}$ эквивалентны. Тогда каждому объекту $M \times \mathbb{R}^N \in \text{Ob}(\mathcal{M}f^N)$ можно сопоставить $\Phi_M \in \text{Mor}(\mathcal{F}\mathcal{M}^N)$ так, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \widehat{T}_{\sigma_1}^{\mathbb{A}}(M \times \mathbb{R}^N) & \xrightarrow{\widehat{T}_{\sigma_1}^{\mathbb{A}}(f)} & \widehat{T}_{\sigma_1}^{\mathbb{A}}(W \times \mathbb{R}^N) \\ \downarrow \Phi_M & & \downarrow \Phi_W \\ \widehat{T}_{\sigma_2}^{\mathbb{A}}(M \times \mathbb{R}^N) & \xrightarrow{\widehat{T}_{\sigma_2}^{\mathbb{A}}(f)} & \widehat{T}_{\sigma_2}^{\mathbb{A}}(W \times \mathbb{R}^N) \end{array} \quad (15)$$

коммутативна при любом $f \in \text{Mor}(\mathcal{M}f^N)$.

Учитывая изоморфизм $\widehat{T}_{\sigma_i}^{\mathbb{A}}(M \times \mathbb{R}^N) = T^{\mathbb{A}}M \times \mathbb{R}^N$ и рассматривая подмножество не зависящих от параметров морфизмов $f = \bar{f} \times \text{id}$, где $\bar{f} : M \rightarrow W$ – гладкое отображение, воспользуемся тем, что естественные преобразования функторов Вейля на категории $\mathcal{M}f$ соответствуют гомоморфизмам алгебр Вейля [2]. Рассмотрим случай $M = W = \mathbb{R}$. В этом случае $\Phi_{\mathbb{R}} = \eta \times \text{id}$, где $\eta : T^{\mathbb{A}}\mathbb{R} \rightarrow T^{\mathbb{A}}\mathbb{R}$ – автоморфизм алгебр Вейля. Пусть $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ – произвольный морфизм из категории $\mathcal{M}f^N$. В координатах (X, t) на $\widehat{T}_{\sigma}^{\mathbb{A}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ морфизм $\widehat{T}_{\sigma}^{\mathbb{A}}(f)$ имеет вид

$$Y = f(x, t) + \sum_{p+s=1}^q \frac{1}{p!s!} \frac{\partial^{|p+s|} f}{\partial x^p \partial t^s} \overset{\circ}{X}{}^p \overset{\circ}{\sigma}{}^s(t).$$

Диаграмма естественной эквивалентности (15) сводится к следующему равенству:

$$\Phi_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial f}{\partial x^p \partial t^s} \overset{\circ}{\sigma}_1^s \overset{\circ}{X}{}^p \right) = \frac{\partial f}{\partial x^p \partial t^s} \overset{\circ}{\sigma}_2^s (\Phi_{\mathbb{R}}(\overset{\circ}{X}))^p, \quad (16)$$

где $\overset{\circ}{\sigma}_1^a(t)$, $\overset{\circ}{\sigma}_2^a(t)$ – координатные выражения для сечений σ_1 и σ_2 соответственно, $f = f(x, t)$ – произвольная функция, а s – мультииндекс. Для функции $f = c + t^a$ (не зависящей от x) выполняется соотношение

$$\frac{\partial f}{\partial x^p \partial t^s} = \delta_p^0 \delta_s^a,$$

где δ_p^a – обобщенный символ Кронекера. Из равенства (16) для этой функции получаем, что $\Phi_{\mathbb{R}}(\overset{\circ}{\sigma}_1^a) = \overset{\circ}{\sigma}_2^a$. Таким образом, отображение $\eta = \Phi_{\mathbb{R}} : \mathbb{A} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{A} \times \mathbb{R}^N$ является послойным автоморфизмом локальных алгебр, и при этом образующие $\{\overset{\circ}{\sigma}_1^1, \dots, \overset{\circ}{\sigma}_1^N\}$ подалгебры $\mathbb{B}_{\sigma_1}(t)$ отображаются в образующие $\{\overset{\circ}{\sigma}_2^1, \dots, \overset{\circ}{\sigma}_2^N\}$ подалгебры $\mathbb{B}_{\sigma_2}(t)$.

2) Предположим, что морфизм $\eta : \mathbb{A} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{A} \times \mathbb{R}^N$, удовлетворяющий условиям теоремы, существует. Для каждого гладкого многообразия M можно определить отображение

$$\Phi(\eta)_M : \widehat{T}_{\sigma_1}^{\mathbb{A}}(M \times \mathbb{R}^N) \rightarrow \widehat{T}_{\sigma_2}^{\mathbb{A}}(M \times \mathbb{R}^N), \quad (17)$$

которое в картах $(\tilde{W}^{\mathbb{A}}(\sigma_1), \tilde{h}^{\mathbb{A}}(\sigma_1))$ и $(\tilde{W}^{\mathbb{A}}(\sigma_2), \tilde{h}^{\mathbb{A}}(\sigma_2))$, индуцированных одной и той же картой $(W^{\mathbb{A}}, h^{\mathbb{A}})$ на $T^{\mathbb{A}}(M \times \mathbb{R}^N)$, задается соотношением

$$(X^i, t) \rightarrow (\eta_t(X^i), t). \quad (18)$$

Действительно, то, что соотношениями (18) отображение (17) определяется корректно, следует из формул преобразования координат (10):

$$\begin{aligned} \eta_t(X_\beta^i) &= \eta_t \left(\sum_{|r+p|=0}^q \frac{1}{r!p!} \frac{\partial^{|r+p|}(h_\beta^i \circ h_\alpha^{-1})}{\partial x^r \partial t^p} \overset{\circ}{X}_\alpha^r \overset{\circ}{\sigma}_1^p(t) \right) = \\ &= \sum_{|r+p|=0}^q \frac{1}{r!p!} \frac{\partial^{|r+p|}(h_\beta^i \circ h_\alpha^{-1})}{\partial x^r \partial t^p} (\eta_t(\overset{\circ}{X}_\alpha^*))^r \overset{\circ}{\sigma}_2^p(t). \end{aligned}$$

Пусть теперь $f : M \times \mathbb{R}^N \rightarrow W \times \mathbb{R}^N$, $y^i = f^i(x^k, t)$, – произвольный $\mathcal{M}f^N$ -морфизм. Покажем, что диаграмма (15) коммутативна. Отображение $\Phi(\eta)_M$ точку с координатами (X^i, t) переводит в точку с координатами $(\eta_t(X^i), t)$, которая, в свою очередь, при отображении $\widehat{T}_{\sigma_2}^{\mathbb{A}}(f)$ переходит в точку с координатами (Z^i, t) , где

$$Z^i = \sum_{|r+p|=0}^q \frac{1}{r!p!} \frac{\partial^{|r+p|} f^i}{\partial x^r \partial t^p} (\eta_t(\overset{\circ}{X}^*))^r \overset{\circ}{\sigma}_2^p(t).$$

С другой стороны, отображение $\widehat{T}_{\sigma_1}^{\mathbb{A}}(f)$ точку с координатами (X^i, t) переводит в точку с координатами (Y^i, t) на $\widehat{T}_{\sigma_1}^{\mathbb{A}}(W \times \mathbb{R}^N)$, где

$$Y^i = \sum_{|r+p|=0}^q \frac{1}{r!p!} \frac{\partial^{|r+p|} f^i}{\partial x^r \partial t^p} \overset{\circ}{X}^r \overset{\circ}{\sigma}_1^p(t).$$

Поскольку по условию $\eta_t : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ – автоморфизм алгебры \mathbb{A} и $\eta(\sigma_1^a) = \sigma_2^a$, то отображение $\Phi(\eta)_W$ переводит точку с координатами (Y^i, t) в точку с теми же самыми координатами (Z^i, t) . Таким образом, диаграмма (15) коммутативна. \square

Следствие 1. *Если для некоторых $t \in \mathbb{R}^N$ алгебры $\mathbb{B}_{\sigma_1}(t)$ и $\mathbb{B}_{\sigma_2}(t)$ неизоморфны, то функторы $\widehat{T}_{\sigma_1}^{\mathbb{A}}$ и $\widehat{T}_{\sigma_2}^{\mathbb{A}}$ неэквивалентны.*

Доказательство. Предположим, что для функторов $\widehat{T}_{\sigma_1}^{\mathbb{A}}$ и $\widehat{T}_{\sigma_2}^{\mathbb{A}}$ выполняются условия теоремы. Тогда для каждого $t \in \mathbb{R}^N$ ограничение η_t морфизма η является изоморфием алгебр $\mathbb{B}_{\sigma_1}(t)$ и $\mathbb{B}_{\sigma_2}(t)$, что противоречит условию. \square

То, что изоморфизма алгебр $\mathbb{B}_{\sigma_1}(t)$ и $\mathbb{B}_{\sigma_2}(t)$ для каждого $t \in \mathbb{R}^N$, еще недостаточно для эквивалентности функторов $\widehat{T}_{\sigma_1}^{\mathbb{A}}$ и $\widehat{T}_{\sigma_2}^{\mathbb{A}}$, показывает следующий пример.

Пример 2. Пусть $N = 1$. Рассматриваем алгебру срезанных многочленов $\mathbb{R}(2, 2)$ с базисом $\{1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \varepsilon_1 \varepsilon_2\}$. Разложение элемента алгебры $X \in \mathbb{R}(2, 2)$ по этому базису записывается в виде

$$X = x + x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 + x_{12} \varepsilon_1 \varepsilon_2 + x_{11} \varepsilon_1^2 + x_{22} \varepsilon_2^2.$$

Рассмотрим сечения $\sigma_1, \sigma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}(2, 2)$ следующего вида $\sigma_1(t) = t + \varepsilon_1^2$ и $\sigma_2(t) = t + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2$. В этом случае сечение σ_1 определяет подалгебру $\mathbb{B}_1 = \mathcal{L}\{1, \varepsilon_1^2\} \cong \mathbb{R}(\varepsilon)$, а сечение σ_2 определяет подалгебру $\mathbb{B}_2 = \mathcal{L}\{1, \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2\} \cong \mathbb{R}(\varepsilon)$.

Согласно доказанной теоремы функторы $\widehat{T}_{\sigma_1}^{\mathbb{R}(2,2)}$ и $\widehat{T}_{\sigma_2}^{\mathbb{R}(2,2)}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда существует автоморфизм $\eta : \mathbb{R}(2,2) \rightarrow \mathbb{R}(2,2)$, такой, что

$$\eta(\varepsilon_1^2) = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2. \quad (19)$$

Пусть $\eta : \mathbb{R}(2,2) \rightarrow \mathbb{R}(2,2)$ – некоторый автоморфизм и

$$\eta(\varepsilon_1) = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2 + x_{11}\varepsilon_1^2 + x_{22}\varepsilon_2^2.$$

Тогда

$$\eta(\varepsilon_1^2) = x_1^2\varepsilon_1 + x_2^2\varepsilon_2 + 2x_1x_2\varepsilon_1\varepsilon_2. \quad (20)$$

Очевидно, что таких x_1 и x_2 , при которых выражения (19) и (20) совпадают, не существует.

Выпишем для иллюстрации морфизмы $\widehat{T}_{\sigma_1}^{\mathbb{R}(2,2)}(f)$ и $\widehat{T}_{\sigma_2}^{\mathbb{R}(2,2)}(f)$ для $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \widehat{T}_{\sigma_1}^{\mathbb{R}(2,2)}(f)(X^i) &= f(x^i, t) + \frac{\partial f}{\partial x^i}x_1^i\varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial x^i}x_2^i\varepsilon_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\dot{x}_{11}^i + \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}x_1^i x_1^j + \frac{\partial f}{\partial t} \right)\varepsilon_1^2 + \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}x_{22}^i + \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}x_2^i x_2^j \right)\varepsilon_2^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}x_{12}^i + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}x_1^i x_2^j \right)\varepsilon_1\varepsilon_2 = \\ &= y + y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + y_{11}\varepsilon_1^2 + y_{22}\varepsilon_2^2 + y_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{T}_{\sigma_2}^{\mathbb{R}(2,2)}(f)(X^i) &= f(x^i) + \frac{\partial f}{\partial x^i}x_1^i\varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial x^i}x_2^i\varepsilon_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}x_{11}^i + \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}x_1^i x_1^j + \frac{\partial f}{\partial t} \right)\varepsilon_1^2 + \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}x_{22}^i + \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}x_2^i x_2^j + \frac{\partial f}{\partial t} \right)\varepsilon_2^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}x_{12}^i + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}x_1^i x_2^j \right)\varepsilon_1\varepsilon_2 = \\ &= y + y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + y_{11}\varepsilon_1^2 + y_{22}\varepsilon_2^2 + y_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2. \end{aligned}$$

Оба выражения совпадают за исключением переменных y_{22} , отличающихся на производную по параметру, которая может принимать любое значение. Этот факт еще раз указывает, что никакого взаимооднозначного соответствия между координатами установить нельзя.

Применяя доказанную выше теорему к функторам $\widehat{T}^{\mathbb{A}}$ и $V^{\mathbb{A}}$, получаем следующее

Предложение 3. *Обобщенный функтор Вейля $\widehat{T}^{\mathbb{A}}$ и вертикальный функтор Вейля $V^{\mathbb{A}}$ не эквивалентны.*

Доказательство. Компоненты сечения $\sigma_1 : t^a \rightarrow t^a + \varepsilon^a$, соответствующего функтору $\widehat{T}^{\mathbb{A}}$, порождают всю алгебру \mathbb{A} . Компоненты сечения $\sigma_2 : t^a \rightarrow t^a$, соответствующего функтору $V^{\mathbb{A}}$, порождают подалгебру $\mathbb{B} = \mathcal{L}\{1\} \cong \mathbb{R} \subset \mathbb{A}$. \square

Для эквивалентных функторов $\widehat{T}_{\sigma_1}^{\mathbb{A}}$ и $\widehat{T}_{\sigma_2}^{\mathbb{A}}$ морфизм $\eta = \mathbb{A} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{A} \times \mathbb{R}^N$, осуществляющий эквивалентность $\Phi(\eta) : \widehat{T}_{\sigma_1}^{\mathbb{A}} \simeq \widehat{T}_{\sigma_2}^{\mathbb{A}}$, может определяться неоднозначно. Если два морфизма η_1 и η_2 осуществляют эквивалентность функторов $\widehat{T}_{\sigma_1}^{\mathbb{A}}$ и $\widehat{T}_{\sigma_2}^{\mathbb{A}}$, то композиция $\eta = \eta_2^{-1} \circ \eta_1$ будет определять эквивалентность $\Phi(\eta) : \widehat{T}_{\sigma_1}^{\mathbb{A}} \simeq \widehat{T}_{\sigma_1}^{\mathbb{A}}$ функтора $\widehat{T}_{\sigma_1}^{\mathbb{A}}$ самому себе. Очевидно, всегда имеется тривиальная эквивалентность $\Phi(\eta)$, соответствующая тождественному автоморфизму $\eta = \text{id} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$. Нетривиальная эквивалентность будет существовать, если имеется нетождественный автоморфизм $\eta : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$, удовлетворяющий условию: $\eta \circ \xi_{\sigma_1} = \xi_{\sigma_1}$. Отсюда вытекает следующее

Предложение 4. *Множество всех естественных эквивалентностей $\Phi : \widehat{T}_\sigma^{\mathbb{A}} \simeq \widehat{T}_\sigma^{\mathbb{A}}$ находится в биективном соответствии с множеством $\mathcal{M}f^N$ -морфизмов $\eta : \mathbb{A} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{A} \times \mathbb{R}^N$, удовлетворяющих следующим условиям:*

- 1) ограничение $\eta_t : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ морфизма η на слой $t = \text{const}$, является автоморфизмом алгебры \mathbb{A} при каждом $t \in \mathbb{R}^N$;
- 2) $\eta \circ \xi_\sigma = \xi_\sigma$.

В случае обобщенного функтора Вейля $\widehat{T}^{\mathbb{A}}$ сечение σ задается уравнениями $\sigma^a(t) = t^a + \varepsilon^a$. В этом случае условие (2) предложения 4 имеет вид $\eta_t(\overset{\circ}{\sigma}{}^a(t)) = \overset{\circ}{\sigma}{}^a(t)$, где $\{\overset{\circ}{\sigma}{}^a(t) = \varepsilon^a\}$, $a = 1, \dots, N$, – псевдодобазис алгебры \mathbb{A} . Из соотношений $\eta_t(\varepsilon^a) = \varepsilon^a$ следует, что $\eta_t = \text{id}$. Таким образом, получаем следующее следствие из предложения 4.

Предложение 5. *Имеется единственная естественная эквивалентность $\Phi : \widehat{T}^{\mathbb{A}} \simeq \widehat{T}^{\mathbb{A}}$, представляющая собой набор тождественных морфизмов $\text{id} : T^{\mathbb{A}} M \times \mathbb{R}^N \rightarrow T^{\mathbb{A}} M \times \mathbb{R}^N$.*

Пример 3. Функтор $\widehat{T}_{\sigma_1}^{\mathbb{R}(2,2)}$, рассмотренный в примере 2, допускает нетривиальные естественные эквивалентности, определяемые соответствием

$$(x_1^i, x_2^i, x_{11}^i, x_{22}^i, x_{12}^i) \mapsto (x_1^i, ax_2^i, x_{11}^i, a^2 x_{22}^i, ax_{12}^i),$$

где a – произвольное число, не равное нулю.

Пример 4. Для вертикального функтора Вейля $V^{\mathbb{A}}$ сечение σ задается уравнениями $\sigma^a(t) = t^a$. В этом случае условие (2) предложения 4 имеет вид $\eta_t(\overset{\circ}{\sigma}{}^a(t)) = \overset{\circ}{\sigma}{}^a(t)$, где $\overset{\circ}{\sigma}{}^a(t) = 0$. Из соотношений $\eta_t(0) = 0$ следует, что η_t – любой автоморфизм алгебры \mathbb{A} .

Summary

G. V. Bushueva. Weil functors for the category of manifolds depending on parameters.

A Weil functor $T^{\mathbb{A}} : \mathcal{M}f \rightarrow \mathcal{F}\mathcal{M}$ defined of local Weil algebra \mathbb{A} assigns to an object $M \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ of the category $\mathcal{M}f^N$ of manifolds depending on N parameters the fibration $T^{\mathbb{A}}(M \times \mathbb{R}^N) \rightarrow T^{\mathbb{A}}\mathbb{R}^N$. In this article we show that any cross-section $\mathbb{R}^N \rightarrow T^{\mathbb{A}}\mathbb{R}^N$ induces the product preserving functor on the category $\mathcal{M}f^N$. We obtain condition of the equivalence for these functors.

Литература

1. *Weil A.* Théorie des points proches sur les variétés différentiables // Colloque Int. Centre Nat. Rech. Sci. – Strasbourg, 1953. – V. 52. – P. 111–117.
2. *Kolář I., Michor P., Slovák J.* Natural operations in differential geometry. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1993. – 434 p.
3. *Шурыгин В.В.* Гладкие многообразия над локальными алгебрами и расслоения Вейля // Итоги науки и техники. Современная матем. и ее прилож. Т. 73. Тематические обзоры. – М.: ВИНИТИ, 2002. – С. 162–236.
4. *Shurygin V.V.* The structure of smooth mappings over Weil algebras and the category of manifolds over algebras // Lobachevskii J. of Math. – 1999. – V. 5. – P. 29–55 (URL: <http://ljm.ksu.ru>).

5. *Вагнер В.В.* Алгебраическая теория касательных пространств высших порядков // Тр. сем. по вект. и тенз. анал. – МГУ, 1956. – Вып. 10. – С. 31–88.
6. *Широков А.П.* Геометрия касательных расслоений и пространства над алгебрами // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. Т. 12. – М.: ВИНТИ, 1981. – С. 61–95.
7. *Султанов А.Я.* Продолжения тензорных полей и связностей на расслоения Вейля // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 9. – С. 81–90.
8. *Morimoto A.* Prolongation of connections to bundles of infinitely near points // J. Diff. Geom. – 1976. – V. 11, No 4. – P. 479–498.
9. *Patterson L.-N.* Connexions and prolongations // Canad. J. Math. – 1975. – V. 27, No 4. – P. 766–791.
10. *Yuen P.C.* Sur la notion d'une G -structure déométrique et les A -prolongements de G -structures // C. R. Acad. Sci. – 1970. – V. 270, No 24. – P. A1589–A1592.
11. Бушуева Г.Н. *Расслоения Вейля над многообразиями, зависящими от параметров.* // В сб. Движения в обобщенных пространствах. – Пенза, 2002. – С. 24–34.
12. *Kolář I., Mikulski W.M.* On the fiber product preserving bundle functors // Differ. Geom. and Appl. – 1999. – V. 11. – P. 105–115.
13. *Mikulski W.M.* Product preserving bundle functors on fibered manifolds // Archiv. Math. – 1996. – V. 32. – P. 307–316.
14. *Doupovec M., Kolář I.* Iteration of fiber product preserving bundle functors // Monatsh. Math. – 2001. – V. 134. – P. 39–50.
15. *Doupovec M., Kolář I.* Natural affinors on time-dependent Weil bundles // Arch. Math. – 1991. – V. 27. – P. 205–209.
16. *Ленг С.* Алгебра. – М.: Мир, 1968. – 564 с.
17. *Фейс К.* Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1. – М.: Мир, 1977. – 688 с.
18. *Поммаре Ж.* Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли. – М.: Мир, 1983. – 400 с.

Поступила в редакцию
17.12.04

Бушуева Галина Николаевна – младший научный сотрудник отдела геометрии НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

E-mail: *Galina.Bushueva@ksu.ru*